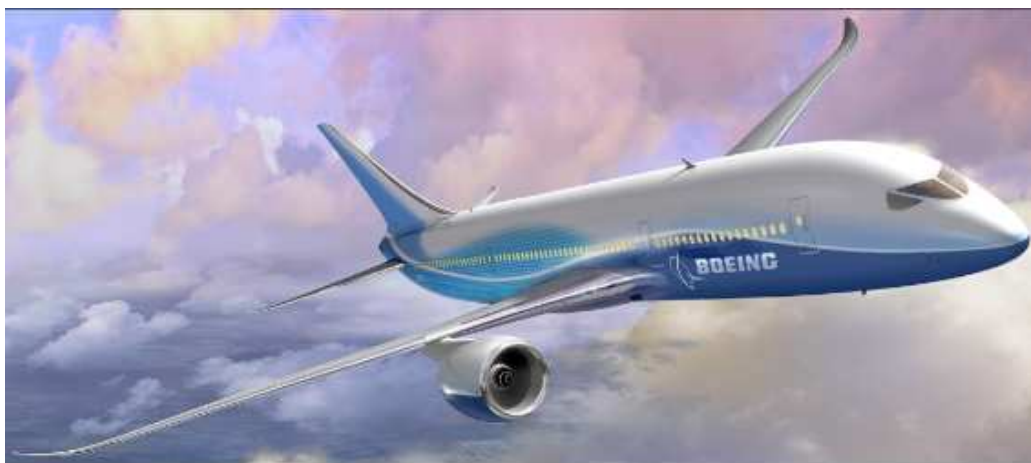


# Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju

Gašper Jaklič

21. maj 2013





# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Oznake in osnovna orodja</b>	<b>9</b>
2.1	Točke in vektorji . . . . .	9
2.2	Afine preslikave . . . . .	11
2.3	Linearna interpolacija . . . . .	12
2.4	Odsekoma linearna interpolacija . . . . .	13
2.5	Menelajev izrek . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Bézierove krivulje</b>	<b>17</b>
3.1	Bernsteinovi polinomi . . . . .	17
3.2	De Casteljauov algoritem . . . . .	19
3.3	Lastnosti Bézierovih krivulj . . . . .	21
3.4	Odvod Bézierove krivulje . . . . .	24
3.5	De Casteljauov algoritem in odvajanje . . . . .	26
3.6	Razcvet Bézierove krivulje . . . . .	27
3.7	Delitev (subdivizija) . . . . .	28
3.8	Razcvet in polara . . . . .	29
3.9	Matrična oblika Bézierove krivulje . . . . .	31
3.10	Višanje stopnje . . . . .	32
3.11	Manjšanje variacije . . . . .	36
3.12	Nižanje stopnje . . . . .	37
3.13	Ravninske Bézierove krivulje v neparametrični obliki . . . . .	38
3.14	Integrali . . . . .	38
3.15	Baricentrična oblika Bézierove krivulje . . . . .	39
3.16	Racionalne Bézierove krivulje . . . . .	41
3.17	De Casteljauov algoritem za racionalne Bézierove krivulje . . . . .	43
3.17.1	Odводи racionalne Bézierove krivulje . . . . .	44
3.18	Sestavljene Bézierove krivulje . . . . .	45
3.18.1	Lokalni in globalni parametri . . . . .	45
3.18.2	Pogoji gladkosti . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Bézierove ploskve</b>	<b>49</b>
4.1	Bézierove ploskve iz tenzorskega produkta . . . . .	49
4.1.1	Bilinearna interpolacija . . . . .	49
4.1.2	De Casteljauov algoritem . . . . .	51
4.1.3	Tenzorski produkt Bézierovih krivulj . . . . .	51
4.1.4	Lastnosti tenzorskih Bézierovih ploskev . . . . .	53
4.1.5	Višanje stopnje . . . . .	54
4.1.6	Odvajanje . . . . .	54
4.1.7	Pogoji gladkosti . . . . .	56
4.1.8	Delitev (subdivizija) tenzorskih ploskev . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Trikotne Bézierove krpe</b>	<b>59</b>
5.1	Baricentrične koordinate in linearna interpolacija . . . . .	59
5.2	De Casteljauov algoritem . . . . .	60
5.3	Trikotniški razcvet . . . . .	63
5.4	Bernsteinovi polinomi in trikotne Bézierove krpe . . . . .	63
5.5	Odводи . . . . .	65
5.6	Širitev in delitev . . . . .	68
5.7	Odvedljivost . . . . .	69
5.8	Višanje stopnje trikotne Bézierove krpe . . . . .	70
5.9	Neparametrične krpe . . . . .	71
5.10	Racionalne Bézierove trikotne krpe . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Posplošitev Bézierovih krivulj in razcvet v splošnem</b>	<b>75</b>
6.1	Zapis polinoma v razcvetni obliki . . . . .	76
6.2	Pogoji gladkosti v razcvetni obliki . . . . .	80
	<b>Literatura</b>	<b>89</b>

Skripta, ki je pred vami, je pripomoček pri predavanjih iz osnov računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. Zajema predvsem Bézierove krivulje, ploskve iz tenzorskega produkta in trikotne Bézierove ploskve.

Hvala Seleni, Tadeju in Žigi za pripombe na predavanjih, ki so izboljšale izpeljave, in odpravile nekaj napak.

Rad bi se zahvalil Jolandi za zelo pozorno branje rokopisa in številne dobre pripombe. Še posebej pa za model letala, ki je postal slika na naslovnici.

Ljubljana, 21. maj 2013



# Poglavje 1

## Uvod

V poznih 50. letih se je z razvojem tehnologije in računalnikov pojavila potreba po čimbolj natančnem prenosu oblik in idej oblikovalcev v proizvodnjo. Začetne korake so naredili v avtomobilski industriji, inženirja P. de Casteljaou pri Citroënu in P. Bézier pri Renaultu sta neodvisno razvila tip parametričnih polinomskih krivulj in ploskev, baziranih na Bernsteinovih polinomih. Ker so bile raziskave de Casteljaoua tretirane kot poslovna skrivnost, Bézierove pa objavljene, se danes za ta razred krivulj in ploskev uporablja Bézierovo ime. Raziskovanje parametričnih krivulj in ploskev v povezavi z diferencialno geometrijo in CAD (oblikovanje s pomočjo računalnika) sta vodili v novo smer - CAGD (Computer Aided Geometric Design - geometrijsko oblikovanje s pomočjo računalnika). Na podlagi raziskav Coxa, de Boora in Mansfielda o krivuljah B-zlepkov, se le-te vedno bolj uporablja v CAGD; Coons in Gordon pa sta razvila metode interpolacije podanih točk za oblikovanje ploskev.

Bézierove krivulje prinašajo enostaven opis krivulje z malo podatki (kontrolne točke), enostavno spreminjanje oblike ter uporabne lastnosti za računalniško predstavitev, racionalne Bézierove krivulje pa z dodatnimi parametri omogočajo še boljše interaktivno oblikovanje. Zahtevnejše oblike opišemo s sestavljenimi Bézierovimi krivuljami, ki z lokalno nižjimi stopnjami omogočajo večjo numerično stabilnost. Ta je poleg enostavne geometrijske interpretacije tudi ena od bistvenih prednosti Bézierovega zapisa krivulje pred monomsko obliko.

Krivulje B-zlepkov so nadgradnja Bézierovih krivulj, ki ponujajo boljši lokalni nadzor nad krivuljo in enostavnejše pogoje zvezne odvedljivosti, prinašajo pa tudi zahtevnejšo implementacijo in večjo računsko zahtevnost. Danes se kot standard poleg Bézierovih krivulj uporabljajo neekvidistantni racionalni B-zlepki (NURBS). NURBS temeljijo na ideji racionalnih krivulj (kot bomo videli v primeru racionalnih Bézierovih krivulj), le da imajo za

bazo B-zlepke namesto Bernsteinovih polinomov pri Bézierovih krivuljah. NURBS kot posebne primere vsebujejo krivulje B-zlepkov, racionalne ter neracionalne Bézierove krivulje.

Iz intuitivne definicije ploskve kot sled krivulje, ki se giblje po drugi krivulji, so nastale ploskve kot tenzorski produkt krivulj. Tako sta že de Casteljau in Bézier razvila tenzorske Bézierove ploskve, kjer sta obe prej omenjeni krivulji Bézierovi. Tenzorske krivulje aproksimirajo štirikotno kontrolno mrežo, in so še posebno primerne za oblikovanje ploskev z velikimi štirikotnimi površinami, zato so jih precej uporabljali v avtomobilski industriji.

S štirikotnimi krpami (izraz za manjši del ploskve) je težko oblikovati zahtevnejše ploskve, za kar so bolj pripravne trikotniške krpe, ki omogočajo bolj natančno interpolacijo, in opišejo precej širši razred ploskev kot tenzorske ploskve. Že de Casteljau je razvil trikotne Bézierove krpe kot naravno posplošitev teorije Bézierovih krivulj na ploskve. S pomočjo baricentričnih koordinat lahko osnovno teorijo Bézierovih krivulj prenesemo na Bézierove ploskve v  $n$  razsežnem prostoru z definicijskim območjem v  $n - 1$  razsežnem simpleksu.

Danes se Bézierove krivulje in ploskve uporabljajo kot osnovna implementacija krivulj in ploskev na računalnikih na področju geometrijskega in industrijskega oblikovanja, znanstvenih raziskovanj in modeliranja ter v industriji zabave (film, 3D računalniške igre).



# Poglavje 2

## Oznake in osnovna orodja

### 2.1 Točke in vektorji

Objekti, ki jih bomo obravnavali, bodo ležali v afinem prostoru.

**Definicija:** **Afini prostor** nad vektorskim prostorom  $\mathcal{P}$  je množica  $\mathcal{X}$  z zunanjima operacijama:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{P} & (x, y) &\rightarrow y - x \\ \mathcal{X} \times \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{X} & (x, a) &\rightarrow x + a.\end{aligned}$$

Elementom  $x \in \mathcal{X}$  rečemo **točke**, elementom  $a \in \mathcal{P}$  pa **vektorji**.

Večinoma bomo uporabljali vektorski prostor  $\mathbb{R}^3$ , saj si objektov v prostorih višjih dimenzij ne znamo predstavljati. Obravnavane metode in objekti se dajo posplošiti na  $n$ -dimenzionalni primer (C. de Boor: B-form basics; [5], str. 131-148), mi pa se bomo ukvarjali s praktično uporabnimi krivuljami in ploskvami.

Metode na objektih bodo neodvisne od izbire koordinatnega sistema. Pri tem moramo strogo ločiti točke in vektorje. Točke določajo lokacijo, pogosto relativno glede na nek objekt; označevali jih bomo s krepkimi črkami, npr. **a**, **b**. Isto notacijo bomo uporabljali tudi za vektorje. Če bomo točke in vektorje zapisali s koordinatami, relativno na nek koordinatni sistem, jih bomo zapisali v obliki koordinatnih stolpcev.

Čeprav točke in vektorje zapišemo enako (kot trojico realnih števil), je med njimi pomembna razlika: za poljubni točki **a** in **b** obstaja enolično določen vektor med njima  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Po drugi strani, za dani vektor **v** obstaja neskončno parov točk **a**, **b**, tako, da je  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ . Na primer, če je **a**, **b** tak par, in **w** poljuben vektor, je **a** + **w**, **b** + **w** nov par, saj je  $\mathbf{v} = (\mathbf{b} + \mathbf{w}) - (\mathbf{a} + \mathbf{w})$ . Torej so vektorji invariantni za translacije, točke pa ne.

Elemente prostora točk lahko samo odštevamo (dobimo vektor), operacija seštevanja pa zanje ni definirana. Kljub temu so za točke definirane operacije, podobne seštevanju, imenujemo jih **baricentrične (afine) kombinacije**. Definirane so kot utežena vsota točk, kjer se uteži seštejejo v 1:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{b}_j, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

Na prvi pogled je to nedefinirano seštevanje točk, vendar lahko zapišemo (2.1) kot:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0),$$

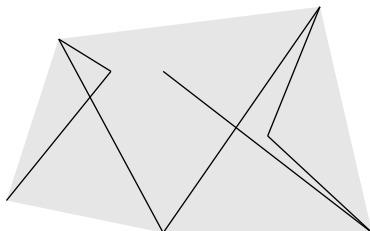
kar je vsota točke in vektorja.

Primer baricentrične kombinacije je težiščna točka  $\mathbf{g}$  trikotnika s točkami  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}.$$

Izraz “baricentrična kombinacija” izhaja iz angleškega izraza “barycenter”, kar pomeni “center gravitacije”. To izvira iz fizike: če so  $\mathbf{b}_j$  težišča objektov z masami  $m_j$ , je njihovo težišče v točki  $\mathbf{b} = \sum m_j \mathbf{b}_j / \sum m_j$ . Pri tem lahko normaliziramo mase s pomočjo  $\sum m_j = 1$ .

Pomemben poseben primer baricentričnih kombinacij so **konveksne kombinacije**. To so baricentrične kombinacije, kjer so koeficienti  $\alpha_j$  nenegativni. Konveksna kombinacija točk vedno leži “znotraj” le-teh točk, kar pripelje do definicije konveksne ovojnice. **Konveksna ovojnica** množice točk je množica točk, ki jih tvorijo vse konveksne kombinacije teh točk. Konveksna ovojnica je konveksna množica.



Slika 2.1: Poligon in njegova konveksna ovojnica.

Vrnimo se k baricentričnim kombinacijam, ki iz točk generirajo točke. Če

je vsota koeficientov  $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$ , baricentrična kombinacija generira vektor:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{b}_j.$$

Dokaz: Zapišemo lahko  $\alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n$ . Potem je

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{b}_j &= (-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n) \mathbf{b}_0 + \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n \\ &= \alpha_1 (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + \alpha_2 (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0) + \cdots + \alpha_n (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0) \end{aligned}$$

To pa je vsota vektorjev in zato vektor.  $\square$

Povezava med točkami in vektorji z baricentričnimi kombinacijami je teoretično in praktično zelo pomembna. Omogoča na primer hitro preverjanje tipa rezultata pri izpeljavi formul na osnovi vsote koeficientov-uteži.

## 2.2 Afine preslikave

Večina transformacij za premikanje ter spreminjanje velikosti objektov v računalniški grafiki ter CAD okolju je afinih preslikav. Izraz afina preslikava je vpeljal L. Euler, prvi pa jih je sistematično preučeval F. Moebius.

Osnovna operacija na točkah je baricentrična kombinacija, zato bomo uporabili definicijo afine preslikave za baricentrične kombinacije.

**Definicija:** Preslikavo  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  imenujemo **afina**, če ohranja baricentrične kombinacije invariantne.

Torej, če je

$$\mathbf{x} = \sum_j \alpha_j \mathbf{a}_j; \quad \mathbf{x}, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_j \alpha_j = 1,$$

in je  $\Phi$  afina preslikava, velja

$$\Phi \mathbf{x} = \sum_j \alpha_j \Phi \mathbf{a}_j; \quad \Phi \mathbf{x}, \Phi \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3.$$

Definicija je precej abstraktna, vendar ima enostavno interpretacijo. Izraz  $\mathbf{x} = \sum_j \alpha_j \mathbf{a}_j$  določa, kakšne uteži moramo določiti točkam  $\mathbf{a}_j$ , da bo  $\mathbf{x}$  njihovo uteženo povprečje. Če  $\mathbf{x}$  ter vse točke  $\mathbf{a}_j$  preslikamo z afino preslikavo  $\Phi$ , relacija med točkami ostane nespremenjena. Tako se na primer sredina daljice preslika v sredino afine slike daljice, težišče točk pa se preslika v težišče preslikanih točk.

V danem koordinatnem sistemu točko  $\mathbf{x}$  predstavlja trojica koordinat, ki jo prav tako označimo z  $\mathbf{x}$ . Afina preslikava dobi znano obliko:

$$\Phi \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}, \tag{2.2}$$

kjer je  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$  matrika,  $\mathbf{v}$  pa je vektor v  $\mathbb{R}^3$ .

Pokažimo, da preslikave oblike (2.2) ohranjajo baricentrične kombinacije.

Dokaz: Upoštevamo, da je  $\sum \alpha_j = 1$ , in izrazimo:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) &= A\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) + \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j A\mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j (A\mathbf{a}_j + \mathbf{v}) \\ &= \sum \alpha_j \Phi\mathbf{a}_j \end{aligned}$$

□

Primeri afinih preslikav so identiteta ( $\mathbf{v} = 0, A = I$ ), translacija ( $A = I$ ,  $\mathbf{v}$  je translacijski vektor), razteg ( $\mathbf{v} = 0$ ,  $A$ -diagonalna matrika faktorjev raztega), rotacija ( $\mathbf{v} = 0$ ,  $A$ -rotacijska matrika), strig ( $\mathbf{v} = 0$ ,  $A$  je zgornje trikotna matrika z enicami na diagonalni), paralelna projekcija, ... Pomemben poseben primer afinih preslikav so enačbe gibanja togega telesa.

Afine preslikave lahko združujemo ter razbijamo na enostavnejše preslikave; vsako afino preslikavo lahko zapišemo kot zaporedje translacij, rotacij, strigov ter raztegov.

## 2.3 Linearna interpolacija

Naj bosta  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  različni točki v  $\mathbb{R}^3$ . Množica točk  $\mathbf{x}$ , oblike

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

tvori premico skozi točki  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ . Torej je  $\mathbf{x}$  baricentrična kombinacija dveh točk iz  $\mathbb{R}^3$ . Ista baricentrična kombinacija velja tudi za točke  $0, t, 1$  v  $\mathbb{R}$ :  $t = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 1$ . Po definiciji afine preslikave so točke  $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  afine slike točk  $0, t, 1 \in \mathbb{R}$ .

**Izrek 1.** *Linearna interpolacija je afina preslikava intervala  $[0, 1]$  na premico v  $\mathbb{R}^3$ .*

Enostavno je preveriti, da so linearne interpolacije afino invariantne. Naj bo  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  afina preslikava in naj velja enačba (2.3). Potem je

$$\Phi\mathbf{x} = \Phi((1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = (1 - t)\Phi\mathbf{a} + t\Phi\mathbf{b}.$$

Z linearno interpolacijo je tesno povezan pojem **baricentričnih koordinat**. Naj bodo  $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$  kolinearne točke v  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ . Tedaj je

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (2.4)$$

kjer  $\alpha$  in  $\beta$  imenujemo **baricentrični koordinati** točke  $\mathbf{x}$  glede na točki  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ . Po drugi strani je  $\mathbf{x}$  baricentrična kombinacija točk  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ .

Povezava med linearno interpolacijo in baricentričnimi koordinatami je očitna:  $\alpha = 1 - t$ ,  $\beta = t$ . Baricentrične koordinate točke  $\mathbf{x}$  glede na  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  so izražene z:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}, \\ \beta &= \frac{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}, \end{aligned}$$

kjer  $\text{dist}$  označuje predznačeno evklidsko razdaljo med točkama (baricentrične koordinate so lahko negativne - če točke  $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$  niso urejene).

Pomemben je tudi princip **razmerij (ratio)**. **Razmerje** treh kolinearnih točk  $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ , kjer je  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , definiramo z

$$\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}) = \frac{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{b})}. \quad (2.5)$$

Za  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  je  $\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}) = \infty$ .

Če sta  $\alpha$  in  $\beta$  baricentrični koordinati  $\mathbf{x}$  glede na  $\mathbf{a}$  ter  $\mathbf{b}$ , velja:

$$\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}) = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.6)$$

Baricentrične koordinate točke se po preslikavi z afino preslikavo ne spremenijo, zato je tudi razmerje (ratio) treh kolinearnih točk invariantno za afine preslikave:

$$\text{ratio}(\Phi \mathbf{a}, \Phi \mathbf{x}, \Phi \mathbf{b}) = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.7)$$

To lastnost lahko uporabimo za definicijo afinih preslikav. Preslikava, ki slika premice v premice, in ohranja razmerja (ratio), je afina preslikava.

## 2.4 Odsekoma linearna interpolacija

Točke  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  naj tvorijo **poligon B**. Poligon sestavlja zaporedje daljic, ki interpolirajo ustrezne pare točk  $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ , zato ga imenujemo **odsekoma**

**linearna interpolacija**  $\mathcal{PL}$  točk  $\mathbf{b}_i$ . Če točke  $\mathbf{b}_i$  ležijo na krivulji  $\mathbf{c}$ , je  $\mathbf{B}$  odsekoma linearna interpolacija za krivuljo  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{B} = \mathcal{PL} \mathbf{c}. \quad (2.8)$$

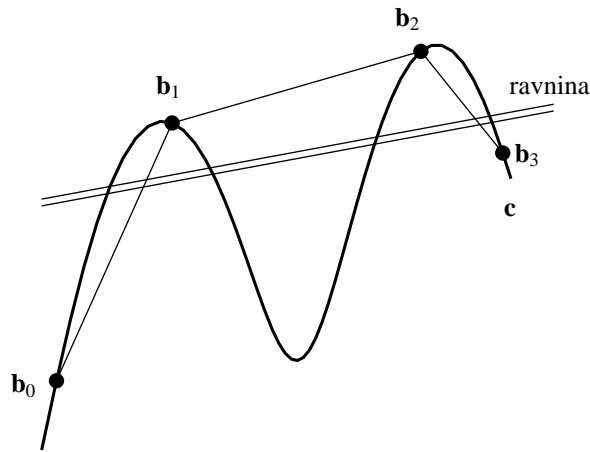
Pomembna lastnost odsekoma linearne interpolacije je invariantnost za afine transformacije. Če krivuljo  $\mathbf{c}$  z afino preslikavo  $\Phi$  preslikamo v krivuljo  $\Phi \mathbf{c}$ , je odsekoma linearna interpolacija za preslikane točke  $\Phi \mathbf{b}_i$  afina slika originalnega interpolacijskega poligona:

$$\mathcal{PL} \Phi \mathbf{c} = \Phi \mathcal{PL} \mathbf{c}. \quad (2.9)$$

Druga pomembna lastnost je **lastnost manjšanja variacije**. Oglejmo si primer zvezne krivulje  $\mathbf{c}$ , odsekoma linearne interpolacije  $\mathcal{PL} \mathbf{c}$  in poljubne ravnine  $\mathcal{E}$ . Naj  $\text{cross } \mathbf{c}$  označuje število presečišč krivulje  $\mathbf{c}$  z ravnino  $\mathcal{E}$ ,  $\text{cross } \mathcal{PL} \mathbf{c}$  pa število presečišč interpolacijskega poligona z isto ravnino. Velja:

$$\text{cross } \mathcal{PL} \mathbf{c} \leq \text{cross } \mathbf{c}. \quad (2.10)$$

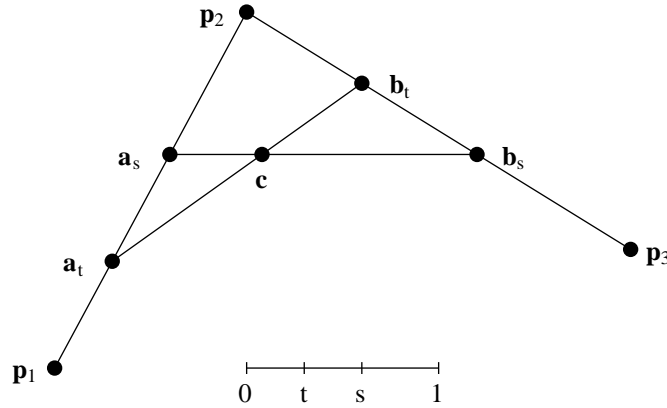
Dokaz je preprost: vzemimo točki  $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ . Daljica med njima seka dano ravnino kvečjemu v eni točki (razen v primeru, ko daljica leži na ravnini), odsek krivulje med točkama  $\mathbf{b}_i$  ter  $\mathbf{b}_{i+1}$  pa lahko ravnino seka v poljubno mnogo točkah (zaradi pogoja zveznosti pa vsaj enkrat). V primeru, ko daljica med točkama leži na dani ravnini, za presečišči z ravnino štejemo le robni točki daljice.  $\square$



Slika 2.2: Lastnost manjšanja variacije

## 2.5 Menelajev izrek

Princip odsekoma linearne interpolacije uporabimo za dokaz enega najpomembnejših geometrijskih izrekov v CAGD, Menelajevga izreka.



Slika 2.3: Menelajev izrek

**Izrek 2** (Menelajev izrek). *Naj bodo  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{E}^3$  nekolinearne točke, in:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2, \\ \mathbf{a}_s &= (1-s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_2, \\ \mathbf{b}_t &= (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3, \\ \mathbf{b}_s &= (1-s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

*Točka  $\mathbf{c}$  naj bo presečišče daljic  $\mathbf{a}_t\mathbf{b}_t$  in  $\mathbf{a}_s\mathbf{b}_s$ .*

*Potem velja:*

$$\text{ratio}(\mathbf{a}_t, \mathbf{c}, \mathbf{b}_t) = \frac{s}{1-s}, \quad (2.11)$$

$$\text{ratio}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s) = \frac{t}{1-t}. \quad (2.12)$$

**Opomba 1.** *Menelajev izrek trdi, da lahko točko  $\mathbf{c}$  dobimo z linearno interpolacijo najprej pri  $s$ , potem pa pri  $t$ , ali pa v obratnem vrstnem redu. To bo pomembno pri konstrukciji Bézierovih krivulj.*

Dokaz: Enostavno je preveriti, da velja  $\mathbf{c} = (1-s)\mathbf{a}_t + s\mathbf{b}_t$  ter  $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a}_s + t\mathbf{b}_s$ . Opazimo še, da so kolinearne točke  $\mathbf{p}_1, \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_s, \mathbf{p}_2$  ter tudi  $\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_t, \mathbf{b}_s, \mathbf{p}_3$  affine slike točk  $0, t, s, 1 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Opomba:** Enačbi (2.11) ter (2.12) sta CAGD različici originalnega Menelajevega izreka:

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_t, \mathbf{p}_2) \cdot \text{ratio}(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_s) \cdot \text{ratio}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s) = -1. \quad (2.13)$$



## Poglavje 3

# Bézierove krivulje

### 3.1 Bernsteinovi polinomi

$i$ -ti **Bernsteinov bazni polinom** stopnje  $n$  je definiran z

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

**Izrek 3.** *Bernsteinovi bazni polinomi zadoščajo naslednji rekurzivni zvezi:*

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad (3.2)$$

kjer je

$$B_0^0(t) = 1 \quad (3.3)$$

in

$$B_j^n(t) = 0, \text{ za } j \notin \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.4)$$

Dokaz: Uporabimo razcep binomskega simbola:

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

□

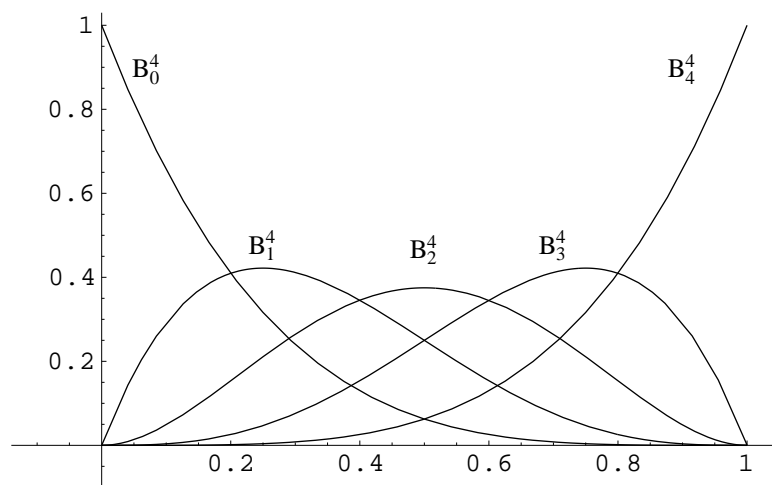
**Izrek 4.** *Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo particijo enote:*

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1, \quad B_j^n(t) \geq 0. \quad (3.5)$$

Dokaz: Uporabimo binomski izrek

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t).$$

Nenegativnost Bernsteinovih polinomov je očitna.  $\square$



Slika 3.1: Bernsteinovi bazni polinomi pri  $n = 4$ .

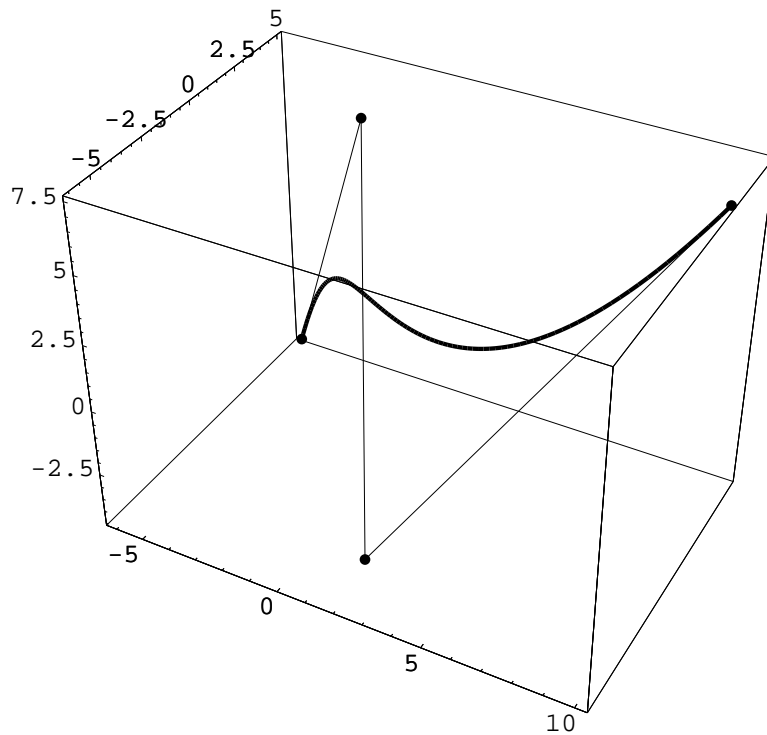
Bernsteinovi polinomi so bili prvič uporabljeni pri konstruktivnem dokazu Weierstrassovega aproksimacijskega izreka.

**Definicija:** Naj bodo podane točke  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Krivulji

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \tag{3.6}$$

rečemo **Bézierova krivulja**. Točke  $\mathbf{b}_j$  imenujemo **Bézierove kontrolne točke**, poligon, ki jih povezuje, pa **Bézierov kontrolni poligon**. Krivulja  $\mathbf{b}^n$  je **Bernstein-Bézierova aproksimacija** kontrolnega polinoma.

Do geometrijske konstrukcije Bézierovih krivulj pridemo s pomočjo **de Casteljauovega algoritma**. Ta algoritem je verjetno eden najosnovnejših na področju oblikovanja krivulj in ploskev; intuitivno jasna geometrijska konstrukcija vodi k močni teoriji.



Slika 3.2: Kubična Bézierova krivulja s kontrolnim poligonom.

## 3.2 De Casteljaouov algoritem

### De Casteljaouov algoritem

Podane so točke  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^3$  in  $t \in \mathbb{R}$ ,  
izračunaj:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n; \\ i = 0, 1, \dots, n-r \end{matrix}, \quad (3.7)$$

kjer je  $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ .

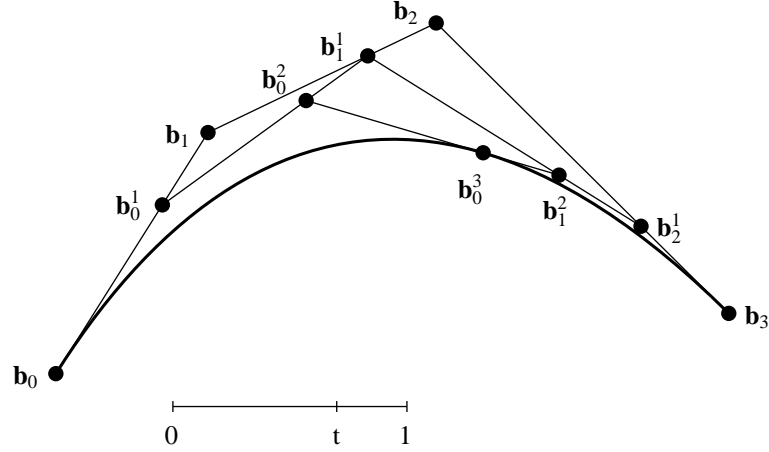
Potem je  $\mathbf{b}_0^n(t)$  točka na Bézierovi krivulji  $\mathbf{b}^n$  pri vrednosti parametra  $t$ .

Geometrijski potek algoritma si lahko ogledamo na sliki 3.3.

Vmesne koeficiente  $\mathbf{b}_i^r(t)$  običajno zapišemo v trikotno shemo, ki ji rečemo **de Casteljaouova shema**. De Casteljaouova shema v kubičnem primeru:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_0^3 \end{array}$$

Pri programiranju de Casteljauovega algoritma zadostuje uporaba ene same tabele velikosti  $n + 1$ , če le ustrezno prepisujemo elemente. Geometrijsko je de Casteljauov algoritem ponavljanje linearnih interpolacij.



Slika 3.3: De Casteljauov algoritem za kubično krivuljo  $n = 3, t = 0.7$ . Točko  $\mathbf{b}_0^3(t)$  na krivulji dobimo s ponavljanjem linearnih interpolacij.

**Izrek 5.** Vmesne de Casteljauove točke  $\mathbf{b}_i^r(t)$  lahko izrazimo s pomočjo Bernsteinovih polinomov stopnje  $r$ :

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t), \quad \begin{matrix} r = 0, 1, \dots, n; \\ i = 0, 1, \dots, n - r \end{matrix} \quad (3.8)$$

Glavni pomen gornje enačbe je v primeru  $r = n$ . Ustrezna de Casteljauova točka leži na krivulji:

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t). \quad (3.9)$$

Dokaz: Uporabimo indukcijo. Za  $r = 0$  enačba (3.8) velja po definiciji. Predpostavimo, da velja tudi za  $r - 1$ , ter uporabimo rekurzivno definicijo (3.7) za  $\mathbf{b}_i^r$  in rekurzivno zvezo za Bernsteinove polinome (3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t). \end{aligned}$$

Po (3.3) lahko indekse v obeh vrstah štejemo od  $i$  do  $i + r$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \\
 &= \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j [(1-t) B_{j-i}^{r-1}(t) + t B_{j-i-1}^{r-1}(t)] \\
 &= \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^r(t) \\
 &= \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t).
 \end{aligned}$$

□

**Opomba:** Z vmesnimi točkami  $\mathbf{b}_i^r$  lahko zapišemo Bézierovo krivuljo v obliki:

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^r \mathbf{b}_i^{n-r}(t) B_i^r(t). \quad (3.10)$$

To lahko interpretiramo takole: najprej izračunamo  $n - r$  korakov de Casteljauovega algoritma glede na  $t$  in vzamemo izračunane točke  $\mathbf{b}_i^{n-r}(t)$  za kontrolne točke Bézierove krivulje  $r$ -te stopnje ter izračunamo točko s parametrom  $t$ .

### 3.3 Lastnosti Bézierovih krivulj

#### Afina invarianca

Bézierove krivulje so invariantne za afine preslikave, v smislu, da naslednja postopka privedeta do istega rezultata:

- (1) izračunamo točko  $\mathbf{b}^n(t)$ , nato na njej izvedemo afino preslikavo,
- (2) uporabimo afino preslikavo na kontrolnem poligonu, nato pa izračunamo točko na Bézierovi krivulji glede na preslikani kontrolni poligon.

V določenih primerih je drugi postopek računsko precej manj zahteven kot prvi. Če moramo na primer afino transformirati veliko število točk, z uporabo drugega postopka uporabimo afino transformacijo samo na malem številu kontrolnih točk, namesto na vseh željenih točkah (število izvajanj de Casteljauovega algoritma ostaja enako).

Afina invarianca Bézierovih krivulj sledi iz invariance baricentričnih kombinacij za afine preslikave in uporabe lastnosti particije enote (3.5).

Bézierove krivulje pa **niso** projektivno invariantne, kar pomeni, da pri projiciranju krivulje ne smemo projicirati samo kontrolnih točk in nato generirati krivulje, temveč moramo projicirati točke že generirane krivulje. Postopek projiciranja tridimenzionalnih objektov na ravnino je eden najpogostejše uporabljenih postopkov, saj se uporablja pri vsakem izrisu tridimenzionalnih objektov na računalniški monitor in papir.

### Lastnost konveksne ovojnice

Bézierova krivulja  $\mathbf{b}^n(t)$  leži v konveksni ovojnici svojega kontrolnega polinoma.

Dokaz je preprost. Za  $t \in [0, 1]$  so Bernsteinovi polinomi nenegativni, in po enačbi (3.5) se seštejejo v 1. Torej je  $\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$  konveksna kombinacija kontrolnih točk za vsak  $t$  z intervala  $[0, 1]$ . Če  $t \notin [0, 1]$ , lastnost konveksne ovojnice ne velja.

**Posledica:** Planarni kontrolni poligon generira planarno krivuljo.

### Interpolacija v robnih točkah

Bézierova krivulja poteka skozi točki  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}^n(0)$  in  $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}^n(1)$ . To je posledica enačb:

$$\begin{aligned} B_i^n(0) &= \delta_{i,0} \\ B_i^n(1) &= \delta_{i,n}. \end{aligned}$$

### Invarianca za affine transformacije parametra

Pogosto se za definicijsko območje parametra Bézierove krivulje vzame interval  $[0, 1]$ . Za Bézierovo krivuljo nad poljubnim intervalom  $a \leq u \leq b$  vpeljemo lokalno parametrizacijo  $t = (u - a)/(b - a)$  in nadaljujemo z de Casteljauvim algoritmom. Ustrezni korak algoritma (3.7) je oblike:

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u). \quad (3.11)$$

Ker je preslikava  $t$  afina, pravimo, da so Bézierove krivulje invariantne za affine transformacije parametra.

Omenjeno lokalno parametrizacijo imenujemo linearna reparametrizacija, in jo pogosto uporabljamo v algoritmih za delo z Bézierovimi krivuljami, ker se lastnosti krivulje ohranijo.

### Simetrija

Bézierovi krivulji glede na zaporedji kontrolnih točk  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ter  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$  sta enaki, razlikujeta se samo v smeri parametrizacije:

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t) . \quad (3.12)$$

To sledi iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t) . \quad (3.13)$$

### Invariantnost za baricentrične kombinacije

Za  $\alpha + \beta = 1$  velja:

$$\sum_{j=0}^n (\alpha \mathbf{b}_j + \beta \mathbf{c}_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t) . \quad (3.14)$$

Uteženo povprečje dveh Bézierovih krivulj lahko izračunamo kot uteženo povprečje ustreznih točk na krivulji (desni izraz), ali pa vzamemo uteženo povprečje ustreznih kontrolnih točk (levo), ter nato izračunamo krivuljo.

### Ohranjanje premic

Če imamo kontrolne točke  $\frac{j}{n}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , je Bézierova krivulja premica. Velja enakost:

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = t . \quad (3.15)$$

Dokaz: Bernsteinov polinom  $B_j^n$  izrazimo s pomočjo polinomov  $B_k^{n-1}$  ter uporabimo enačbo (3.5):

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n = \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = t \sum_{j=0}^n \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} = t .$$

□

**Posledica:** Če so kontrolne točke kolinearne in enakomerno porazdeljene, potem je pripadajoča Bézierova krivulja daljica  $[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n]$ , ki poteka skozi kontrolne točke. Če pa so kontrolne točke porazdeljene neenakomerno, spet dobimo daljico, ki pa ni linearno parametrizirana (interval  $[0, 1]$  lahko parametriziramo na več načinov, npr. z  $f_1(t) = t$ ,  $f_2(t) = t^2$ ,  $t \in [0, 1]$ ).

### Psevdo-lokalni nadzor

Poiščimo ekstreme Bernsteinovega baznega polinoma  $B_i^n$ . Odvajamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \binom{n}{i} t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1} (-1) \\ &= \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1} (i - nt) . \end{aligned}$$

Rešitve enačbe  $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = 0$  so  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ ,  $t_3 = \frac{i}{n}$ . Ker so Bernsteinovi polinomi nenegativni, doseže  $B_i^n(t)$  maksimum na  $[0, 1]$  pri  $t = \frac{i}{n}$ . To ima

praktičen pomen pri uporabi Bézierovih krivulj v oblikovanju. Pri spremembi ene od kontrolnih točk  $\mathbf{b}_i$  je sprememba krivulje največja v okolici točke z vrednostjo parametra  $\frac{i}{n}$ , čeprav sprememba vpliva na celotno krivuljo.

### 3.4 Odvod Bézierove krivulje

Najprej izračunajmo odvod Bernsteinovega baznega polinoma  $B_i^n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \frac{i n!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Odvod Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  je:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{j=0}^n [B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)] \mathbf{b}_j \\ &= n \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_j. \end{aligned}$$

V prvi vsoti premaknemo indeks in združimo:

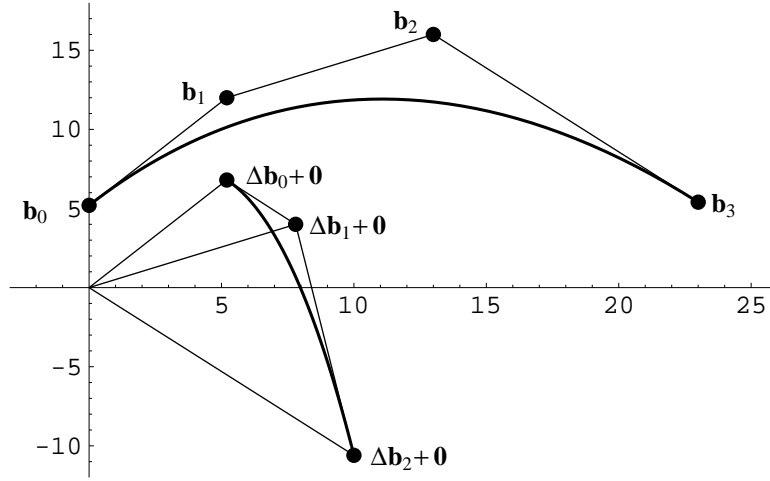
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_{j+1} - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Z uporabo premih končnih diferenc  $\Delta \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$  lahko zapišemo gornjo formulo v obliki:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t), \quad \Delta \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3. \quad (3.16)$$

Odvod Bézierove krivulje je spet Bézierova krivulja, dobljena s kontrolnim poligonom iz diferenc točk prvotnega kontrolnega poligona. Opazimo, da v





Slika 3.4: Kubična Bézierova krivulja in njen odvod (pomnožen s faktorjem  $\frac{1}{3}$ ).

formuli odvedene krivulje namesto kontrolnih točk nastopajo vektorji. Za predstavitev odvedene krivulje konstruiramo poligon iz točk  $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_0, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_{n-1}$ . Tu je  $\mathbf{a}$  poljubna točka, običajno vzamemo  $\mathbf{a} = 0$ .

Z večkratno uporabo zgornjega postopka pridemo do višjih odvodov Bézierove krivulje,

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t). \quad (3.17)$$

Tu je  $\Delta^r$  prema končna diferenca,

$$\Delta^r \mathbf{b}_j = \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \mathbf{b}_{j+i}. \quad (3.18)$$

Oglejmo si dva posebna primera:  $t = 0$  in  $t = 1$ :

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r}. \quad (3.20)$$

Torej je  $r$ -ti odvod Bézierove krivulje v robni točki odvisen le od  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$  oziroma kontrolnih točk  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_{n-r}$ . To je pomembno pri pogojih gladkosti za konstrukcijo zlepkov Bézierovih krivulj. Pri  $r = 0$  dobimo lastnost interpolacije v robnih točkah. V primeru  $r = 1$  sledi, da je za  $\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{b}_1$

vektor  $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$  tangentni vektor na Bézierovo krivuljo v točki  $\mathbf{b}_0$ , oziroma pri parametru  $t = 0$ . Podobno,  $\mathbf{b}_{n-1}$  in  $\mathbf{b}_n$  določata tangento v točki na krivulji z vrednostjo parametra  $t = 1$ .

### 3.5 De Casteljauov algoritem in odvajanje

**Izrek 6.** *Odvode Bézierove krivulje lahko izrazimo z vmesnimi točkami, dobljenimi pri de Casteljauovem algoritmu,*

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t). \quad (3.21)$$

Dokaz: Dovolj je dokazati  $\sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t) = \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t)$ . Spomnimo se enačbe (3.18), in rezultat uporabimo za vmesne kontrolne točke,

$$\Delta^r \mathbf{b}_j^k(t) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \mathbf{b}_{i+j}^k(t).$$

Torej velja:

$$\begin{aligned} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t) &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \mathbf{b}_i^{n-r}(t) \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \sum_{j=0}^{n-r} \mathbf{b}_{i+j} B_j^{n-r}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \mathbf{b}_{i+j} B_j^{n-r}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t). \end{aligned}$$

V izpeljavi smo uporabili (3.18) in (3.8). □

Gornji rezultat nudi dva načina izračuna  $r$ -tega odvoda Bézierove krivulje:

- (1) izračunaj vse  $r$ -te preme končne difference kontrolnih točk in jih uporabi kot nov Bézierov kontrolni poligon stopnje  $n - r$ , ter izračunaj vrednost pri parametru  $t$ .
- (2) izračunaj  $r$ -ti odvod Bézierove krivulje kot vmesni rezultat de Casteljauovega algoritma. Točke  $\mathbf{b}_i^{n-r}$  tvorijo stolpec v ustrezni de Casteljauovi shemi. Izračunamo  $r$ -te preme difference teh točk in jih pomnožimo s konstanto  $\frac{n!}{(n-r)!}$ .

V primeru  $r = 1$  je

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(t) = n[\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)].$$

Vmesni točki  $\mathbf{b}_0^{n-1}(t)$  in  $\mathbf{b}_1^{n-1}(t)$  torej določata tangentni vektor v točki  $\mathbf{b}^n(t)$ .

### 3.6 Razcvet Bézierove krivulje

Posplošimo de Casteljauov algoritem in izračunajmo  $n$  stolpcev de Casteljauove sheme tako, da v  $r$ -tem stolpcu v nasprotju z originalnim algoritmom ne računamo vrednosti pri začetni vrednosti parametra  $t$ , temveč pri neki novi vrednosti  $t_r$ . V kubičnem primeru tako dobimo shemo:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t_1] & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t_1] & \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t_1] & \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] & \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3] \end{array}$$

Rezultat je točka  $\mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$ , ki je po drugi strani funkcija treh neodvisnih spremenljivk z definicijskim območjem  $D \in \mathbb{R}^3$ .

**Definicija:** Funkcijo  $\mathbf{b}[\cdot, \cdot, \cdot]$  imenujemo **razcvet** Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^3(t)$  (ang. blossom).

V splošnem je razcvet za Bézierovo krivuljo stopnje  $n$  polinom  $n$  spremenljivk, ki slika  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}^3$ . Definirajmo oznako  $t^{<r>}$  za  $r$ -kratno pojavitev  $t$  kot argument. Na primer:  $\mathbf{b}[0^{<1>}, t^{<2>}, 1^{<0>}] = \mathbf{b}[0, t, t]$ .

**Izrek 7.** Bézierove kontrolne točke lahko izrazimo kot vrednosti razcveta:

$$\mathbf{b}_r = \mathbf{b}[0^{<n-r>}, 1^{<r>}]. \quad (3.22)$$

Dokaz: Najprej izračunamo  $n - r$  korakov de Casteljauovega algoritma s parametrom 0, nato vzamemo trenutne vmesne točke  $\mathbf{b}_i^{n-r}(0)$  za kontrolne točke Bézierove krivulje  $r$ -te stopnje, ter izračunamo točko na krivulji pri vrednosti parametra 1. Dobimo enačbo:

$$\sum_{i=0}^r \mathbf{b}_i^{n-r}(0) B_i^r(1) = \mathbf{b}[0^{<n-r>}, 1^{<r>}] = \mathbf{b}_r.$$

□

Pri izračunu smo upoštevali, da se pri  $t = 0$  kontrolne točke v de Casteljauovem algoritmu ohranjajo, le da je v vsakem koraku ena manj.

De Casteljauov algoritem (3.7) lahko izrazimo v obliki razcveta:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] &= (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] + \\ &+ t\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Točko na Bézierovi krivulji dobimo pri  $\mathbf{b}[t^{<n>}]$ , čemur pravimo tudi *diagonalna lastnost*. Razcvet je simetrična funkcija svojih argumentov, kar sledi iz Menelajevega izreka ((2.11),(2.12)). Razcvet je afina funkcija glede na prvi argument. Za  $\alpha + \beta = 1$  je

$$\mathbf{b}[\alpha r + \beta s, t_2, \dots, t_n] = \alpha \mathbf{b}[r, t_2, \dots, t_n] + \beta \mathbf{b}[s, t_2, \dots, t_n]. \quad (3.24)$$

Ker je razcvet simetrična funkcija svojih argumentov, in z upoštevanjem dejstva, da so koraki de Casteljauovega algoritma ponavljanje linearnih interpolacij, je razcvet afina preslikava v vseh svojih argumentih.

Za razcvet Bézierove krivulje, definirane nad intervalom  $[a, b]$  dobimo preko posplošenega de Casteljauovega algoritma Bézierove točke  $\mathbf{b}_i$  kot vrednosti razcveta:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a^{<n-i>}, b^{<i>}]. \quad (3.25)$$

### 3.7 Delitev (subdivizija)

Bézierovo krivuljo običajno definiramo na intervalu  $[0, 1]$ . Želimo najti Bézierov kontrolni poligon, ki bo določal prvotno krivuljo na intervalu  $[0, c]$ ,  $c \leq 1$ .

Neznane Bézierove kontrolne točke  $\mathbf{c}_i$  dobimo s pomočjo principa razcveta. Zanima nas interval  $[0, c]$ , torej dobimo:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, c^{<i>}].$$

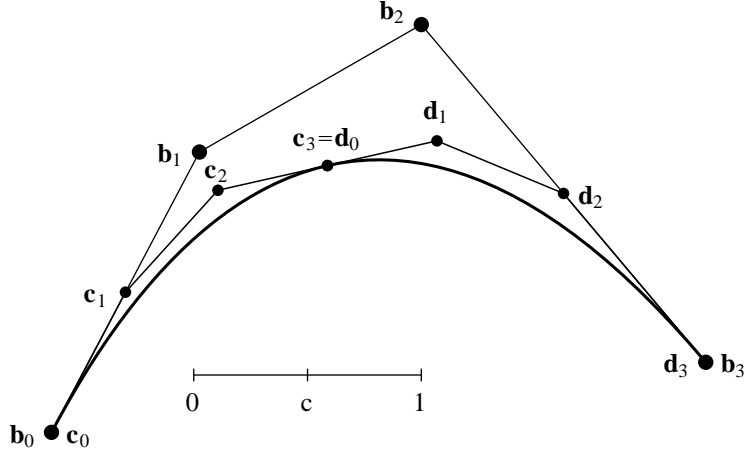
Tako dobimo vsak  $\mathbf{c}_j$  z izvajanjem  $j$  korakov de Casteljauovega algoritma glede na  $c$ :

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_0^j(c). \quad (3.26)$$

To je **formula delitve** za Bézierove krivulje.

Zaradi simetrije so kontrolne točke glede na interval  $[c, 1]$  podane z  $\mathbf{b}_j^{n-j}(c)$ .

Če izvedemo delitev pri vrednosti parametra  $t = 1/2$ , dobimo dva kontrolna poligona, ki opisujeta vsak en del originalne Bézierove krivulje. Nato izvedemo enak postopek na obeh delih, in tako nadaljujemo. Po  $k$  korakih dobimo  $2^k$  Bézierovih poligonov, ki odsekoma opisujejo prvotno krivuljo. Lane



Slika 3.5: Delitev Bézierove krivulje: kontrolna poligona  $\{\mathbf{c}_i\}$  in  $\{\mathbf{d}_i\}$  določata odseka krivulje na intervalih  $[0, c]$  ter  $[c, 1]$ .

in Riesenfeld sta v [9] dokazala, da ti poligoni z naraščanjem  $k$  konvergirajo po točkah proti originalni Bézierovi krivulji.

Idejo delitve pa lahko uporabimo tudi za **ekstrapolacijo** Bézierove krivulje na interval  $[1, d]$ . Naj bodo nove kontrolne točke glede na interval  $[1, d]$  označene z  $\mathbf{d}_j$ . Potem je

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{b}[1^{<n-j>}, d^{<j>}] = \mathbf{b}_{n-j}^j(d).$$

### 3.8 Razcvet in polara

Izvedimo en korak de Casteljauovega algoritma pri  $t = t_1$ . Dobljene točke  $\mathbf{b}_0^1(t_1), \mathbf{b}_1^1(t_1), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(t_1)$  lahko vzamemo za kontrolne točke krivulje  $\mathbf{p}_1(t)$ , stopnje  $n - 1$ . To lahko zapišemo z razcvetom kot

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{b}[t_1, t^{<n-1>}].$$

To lahko izrazimo tudi s pomočjo odvoda Bezierove krivulje  $\mathbf{b}^n(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1}] B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i^1(t)] B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

$$= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i] B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t) B_i^{n-1}(t).$$

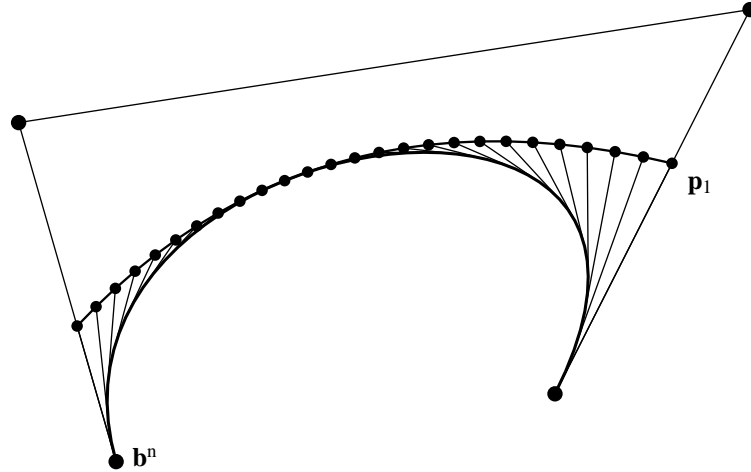
Dobimo:

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{b}^n(t) + \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t). \quad (3.27)$$

Polinom  $\mathbf{p}_1$  imenujemo **prva polara** Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n(t)$  glede na  $t_1$ . Geometrijsko to pomeni naslednje: tangenta na Bézierovo krivuljo  $\mathbf{b}^n$  v točki  $\mathbf{b}^n(t)$  seka polaro  $\mathbf{p}_1$  v točki  $\mathbf{p}_1(t)$ . To velja v prostoru, ne le na ravnini.

V posebnem primeru, za kubično neravninsko Bézierovo krivuljo to pomeni, da polara  $\mathbf{p}_1$  leži v pritisnjeni ravnini na krivuljo v točki  $\mathbf{b}^n(t_1)$ . Če sekamo vse tangente na krivuljo s to pritisnjeno ravnino, dobimo polaro. Torej je za tri različne parametre  $t_1, t_2, t_3$ , vrednost razcveta  $\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3]$  enaka preseku ustreznih pritisnjenih ravnin.

V primeru  $t_1 = 0$  dobimo:  $\mathbf{b}[0, t^{<n-1>}]$  je Bézierova krivulja s kontrolnim poligonom  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ . Podobno je  $\mathbf{b}[1, t^{<n-1>}]$  Bézierova krivulja, določena s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ .



Slika 3.6: Polara  $\mathbf{p}_1$  Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  pri  $t_1 = 0.4$ , skupaj s tangentami na krivuljo.

Če ponovimo proces tvorjenja polare, pridemo do **druge polare**:  $\mathbf{p}_{1,2}(t) = \mathbf{b}[t_1, t_2, t^{<n-2>}]$ . Z nadaljevanjem postopka pridemo do višjih polar;  **$n$ -ta polara** Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n(t)$  je njen razcvet  $\mathbf{b}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ . Za razcvet se uporablja tudi izraz polarna forma.

V razdelku 3.6 je prikazana rekurzivna tvorba razcveta. Za razcvet pa lahko poiščemo tudi eksplisitne formule. Oglejmo si kubični primer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3] &= (1 - t_1)\mathbf{b}[0, t_2, t_3] + t_1\mathbf{b}[1, t_2, t_3] \\
&= (1 - t_1)[(1 - t_2)\mathbf{b}[0, 0, t_3] + t_2\mathbf{b}[0, 1, t_3]] + t_1[(1 - t_2)\mathbf{b}[0, 1, t_3] \\
&\quad + t_2\mathbf{b}[1, 1, t_3]] \\
&= \mathbf{b}[0, 0, 0](1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_3) + \mathbf{b}[0, 0, 1][(1 - t_1)(1 - t_2)t_3 \\
&\quad + (1 - t_1)t_2(1 - t_3) + t_1(1 - t_2)(1 - t_3)] + \mathbf{b}[0, 1, 1] \cdot \\
&\quad \cdot [t_1t_2(1 - t_3) + t_1(1 - t_2)t_3 + (1 - t_1)t_2t_3] + \mathbf{b}[1, 1, 1]t_1t_2t_3.
\end{aligned}$$

Opazimo, da za  $t_1 = t_2 = t_3$  dobimo za koeficiente pri kontrolnih točkah kubične Bernsteinove bazne polinome. Vsake polinomske funkcije več spremenljivk se ne da predstaviti kot razcvet neke Bézierove krivulje, saj mora biti simetrična ter multiafina funkcija svojih parametrov.

### 3.9 Matrična oblika Bézierove krivulje

Bézierove in druge polinomske krivulje se da zapisati tudi v matrični obliki. Krivuljo oblike

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i C_i(t)$$

lahko gledamo kot “skalarni produkt”:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{c}_0 \ \dots \ \mathbf{c}_n] \begin{bmatrix} C_0(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix}.$$

Podobno lahko zapišemo tudi:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Matrika  $M = \{m_{ij}\}$  je transformacija med baznimi polinomi  $C_i(t)$  ter standardno bazo prostora polinomov  $t^i$ .

**Izrek 8.** Če so  $C_i$  Bernsteinovi polinomi  $B_i^n$ , potem ima matrika  $M$  elemente

$$m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i}. \quad (3.29)$$

Dokaz: Razvijmo Bernsteinov bazni polinom  $B_i^n$  po monomih  $t^j$ ,

$$\begin{aligned}
B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} t^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^{n-i-k} t^{n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^{n-i-k} t^{n-k} \\
&= \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-j} (-1)^{j-i} t^j \\
&= \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} t^j \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} t^j.
\end{aligned}$$

Koeficienti v vsoti pri  $t^j$  so koeficienti  $i$ -te vrstice matrike  $M$ .  $\square$

Matrična oblika Bézierove krivulje je matematično ekvivalentna Bernstein-Bézierovi, pomembne razlike nastopijo pri implementaciji Bézierove krivulje na računalniku. Matrična oblika je primerna na sistemih, optimiziranih za hitro matrično multiplikacijo. Glavna prednost monomske oblike Bézierove krivulje pred Bernstein-Bézierovo je hitrost, saj je izračun krivulje s Hornerjevim algoritmom hitrejši od de Casteljauovega algoritma. Po drugi strani pa je oblika Bézierove krivulje, zapisane v Bernsteinovi bazi, bolj geometrična ter numerično bolj stabilna od monomske oblike. Z vidika stabilnosti tako ni priporočljivo uporabljati pretvorbe med oblikama, monomska oblika pa zaradi numerične nestabilnosti ni posebno primerna za reprezentacijo krivulj in ploskev višjih stopenj.

### 3.10 Višanje stopnje

Pri oblikovanju s pomočjo Bézierovih krivulj se lahko zgodi, da s spreminjanjem kontrolnega poligona ne moremo dobiti željene oblike. Ena od možnosti, ki je na voljo, je višanje stopnje Bézierove krivulje. To pomeni dodajanje nove kontrolne točke tako, da ostane oblika krivulje nespremenjena, in da pri tem ohranimo parametrizacijo. Pri tem postopku bomo dobili nove kontrolne točke, ki opisujejo prvotno krivuljo, vendar pa se z večjim številom kontrolnih točk ponuja tudi več svobode pri spreminjanju njene oblike. Postopek



lahko nato nadaljujemo in tako postopoma povečujemo število kontrolnih točk krivulje.

Povišajmo stopnjo originalne Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  za 1. Označimo originalne kontrolne točke z  $\mathbf{b}_j$ , nove pa z  $\mathbf{b}_j^{(1)}$ . Veljati mora:

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{b}_j^{(1)} \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j}. \quad (3.30)$$

Levo stran enačbe pomnožimo z  $1 = (1-t) + t$ ,

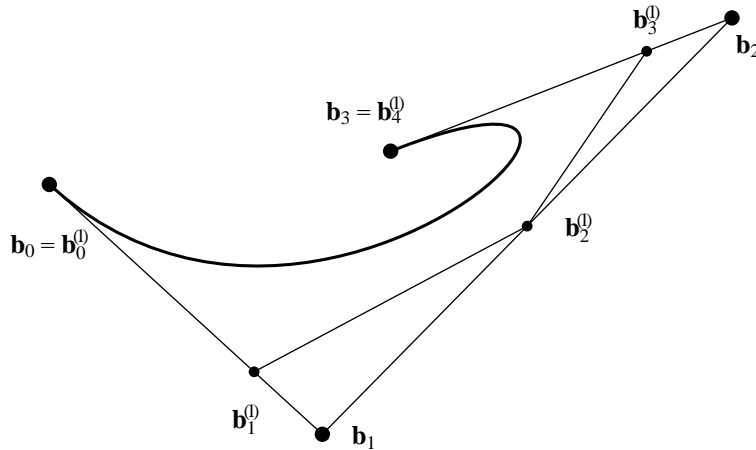
$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} [t^j (1-t)^{n-j+1} + t^{j+1} (1-t)^{n-j}] = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{b}_j^{(1)} \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j},$$

in primerjamo koeficiente pri  $t^j (1-t)^{n-j+1}$ :

$$\mathbf{b}_j^{(1)} \binom{n+1}{j} = \mathbf{b}_j \binom{n}{j} + \mathbf{b}_{j-1} \binom{n}{j-1}.$$

Izraz poenostavimo in dobimo:

$$\mathbf{b}_j^{(1)} = \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \mathbf{b}_j + \frac{j}{n+1} \mathbf{b}_{j-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (3.31)$$



Slika 3.7: Višanje stopnje Bézierove krivulje.

Nove kontrolne točke dobimo z odsekoma linearno interpolacijo pri vrednostih parametrov  $\frac{j}{n+1}$ . Torej leži novi kontrolni poligon v konveksni ovojnici

originalnega kontrolnega poligona. Višanje stopnje ima pomembno vlogo pri oblikovanju krivulj in prenosu podatkov med različnimi CAD sistemi. Pogosto algoritmi zahtevajo vnos več krivulj enakih stopenj, ali pa so optimizirani za točno določeno stopnjo. To lahko dosežemo z višanjem stopnje.

Naj  $\mathbf{P}$  označuje kontrolni poligon Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$ ,  $\mathcal{E}\mathbf{P}$  pa kontrolni poligon po višanju stopnje. Če izvedemo  $r$  korakov višanja stopnje, dobimo zaporedje poligonov  $\mathbf{P}, \mathcal{E}\mathbf{P}, \dots, \mathcal{E}^r\mathbf{P}$ .

**Izrek 9.** *Kontrolni poligon  $\mathcal{E}^r\mathbf{P}$  ima kontrolne točke*

$$\mathbf{b}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}, \quad i = 0, 1, \dots, n+r. \quad (3.32)$$

**Opomba:** Koeficient v vsoti (3.32) pri  $\mathbf{b}_j$  ima obliko hipergeometrijske porazdelitve s parametri  $(n, r, i)$ .

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo na  $r$ :  
za  $r = 1$ :

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{1}{i-j}}{\binom{n+1}{i}}$$

Ostaneta le člena pri  $j = i$  in  $j = i - 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^{(1)} &= \mathbf{b}_i \binom{n}{i} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} + \mathbf{b}_{i-1} \binom{n}{i-1} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} \\ &= \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i + \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1}, \end{aligned}$$

in za  $r = 1$  izrek velja. Za  $r = k$  naj velja:

$$\mathbf{b}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}.$$

Pri  $r = k + 1$  z uporabo enačbe (3.31) za  $\mathbf{b}_i^{(k+1)}$  višamo stopnjo krivulje

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^{(k+1)} &= \frac{i}{n+k+1} \mathbf{b}_{i-1}^{(k)} + \left(1 - \frac{i}{n+k+1}\right) \mathbf{b}_i^{(k)} \\
&= \frac{i}{n+k+1} \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-1-j}}{\binom{n+k}{i-1}} + \left(1 - \frac{i}{n+k+1}\right) \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k}{i-j}}{\binom{n+k}{i}} \\
&= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \left( \frac{i}{n+k+1} \frac{k! (i-1)! (n+k-i+1)!}{(i-j-1)! (k-i+j+1)! (n+k)!} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+k+1-i}{n+k+1} \frac{k! i! (n+k-i)!}{(i-j)! (k-i+j)! (n+k)!} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{k+1}{i-j}}{\binom{n+k+1}{i}}.
\end{aligned}$$

□

Naj  $\mathcal{BP}$  označuje Bézierovo krivuljo, ki jo določa kontrolni poligon  $\mathbf{P}$ .

**Izrek 10.** Poligoni  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$  z naraščajočim  $r$  konvergirajo po točkah proti krivulji  $\mathcal{BP}$ , ki jo določajo:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}^r \mathbf{P} = \mathcal{BP}. \quad (3.33)$$

Dokaz: Fiksirajmo vrednost parametra  $t$ . Za vsak  $r$  poiščemo tak indeks  $i$ , da je  $\frac{i}{n+r}$  najbližje  $t$ .  $\frac{i}{n+r}$  glejmo kot parameter kontrolnega polinoma  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$ . Ker s postopkom višanja stopnje Bezierove krivulje narašča tudi število kontrolnih točk poligona  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$ , z naraščajočim  $r$  izraz  $\frac{i}{n+r}$  konvergira proti  $t$ . Dokažimo, da velja

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{r+n}{i}} = t^j (1-t)^{n-j}. \quad (3.34)$$

Z uporabo Stirlingove formule  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  aproksimiramo izraz

$$\frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{r+n}{i}} \approx \sqrt{\frac{r i (r+n-i)}{(i-j)(r-i+j)(r+n)}} \frac{r^r i^i (r+n-i)^{r+n-i}}{(i-j)^{i-j} (r-i+j)^{r-i+j} (r+n)^{r+n}}.$$

Dobljeni izraz preoblikujemo v:

$$\sqrt{\frac{r i \left(1 - \frac{i}{r+n}\right)}{(i-j) \left(1 - \frac{i-j}{r}\right) r}} \frac{\left(1 - \frac{i}{r+n}\right)^{r+n-i} \left(\frac{i}{r+n}\right)^i}{\left(\frac{i-j}{r}\right)^r \left(\frac{r}{i-j} - 1\right)^{r-i+j}}.$$

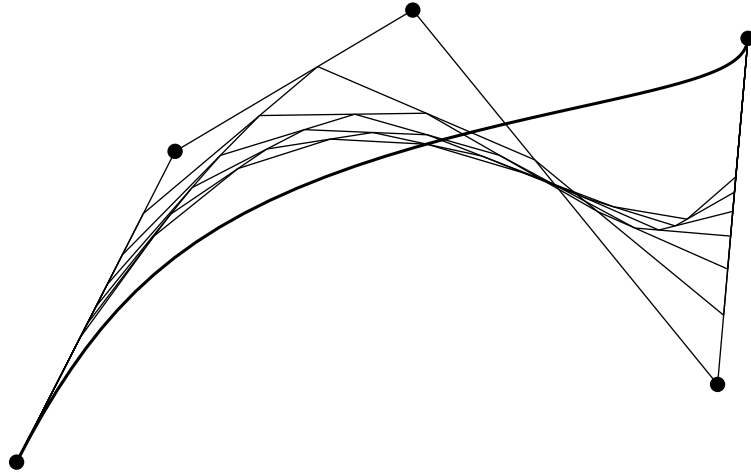
Upoštevamo, da  $j$  in  $n$  v izrazu v limiti nastopata kot konstanti, ter pošljemo  $\frac{i}{n+r} \rightarrow t$ . Izraz pod korenem konvergira proti 1, ostanek pa proti  $t^j(1-t)^{n-j}$ . Sedaj izračunajmo limito:

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \mathbf{b}_i^{(r)} = \lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}.$$

Zamenjamo vrstni red sumacije in limitiranja, ter upoštevamo enačbo (3.34):

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \mathbf{b}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = [\mathcal{BP}](t).$$

□



Slika 3.8: S ponavljanjem postopka višanja stopnje kontrolni poligoni po točkah konvergirajo k Bézierovi krivulji, ki jo določajo.

Poligoni  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$  konvergirajo proti krivulji zelo počasi, zato konvergenca ni praktično uporabna, vendar pa pomaga pri teoretični raziskavi lastnosti Bézierovih krivulj.

### 3.11 Manjšanje variacije

**Izrek 11.** *Naj bo  $\mathcal{R}$  ravnina v  $\mathbb{R}^3$ . Bézierova krivulja  $\mathcal{BP}$  seka ravnino  $\mathcal{R}$  v kvečjemu toliko točkah, kot jo seka kontrolni poligon  $\mathbf{P}$ .*

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{R}$  poljubna ravnina. Postopek višanja stopnje je sestavljen iz odsekoma linearnih interpolacij. Odsekoma linearne interpolacije imajo lastnost manjšanja variacije (enačba (2.10)). Zato ima kontrolni poligon  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$  po  $r$  korakih višanja stopnje kvečjemu toliko presečišč z ravnino  $\mathcal{R}$  kot kontrolni poligon  $\mathcal{E}^{r-1} \mathbf{P}$ . Zaradi konvergence (3.33) kontrolnih poligonov  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$  k krivulji  $\mathcal{B} \mathbf{P}$  ima lastnost manjšanja variacije tudi Bézierova krivulja.  $\square$

Planarni poligon imenujemo **konveksen**, če ima kvečjemu dve presečišči s poljubno premico.

**Posledica:** Konveksni kontrolni poligon določa konveksno Bézierovo krivuljo. Trditev v obratni smeri ne drži - obstajajo konveksne Bézierove krivulje z nekonveksnimi kontrolnimi poligoni.

## 3.12 Nižanje stopnje

**Nižanje stopnje** je aproksimacija dane Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  stopnje  $n$  z Bézierovo krivuljo nižje stopnje. Naj bodo kontrolne točke dane Bézierove krivulje  $\mathbf{b}^n$  označene z  $\mathbf{b}_i, i = 0, 1, \dots, n$ , kontrolne točke iskane krivulje stopnje  $n-1$ ,  $\mathbf{c}^{n-1}$ , pa z  $\mathbf{c}_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Predpostavimo, da smo dobili krivuljo  $\mathbf{b}^n$  iz  $\mathbf{c}^{n-1}$  s postopkom višanja stopnje. Potem po (3.31) velja:

$$\mathbf{b}_i = \frac{i}{n} \mathbf{c}_{i-1} + \frac{n-i}{n} \mathbf{c}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

Iz te enačbe lahko izrazimo dve rekurzivni formuli za izračun  $\mathbf{c}_i$ :

$$\mathbf{c}_i = \frac{n\mathbf{b}_i - i\mathbf{c}_{i-1}}{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{c}_{i-1} = \frac{n\mathbf{b}_i - (n-i)\mathbf{c}_i}{i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (3.37)$$

Obe enačbi sta ekstrapolacijski in numerično nestabilni. Enačba (3.36) je dobra aproksimacija v okolici točke  $\mathbf{b}_0$ , (3.37) pa v okolici  $\mathbf{b}_n$ . Zato se uporablja tudi postopek združevanja: prvi del novega kontrolnega poligona izračunamo iz enačbe (3.36), drugi del pa iz (3.37).

### 3.13 Ravninske Bézierove krivulje v neparametrični obliki

Zanimajo nas krivulje v eksplicitni obliki  $y = f(x)$ , kjer je  $f$  polinom, zapisan v bazi Bernsteinovih polinomov:

$$f(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + \cdots + b_n B_n^n(t).$$

Tu so  $b_i$  realna števila.

To lahko zapišemo v parametrični obliki:

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Ker so funkcijske krivulje podmnožica parametričnih, imajo kontrolni poligon. Uporabimo lastnost ohranjanja premic (3.15) in dobimo:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} j/n \\ b_j \end{bmatrix} B_j^n(t). \quad (3.38)$$

Funkcijo  $f(t) = \sum_j b_j B_j^n(t)$  imenujemo **Bézierova funkcija**. Kontrolni poligon je določen s točkami  $(\frac{j}{n}, b_j)$ ;  $j = 0, 1, \dots, n$ . Ker so Bézierove krivulje invariantne za afine reparametrizacije, lahko namesto intervala  $[0, 1]$  uporabljamo poljuben interval  $[a, b]$ . Potem so abscise kontrolnih točk enake  $a + \frac{i}{n}(b - a)$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ . Vse komponente Bézierove krivulje v parametrični obliki so Bézierove funkcije.

### 3.14 Integrali

Kontrolni poligon  $\mathbf{P}$  Bézierove funkcije določajo točke  $(j/n, b_j)$ . Poligonu  $\mathbf{P}$  priredimo "ploščino"  $\mathcal{AP}$ :

$$\mathcal{AP} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_j. \quad (3.39)$$

To je ena od delnih Riemannovih vsot za ploščino pod poligonom  $\mathbf{P}$ .

**Izrek 12.** *Aproksimaciji za ploščini pod poligonoma  $\mathbf{P}$  in  $\mathcal{EP}$ , dobljenim pri višanju stopnje, sta enaki:*

$$\mathcal{AP} = \mathcal{AEP}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{AEP} &= \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n+1} \left( \frac{j}{n+1} b_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) b_j \right) \\
 &= \frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^n \frac{n+2}{n+1} b_j \\
 &= \mathcal{AP}.
 \end{aligned}$$

□

Torej velja za vsak  $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{AE}^r \mathbf{P} = \mathcal{AEP}.$$

Vemo, da poligoni  $\mathcal{E}^r \mathbf{P}$  konvergirajo proti Bézierovi funkciji  $\mathcal{BP}$ . Zato je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{AE}^r \mathbf{P} = \int_0^1 \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_j. \quad (3.40)$$

V posebnem primeru  $b_i = \delta_{i,j}$  velja

$$\int_0^1 B_i^n(x) dx = \frac{1}{n+1}. \quad (3.41)$$

### 3.15 Baricentrična oblika Bézierove krivulje

Za lažjo posplošitev na ploskve, si oglejmo še malce drugačen zapis Bézierove krivulje.

Naj bosta  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  različni točki na realni osi. Potem lahko vsako točko  $\mathbf{p}$  na premici, ki jo določata, zapišemo v obliki baricentričnih koordinat:  $\mathbf{p} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2$ . Točko  $\mathbf{p}$  identificiramo z  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $u + v = 1$ , točki  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  pa z  $\mathbf{p}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (0, 1)$ . Realno os preslikamo v  $\mathbb{R}^3$ , kjer definira polinom

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) := \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) := \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \frac{n!}{i!j!} u^i v^j \mathbf{b}_{i,j} = \sum_{i+j=n} B_{i,j}^n(\mathbf{u}) \mathbf{b}_{i,j}. \quad (3.42)$$

Če vstavimo  $t = v$  in  $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{i,j}$ ,  $i + j = n$ , dobimo Bézierovo krivuljo v klasični obliki. Iz baricentrične oblike se takoj vidita dve pomembni lastnosti Bézierovih krivulj: invariantnost za afine transformacije parametra in simetrija (vlogi  $u$  in  $v$ ). Položaj točke  $\mathbf{p}$  opišemo s parametroma  $u$  in  $v$ ,

relativno glede na točki  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$ .

De Casteljauov algoritem v baricentrični notaciji postane

$$\mathbf{b}_{i,j}^r(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1}(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1}(\mathbf{u}), \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n, \\ i + j = n - r \end{matrix}. \quad (3.43)$$

Iskana točka na krivulji je določena z  $\mathbf{b}_{0,0}^n(\mathbf{u})$ .

Tudi odvode lahko izrazimo s pomočjo baricentrične oblike.

Vpeljimo standardno parametrizacijo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u(t), v(t)) = (1 - t, t)$ .

Odvajamo na parameter  $t$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}(\mathbf{u}(t)) = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{b} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{b} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Ker je  $\frac{du}{dt} = -1$  in  $\frac{dv}{dt} = 1$ , dobimo:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}(\mathbf{u}(t)) = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{b} - \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{b}. \quad (3.44)$$

Definirajmo vektor  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (-1, 1)$ . Enačbo lahko zapišemo kot smerni odvod glede na  $\mathbf{d}$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}(\mathbf{u}(t)) = D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}). \quad (3.45)$$

Oglejmo si, kako je de Casteljauov algoritem povezan s smernimi odvodi. Namesto računanja vrednosti v točki  $\mathbf{u}$  z  $u + v = 1$ , formalno izračunajmo vrednost v *vektorju*  $\mathbf{d} = (-1, 1)$ . De Casteljauov algoritem (3.43) za ta primer postane:

$$\mathbf{b}_{i,j}^r(\mathbf{d}) = -\mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1}(\mathbf{d}) + \mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1}(\mathbf{d}).$$

*Vektorski* argumenti v de Casteljauovem algoritmu torej prinesejo preme difference:

$$\mathbf{b}_{i,j}^r(\mathbf{d}) = \Delta^r \mathbf{b}_j.$$

Tako za prvi odvod velja:

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}(t)) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) = n \sum_{i+j=n-1} \mathbf{b}_{i,j}^1(\mathbf{d}) B_{i,j}^{n-1}(\mathbf{u}). \quad (3.46)$$

Zadnji del enačbe pove, da smerni odvod dobimo z izvajanjem enega koraka de Casteljauovega algoritma glede na  $\mathbf{d}$  in  $n - 1$  korakov glede na  $\mathbf{u}$ . To se preprosto izrazi s pomočjo razcveta.

Bézierove kontrolne točke lahko izrazimo kot vrednosti razcveta argumentov



$\mathbf{p}_1 = (1, 0)$  in  $\mathbf{p}_2 = (0, 1)$ . Kontrolne točke izrazimo v standardni, baricentrični in razcvetni notaciji:

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}[\mathbf{p}_1^{<i>}, \mathbf{p}_2^{<j>}], \quad i + j = n.$$

Tako zapišemo vmesne točke de Casteljauovega algoritma:

$$\mathbf{b}_{i,j}^r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{p}_1^{<i>}, \mathbf{p}_2^{<j>}, \mathbf{u}^{<r>}], \quad i + j + r = n,$$

točka na krivulji pa je dana z  $\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]$ . Vstavimo v enačbo (3.46), in dobimo:

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}] = n\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-1>}, \mathbf{d}].$$

Z nadaljnim odvajanjem dobimo:

$$D_{\mathbf{d}}^r\mathbf{b}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{d}}^r\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}] = \frac{n!}{(n-r)!}\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n-r>}, \mathbf{d}^{<r>}]. \quad (3.47)$$

$r$ -ti smerni odvod krivulje glede na  $\mathbf{d}$  dobimo z  $r$  koraki de Casteljauovega algoritma za vektor ter  $n - r$  koraki algoritma za izračun točke. Vrstni red izvajanja korakov ni pomemben zaradi lastnosti simetričnosti argumentov razcveta.

Če v enačbo (3.47) formalno vstavimo  $\mathbf{d} = \mathbf{u}$ , dobimo *Eulerjevo enačbo*:

$$D_{\mathbf{u}}^r\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!}\mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}].$$

Iz Eulerjeve enačbe se vidi povezanost odvajanja in izračuna točke, ko uporabimo baricentrično notacijo in razcvete.

## 3.16 Racionalne Bézierove krivulje

**Racionalna Bézierova krivulja** stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^3$  je projekcija Bézierove krivulje stopnje  $n$  iz  $\mathbb{R}^4$  na hiperravnino  $w = 1$ .

**Izrek 13.** *Racionalna Bézierova krivulja stopnje  $n$  je podana z izrazom:*

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)}; \quad \mathbf{x}(t), \mathbf{b}_i \in \mathbb{E}^3. \quad (3.48)$$

Dokaz: Projekcija preslika točko  $(x, y, z, w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w, 1)$ . Označimo  $(wx, wy, wz, w)$  z  $(w\mathbf{x}, w)$ . Fiksirajmo  $t$ . Točko na krivulji  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{E}^3$  lahko gledamo kot  $[\mathbf{x}(t), 1]^T \in \mathbb{E}^4$ . To je projekcija točke  $[w(t)\mathbf{x}(t), w(t)]^T$ , ki leži na Bézierovi krivulji v  $\mathbb{R}^4$ . Zadnjo komponento lahko izrazimo z:

$$w(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t).$$

Zato lahko zapišemo:

$$w(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \end{bmatrix}.$$

Leva stran enačbe določa točko na Bézierovi krivulji stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^4$ , zato velja:

$$\sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ w_i \end{bmatrix} B_i^n(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \end{bmatrix},$$

kjer so  $\mathbf{p}_i$  točke v  $\mathbb{R}^3$ . Iz prve komponente dobimo enačbo

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) = \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t), \quad (3.49)$$

in izrazimo  $\mathbf{x}(t)$ :

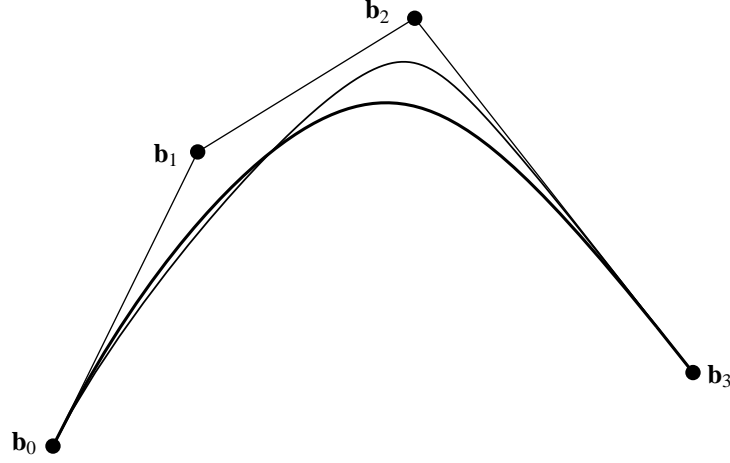
$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \mathbf{p}_1 B_1^n(t) + \cdots + \mathbf{p}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \cdots + w_n B_n^n(t)}; \quad \mathbf{x}(t), \mathbf{p}_i \in \mathbb{E}^3.$$

Za  $\mathbf{p}_i$  vzemimo  $\mathbf{p}_i = w_i \mathbf{b}_i$  in izrek je dokazan.  $\square$

Koeficientom  $w_i$  pravimo **uteži**, točkam  $\mathbf{b}_i$  pa Bézierove kontrolne točke. Kontrolne točke tvorijo kontrolni poligon, ki je projekcija kontrolnega poligona  $[w_i \mathbf{b}_i, w_i]^T$  neracionalne Bézierove krivulje iz  $\mathbb{R}^4$ . Če vzamemo vse uteži enake 1, je imenovalc izraza (3.48) enak 1, in dobimo navadno (neracionalno) Bézierovo krivuljo v  $\mathbb{R}^3$ .

Racionalne Bézierove krivulje s pozitivnimi utežmi imajo podobne lastnosti kot "neracionalne": so afino invariantne, invariantne za affine transformacije parametra, imajo lastnosti simetrije, konveksne ovojnice, interpolacije v robnih točkah ter manjšanja variacije.

Uteži  $w_i$  običajno uporabljamo kot parametre oblike: s povečanjem enega od  $w_i$  se krivulja približa ustreznemu  $\mathbf{b}_i$ . Pri tem je potrebno opozoriti, da z enako rastočimi  $w_i$  krivulja ne konvergira proti kontrolnemu poligonu, ker skupni faktor povečanja uteži nima vpliva na krivuljo.



Slika 3.9: Vpliv uteži na obliko krivulje: Racionalni Bézierovi krivulji stopnje 3 z istim kontrolnim poligonom in z enakimi utežmi, razen uteži  $w_2$ .

### 3.17 De Casteljaouv algoritem za racionalne Bézierove krivulje

Za izračun točke na racionalni Bézierovi krivulji lahko uporabimo de Casteljaouv algoritem posebej za števec in za imenovalec, ter delimo dobljena rezultata. Ta metoda je enostavna in učinkovita, vendar numerično nestabilna. Pri utežeh zelo različnih velikosti, lahko za velike  $w_i$  izračunane vmesne točke de Casteljaouvega algoritma padejo izven konveksne ovojnice kontrolnega poligona  $\{\mathbf{b}_i\}$ , kar prinese izgubo natančnosti.

Natančnejša metoda projicira vmesne točke de Casteljaouvega algoritma  $[w_i \mathbf{b}_i, w_i]^T$  v hiperravnino  $w = 1$ . Tako pridemo do **racionalnega de Casteljaouvega algoritma**:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t) \frac{w_i^{r-1}}{w_i^r} \mathbf{b}_i^{r-1} + t \frac{w_{i+1}^{r-1}}{w_{i+1}^r} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}, \quad (3.50)$$

$$w_i^r(t) = (1-t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t). \quad (3.51)$$

Racionalni de Casteljaouv algoritem ima lepo geometrijsko interpretacijo. Standardni de Casteljaouv algoritem uporablja razmerja treh točk (ratio), racionalni pa *križno razmerje štirih točk*.

Križno razmerje štirih kolinearnih točk  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  je definirano z:

$$\text{cr}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) := \frac{\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})}{\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})}. \quad (3.52)$$

Vzemimo točko  $\mathbf{q}_i^r(t)$  na premici med  $\mathbf{b}_i^r$  in  $\mathbf{b}_{i+1}^r$ , tako da velja:

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{w_{i+1}^r}{w_i^r}. \quad (3.53)$$

Potem iz (3.52) z uporabo (3.53) in (3.50) dobimo

$$\text{cr}(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_i^{r+1}, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{1-t}{t}, \text{ za vse } r, i.$$

Pri  $r = 0$  iz (3.53) sledi

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^0 = \frac{w_i \mathbf{b}_i + w_{i+1} \mathbf{b}_{i+1}}{w_i + w_{i+1}},$$

kar omogoča uporabo točk  $\mathbf{q}_i$  kot parametrov oblike. S pomikanjem točk  $\mathbf{q}_i$  po ustreznih delih kontrolnega poligona se spreminjajo tudi uteži  $w_i$ , kar ima neposreden vpliv na obliko krivulje.

Tudi racionalni de Casteljauov algoritem lahko uporabimo za delitev krivulje. De Casteljauov algoritem deluje na praslki racionalne Bézierove krivulje. Vmesne točke projiciramo na hiperravnino  $w = 1$  in dobimo kontrolna poligona za oba dela krivulje.

Kontrolne točke in uteži glede na interval  $[0, t]$  so:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_0^i(t), \quad w_i = w_0^i, \quad (3.54)$$

glede na  $[t, 1]$  pa:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{n-i}^i(t), \quad w_i = w_{n-i}^i. \quad (3.55)$$

### 3.17.1 Odvodi racionalne Bézierove krivulje

Zapišimo enačbo (3.49) v preprostejši obliki:

$$\mathbf{p}(t) = w(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Potem je

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \dot{w}(t)\mathbf{x}(t) + w(t)\dot{\mathbf{x}}(t).$$

Izrazimo  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{w(t)}[\dot{\mathbf{p}}(t) - \dot{w}(t)\mathbf{x}(t)]. \quad (3.56)$$

Za višje odvode uporabimo Leibnitzovo pravilo, in dobimo

$$\mathbf{p}^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} w^{(j)}(t) \mathbf{x}^{(r-j)}(t),$$

in dobimo rekurzivno formulo za  $r$ -ti odvod racionalne Bézierove krivulje:

$$\mathbf{x}^{(r)}(t) = \frac{1}{w(t)} [\mathbf{p}^{(r)}(t) - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} w^{(j)}(t) \mathbf{x}^{(r-j)}(t)]. \quad (3.57)$$

## 3.18 Sestavljene Bézierove krivulje

Bézierove krivulje so močno orodje pri oblikovanju krivulj, vendar pa imajo nekaj omejitev. Za aproksimacijo kompleksnih oblik so potrebne Bézierove krivulje visokih stopenj, pri tem pa interpolirajo dane podatke samo v robnih točkah. Rešitev je v uporabi **sestavljenih Bézierovih krivulj**; odsekoma polinomskih krivulj (zlepkov) nižjih stopenj, ki v stičnih točkah interpolirajo dane podatke.

### 3.18.1 Lokalni in globalni parametri

Pri enostavnih Bézierovih krivuljah smo za definicijsko območje vzeli interval  $[0, 1]$ , kar nam je omogočala invariantnost Bézierovih krivulj za afine transformacije parametra. Pri sestavljenih polinomskih krivuljah so stvari bolj zapletene: za posamezne odseke lahko predpostavimo, da so preslikave intervala  $[0, 1]$ , vendar pa je celotna krivulja preslikava družine intervalov, katerih relativne dolžine igrajo pomembno vlogo.

**Definicija:** Zlepek  $\mathbf{s}$  je zvezna preslikava  $[u_0, u_L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ki podintervale  $u_0 < u_1 < \dots < u_L$  slika tako, da se vsak podinterval  $[u_i, u_{i+1}]$  preslika v polinomsko krivuljo. Robnim točkam podintervalov  $u_i$  pravimo **vozli**.

Za vsako vrednost parametra  $u$  leži ustrezna točka  $\mathbf{s}(u)$  na krivulji  $\mathbf{s}$ . Naj leži vrednost  $u$  na intervalu  $[u_i, u_{i+1}]$ . Za interval  $[u_i, u_{i+1}]$  lahko vpeljemo **lokalno parametrizacijo**:

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta u_i}.$$

Pri obravnavanju celotne krivulje  $\mathbf{s}$  uporabljamo globalni parameter  $u$ , posamezne odseke pa je pogosto preprosteje zapisati v obliki Bézierovih krivulj  $\mathbf{s}$

pomočjo lokalne parametrizacije. Naj  $\mathbf{s}_i$  označuje  $i$ -ti odsek krivulje  $\mathbf{s}$ , točko na njem pa označimo z  $\mathbf{s}(u) = \mathbf{s}_i(t)$ . Uvedba lokalnih koordinat vpliva tudi na odvajanje. Za  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  s pomočjo verižnega pravila dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}(u)}{du} &= \frac{d\mathbf{s}_i(t)}{dt} \frac{dt}{du} \\ &= \frac{1}{\Delta u_i} \frac{d\mathbf{s}_i(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Kontrolni poligoni posameznih odsekov sestavljene Bézierove krivulje  $\mathbf{s}$  sestavljajo **odsekoma Bézierov poligon** za  $\mathbf{s}$ .

### 3.18.2 Pogoji gladkosti

Posamezni odseki sestavljene Bézierove krivulje  $\mathbf{s}$  so polinomske krivulje, zato so poljubnokrat zvezno odvedljive, problemi z odvedljivostjo lahko nastopajo kvečjemu na njihovih stičiščih. Naj bosta  $\mathbf{s}_0$  in  $\mathbf{s}_1$  Bézierovi krivulji s kontrolnima poligonoma  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ter  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n}$ . Ker sta robni točki enaki, že imamo zveznost. Krivulji lahko gledamo posamezno, ali pa kot odseka sestavljene krivulje, definirane kot preslikava intervala  $[u_0, u_2]$  v  $\mathbb{R}^3$ . Odsek  $\mathbf{s}_0$  je definiran nad intervalom  $[u_0, u_1]$ ,  $\mathbf{s}_1$  pa nad  $[u_1, u_2]$ . Za trenutek predpostavimo, da sta obe krivulji loka globalne polinomske krivulje  $\mathbf{b}^n(u)$ , definirane nad intervalom  $[u_0, u_2]$ . V razdelku (3.7) smo videli, da morata biti poligona  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ter  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n}$  rezultat postopka delitve, torej morajo biti njune kontrolne točke povezane z

$$\mathbf{b}_{n+i} = \mathbf{b}_{n-i}^i(t), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (3.59)$$

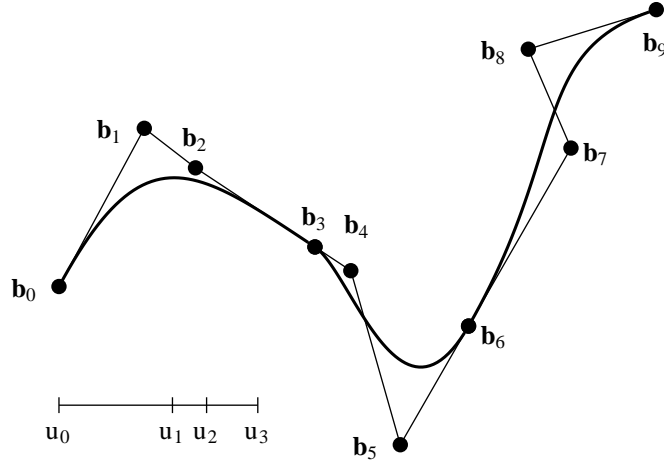
kjer je  $t = (u_2 - u_0)/(u_1 - u_0)$  lokalna koordinata  $u_2$  glede na interval  $[u_0, u_1]$ .

Če premaknemo točko  $\mathbf{b}_{2n}$ , podani krivulji ne opisujeta več istega globalnega polinoma, vendar se globalna polinoma ujemata v vseh odvodih redov  $0, 1, \dots, n-1$  pri  $u = u_1$ . Razlog je v tem, da kontrolna točka  $\mathbf{b}_{2n}$  nima vpliva na odvode, redov manjših od  $n$ , pri  $u = u_1$ . Podobno lahko spremenimo  $\mathbf{b}_{2n-r}$  in še vedno ohranimo zveznost vseh odvodov, redov  $0, 1, \dots, n-r-1$ .

**Izrek 14** ( $C^r$  pogoj). *Bézierovi krivulji, definirani nad  $u_0 \leq u \leq u_1$  ter  $u_1 \leq u \leq u_2$ , s kontrolnima poligonoma  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  ter  $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n}$ , sta  $r$ -krat zvezno odvedljivi pri  $u = u_1$  natanko takrat, ko velja:*

$$\mathbf{b}_{n+i} = \mathbf{b}_{n-i}^i(t), \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (3.60)$$

kjer je  $t = (u_2 - u_0)/(u_1 - u_0)$  lokalna koordinata  $u_2$  glede na interval  $[u_0, u_1]$ .



Slika 3.10: Zvezno odvedljiva krivulja, sestavljena iz treh kubičnih Bézierovih krivulj.

Torej de Casteljauov algoritem priskrbi tudi pogoje zveznosti med sosednjimi Bézierovimi krivuljami. Opozoriti je potrebno, da je enačba (3.60) le teoretično orodje in je ne smemo direktno uporabljati za konstrukcijo  $C^r$  krivulj, saj bi lahko zaradi uporabe ekstrapolacije prišlo do numeričnih težav.

Izpeljimo še bolj uporaben pogoj za  $r$ -kratno zvezno odvedljivost sestavljene Bézierove krivulje v točki  $u = u_1$ . Za  $i = 0, 1, \dots, r$  se morata  $i$ -ta odvoda na krivulji  $\mathbf{s}_0$  ter  $\mathbf{s}_1$  ujemati v točki  $u = u_1$ . Upoštevamo še verižno pravilo (3.58), in dobimo:

$$\left(\frac{1}{\Delta u_0}\right)^i \frac{d^i \mathbf{s}_0(1)}{dt^i} = \left(\frac{1}{\Delta u_1}\right)^i \frac{d^i \mathbf{s}_1(0)}{dt^i}.$$

Uporabimo enačbo (3.17), poenostavimo, in dobimo rezultat:

$$\left(\frac{1}{\Delta u_0}\right)^i \Delta^i \mathbf{b}_{n-i} = \left(\frac{1}{\Delta u_1}\right)^i \Delta^i \mathbf{b}_n, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (3.61)$$

Oglejmo si nekaj najbolj zanimivih primerov. Zveznost ( $C^0$  zveznost) zagotovimo s tem, da imata obe Bézierovi krivulji skupno zadnjo/prvo kontrolno točko. Pri  $C^1$  gladkosti dodatno zahtevamo, da velja

$$\frac{1}{\Delta u_0} (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}) = \frac{1}{\Delta u_1} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n). \quad (3.62)$$

To pomeni, da morajo biti kontrolne točke  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$  kolinearne, urejene, in v razmerju  $\Delta u_0 : \Delta u_1$ . Samo kolinearnost še ni dovolj za zvezno odvedljivost, ker je le-ta odvisna od globalne parametrizacije.

Poleg  $C$ -zveznosti nas v CAGD zanima tudi **geometrijska zveznost** ( $G$ -zveznost). Tu ne zahtevamo  $C$ -gladkosti, ampak da krivulja “izgleda gladko”. Bolj natančno nas zanima zveznost geometrijskih lastnosti, ki niso odvisne od parametrizacije.  $G^0$  zveznost je običajna  $C^0$  zveznost. Pri  $G^1$  zveznosti (poleg  $G^0$ ) zahtevamo, da se smer tangente na krivuljo spreminja zvezno (ne pa nujno tudi njena velikost!). To pomeni, da namesto pogoja (3.62) dobimo pogoj za  $G^1$  zveznost

$$\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n = \alpha (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}),$$

kjer je  $\alpha > 0$  poljubno število. Ob tem zahtevamo še urejenost (kolinearnih) kontrolnih točk  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$ . Pogoj je neodvisen od parametrizacije krivulje. V splošnem lahko zapišemo: krivulja je geometrijsko zvezna  $G^r$  natanko tedaj, ko je v neki parametrizaciji

$C^r$  zvezna.

Pri  $G^2$  zveznosti zahtevamo zvezno spreminjanje ukrivljenosti.



# Poglavje 4

## Bézierove ploskve

### 4.1 Bézierove ploskve iz tenzorskega produkta

Tenzorski produkt funkcij  $g$  in  $h$  je definiran z  $f(u, v) := g(u)h(v)$ . Tako dobljeno ploskev  $f$  imenujemo ploskev iz tenzorskega produkta.

#### 4.1.1 Bilinearna interpolacija

Podobno, kot smo razvili teorijo Bézierovih krivulj na osnovi linearne interpolacije, lahko osnujemo Bézierove ploskve iz tenzorskega produkta na bilinearni interpolaciji. Naj bodo  $\mathbf{b}_{0,0}, \mathbf{b}_{0,1}, \mathbf{b}_{1,0}, \mathbf{b}_{1,1}$  različne točke v  $\mathbb{E}^3$ . Množico točk  $\mathbf{x}$ , oblike:

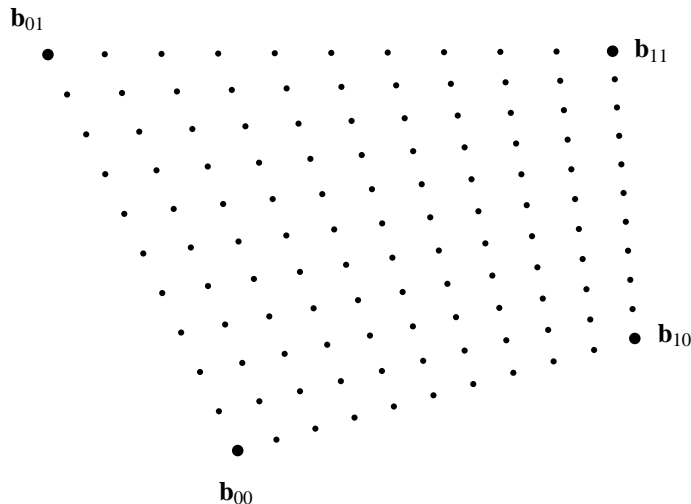
$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v), \quad (4.1)$$

imenujemo **hiperbolični paraboloid** skozi podane točke  $\mathbf{b}_{i,j}$ . To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Ker je ploskev  $\mathbf{x}(u, v)$  v (4.1) linearna v  $u$  in  $v$  ter interpolira podane točke, ploskev  $\mathbf{x}$  imenujemo **bilinearni interpolant**.

Bilinearni interpolant lahko gledamo kot preslikavo enotskega kvadrata  $0 \leq u, v \leq 1$  v ploskev  $\mathbf{x}(u, v)$ . Premica v domeni, vzporedna koordinatni osi, se preslika v krivuljo na ploskvi, ki ji pravimo **izoparametrična krivulja**.



Slika 4.1: Bilinearna interpolacija: hiperbolični paraboloid, definiran s točkami  $\mathbf{b}_{i,j}$ .

Vse izoparametrične krivulje hiperboličnega paraboloidea so ravne črte (odseki premic).

Za izračun točke na bilinearnem interpolantu lahko poleg direktne metode uporabimo dvo-stopenjski proces, ki je osnova za interpolacijo s pomočjo tenzorskega produkta. Najprej izračunamo vmesni točki:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^{0,1} &= (1-v)\mathbf{b}_{0,0} + v\mathbf{b}_{0,1}, \\ \mathbf{b}_{1,0}^{0,1} &= (1-v)\mathbf{b}_{1,0} + v\mathbf{b}_{1,1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

nato pa združimo

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{b}_{0,0}^{1,1}(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_{0,0}^{0,1} + u\mathbf{b}_{1,0}^{0,1}.$$

Ideja je v tem, da najprej izračunamo koeficiente izoparametrične krivulje  $v = konst$ , nato pa še vrednost točke na izoparametrični krivulji pri  $u$ . Do istega rezultata pridemo tudi z uporabo postopka v drugi smeri (z začetkom na  $u = konst$ ).

Ker je linearna interpolacija afina preslikava, in ker smo uporabili linearno interpolacijo v  $u$  in  $v$  smeri, se za bilinearno interpolacijo uporablja tudi izraz *biafina preslikava*.

### 4.1.2 De Casteljauov algoritem

Bézierove krivulje smo s pomočjo de Casteljauovega algoritma dobili s ponavljanjem linearnih interpolacij; do ploskev pa bomo prišli s ponavljanjem bilinearnih interpolacij. Naj bo podan pravokoten seznam točk  $\mathbf{b}_{i,j}$ ;  $0 \leq i, j \leq n$  ter vrednosti parametrov  $(u, v)$ . Točke  $\mathbf{b}_{i,j}$  so osnova za **kontrolno mrežo**, odsekoma bilinearno ploskev, posplošitev kontrolnega poligona pri Bézierovih krivuljah. Algoritem generira točko na ploskvi, ki jo določa kontrolna mreža (oz. **kontrolne točke**  $\mathbf{b}_{i,j}$ ).

Za  $r = 1, 2, \dots, n$  ter  $i, j = 0, 1, \dots, n - r$  izračunaj:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{r,r} = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i,j}^{r-1,r-1} & \mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ \mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1,r-1} & \mathbf{b}_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

kjer je  $\mathbf{b}_{i,j}^{0,0} = \mathbf{b}_{i,j}$ .  $\mathbf{b}_{0,0}^{n,n}$  je točka pri vrednosti parametrov  $(u, v)$  na **Bézierovi ploskvi**  $\mathbf{b}^{n,n}$ .

Tako zapisani algoritem deluje za  $(n+1) \times (n+1)$  mrežo točk. S konstruktivnim algoritmom generiramo ploskev; podobno kot smo prišli do Bézierove krivulje. V naslednjem razdelku bomo do enakega rezultata prišli s pomočjo pristopa preko tenzorskega produkta. To nam bo olajšalo tudi obravnavo ploskev, ki so različnih stopenj v  $u$  in  $v$ . Direktni de Casteljauov algoritem se da prirediti tudi za tak primer, tako, da se najprej izvede algoritem na "kvadratni kontrolni podmreži", nato pa se uporabi še de Casteljauov algoritem za Bézierove krivulje.

### 4.1.3 Tenzorski produkt Bézierovih krivulj

Osnovna intuitivna definicija ploskve je naslednja: ploskev je sled krivulje, ki se giblje po prostoru, in pri tem spreminja svojo obliko. Na podlagi te ideje pridemo do ploskev, nastalih iz tenzorskega produkta.

Naj bo krivulja, ki se giblje po prostoru, Bézierova krivulja konstantne stopnje  $m$  (to je velika zožitev razreda ploskev, ki izhajajo iz tenzorskega produkta). V vsakem trenutku premikajočo se krivuljo določa množica kontrolnih točk, od katerih se vsaka giblje skozi prostor po krivulji. Naša naslednja predpostavka je, da so vse krivulje, po katerih se gibljejo kontrolne točke, Bézierove krivulje iste stopnje  $n$ .

Formalno lahko zapišemo to takole: osnovna krivulja naj bo

$$\mathbf{b}^m(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u), \quad (4.5)$$

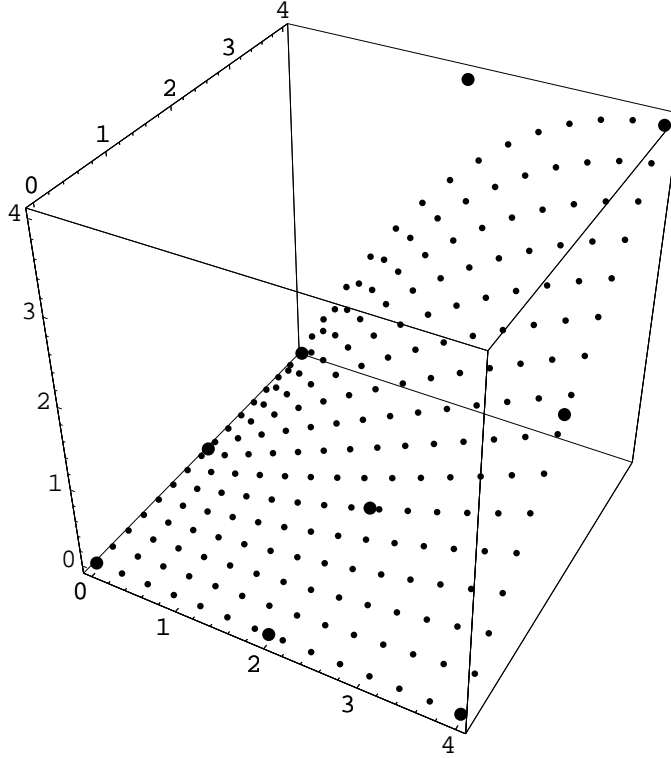
kontrolne točke pa naj potujejo po Bézierovi krivulji

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v). \quad (4.6)$$

Enačbi združimo, in dobimo točko  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  na ploskvi  $\mathbf{b}^{m,n}$ :

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v). \quad (4.7)$$

V tej notaciji ima originalna Bézierova krivulja  $\mathbf{b}^m(u)$  kontrolne točke  $\mathbf{b}_{i,0}$ ;  $i = 0, 1, \dots, m$ .



Slika 4.2: Tenzorska Bézierova ploskev stopnje (2,2). Kontrolne točke so označene z večjimi pikami.

Definicija Bézierove ploskve (4.7) ter definicija preko de Casteljauovega algoritma sta ekvivalentni. Pri izpeljavi smo za začetno krivuljo uporabili izoparametrično krivuljo  $v = 0$ ; na podoben način bi lahko uporabili tudi preostale tri robne krivulje.

Poljubna izoparametrična krivulja  $\hat{v} = konst$  Bézierove ploskve  $\mathbf{b}^{m,n}$  je Bézierova krivulja stopnje  $m$  s parametrom  $u$ . Njene kontrolne točke dobimo z izračunom točk kontrolne mreže pri  $\hat{v}$ :

$$\mathbf{b}_{i,0}^{0n}(\hat{v}) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(\hat{v}); \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Koeficiente izoparametrične krivulje (kontrolne točke) dobimo z izvajanjem  $m + 1$  de Casteljauovih algoritmov (za krivuljo). Točko na ploskvi lahko izračunamo z izvajanjem še enega de Casteljauovega algoritma.

Na enak način lahko obravnavamo tudi izoparametrične krivulje  $u = konst$ .

Tu omenimo še **racionalne Bézierove tenzorske ploskve**:

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{\sum_i \sum_j w_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_i \sum_j w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}, \quad (4.8)$$

kjer so  $w_{i,j}$  uteži kontrolnih točk  $\mathbf{b}_{i,j}$ . Dobimo jih kot projekcijo tenzorskih Bézierovih ploskev iz  $\mathbb{R}^4$ . Racionalne tenzorske ploskve za razliko od krivuljnega primera večinoma nimajo lastnosti ploskev, nastalih iz tenzorskega produkta.

#### 4.1.4 Lastnosti tenzorskih Bézierovih ploskev

Zaradi narave tenzorskega produkta večina lastnosti tenzorskih Bézierovih ploskev sledi iz lastnosti Bézierovih krivulj.

**Invariantnost za afine preslikave:** Direktni de Casteljauov algoritem sestavlja ponavljanje bilinearnih (in morda še linearnih) interpolacij, ki so afino invariantne; zato je afino invariantno tudi njihovo komponiranje. Tenzorske Bézierove ploskve pa **niso** projektivno invariantne. Tako ne moremo s projekcijo preslikati kontrolnih točk in nato generirati ploskve; temveč moramo najprej generirati željene točke, in jih nato preslikati s projekcijo, kar je v primeru, da je potrebno izračunati veliko število točk, lahko računsko precej zahteven postopek.

**Lastnost konveksne ovojnice:** Za  $0 \leq u, v \leq 1$  so členi  $B_i^m(u) B_j^n(v)$  nenegativni, velja pa tudi

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m B_i^m(u) B_j^n(v) \equiv 1. \quad (4.9)$$

**Robne krivulje:** Robne krivulje ploskve  $\mathbf{b}^{m,n}$  so Bézierove krivulje, ki jih določajo robni poligoni kontrolne mreže. Tako tenzorska ploskev interpolira “kotne” točke kontrolne mreže.

**Lastnost manjšanja variacije:** Te lastnosti tenzorske Bézierove ploskve **ne** prevzamejo od Bézierovih krivulj, saj ni dobro definirana za ploskovni primer.

#### 4.1.5 Višanje stopnje

Tenzorsko Bézierovo ploskev stopenj  $(m, n)$  želimo zapisati kot ploskev stopenj  $(m+1, n)$ . Torej moramo najti kontrolne točke  $\mathbf{b}_{i,j}^{(1,0)}$ , tako, da velja

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^{m+1} \mathbf{b}_{i,j}^{(1,0)} B_i^{m+1}(u) \right] B_j^n(v). \quad (4.10)$$

Členi v oklepaju predstavljajo natanko  $n+1$  primerov višanja stopnje v krivuljnem primeru. Enačbe rešimo z uporabo (3.31):

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(1,0)} = \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \mathbf{b}_{i,j} + \frac{i}{m+1} \mathbf{b}_{i-1,j}; \quad i = 0, 1, \dots, m+1; \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

Tenzorski ploskvi torej zvišamo stopnjo v  $u$ -smeri z obravnavanjem stolpcev kontrolne mreže kot Bézierovih poligonov krivulj stopnje  $m$ , ter višanja stopnje vsake od njih.

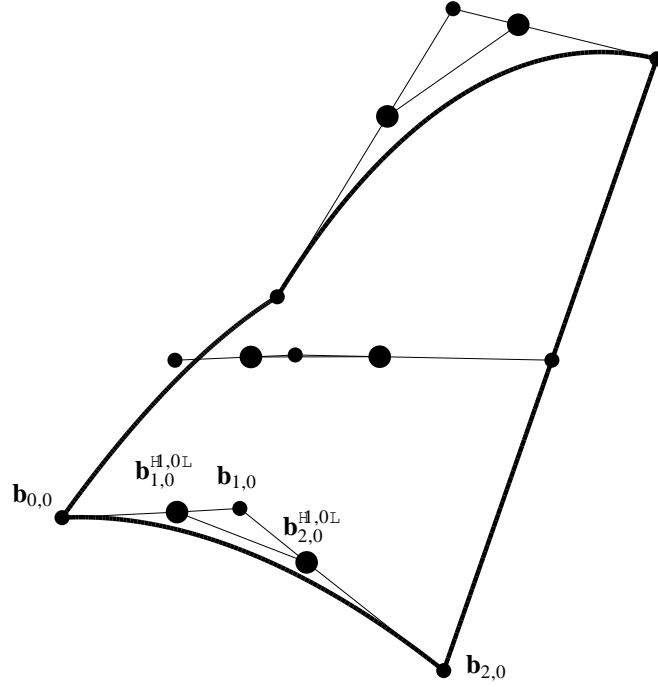
Višanje stopnje v  $v$ -smeri teče povsem analogno, višanje stopenj v obeh smereh pa lahko izvajamo postopoma, recimo najprej v  $u$ , nato pa še v  $v$ -smeri, ali pa obratno. Novo kontrolno mrežo lahko najdemo tudi v enem koraku:

$$\mathbf{b}_{i,j}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{i}{m+1} & 1 - \frac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1,j-1} & \mathbf{b}_{i-1,j} \\ \mathbf{b}_{i,j-1} & \mathbf{b}_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{j}{n+1} \\ 1 - \frac{j}{n+1} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

za  $i = 0, 1, \dots, m+1$  ter  $j = 0, 1, \dots, n+1$ . Novo kontrolno mrežo dobimo iz stare z odsekoma bilinearno interpolacijo.

#### 4.1.6 Odvajanje

V primeru Bézierovih krivulj se je odvajanje preneslo na diferenciranje kontrolnih točk, podobno pa velja tudi za tenzorske ploskve. Obravnavali bomo



Slika 4.3: Višanje stopnje tenzorske Bézierove ploskve.

parcialne odvode na  $u$  in  $v$ . Parcialni odvod je tangentni vektor na izoparametrično krivuljo na ploskvi:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) \right] B_j^n(v).$$

Izraz v oklepaju je odvisen samo od  $u$ , zato lahko uporabimo enačbo za odvod Bézierove krivulje (3.16):

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v).$$

Oznaka  $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$  pomeni, da izvajamo diferenco v smeri  $u$ . Podobno dobimo tudi parcialni odvod tenzorske ploskve na  $v$ :

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{i,j} B_j^{n-1}(v) B_i^m(u).$$

Spet smo problem za tenzorsko ploskev prevedli na več podproblemov za Bézierove krivulje: za izračun parcialnega odvoda na  $u$  vzamemo vse stolpce kontrolne mreže kot generatorje Bézierovih krivulj, izračunamo njihove odvode pri parametru  $u$ , nato pa izračunane odvode vzamemo za koeficiente Bézierove krivulje stopnje  $n$ , ter izračunamo njeno vrednost pri  $v$ .

Z nadaljevanjem postopka pridemo do parcialnih odvodov višjih redov:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) &= \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-r} \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^n(v), \\ \frac{\partial^s}{\partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) &= \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} B_j^{n-s}(v) B_i^m(u),\end{aligned}\quad (4.13)$$

kjer velja

$$\begin{aligned}\Delta^{r,0} \mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{b}_{i,j}, \\ \Delta^{0,s} \mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{b}_{i,j}.\end{aligned}$$

Enostavno izračunamo tudi mešane odvode

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \frac{m! n!}{(m-r)! (n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v). \quad (4.14)$$

Opozoriti je potrebno, da so koeficienti  $\Delta^{r,s} \mathbf{b}_{i,j}$  vektorji. Oglejmo si še parcialni odvod tenzorske Bézierove ploskve preko roba  $u = 0$ . Zapišimo enačbo (4.13) pri  $u = 0$ :

$$\frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{b}^{m,n}(0, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{0,j} B_j^n(v). \quad (4.15)$$

Torej je  $r$ -ti parcialni odvod preko roba tenzorske ploskve odvisen samo od  $r + 1$  stolpcev Bézierovih kontrolnih točk poleg tega roba. Podobno velja tudi za odvode preko preostalih robov tenzorske ploskve. To bomo uporabili za izpeljavo pogojev zvezne odvedljivosti med zlepljenimi tenzorskimi ploskvami.

#### 4.1.7 Pogoji gladkosti

Naj bosta  $\mathbf{x}(u, v)$  in  $\mathbf{y}(u, v)$  tenzorski ploskvi, definirani na  $[u_{I-1}, u_I] \times [v_J, v_{J+1}]$  ter  $[u_I, u_{I+1}] \times [v_J, v_{J+1}]$  s kontrolnima mrežama  $\{\mathbf{b}_{i,j}; 0 \leq i \leq$



$m, 0 \leq j \leq n\}$  ter  $\{\mathbf{b}_{i,j}; m \leq i \leq 2m, 0 \leq j \leq n\}$ . Na skupnem robu imata ploskvi iste kontrolne točke, ki določajo skupni rob, ki je polinomska Bézierova krivulja. Ploskvi sta  $r$ -krat zvezno odvedljivi preko skupnega roba  $\mathbf{x}(u_I, v) = \mathbf{y}(u_I, v)$ , če se na robu ujemajo vsi parcialni odvodi na  $u$  do reda  $r$ :

$$\frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{x}(u, v)|_{u=u_I} = \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{y}(u, v)|_{u=u_I}. \quad (4.16)$$

Uporabimo enačbo (4.15) za odvode preko roba tenzorske Bézierove ploskve. Enačbo moramo s pomočjo verižnega pravila prevesti iz lokalnih v globalne koordinate, podobno kot pri sestavljenih krivuljah (enačba (3.61)):

$$\left(\frac{1}{\Delta u_{I-1}}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{m-r,j} B_j^n(v) = \left(\frac{1}{\Delta u_I}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{m,j} B_j^n(v), \quad (4.17)$$

kjer je  $\Delta u_I = u_{I+1} - u_I$ . Ker so  $B_j^n(v)$  linearno neodvisni, lahko primerjamo koeficiente:

$$\left(\frac{1}{\Delta u_{I-1}}\right)^r \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{m-r,j} = \left(\frac{1}{\Delta u_I}\right)^r \Delta^{r,0} \mathbf{b}_{m,j}; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

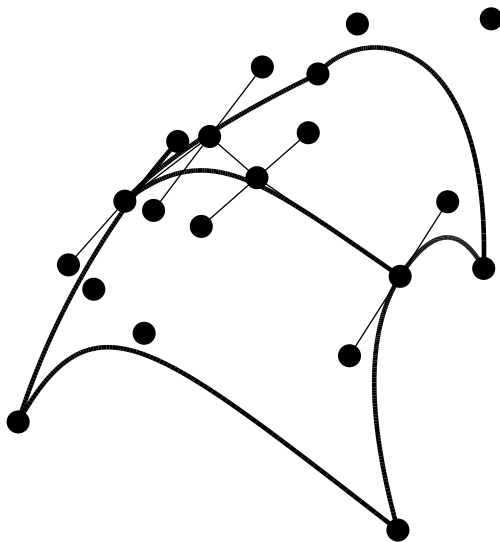
To pa so točno  $C^r$  pogoji (3.61) za Bézierove krivulje, uporabljeni na vseh  $n + 1$  vrsticah kontrolnih točk sestavljene kontrolne mreže. Tako smo prišli do pogoja  $r$ -kratne zvezne odvedljivosti:

**Izrek 15.** *Sosednji tenzorski Bézierovi ploskvi sta  $r$ -krat zvezno odvedljivi preko skupnega roba natanko takrat, ko so vse vrstice kontrolnih točk njunih kontrolnih mrež kontrolni poligoni odsekoma Bézierovih krivulj tipa  $C^r$ .*

V primeru  $r = 1$  tako dobimo pogoj, da morajo biti za vse  $j$  poligoni iz točk  $\mathbf{b}_{0,j}, \mathbf{b}_{1,j}, \dots, \mathbf{b}_{2m,j}$  kontrolni poligoni odsekoma Bézierove krivulje tipa  $C^1$ . Zato morajo biti točke  $\mathbf{b}_{m-1,j}, \mathbf{b}_{m,j}$  in  $\mathbf{b}_{m+1,j}$  kolinearne in v razmerju (ratio)  $\Delta u_I : \Delta u_{I+1}$ . Ratio mora biti enak za vse  $j$ .

#### 4.1.8 Delitev (subdivizija) tenzorskih ploskev

V primeru krivulj je de Casteljauov algoritem generiral točke, poleg tega pa je bil uporaben tudi pri delitvi krivulje. Podobno velja tudi v primeru tenzorskih ploskev. Naj bo definicijsko območje (pravokotnik) tenzorske Bézierove ploskve z daljico  $u = \hat{u}$  razdeljen v dva pravokotnika. Ta daljica se preslika v izoparametrično krivuljo na ploskvi, ki tako razdeli ploskev na dva dela. Radi bi dobili kontrolni mreži podploskev. Ker sta podploskvi del



Slika 4.4: Zvezno odvedljiva sestavljena tenzorska Bézierova ploskev.

globalne Bézierove tenzorske ploskve, sta  $C^n$  na skupnem robu, torej morajo vse vrstice kontrolnih točk tvoriti kontrolne poligone odsekoma Bézierovih krivulj  $n$ -te stopnje razreda  $C^n$ . Te krivulje so med seboj povezane s pogoji postopka delitve iz krivuljnega primera (razdelek (3.7)).

Torej je algoritem delitve naslednji: vse vrstice kontrolne mreže vzamemo za kontrolne poligone Bézierovih krivulj. Vsako od krivulj razdelimo pri  $u = \hat{u}$ . Dobljene kontrolne točke tvorijo kontrolni mreži razdeljene ploskve.

Delitev vzdolž izoparametrične krivulje  $v = \hat{v}$  poteka podobno; z zaporednim postopkom delitve vzdolž  $u = \hat{u}$  ter  $v = \hat{v}$  pa lahko ploskev razdelimo v štiri podploskve.

## Poglavje 5

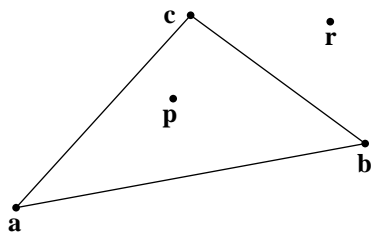
# Trikotne Bézierove krpe

### 5.1 Baricentrične koordinate in linearna interpolacija

Baricentrične koordinate je vpeljal F. Moebius leta 1827. Poljubne tri nekolinarne točke  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$  definirajo baričentrični koordinatni sistem v ravnini. Vsako točko  $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^2$  lahko zapišemo kot baricentrično kombinacijo točk  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  z:

$$\mathbf{p} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}, \quad u + v + w = 1. \quad (5.1)$$

**Definicija:** Koeficiente  $\mathbf{u} := (u, v, w)$  imenujemo **baricentrične koordinate** točke  $\mathbf{p}$  glede na  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Pogosto enačimo koordinate točke kar s točko  $\mathbf{u}$ . Točke znotraj trikotnika  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  imajo pozitivne baricentrične koordinate, ostale točke pa imajo kakšno koordinato negativno.



Slika 5.1: Baricentrične koordinate: trikotnik  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  določa koordinatni sistem v ravnini. Točka  $\mathbf{p}$  ima baricentrične koordinate  $(0.3, 0.2, 0.5)$ , točka  $\mathbf{r}$  pa  $(-0.3, 0.5, 0.8)$ .

Pri podanih (nekolinearnih) točkah  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  in  $\mathbf{p}$ , lahko s pomočjo Cramer-

jevega pravila dobimo baricentrične koordinate točke  $\mathbf{p}$ :

$$u = \frac{\text{pl}(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad v = \frac{\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad w = \frac{\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad (5.2)$$

kjer  $\text{pl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  označuje ploščino trikotnika, določenega s točkami  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Baricentrične koordinate so afino invariantne. Naj ima točka  $\mathbf{p}$  baricentrične koordinate  $(u, v, w)$  glede na točke  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Na točkah  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}$  uporabimo afino preslikavo  $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{z}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ . Upoštevamo, da velja  $u + v + w = 1$  in zapišemo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{p}) &= A\mathbf{p} + \mathbf{z} \\ &= A(u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}) + (u + v + w)\mathbf{z} \\ &= uA\mathbf{a} + vA\mathbf{b} + wA\mathbf{c} + u\mathbf{z} + v\mathbf{z} + w\mathbf{z} \\ &= u\Phi\mathbf{a} + v\Phi\mathbf{b} + w\Phi\mathbf{c}. \end{aligned}$$

□

Baricentrične koordinate lahko uporabimo za definicijo linearne interpolacije. Naj bodo  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  točke v  $\mathbb{E}^3$ . Potem vsaka točka oblike:

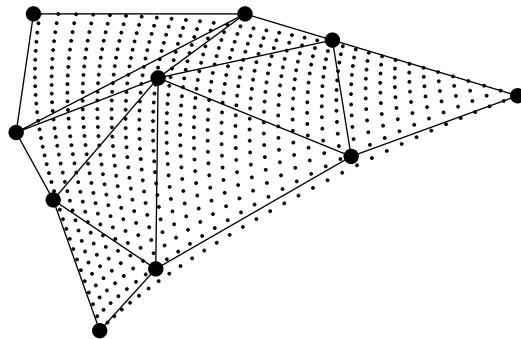
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(u, v, w) = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3, \quad u + v + w = 1 \quad (5.3)$$

leži v ravnini, ki jo določajo točke  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ . To preslikavo  $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  imenujemo **linearna interpolacija**. Ker je  $u + v + w = 1$ , lahko gledamo na  $u, v, w$  kot baricentrične koordinate točke  $\mathbf{p}$  glede na točke  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ . Podobno lahko gledamo  $u, v, w$  kot baricentrične koordinate točke v  $\mathbb{E}^2$  glede na nek trikotnik, definiran z nekimi točkami  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Tako na enačbo (5.3) gledamo kot na preslikavo trikotnika  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$  na trikotnik  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{E}^3$ . Trikotnik  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  imenujemo **nosilni trikotnik**. Ker položaj in oblika trikotnika (razen pogoja nekolinearnosti) nista pomembna, je linearna interpolacija afina preslikava.

## 5.2 De Casteljauov algoritem

De Casteljauov algoritem za trikotne Bézierove krpe (Bézierove trikotnike) je posplošitev standardnega de Casteljauovega algoritma za Bézierove krivulje. Tako kot algoritem za krivulje, tudi posplošeni algoritem uporablja ponavljanje linearnih interpolacij. Namesto kontrolnega poligona imamo kontrolno mrežo, ki je v obliki strukture iz trikotnikov. Kontrolne točke označimo z  $\mathbf{b}_{ijk}$ , kjer je  $i + j + k = n$  in  $i, j, k \geq 0$ ;  $n$  je stopnja Bézierove krpe. Točke

mreže zapišemo v obliki trikotnika in jih označimo na naslednji način: točka v  $i$ -ti vrstici ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) ima srednji indeks enak  $i$ ; nato pa z leve proti desni po vrsti postavljamo prvi indeks od 0 do  $n - i$ , preostali indeks pa je določen z  $k = n - i - j$ .



Slika 5.2: Trikotna Bézierova krpa stopnje 3 s kontrolno mrežo.

V primeru  $n = 4$  imamo strukturo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{b}_{040} & & \\
 & & & & \mathbf{b}_{031} & \mathbf{b}_{130} & \\
 & & & & \mathbf{b}_{022} & \mathbf{b}_{121} & \mathbf{b}_{220} \\
 & & & & \mathbf{b}_{013} & \mathbf{b}_{112} & \mathbf{b}_{211} & \mathbf{b}_{310} \\
 & & & & \mathbf{b}_{004} & \mathbf{b}_{103} & \mathbf{b}_{202} & \mathbf{b}_{301} & \mathbf{b}_{400}
 \end{array}$$

Kontrolno mrežo določa  $\dim \mathbb{P}^n = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  kontrolnih točk. Uporabimo multiindeks  $\mathbf{i} := (i, j, k)$  in točke  $\mathbf{b}_{ijk}$  označimo krajše z  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ , velikost multiindeksa pa naj označuje  $|\mathbf{i}| := i + j + k$ . Standardno bazo kartezičnega koordinatnega sistema označimo z  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

S pomočjo uvedenih oznak zapišimo de Casteljaouv algoritem za trikotne krpe:

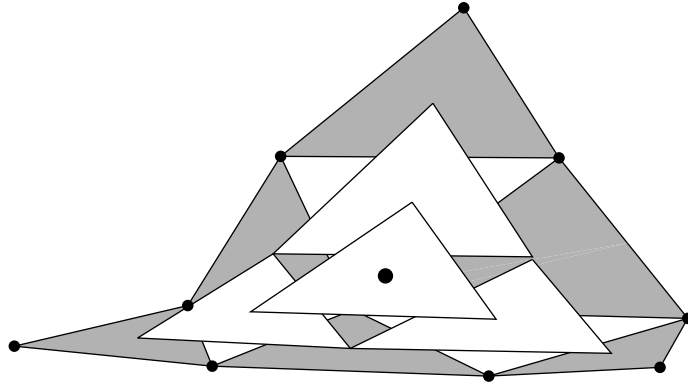
**de Casteljaouv algoritem:**

Podana je trikotna struktura kontrolnih točk  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}^3$ ,  $|\mathbf{i}| = n$ , ter točka  $(x, y) \in \mathbb{E}^2$  z baricentričnimi koordinatami  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ .

Izračunajmo:

$$\mathbf{b}_i^r(\mathbf{u}) = u\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u}), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad |\mathbf{i}| = n - r, \quad (5.4)$$

kjer je  $\mathbf{b}_i^0(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_i$ . Potem je  $\mathbf{b}_0^n(\mathbf{u})$  točka z vrednostjo parametra  $\mathbf{u}$  na trikotni Bézierovi krpi  $\mathbf{b}^n$ .



Slika 5.3: De Casteljauov algoritem za trikotne Bézierove krpe. Točko na ploskvi dobimo s ponavljanjem linearnih interpolacij.

Z uporabo lastnosti de Casteljauovega algoritma lahko dokažemo nekaj lastnosti trikotnih Bézierovih krp.

**Afina invariantnost:** Trikotne Bézierove krpe so invariantne za afine transformacije. De Casteljauov algoritem uporablja samo linearne interpolacije; le-te pa so afine preslikave.

**Invariantnost za afine transformacije parametra:** V algoritmu nismo predpostavili kakšnega določenega nosilnega trikotnika, glede na katerega so določene baricentrične koordinate  $\mathbf{u}$ . Po afini transformaciji nosilnega trikotnika ostanejo baricentrične koordinate nespremenjene, in dobimo invariantnost za afino transformacijo parametra.

**Lastnost konveksne ovojnice:** Če velja  $0 \leq u, v, w \leq 1$ , so vsi po de Casteljauovem algoritmu izračunani  $\mathbf{b}_i^r$  konveksne kombinacije  $\mathbf{b}_i^{r-1}$ .

**Robne krivulje:** Robne krivulje za trikotno krpo so določene z robnimi točkami kontrolne mreže (vsaj en indeks je enak 0). Robne krivulje so Bézierove krivulje, dobljene s standardnim de Casteljauovim algoritmom za krivulje (za primer  $v = 0$ ):

$$\mathbf{b}_i^r(u, 0, w) = u\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_1}^{r-1} + w\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_3}^{r-1}; \quad u + w = 1.$$

## 5.3 Trikotniški razcvet

Podobno kot v primeru Bézierovih krivulj lahko definiramo tudi razcvet trikotne krpe.

**Definicija:** Polinom  $\mathbf{b}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ , dobljen tako, da na  $r$ -tem koraku de Casteljauovega algoritma (5.4) uporabimo parameter  $\mathbf{u}_r$ , imenujemo **razcvet trikotne Bézierove krpe**.

**Opomba:** Argumenti  $\mathbf{u}_i$  so trojice števil, ki predstavljajo baricentrične koordinate točk nosilnega trikotnika.

Trikotniški razcvet ima enake lastnosti kot razcvet, definiran v razdelku (3.6) na strani 27, torej je simetrična funkcija svojih parametrov, afna glede na vse parametre, in velja:  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<n>}]$ .

**Izrek 16.** *Bézierove kontrolne točke lahko izrazimo kot vrednosti razcveta*

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[\mathbf{e}_1^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}], \quad \mathbf{i} = (i, j, k), \quad |\mathbf{i}| = n. \quad (5.5)$$

Dokaz: Oglejmo si primer razcveta  $\mathbf{b}[\mathbf{e}_1, \mathbf{u}^{<n-1>}]$ . Torej izvedemo en korak de Casteljauovega algoritma glede na  $\mathbf{e}_1$ , nato pa nadaljujemo z običajnim algoritmom glede na  $\mathbf{u}$ . Po prvem koraku dobimo:

$$\mathbf{b}_i^1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{b}_{i+1,j,k}, \quad |\mathbf{i}| = n - 1.$$

Dobimo trikotno krpo stopnje  $n - 1$  brez točk oblike:  $\mathbf{b}_{0,j,k}$ . Podobno lahko z uporabo  $\mathbf{e}_2$  in  $\mathbf{e}_3$  odstranimo tudi druge točke. Tako z  $i$ -kratno uporabo  $\mathbf{e}_1$ ,  $j$ -kratno uporabo  $\mathbf{e}_2$  ter  $k$ -kratno  $\mathbf{e}_3$ , pridemo do točke  $\mathbf{b}_{i,j,k}$ .  $\square$

Tudi vmesne točke, dobljene z de Casteljauovim algoritmom, lahko izrazimo kot vrednosti razcveta

$$\mathbf{b}_i^r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}[\mathbf{u}^{<r>}, \mathbf{e}_1^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}], \quad i + j + k = n - r. \quad (5.6)$$

S pomočjo razcveta lahko enostavno izrazimo kontrolne točke glede na drugačen nosilni trikotnik. Naj novi nosilni trikotnik določajo točke  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ . Potem kontrolne točke v spremenjenih baricentričnih koordinatah dobimo z izračunom vrednosti razcveta

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[\mathbf{f}_1^{<i>}, \mathbf{f}_2^{<j>}, \mathbf{f}_3^{<k>}]. \quad (5.7)$$

## 5.4 Bernsteinovi polinomi in trikotne Bézierove krpe

Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  dveh spremenljivk so definirani z

$$B_i^n(\mathbf{u}) := \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k; \quad |\mathbf{i}| = n, \quad \mathbf{u} = (u, v, w), \quad |\mathbf{u}| = 1, \quad (5.8)$$

in  $B_{i,j,k}^n := 0$ , če je kakšen indeks  $i, j, k$  negativen.

**Izrek 17.** *Bernsteinovi polinomi zadoščajo enačbi*

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = uB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + vB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + wB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{i}| = n. \quad (5.9)$$

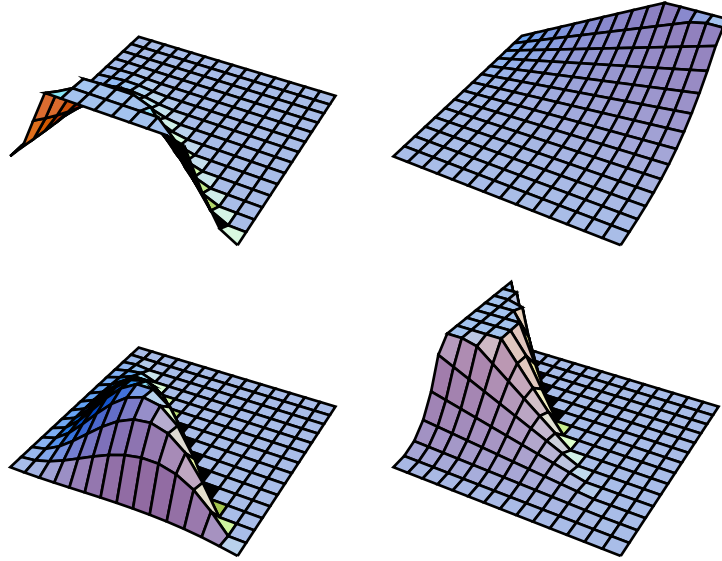
Dokaz: Izračunajmo enega od členov:

$$uB_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!} u^i v^j w^k.$$

Vsi členi imajo enake stopnje, torej je dovolj videti, da je:

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!} + \frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!} = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

Pomnožimo enačbo z  $i!j!k!$ , upoštevamo še  $i+j+k=n$ , in izrek je dokazan.  $\square$



Slika 5.4: Nekaj Bernsteinovih baznih polinomov pri  $n = 4$ .

**Izrek 18.** *Vmesne točke de Casteljauovega algoritma lahko izrazimo z Bernsteinovimi polinomi:*

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}); \quad |\mathbf{i}| = n - r. \quad (5.10)$$



**Opomba:** Za  $r = n$  dobimo izraz trikotne Bézierove krpe z Bernsteinovimi polinomi:

$$\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_0^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=n} \mathbf{b}_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{u}). \quad (5.11)$$

Dokaz: Uporabimo indukcijo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^{r+1}(\mathbf{u}) &= u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^r + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^r + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^r \\ &= u \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{e}_1} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) + v \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{e}_2} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) + w \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{e}_3} B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} (u\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_1}^r(\mathbf{u}) + v\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_2}^r(\mathbf{u}) + w\mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_3}^r(\mathbf{u})) \\ &= \sum_{|\mathbf{j}|=r+1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{r+1}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

in izrek je dokazan. V dokazu smo uporabili zapis  $B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u})$  z Bernsteinovimi polinomi nižje stopnje (5.9).  $\square$

**Opomba:** Trikotno Bézierovo krpo lahko izrazimo tudi s pomočjo vmesnih točk de Casteljauovega algoritma

$$\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{u}) B_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}), \quad 0 \leq r \leq n. \quad (5.12)$$

## 5.5 Odvodi

Zaradi uporabe baricentričnih koordinat parcialni odvodi niso primerno orodje za študij gladkosti trikotnih krp. Uporabiti je potrebno smerne odvode.

Definirajmo smerni odvod za trikotne krpe. Naj bosta  $\mathbf{u}_1$  in  $\mathbf{u}_2$  točki v definicijskem območju krpe. Njuna razlika  $\mathbf{d} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$  je vektor  $\mathbf{d} = (d, e, f)$ , kjer za komponente v baricentričnih koordinatah velja  $d + e + f = 0$ .

**Definicija: Smerni odvod** ploskve  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  v smeri vektorja  $\mathbf{d}$  je definiran z:

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{x}(\mathbf{u}) = d\mathbf{x}_u(\mathbf{u}) + e\mathbf{x}_v(\mathbf{u}) + f\mathbf{x}_w(\mathbf{u}). \quad (5.13)$$

Geometrijska interpretacija smernega odvoda: V definicijskem območju krpe potegnimo vzporednico vektorju  $\mathbf{d}$  skozi točko  $\mathbf{u}$ . Vzporednica se preslika v krivuljo na krpi, tangentni vektor nanjo v točki  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  pa je smerni odvod.

Izračunajmo parcialni odvod Bézierove krpe glede na  $u$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial u} \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k \mathbf{b}_{\mathbf{i}} \\
 &= n \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{(n-1)!}{(i-1)! j! k!} u^{i-1} v^j w^k \mathbf{b}_{\mathbf{i}} \\
 &= n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} \frac{(n-1)!}{i! j! k!} u^i v^j w^k \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} \\
 &= n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} B_{\mathbf{i}}^{n-1}(\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

V izpeljavi smo uporabili premik indeksa  $i-1 \rightarrow i$ . Podobno dobimo še parcialna odvoda glede na  $v$  ter  $w$ . Tako dobimo smerni odvod na Bézierovo krpo

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} [d \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} + e \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} + f \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}] B_{\mathbf{i}}^{n-1}(\mathbf{u}). \quad (5.14)$$

Izraz v oglatih oklepajih lahko s pomočjo de Casteljauovega algoritma (5.4) izrazimo z  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^1$ , in dobimo:

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}}^{n-1}(\mathbf{u}). \quad (5.15)$$

Smerni odvod torej dobimo z izvajanjem enega koraka de Casteljauovega algoritma glede na smerni vektor  $\mathbf{d}$ , ter  $n-1$  korakov glede na točko  $\mathbf{u}$ . To lahko krajše zapišemo s pomočjo razcveta:

$$D_{\mathbf{d}} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = n \mathbf{b}[\mathbf{d}, \mathbf{u}^{<n-1>}]. \quad (5.16)$$

Z nadaljevanjem opisanega postopka dobimo  $r$ -ti odvod Bézierove krpe v smeri vektorja  $\mathbf{d}$

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{b}[\mathbf{d}^{<r>}, \mathbf{u}^{<n-r>}]. \quad (5.17)$$

Tako  $r$ -ti odvod Bézierove krpe v smeri vektorja  $\mathbf{d}$  dobimo z izvajanjem  $r$  korakov de Casteljauovega algoritma glede na  $\mathbf{d}$ , ter  $n-r$  korakov glede na  $\mathbf{u}$ .

Podobno dobimo tudi mešane smerne odvode. Naj bosta  $\mathbf{d}_1$  in  $\mathbf{d}_2$  vektorja v definicijskem območju Bézierove ploskve  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ . Za  $r$ -kratni odvod v smeri  $\mathbf{d}_1$ , in  $s$ -kratni v smeri  $\mathbf{d}_2$  izračunamo

$$D_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2}^{r,s} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r-s)!} \mathbf{b}[\mathbf{d}_1^{<r>}, \mathbf{d}_2^{<s>}, \mathbf{u}^{<n-r-s>}]. \quad (5.18)$$

Sedaj  $r$ -ti smerni odvod, zapisan v notaciji razcvetov (5.17), zapišimo z Bernsteinovimi polinomi

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}). \quad (5.19)$$

Z izvajanjem de Casteljauovega algoritma v drugem vrstnem redu pa dobimo

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{j}|=r} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u}) B_{\mathbf{j}}^r(\mathbf{d}). \quad (5.20)$$

Enačba (5.20) je analogija enačbe (3.21) za  $r$ -ti odvod Bézierove krivulje. Pri tem so členi  $\mathbf{b}_{\mathbf{j}}^{n-r}(\mathbf{u})$  v vlogi posplošenih diferenc. Podobno je enačba (5.19) posplošitev enačbe (3.17).

V enačbo (5.20) postavimo  $r = 1$ . Dobimo

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{d}} \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) &= n \sum_{|\mathbf{j}|=1} \mathbf{b}_{\mathbf{j}}^{n-1}(\mathbf{u}) B_{\mathbf{j}}^1(\mathbf{d}) \\ &= n (d \mathbf{b}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + e \mathbf{b}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + f \mathbf{b}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Pri tem je lahko vektor  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$  poljuben. Torej določajo točke  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})$  **tangentno ravnino** na trikotno Bézierovo krpo v točki  $\mathbf{b}^n(\mathbf{u})$ . To je posplošitev izraza za določitev tangente na Bézierovo krivuljo. V posebnem primeru - “robni” Bézierovi kontrolni točki  $\mathbf{b}_{0,n,0}$ , je tangentna ravnina določena s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_{0,n,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,n-1,1}$ , ter  $\mathbf{b}_{1,n-1,0}$ . Analogno velja tudi za ostali “krajšči” kontrolne mreže,  $\mathbf{b}_{n,0,0}$  ter  $\mathbf{b}_{0,0,n}$ . Spet vidimo, da de Casteljauov algoritem računanja točk na krpi z vmesnimi izračuni prinaša tudi informacije o odvodih.

Oglejmo si še smerne odvode na robu trikotne Bézierove krpe. Vzemimo rob  $u = 0$  in vektor  $\mathbf{d}$ , ki mu ni vzporeden. Smerni odvod v smeri  $\mathbf{d}$ , izračunan v robnih točkah  $u = 0$ , je:

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u})|_{u=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{i}_0|=n-r} \mathbf{b}_{\mathbf{i}_0}^r(\mathbf{d}) B_{\mathbf{i}_0}^{n-r}(\mathbf{u})|_{u=0}, \quad (5.21)$$

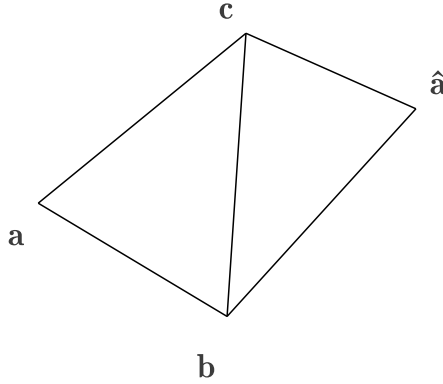
kjer je  $\mathbf{i}_0 = (0, j, k)$ . Ker je  $\mathbf{u}$  na robu krpe oblike  $\mathbf{u} = (0, v, w) = (0, v, 1-v)$ , dobimo Bézierovo krivuljo, zapisano v baricentrični obliki. Smerni odvod na robu krpe je odvisen le od  $r+1$  “vrstic” Bézierovih kontrolnih točk najbližje robu. Analogno velja tudi za ostala robova. Te rezultate bomo uporabili za konstrukcijo sestavljenih ploskev.

## 5.6 Širitev in delitev

Vzemimo ploskev, sestavljeno iz dveh trikotnih krp. Njuna nosilna trikotnika naj bosta določena s točkami  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ter  $\mathbf{b}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{c}$  (glej sliko 5.5). Točko  $\hat{\mathbf{a}}$  lahko izrazimo z baricentričnimi koordinatami glede na točke  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ :

$$\hat{\mathbf{a}} = v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c}.$$

Označimo  $\mathbf{v} := (v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ .



Slika 5.5: Nosilna trikotnika za širitev in delitev (v tem primeru bi točka  $\hat{\mathbf{a}}$  ležala znotraj trikotnika  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ) trikotne Bézierove krpe.

Naj ima Bézierov trikotnik  $\mathbf{b}^n$  nosilni trikotnik  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (v baricentričnih koordinatah:  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, \mathbf{b} = \mathbf{e}_2, \mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ ). Bézierova krpa je definirana na celi ravnini. Zanimajo nas kontrolne točke  $\mathbf{c}_i$  Bézierovega trikotnika  $\mathbf{b}^n$ , definirane nad trikotnikom  $\mathbf{b}, \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{c}$ . Uporabimo enačbo (5.7), in dobimo:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[\mathbf{v}^{<i>}, \mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}], \quad i + j + k = n. \quad (5.22)$$

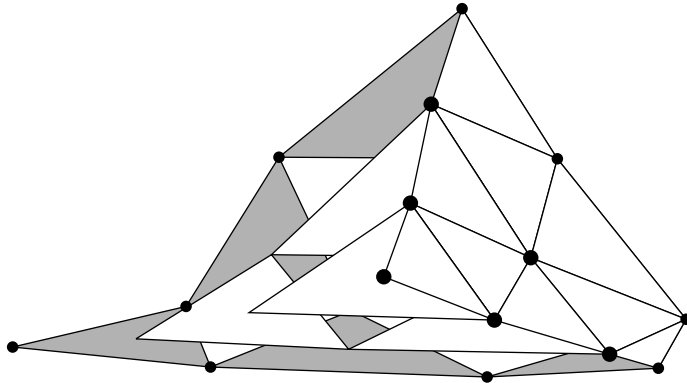
Kontrolne točke  $\mathbf{c}_i$  dobimo kot vmesne točke de Casteljauovega algoritma za izračun  $\mathbf{b}(\mathbf{v})$ .

Kontrolne točke obeh krp na skupnem robu ( $u = 0$ ) so enake:

$$\mathbf{c}_{0,j,k} = \mathbf{b}[\mathbf{e}_2^{<j>}, \mathbf{e}_3^{<k>}] = \mathbf{b}_{0,j,k}; \quad j + k = n.$$

Dobili smo algoritem za izračun Bézierovih kontrolnih točk **razširitve**  $\mathbf{b}^n$  na sosednjo krpo. V tem primeru algoritem ne uporablja konveksnih kombinacij, temveč odsekoma linearne ekstrapolacije, zato ni stabilen.

Če pa je  $\hat{\mathbf{a}}$  znotraj trikotnika  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , dobimo **algoritem delitve**, ki uporablja



Slika 5.6: Delitev: vmesne točke de Casteljauevega algoritma tvorijo kontrolne mreže podkrp trikotne Bézierove krpe. Zaradi boljše preglednosti je označena le ena od kontrolnih podmrež.

konveksne kombinacije. Točka  $\mathbf{b}^n(v_1, v_2, v_3)$  razdeli trikotno krpo v tri podkrpe, katerih kontrolne točke dobimo s pomočjo de Casteljauevega algoritma. Če v nosilni trikotnik vstavljamo dovolj razpršeno zaporedje točk, zaporedje ustreznih kontrolnih mrež konvergira proti ploskvi.

## 5.7 Odvedljivost

Pri krpah, nastalih iz tenzorskega produkta, je preprosto preverjati odvedljivost na skupnem robu sestavljene krpe: primerjamo parcialne odvode krp na skupnem robu. Pri trikotnih krpah parcialni odvodi niso primerno orodje, zato uporabljamo naslednjo posplošitev.

Vzemimo dve trikotni krpi, ki sta preslikavi sosednjih nosilnih trikotnikov. Vsaka premica v domeni, ki seka skupni rob nosilnih trikotnikov, se preslika v sestavljeno krivuljo v  $\mathbb{R}^3$ , ki ima po en del na vsaki krpi. Če so vse sestavljene krivulje, ki jih dobimo na ta način,  $r$ -krat zvezno odvedljive, pravimo, da je sestavljena krpa  $r$ -krat zvezno odvedljiva. Kot smo videli v prejšnjem razdelku, enačba (5.22) podaja pogoj, pri katerem sta sosednji krpi del globalne polinomske ploskve. Uporabimo oznake iz prejšnjega razdelka. Če  $r$  teče med 0 in  $s \leq n$ , dobimo pogoj za  $s$ -kratno zvezno odvedljivost med sosednjima krpama:

$$\hat{\mathbf{b}}_{(r,j,k)} = \mathbf{b}_{0,j,k}^r(\mathbf{v}); \quad r = 0, 1, \dots, s. \quad (5.23)$$

Enačba (5.23) je potreben in zadosten pogoj za  $C^s$  - zveznost dveh sosednjih krp, saj so po (5.21) smerni odvodi krpe preko roba do reda  $s$ , odvisni le od  $s + 1$  kontrolnih točk, “vzporednih” le-temu robu.

Pri  $s = 0$  z enačbo (5.23) dobimo pogoj zveznosti - sestavljeni krpi morata imeti na skupnem robu tudi skupni kontrolni poligon. Bolj zanimiv je primer  $s = 1$ ; dobimo pogoj:

$$\hat{\mathbf{b}}_{(1,j,k)} = v_1 \mathbf{b}_{1,j,k} + v_2 \mathbf{b}_{0,j+1,k} + v_3 \mathbf{b}_{0,j,k+1}.$$

Vsako kontrolno točko  $\hat{\mathbf{b}}_{(1,j,k)}$  dobimo kot baricentrično kombinacijo točk na robnih podtrikotnikih kontrolne mreže  $\mathbf{b}^n$ , in za vse  $j + k = n - 1$  so te bari-centrične kombinacije enake. Torej mora biti vsak par podtrikotnikov kontrolne mreže s skupnim robom na skupnem kontrolnem poligonu, koplanaren, ter afina preslikava para nosilnih trikotnikov podanih ploskev. Samo koplarnost ustreznih podtrikotnikov ni zadosti za  $C^1$  odvedljivost.

## 5.8 Višanje stopnje trikotne Bézierove krpe

Bézierovo krpo  $\mathbf{b}^n$  lahko zapišemo kot krpo stopnje  $n + 1$ . Naj  $\mathbf{b}_i$  označujejo začetne,  $\mathbf{b}_i^{(1)}$  pa nove kontrolne točke. Veljati mora enačba:

$$\sum_{|i|=n} \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) = \sum_{|i|=n+1} \mathbf{b}_i^{(1)} B_i^{n+1}(\mathbf{u}). \quad (5.24)$$

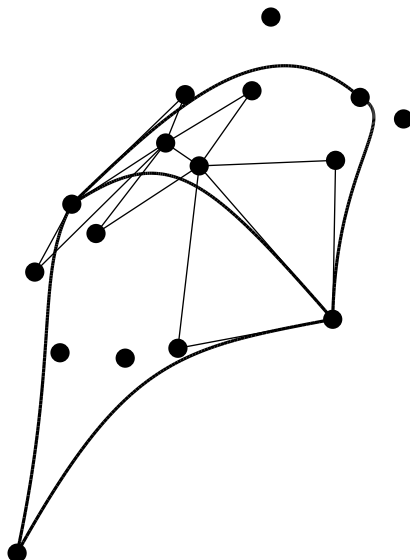
**Izrek 19.** *Kontrolne točke  $\mathbf{b}_i^{(1)}$  so podane z*

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{1}{n+1} [i \mathbf{b}_{i-\mathbf{e}_1} + j \mathbf{b}_{i-\mathbf{e}_2} + k \mathbf{b}_{i-\mathbf{e}_3}]. \quad (5.25)$$

Dokaz: Pomnožimo levo stran enačbe (5.24) z  $u + v + w = 1$  in izrazimo posamezne člene s pomočjo Bernsteinovih polinomov stopnje  $n + 1$ . S primerjavo koeficientov dobimo gornjo enačbo.  $\square$

Algoritem višanja stopnje sestavljajo odsekoma linearne interpolacije originalne kontrolne mreže, zato tudi nova kontrolna mreža leži v konveksni ovojnici originalne.

S ponavljanjem postopka višanja stopnje dobimo zaporedje kontrolnih mrež, ki konvergira proti Bézierovi ploskvi.



Slika 5.7: Zvezno odvedljiva sestavljena Bézierova krpa. Ustrezni pari trikotnikov, ki jih sestavljajo kontrolne točke ob skupnem robu, morajo biti koplarni, ter afine slike nosilnih trikotnikov.

## 5.9 Neparometrične krpe

Zapišimo funkcijo

$$z = \sum_{|\mathbf{i}|=n} b_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \quad (5.26)$$

v obliki ploskve:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \begin{bmatrix} i/n \\ j/n \\ k/n \\ b_{\mathbf{i}} \end{bmatrix} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}).$$

Abscisne vrednosti točk kontrolne mreže so podane kot trojice  $\frac{\mathbf{i}}{n}$ . Gornjo enačbo dobimo s pomočjo lastnosti ohranjanja premic za Bernsteinove poli-

nome (v primeru koordinate  $u$ ):

$$u = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{i}{n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}).$$

## 5.10 Racionalne Bézierove trikotne krpe

Podobno kot v primeru Bézierovih krivulj (razdelek (3.16)), definiramo **racionalno Bézierovo trikotno krpo** kot projekcijo Bézierove trikotne krpe iz  $\mathbb{E}^4$  v hiperravnino  $w = 1$ . Z idejo dokaza enačbe (3.48) dobimo enačbo za racionalno Bézierovo krpo stopnje  $n$ :

$$\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\sum_{|\mathbf{i}|=n} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}, \quad (5.27)$$

kjer so  $w_{\mathbf{i}}$  uteži, povezane s kontrolnimi točkami  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ . Če so vse uteži pozitivne, ima racionalna Bézierova trikotna krpa lastnost konveksne ovojnice ter invariantnosti za affine preslikave.

Točke na racionalni Bézierovi trikotni krpi lahko izračunamo s pomočjo **racionalnega de Casteljauovega algoritma**:

*Podani naj bodo trikotniška shema kontrolnih točk  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} \in \mathbb{E}^3$ ,  $|\mathbf{i}| = n$ , z utežmi  $w_{\mathbf{i}}$ , ter točka v nosilnem trikotniku, z baricentričnimi koordinatami  $\mathbf{u}$ .*

*Izračunamo*

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = \frac{u w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1} + v w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1} + w w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}}{w_{\mathbf{i}}^r}, \quad (5.28)$$

*kjer je:*

$$w_{\mathbf{i}}^r = w_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = u w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + v w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + w w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u}),$$

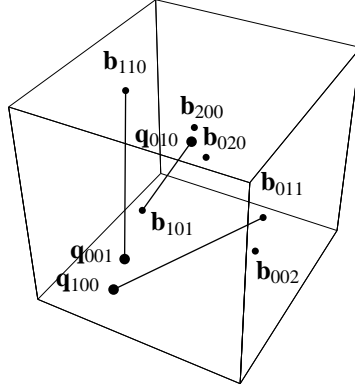
*za  $r = 1, 2, \dots, n$  ter  $|\mathbf{i}| = n - r$ . Začetne vrednosti so  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ ,  $w_{\mathbf{i}}^0 = w_{\mathbf{i}}$ . Izračunani  $\mathbf{b}_0^n(\mathbf{u})$  je točka na racionalni Bézierovi trikotni krpi.*

Algoritem izpeljemo s pomočjo projekcij vmesnih točk de Casteljauovega algoritma  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r$  iz štiri dimenzionalnega prostora, podobno kot v primeru racionalnih Bézierovih krivulj (razdelek (3.17)). Tudi za racionalne Bézierove trikotne krpe lahko definiramo utežne točke  $\mathbf{q}_{\mathbf{i}}$ ,

$$\mathbf{q}_{\mathbf{i}} = \frac{w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} + w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} + w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3} \mathbf{b}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}}{w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1} + w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2} + w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}}, \quad |\mathbf{i}| = n - 1.$$



V primeru racionalnih Bézierovih krivulj imajo utežne točke pomembno vlogo pri oblikovanju: z določitvijo utežnih točk  $\mathbf{q}_i$  so določene tudi uteži  $w_i$ . V posplošenem primeru racionalnih trikotnih krp pa to presenetljivo ne velja - ni znan postopek za generiranje uteži na geometrijski način.



Slika 5.8: Pri poljubno izbranih točkah  $\mathbf{q}_{001}, \mathbf{q}_{010}, \mathbf{q}_{100}$  ne moremo najti ustrezne množice uteži  $\{w_i\}$ .

Poglejmo si to v primeru  $n = 2$ . S pomočjo uteži  $w_i$  lahko izračunamo utežne točke ter točko

$$\mathbf{p} = \frac{w_{011}\mathbf{b}_{011} + w_{101}\mathbf{b}_{101} + w_{110}\mathbf{b}_{110}}{w_{011} + w_{101} + w_{110}},$$

ki leži na presečišču daljic  $\overline{\mathbf{q}_{001}, \mathbf{b}_{110}}$ ,  $\overline{\mathbf{q}_{010}, \mathbf{b}_{101}}$  ter  $\overline{\mathbf{q}_{100}, \mathbf{b}_{011}}$ .

Če pa izberemo uteži  $\mathbf{q}_i$  poljubno, se daljice ne sekajo v isti točki, torej točka  $\mathbf{p}$  ne obstaja. Ker iz eksistence uteži sledi obstoj točke  $\mathbf{p}$ , iz implikacije v obratno smer sledi, da s poljubno določenimi utežnimi točkami ne moremo najti ustrezne množice uteži.

Zapišimo še formulo za smerni odvod  $D_{\mathbf{d}}$  racionalne Bézierove trikotne krpe  $\mathbf{b}^n(\mathbf{u})$ . Naj  $\mathbf{d}$  označuje smerni vektor v nosilnem trikotniku, zapisan v baricentričnih koordinatah. Definirajmo še

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = w(\mathbf{u})\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} w_i \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}).$$

S pomočjo postopka iz razdelka (3.17.1) dobimo enačbo

$$D_{\mathbf{d}}\mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{1}{w(\mathbf{u})}[D_{\mathbf{d}}\mathbf{p}(\mathbf{u}) - D_{\mathbf{d}}w(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}^n(\mathbf{u})]. \quad (5.29)$$

S ponavljanjem postopka pridemo do formule za višje smerne odvode

$$D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{b}^n(\mathbf{u}) = \frac{1}{w(\mathbf{u})} [D_{\mathbf{d}}^r \mathbf{p}(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^r D_{\mathbf{d}}^j w(\mathbf{u}) D_{\mathbf{d}}^{r-j} \mathbf{b}^n(\mathbf{u})]. \quad (5.30)$$

## Poglavje 6

# Posplošitev Bézierovih krivulj in razcvet v splošnem

V tem razdelku si bomo ogledali baricentrične koordinate v  $\mathbb{R}^d$ , definirali naravno posplošitev Bézierovih krivulj (oziroma trikotnih Bézierovih krp) v poljubno dimenzionalni prostor, ter si ogledali razcvet v splošnem. Razcvet lahko uporabimo pri študiju zlepkov, zato si bomo ogledali pogoje gladkosti med dvema krpama v razcvetni obliki. Ideja je nekoliko nenavadna. Polinomske izraze posplošimo z vpeljavo novih spremenljivk na poseben način in uporabimo simetrijo v dobljenih izrazih. S tem se kompleksnost problema poveča, vendar pa nam to lahko poda povsem nov pogled na problem.

Preden definiramo razcvet v splošnem, se spomnimo nekaj pojmov. Naj bo  $W$  vektorski prostor. Funkcija  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  je **afina**, če velja

$$f\left(\sum_i u_i x_i\right) = \sum_i u_i f(x_i)$$

za vse  $x_i \in W$  in vse  $u_i \in \mathbb{R}$ , za katere velja  $\sum_i u_i = 1$  (baricentrične oz. affine kombinacije). Funkciji pravimo **multiafina**, če je afina v vseh svojih argumentih. Funkcija je **simetrična**, če se pri poljubni permutaciji argumentov njena vrednost ne spremeni. Naj bo  $\Pi_n(\mathbb{R}^m)$  prostor polinomov  $m$ -spremenljivk totalne stopnje  $\leq n$ . Za vsak  $p \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$  obstaja enoličen simetričen  $n$ -afini polinom

$$\mathcal{B}_n(p)\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right), \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^m,$$

ki ima diagonalno lastnost

$$\mathcal{B}_n(p)\left(\underbrace{x, \dots, x}_n\right) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

S tem je definiran  $\mathcal{B}_n(p)$ , **razcvet polinoma**  $p$ .

**Primer:** Razcvet polinoma

$$p_2(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

je podan z

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(p_2)\left((u_1, v_1), (u_2, v_2)\right) = \\ a_0 + a_1 \frac{u_1 + u_2}{2} + a_2 \frac{v_1 + v_2}{2} + a_3 u_1 u_2 + a_4 \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{2} + a_5 v_1 v_2. \end{aligned}$$

Razcvetni pristop je nova metoda v teoriji zlepkov, na nekaterih drugih področjih matematike pa ga že dolgo uporabljamo. Tak primer so kvadratne in bilinearne forme v linearni algebri. Znano je, da za vsako kvadratno formo  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  na vektorskem prostoru  $W$  obstaja enolična simetrična bilinearna forma  $f : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , ki ima lastnost:  $F(v) = f(v, v)$ ,  $v \in W$ . V drugih vejah matematike se za razcvet uporablja tudi izraz polarna forma. Ramshaw ([12]) izraza ni poznal, in je uporabil poimenovanje, kjer je  $f$  imenoval **razcvet (blossom)** polinoma  $F$ . Ideja za to izhaja iz tega, da izraz razcvet namiguje na razkritje skrite strukture, kar dobro opisuje, kaj se zgodi, ko  $F$  pretvorimo v  $f$ .

Razcvetni zapis je posebej uporaben v teoriji Bézierovih krivulj, saj omogoča eleganten zapis in preprosto izpeljavo lastnosti ter uporabo krivulj, kar smo videli v razdelku 3.6.

Paul de Faget de Casteljau je razcvetni pristop v teoriji zlepkov imenoval oblike skozi pole (shapes through poles), Carl de Boor ga je imenoval B-zlepki brez deljenih diferenc, Lyle Ramshaw pa razcvet.

## 6.1 Zapis polinoma v razcvetni obliki

Oglejmo si razcvetni pristop bolj natančno. Naj  $\mathbb{Z}_+$  označuje množico nenegativnih celih števil, male grške črke pa naj označujejo vektorje s komponentami iz  $\mathbb{Z}_+$ . Uporabljali bomo multiindeksni zapis. Vzemimo vektorja

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$$

ter vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , ter definirajmo

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_m!, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m},$$

$$\binom{n}{\alpha} := \begin{cases} \frac{n!}{\alpha!(n-|\alpha|)!}, & 0 \leq \alpha, |\alpha| \leq n \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Tu  $\alpha \leq \beta$  označuje relacijo  $\leq$  po komponentah ( $\alpha_i \leq \beta_i, \forall i$ ),  $\alpha < \beta$  pa naj označuje  $\alpha \leq \beta$ , kjer za vsaj en  $i$  velja  $\alpha_i < \beta_i$ . Posplošeni binomski koeficient je definiran z

$$\binom{\alpha}{\beta} := \begin{cases} \prod_{j=1}^m \binom{\alpha_j}{\beta_j}, & 0 \leq \beta \leq \alpha \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Sedaj lahko zapišemo osnovni izrek o razvetu.

**Izrek 20.** Za vsak polinom več spremenljivk  $p_n \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$  totalne stopnje  $n$  obstaja enolična simetrična  $n$ -afina funkcija

$$\mathcal{B}(p_n) : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

ki ima diagonalno lastnost

$$\mathcal{B}(p_n)(\underbrace{x, x, \dots, x}_n) = p_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Funkcijo  $\mathcal{B}(p_n)$  imenujemo **razcvet polinoma**  $p_n$ , polinomu  $p_n$  pa rečemo **polara** polinoma  $\mathcal{B}(p_n)$ .

Preden dokažemo izrek, opišimo povezavo med razcvetom polinoma  $p_n$  in njegovim zapisom v  $B$ -obliki (Bernsteinova, Bézierova, de Boor-ova oblika). Vpeljimo še nekaj oznak. Naj bodo  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \in \mathbb{R}^m$ . Konveksna ovojnica danih točk

$$T := \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i v^{(i)}; \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

je  $m$ -**simpleks**, če je njen volumen neničeln,

$$\text{vol} \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} 1 & v_1^{(1)} & \dots & v_m^{(1)} \\ 1 & v_1^{(2)} & \dots & v_m^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_1^{(m+1)} & \dots & v_m^{(m+1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Naj bo  $T = \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle$   $m$ -simpleks. Vsakemu  $x \in \mathbb{R}^m$  pripadajo **baricentrične koordinate**  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$  glede na  $T$ ,

$$\lambda_i = \frac{\text{vol} \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(i-1)}, x, v^{(i+1)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle}{\text{vol} \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle}.$$

Vsak polinom  $p_n \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$  totalne stopnje  $n$  se da zapisati v  $B$ -obliki

$$p_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha B_\alpha(\lambda).$$

Točke  $c_\alpha$  so **kontrolne točke** polinoma  $p_n$ , polinomi  $B_\alpha \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$  pa so **Bernsteinovi (Bézierovi, de Boorovi) polinomi**,

$$B_\alpha(\lambda) = \frac{n}{\alpha!} \lambda^\alpha,$$

kjer je  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$  baricentrična koordinata točke  $x$ . Dobili smo naravno posplošitev Bézierovih krivulj.

**Lema 1.** *Naj bo  $p_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha B_\alpha(\lambda)$  polinom totalne stopnje  $\leq n$ , definiran glede na  $m$ -simpleks  $\langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle$ , in naj bo  $\mathcal{B}(p_n)$  njegov razcvet. Potem je*

$$c_\alpha = \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{v^{(1)}, v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}} \right), \quad \forall |\alpha| = n,$$

kjer je

$$B_\alpha(\lambda) = \frac{n}{\alpha!} \lambda^\alpha,$$

in je  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1})$  baricentrična koordinata točke  $x$ ,

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i v^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1. \quad (6.1)$$

Lema 1 pravi, da so  $B$ -koefficienti  $c_\alpha$  polinoma  $p_n$  vrednosti njegovega razcveta  $\mathcal{B}(p_n)$  v določenih točkah. Ko je enkrat razcvet polinoma znan, je enostavno najti  $B$ -obliko polinoma  $p_n$  glede na poljuben  $m$ -simpleks.

*Dokaz.* Najprej bomo uporabili diagonalno lastnost razcveta, nato pa še lastnosti baricentričnih koordinat (6.1). Tako dobimo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, x, \dots, x}_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \mathcal{B}(p_n) \left( v^{(i)}, \underbrace{x, x, \dots, x}_{n-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_i \lambda_j \mathcal{B}(p_n) \left( v^{(i)}, v^{(j)}, \underbrace{x, x, \dots, x}_{n-2} \right) \\ &= \dots \\ &= \sum_{|\alpha|=n} \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{v^{(1)}, v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}} \right) B_\alpha(\lambda). \end{aligned}$$

V računu smo uporabili multiafinost in simetričnost razcveta  $\mathcal{B}(p_n)$ .  $\square$

Dokažimo osnovni izrek razcvetnega pristopa, izrek 20.

*Dokaz.* Najprej si oglejmo primer  $m = 1$ . Za elementarne simetrične funkcije  $\sigma_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$  velja

$$\sigma_k(\underbrace{x, x, \dots, x}_n) = \binom{n}{k} x^k.$$

Poljuben polinom  $p_n$  stopnje  $n$  lahko izrazimo v obliki

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j p_n(0) x^j.$$

S pomočjo elementarnih simetričnih funkcij lahko tako zapišemo razcvet polinoma  $p_n$  kot

$$\mathcal{B}(p_n)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{j=0}^n \frac{D^j p_n(0)}{j!} \binom{n}{j}^{-1} \sigma_j(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Definirajmo elementarne simetrične funkcije v več spremenljivkah z

$$\sigma_\gamma(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) := \sum_{\substack{e^{i_1} + e^{i_2} + \dots + e^{i_n} = \gamma \\ i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, \dots, m\}}} (x^{(1)})^{e^{i_1}} (x^{(2)})^{e^{i_2}} \dots (x^{(n)})^{e^{i_n}}, \quad (6.2)$$

za  $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$  in  $|\gamma| \leq n$ . Tu je  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^m$ ,  $e^0 := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ ,  $e^i$ ,  $1 \leq i \leq m$  pa so standardni enotski vektorji v  $\mathbb{R}^m$ .

Naj bo

$$D := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right).$$

Vsak polinom  $p_n \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$  lahko zapišemo v Taylorjevo vrsto

$$p_n(x) = \sum_{\substack{|\gamma| \leq n \\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^m}} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma p_n(0) x^\gamma. \quad (6.3)$$

Razcvet monoma  $x^\gamma$  je enak

$$\mathcal{B}(x^\gamma)(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = \binom{n}{\gamma}^{-1} \sigma_\gamma(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}). \quad (6.4)$$

Tako iz (6.3) in (6.4) dobimo razcvet polinoma  $p_n$ ,

$$\mathcal{B}(p_n)(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = \sum_{|\gamma| \leq n} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma p_n(0) \binom{n}{\gamma}^{-1} \sigma_\gamma(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}).$$

S tem je osnovni izrek razcvetnega pristopa dokazan.  $\square$

Za elementarne simetrične funkcije več spremenljivk (6.2) velja

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x, \dots, x) &= \binom{n}{\alpha} x^\alpha, \\ \sigma_\alpha(t x^{(1)}, t x^{(2)}, \dots, t x^{(n)}) &= t^{|\alpha|} \sigma_\alpha(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}, x^{(r+1)}, x^{(r+2)}, \dots, x^{(n)}) \\ = \sum_{\beta \leq \alpha} \sigma_\beta(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}) \sigma_{\alpha-\beta}(x^{(r+1)}, x^{(r+2)}, \dots, x^{(n)}). \end{aligned}$$

Za izračun vrednosti razcveta  $\mathcal{B}(p_n)$  v točki  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  lahko uporabimo modificirani de Casteljauov algoritem. Naj bodo  $\lambda^k$  baricentrične koordinate točke  $x^{(k)}$  glede na  $m$ -simpleks  $S$ . Predpostavimo še, da so znani  $B$ -koeficienti  $c_\alpha$ ,  $|\alpha| = n$ , polinoma  $p_n$  glede na  $m$ -simpleks  $S$ . Potem je modificirani de Casteljauov algoritem:

```

for  $k = 1, 2, \dots, n$ 
  for  $|\alpha| = n - k$ 
     $c_\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^k c_{\alpha+e^i}$ 
  end
end
print "vrednost  $\mathcal{B}(p_n)$  v točki  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  je enaka  $c_0$ ".

```

V posebnem primeru, če so vse točke enake,  $x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(n)}$ , modificirani de Casteljauov algoritem postane standardni de Casteljauov algoritem.

## 6.2 Pogoji gladkosti v razcvetni obliki

Za študij pogojev gladkosti potrebujemo smerne odvode. Smerni odvod funkcije  $f$  v smeri vektorja med točkama  $A$  in  $B$ , izračunan v  $x$ , je definiran



z

$$\begin{aligned}(D_{B-A}f)(x) &:= \frac{d}{dt}f(x + t(B-A))|_{t=0} \\ &= (B-A) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1}f(x), \frac{\partial}{\partial x_2}f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}f(x) \right).\end{aligned}$$

Če je  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = B - A$ , lahko krajše zapišemo

$$D_y := D_{B-A} = \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Za  $y = v^{(i)} - v^{(j)}$ ,  $i \neq j$ , bomo uporabljali krajšo oznako

$$D_{ij} := D_{v^{(i)} - v^{(j)}}, \quad i \neq j.$$

Vpeljimo notacijo

$$E_i(a_\alpha) := a_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i+1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{m+1})},$$

za prištevanje 1 k  $i$ -ti komponenti indeksa  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$ . Definirajmo še diferenčni operator

$$\Delta_{ij}a_\alpha := E_i a_\alpha - E_j a_\alpha. \quad (6.5)$$

**Lema 2.** Naj bo  $p_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha B_\alpha(\lambda)$  polinom v  $B$ -obliki glede na  $m$ -simpleks  $\langle v^{(1)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle$ . Za  $i \neq j$  velja

$$(D_{ij}p_n)(x) = n \cdot \sum_{|\alpha|=n-1} \Delta_{ij}c_\alpha B_\alpha(\lambda). \quad (6.6)$$

*Dokaz.* Ker je  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  in  $v^{(i)} := (v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i)$ , velja

$$x_k = \sum_{\ell=1}^{m+1} \lambda_\ell x_\ell^k, \quad k = 1, 2, \dots, m+1.$$

Sledi

$$\begin{aligned}(D_{ij}p_n)(x) &= \sum_{k=1}^{m+1} (v_k^i - v_k^j) \frac{\partial}{\partial x_k} p_n(x) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right) p_n(x).\end{aligned}$$

S premikom indeksov v

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m+1} = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{m+1}!} c_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right) \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$$

dobimo (6.6). □

Poglejmo, kako se odvod polinoma  $p_n$  izraža z njegovim razcvetom  $\mathcal{B}(p_n)$ .

**Lema 3.** *Naj bo  $p_n \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$ , in naj bo*

$$\mathcal{B}(p_n) : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

*njegov razcvet. Potem je za vsak  $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$ ,  $\gamma$ -ti odvod  $p_n$  v točki  $x$  podan z*

$$\begin{aligned} D^\gamma p_n(x) &= \frac{n!}{(n - |\gamma|)!} \sum_{\eta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\eta} (-1)^{|\gamma - \eta|} \\ &\quad \cdot \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n - |\eta|}, \underbrace{x + e^1, \dots, x + e^1}_{\eta_1}, \dots, \underbrace{x + e^m, \dots, x + e^m}_{\eta_m} \right). \end{aligned}$$

*Dokaz.* Naj bo  $T$  standardni  $m$ -simpleks,

$$T := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i e^i, \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq 1 \right\}. \quad (6.7)$$

Potem lahko za  $u \in x + T$  zapišemo

$$\begin{aligned} u &= x + \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \dots + \lambda_m e^m \\ &= \lambda_0 x + \lambda_1 (x + e^1) + \lambda_2 (x + e^2) + \dots + \lambda_m (x + e^m), \end{aligned}$$

kjer je  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_m$ . Polinom  $p_n$  lahko izrazimo kot

$$p_n(u) = \sum_{|\alpha|=n} \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{\alpha_1}, \underbrace{x + e^1, \dots, x + e^1}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{x + e^m, \dots, x + e^m}_{\alpha_{m+1}} \right) B_\alpha(\lambda),$$

kjer je  $\lambda := (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  baricentrična koordinata točke  $u$  glede na  $m$ -

simpleks  $x + T$ . Za vsak  $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$  velja

$$\begin{aligned}
D^\gamma p_n(x) &= \frac{n!}{(n - |\gamma|)!} \Delta_{21}^{\gamma_1} \Delta_{31}^{\gamma_2} \dots \Delta_{m+1,1}^{\gamma_m} c_{(n-|\gamma|, 0, \dots, 0)} \\
&= \frac{n!}{(n - |\gamma|)!} \sum_{\eta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\eta} (-1)^{|\gamma - \eta|} c_{(n-|\eta|, \eta_1, \dots, \eta_m)} \\
&= \frac{n!}{(n - |\gamma|)!} \sum_{\eta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\eta} (-1)^{|\gamma - \eta|} \\
&\quad \cdot \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-|\eta|}, \underbrace{x + e^1, \dots, x + e^1}_{\eta_1}, \dots, \underbrace{x + e^m, \dots, x + e^m}_{\eta_m} \right),
\end{aligned}$$

kjer smo uporabili lemo 2 in notacijo (6.5).  $\square$

Zdaj lahko zapišemo pogoje gladkosti za zlepke v več spremenljivkah v razcvetni obliki. Recimo, da imamo polinoma  $p_n$  in  $q_n$  totalne stopnje  $n$ , ki sta definirana na sosednjih  $m$ -simpleksih  $T_1$  in  $T_2$ . Če je zlepek, sestavljen iz  $p_n$  in  $q_n$   $r$ -krat zvezno odvedljiv, morajo biti določeni pogoji gladkosti izpolnjeni tudi za razcveta polinomov  $p_n$  in  $q_n$ . Naj bo  $T_1 := \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)}, v^{(k+2)}, \dots, v^{(m+1)} \rangle$  in  $T_2 := \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)}, u^{(k+2)}, u^{(k+3)}, \dots, u^{(m+1)} \rangle$ , in naj imata simpleksa  $T_1$  in  $T_2$  skupni  $k$ -simpleks  $K := \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)} \rangle$ . Za  $r$ -kratno zvezno odvedljivost mora veljati

$$D^\beta p_n(x) = D^\beta q_n(x), \quad \forall |\beta| \leq r \text{ in } \forall x \in \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)} \rangle.$$

Po lemi 3 je ta pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko velja

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-|\beta|}, \underbrace{x + e^1, \dots, x + e^1}_{\beta_1}, \dots, \underbrace{x + e^m, \dots, x + e^m}_{\beta_m} \right) \\
&= \mathcal{B}(q_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-|\beta|}, \underbrace{x + e^1, \dots, x + e^1}_{\beta_1}, \dots, \underbrace{x + e^m, \dots, x + e^m}_{\beta_m} \right) \quad (6.8)
\end{aligned}$$

za  $|\beta| \leq r$  in  $x \in \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)} \rangle$ .

Na  $m$ -simpleksu  $x + T$  definirajmo polinoma  $\bar{p}_r$  in  $\bar{q}_r$  preko njunih razcvetov

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\bar{p}_r) \left( w^1, w^2, \dots, w^r \right) &:= \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, w^2, \dots, w^r \right), \\
\mathcal{B}(\bar{q}_r) \left( w^1, w^2, \dots, w^r \right) &:= \mathcal{B}(q_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, w^2, \dots, w^r \right).
\end{aligned}$$

Iz pogoja (6.8) sledi, da imata polinoma  $\bar{p}_r$  in  $\bar{q}_r$  enake  $B$ -koeficiente na  $x+T$ , kjer je  $T$  standardni  $m$ -simpleks (6.7). To pa pomeni, da sta enaka, zato sledi

$$\mathcal{B}(p_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right) = \mathcal{B}(q_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right).$$

Še več, ker lahko vsak  $x \in K$  zapišemo kot konveksno kombinacijo  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k+1)}$ , dobimo naslednji izrek. Trditev je tudi zadostna.

**Izrek 21.** *Naj bosta  $p_n$  in  $q_n$  polinoma, definirana nad  $m$ -simpleksoma  $T_1$  in  $T_2$ . Naj velja še  $F(x) := p_n(x)$  za  $x \in T_1$  in  $F(x) := q_n(x)$  za  $x \in T_2$ . Naj imata  $T_1$  in  $T_2$  skupni  $k$ -simpleks  $K$ . Potem je  $F \in C^r(T_1 \cup T_2)$  natanko takrat, ko velja*

$$\mathcal{B}(p_n)\left(v^{i_1}, v^{i_2}, \dots, v^{i_{n-r}}, w^1, \dots, w^r\right) = \mathcal{B}(q_n)\left(v^{i_1}, v^{i_2}, \dots, v^{i_{n-r}}, w^1, \dots, w^r\right)$$

za vse  $w^1, w^2, \dots, w^r \in \mathbb{R}^m$  in  $i_1, i_2, \dots, i_{n-r} \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ .

Oglejmo si nekaj zanimivih posebnih primerov.

Če je  $k = 0$ , torej, če imata  $T_1$  in  $T_2$  skupno točko  $v^{(1)}$ , je  $F \in C^r(T_1 \cup T_2)$  natanko tedaj, ko velja

$$\mathcal{B}(p_n)\left(\underbrace{v^{(1)}, v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right) = \mathcal{B}(q_n)\left(\underbrace{v^{(1)}, v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right)$$

za vse  $w^1, w^2, \dots, w^r \in \mathbb{R}^m$ .

Če je  $k = m - 1$ , imata  $T_1$  in  $T_2$  skupno  $(m - 1)$ -lice  $K$ . Vemo, da je  $F \in C^r(T_1 \cup T_2)$  natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{B}(p_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right) = \mathcal{B}(q_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, w^1, \dots, w^r\right)$$

za vse  $w^1, w^2, \dots, w^r \in \mathbb{R}^m$  in  $x \in \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)} \rangle$ . Vemo, da je  $T_2 = \langle u^{(m+1)}, K \rangle$ . Naj bo

$$u^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^0 v^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^0 = 1.$$

Potem je

$$\mathcal{B}(q_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-1}, u^{(m+1)}\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^0 \mathcal{B}(q_n)\left(\underbrace{x, \dots, x}_{n-1}, v^{(i)}\right).$$

Podobno lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}(q_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, \underbrace{u^{(m+1)}, u^{(m+1)}, \dots, u^{(m+1)}}_r \right) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}}} \mathcal{B}(q_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, \underbrace{v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}} \right) B_\alpha(\lambda^0) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}}} \mathcal{B}(p_n) \left( \underbrace{x, \dots, x}_{n-r}, \underbrace{v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}} \right) B_\alpha(\lambda^0)
\end{aligned}$$

za vsak  $x \in \langle v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)} \rangle$ . Vsak  $x$  lahko zapišemo kot konveksno kombinacijo točk  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}$ . Tako dobimo

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}(q_n) \left( v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_{n-r})}, \underbrace{u^{(m+1)}, u^{(m+1)}, \dots, u^{(m+1)}}_r \right) = \\
& \sum_{\substack{|\alpha|=r \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}}} \mathcal{B}(p_n) \left( v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_{n-r})}, \underbrace{v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}} \right) B_\alpha(\lambda^0).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Enačba (6.9) je posplošitev znanega pogoja za  $r$ -kratno zvezno odvedljivost med dvema polinomoma (5.23), če upoštevamo, da so vrednosti razcvetov  $\mathcal{B}(p_n)$  in  $\mathcal{B}(q_n)$  v točkah simpleksov  $T_1$  in  $T_2$  natančno  $B$ -koeficienti polinomov  $p_n$  in  $q_n$  (lema 1).

Oglejmo si še splošni primer,  $0 \leq k \leq m-1$ . Naj bo

$$u^{(j)} = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^j v^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^j = 1,$$

za  $j = k+2, k+3, \dots, m+1$ . Označimo  $\lambda^j := (\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_{m+1}^j)$ . Za izpeljavo pogojev gladkosti v razcvetni obliki uporabimo enako idejo kot v prejšnjih primerih.

**Izrek 22.** *Naj bo  $K := T_1 \cap T_2$   $k$ -simpleks za nek  $0 \leq k \leq m-1$ . Potem je*

$F \in C^r(T_1 \cup T_2)$  natanko takrat, ko za vse  $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$ , kjer je  $|\gamma| \leq r$ , velja

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(q_n) \left( v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_{n-r})}, \underbrace{v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\gamma_1}, \dots, \underbrace{v^{(k+1)}, \dots, v^{(k+1)}}_{\gamma_{k+1}}, \right. \\ & \quad \left. \underbrace{u^{(k+2)}, \dots, u^{(k+2)}}_{\gamma_{k+2}}, \dots, \underbrace{u^{(m+1)}, \dots, u^{(m+1)}}_{\gamma_{m+1}} \right) \\ &= \sum_{\substack{|\alpha(i)| = \gamma_i, i=k+2, \dots, m+1 \\ \alpha(i) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}}} B_{\alpha(k+2)}(\lambda^{k+2}) B_{\alpha(k+3)}(\lambda^{k+3}) \cdots B_{\alpha(m+1)}(\lambda^{m+1}) \\ & \quad \cdot \mathcal{B}(p_n) \left( v^{(i_1)}, \dots, v^{(i_{n-r})}, \underbrace{v^{(1)}, \dots, v^{(1)}}_{\alpha_1^{k+2} + \alpha_1^{k+3} + \dots + \alpha_1^{m+1}}, \dots, \underbrace{v^{(m+1)}, \dots, v^{(m+1)}}_{\alpha_{m+1}^{k+2} + \alpha_{m+1}^{k+3} + \dots + \alpha_{m+1}^{m+1}} \right) \end{aligned}$$

za  $i_1, i_2, \dots, i_{n-r} \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ , kjer je  $\alpha(j) = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \dots, \alpha_{m+1}^j)$  za  $j = k+2, k+3, \dots, m+1$ .

Pogoje gladkosti lahko zapišemo še bolj splošno, za poljuben par razcvetov  $\mathcal{B}_T, \mathcal{B}_{T'}$  nad simpleksomoma  $T, T' \in \Delta$ . Čeprav simpleksa nista sosednja, mora med razcvetoma veljati določena zveza.

Potrebujemo dodatne oznake. Naj bo  $\bar{V}$  množica točk dane simpleksne particije  $\Delta$ . Fiksirajmo  $m$ -simpleks  $T_0$ , definirajmo  $L_0(T_0) := \{T_0\}$  in naj bo  $L_1(T_0)$  množica vseh  $m$ -simpleksov particije  $\Delta$ , različnih od  $T_0$ , ki imajo neprazen presek s  $T_0$ ,

$$L_1(T_0) := \{T \in \Delta, T \cap T_0 \neq \emptyset\} \setminus L_0(T_0).$$

Podobno za  $1 \leq k \leq r_0$  induktivno definirajmo

$$L_k(T_0) := \{T \in \Delta, T \cap T_0 \neq \emptyset \text{ za nek } T' \in L_{k-1}(T_0)\} \setminus L_{k-1}(T_0),$$

kjer je  $r_0 := \lfloor n/(n-r) \rfloor$ . Potem za vsak  $T_k \in L_k(T_0)$  obstaja veriga  $m$ -simpleksov  $T_1, \dots, T_{k-1}$ , tako, da velja  $T_i \in L_i(T_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  in  $T_i \cap T_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Očitno je  $T_0 \cap T_1 \neq \emptyset$ , zato ta veriga  $m$ -simpleksov povezuje  $T_0$  in  $T_k$ .

Zdaj lahko zapišemo karakterizacijski izrek za zlepke v  $S_n^r(\Delta)$ .

**Izrek 23.** Naj bo  $s \in S_n^r(\Delta)$  in naj bo  $\mathcal{B}_T$  razcvet za  $s|_T, \forall T \in \Delta$ . Potem za vsak  $T_k \in L_k(T), 1 \leq k \leq r_0$ , razcveta  $\mathcal{B}_T$  in  $\mathcal{B}_{T_k}$  zadoščata pogojem gladkosti na  $k$ -tem kolobarju

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_T(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, \dots, v^{k,1}, \dots, v^{k,n-r}, x^1, \dots, x^{n-k(n-r)}) \\ &= \mathcal{B}_{T_k}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, \dots, v^{k,1}, \dots, v^{k,n-r}, x^1, \dots, x^{n-k(n-r)}) \end{aligned}$$

za vse  $v^{i,1}, v^{i,2}, \dots, v^{i,n-r} \in T_{i-1} \cap T_i \cap \bar{V}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , za vse  $x^1, x^2, \dots, x^{n-k(n-r)} \in \mathbb{R}^m$ , in za poljubno izbiro verig  $\{T_0, T_1, \dots, T_k\}$ , ki povezujejo  $T_0 := T$  in  $T_k$ .

Velja tudi obrat, če odsekoma polinomska funkcija  $s$ ,  $s|_{T_i} \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$ , zadošča pogojem gladkosti na  $k$ -tem kolobarju za  $1 \leq k \leq r_0$ , je  $s \in S_n^r(\Delta)$ .

*Dokaz.* Vzemimo  $T_1 \in L_1(T_0)$ . Po izreku 21 morajo biti izpolnjeni pogoji gladkosti

$$\mathcal{B}_{T_0}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, w^1, \dots, w^r) = \mathcal{B}_{T_1}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, w^1, \dots, w^r)$$

za vse  $v^{1,1}, v^{1,2}, \dots, v^{1,n-r} \in T_0 \cap T_1 \cap \bar{V}$  in  $w^1, w^2, \dots, w^r \in \mathbb{R}^m$ . Za simpleks  $T_2 \in L_2(T_0)$ , za katerega velja  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ , velja

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{T_1}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, v^{2,1}, \dots, v^{2,n-r}, w^1, \dots, w^{r-(n-r)}) = \\ \mathcal{B}_{T_2}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, v^{2,1}, \dots, v^{2,n-r}, w^1, \dots, w^{r-(n-r)}) \end{aligned}$$

za vse  $v^{2,1}, v^{2,2}, \dots, v^{2,n-r} \in T_1 \cap T_2 \cap \bar{V}$  in  $w^1, w^2, \dots, w^{r-(n-r)} \in \mathbb{R}^m$ . Tako dobimo pogoje

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{T_0}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, v^{2,1}, \dots, v^{2,n-r}, w^1, \dots, w^{r-(n-r)}) = \\ \mathcal{B}_{T_2}(v^{1,1}, \dots, v^{1,n-r}, v^{2,1}, \dots, v^{2,n-r}, w^1, \dots, w^{r-(n-r)}). \end{aligned}$$

Za splošni primer nadaljujemo gornji razmislek s pomočjo indukcije.

Dokažimo še obrat. Naj bo  $s$ ,  $s|_{T_i} \in \Pi_n(\mathbb{R}^m)$ , odsekoma polinomska funkcija nad  $\Delta$ , ki zadošča pogojem gladkosti na vseh  $k$ -kolobarjih,  $k = 1, 2, \dots, r_0$ . Potem  $s$  zadošča tudi pogojem gladkosti na prvem kolobarju, to pa so natanko pogoji gladkosti v razcvetni obliki iz izreka 21. Torej velja  $s \in S_n^r(\Delta)$ .  $\square$

**Primer:** Oglejmo si primer  $m = 1$ . Naj bo  $\Delta = \{v^{(i)} : v^{(i)} < v^{(i+1)} \forall i\}$ . Za zlepek  $s \in S_n^{n-1}(\Delta)$  naj bo  $\mathcal{B}_i$  razcvet za  $s|_{[v^{(i)}, v^{(i+1)}]}$  za vsak  $i$ . Potem velja

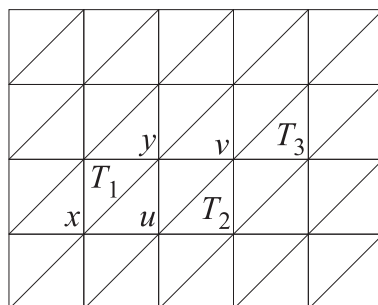
$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i(v^{(i+1)}, v^{(i+2)}, \dots, v^{(i+k)}, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}) = \\ \mathcal{B}_{i+k}(v^{(i+1)}, v^{(i+2)}, \dots, v^{(i+k)}, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}) \end{aligned}$$

za vse  $w_1, w_2, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{R}$  in  $1 \leq k \leq n$ . Ta pristop ima pomembno vlogo pri konstrukciji zlepkov in se precej razlikuje od klasičnega, ki uporablja za bazo B-zlepke.

**Primer:** Naj bo  $m = 2$  in naj bo  $\Delta$  triangulacija tipa 1 (glej sliko 6.1). Za zlepek  $s \in S_4^2(\Delta)$  naj bodo  $\mathcal{B}_{T_1}, \mathcal{B}_{T_2}, \mathcal{B}_{T_3}$  razcveti za  $s|_{T_1}, s|_{T_2}, s|_{T_3}$ , kjer so  $T_1, T_2, T_3$  označeni na sliki 6.1. Potem velja

$$\mathcal{B}_{T_1}(x, y, u, v) = \mathcal{B}_{T_2}(x, y, u, v), \text{ in } \mathcal{B}_{T_1}(y, y, v, v) = \mathcal{B}_{T_3}(y, y, v, v).$$

Pri tem niti trikotnika  $T_1$  in  $T_2$ , niti  $T_1$  in  $T_3$  nista sosednja.



Slika 6.1: Pogoji gladkosti nad triangulacijo tipa 1.



# Literatura

- [1] C. de Boor, B-form basics, in G. Farin (ed.), Geometric Modeling, SIAM, Philadelphia, 1997, 131–148.
- [2] C. de Boor, A Practical Guide to Splines, Revised Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] C. de Boor, K. Höllig, B-splines without divided differences, in: G. E. Farin, ed., Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, SIAM, Philadelphia, PA, 21–27.
- [4] T. DeRose, R. Goldman, A tutorial introduction to blossoming, In H. Hagen and D. Roller (eds.), Geometric Modeling, Springer, 1991.
- [5] G. Farin, editor, Geometric Modeling - algorithms and new trends, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [6] G. Farin, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic Press, Inc., 2002.
- [7] G. Farin, J. Hoschek & M.-S. Kim, editors, Handbook of Computer Aided Geometric Design, Elsevier Science (North Holland), 2002.
- [8] F. Križanič, Linearna algebra in linearna analiza, DZS d.d., 1993.
- [9] J. Lane, R. Riesenfeld, A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intell., 2(1): 35-46, 1980.
- [10] E. Lee, A note on blossoming, CAGD, 6(4), 1989, pp. 359–362.
- [11] L. Piegl, W. Tiller, The NURBS book, Springer, Berlin, 1995.
- [12] L. Ramshaw, Blossoms are polar forms, CAGD, 6(4), 1989, pp. 323–359.
- [13] T. W. Sederberg, Computer aided geometric design, course notes, 2009.

- [14] L. L. Schumaker, M-J. Lai, Spline functions on triangulations, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 2007.