

Naloga 4. *Opisi krožnice z Bézierjevimi krivuljami.*

Ker s polinomskimi krivuljami ne moremo eksaktno opisati krožnice, je treba v sistemih, ki omogočajo le delo s polinomskimi krivuljami, poseči po aproksimaciji. Z Bézierjevo krivuljo nizke stopnje ni moč dobiti kvalitetne aproksimacije celotne krožnice, zato jo aproksimiramo po delih. Če pripravimo Bézierjevo krivuljo $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nizke stopnje, ki dobro opisuje krožni lok za kote v območju $(-\varphi, \varphi)$ za nek $\varphi > 0$ ter v robovih interpolira krožnico, lahko celotno krožnico aproksimiramo tako, da zlepimo več Bézierjevih krivulj, ki jih dobimo z rotacijami \mathbf{b} .

Naj bodo $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ kontrolne točke Bézierjeve krivulje \mathbf{b} nizke stopnje n ($n = 2$ ali $n = 3$). Iz interpolacije točk v robovih krožnega loka sledi

$$\mathbf{b}_0 = (\cos(\varphi), -\sin(\varphi)), \quad \mathbf{b}_n = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

Nadalje, smeri tangent krivulje \mathbf{b} se v robovih ujema s smerema tangent krožnice, če za neki pozitivni realni števili d_1 in d_2 velja $\dot{\mathbf{b}}(0) = d_1(\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ in $\dot{\mathbf{b}}(1) = d_2(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$, od kjer po formuli za odvod Bézierjeve krivulje sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_0 + \frac{1}{n}\dot{\mathbf{b}}(0) = \left(\cos(\varphi) + \frac{1}{n}d_1\sin(\varphi), -\sin(\varphi) + \frac{1}{n}d_1\cos(\varphi)\right), \\ \mathbf{b}_{n-1} &= \mathbf{b}_n - \frac{1}{n}\dot{\mathbf{b}}(1) = \left(\cos(\varphi) + \frac{1}{n}d_2\sin(\varphi), \sin(\varphi) - \frac{1}{n}d_2\cos(\varphi)\right). \end{aligned}$$

1. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 2$, ki v robovih interpolira krožnico ter smer njenih tangent. Ker ima taka Bézierjeva krivulja samo tri kontrolne točke, iz zgornjih ugotovitev sledi, da sta \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_2 že določeni, za \mathbf{b}_1 pa dobimo pogoja

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) + \frac{1}{2}d_1\sin(\varphi) &= \cos(\varphi) + \frac{1}{2}d_2\sin(\varphi), \\ -\sin(\varphi) + \frac{1}{2}d_1\cos(\varphi) &= \sin(\varphi) - \frac{1}{2}d_2\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi $d_1 = d_2$, iz druge pa še $d_1 = d_2 = 2\tan(\varphi)$. To pomeni, da je $\mathbf{b}_0 = (1/\cos(\varphi), 0)$.

2. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 3$, ki v robovih interpolira krožnico ter njena odvoda. To pomeni, da mora biti $d_1 = d_2 = 1$. S tem so po zgornjih formulah določene vse štiri kontrolne točke ($\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$) Bézierjeve krivulje.
3. Določimo Bézierjevo krivuljo stopnje $n = 3$, ki v robovih interpolira krožnico ter smer njenih tangent, poleg tega pa zanjo velja še $\mathbf{b}(1/2) = (1, 0)$. Ta dodaten pogoj implicira

$$\frac{1}{8}\mathbf{b}_0 + \frac{3}{8}\mathbf{b}_1 + \frac{3}{8}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{8}\mathbf{b}_3 = (1, 0).$$

V drugi komponenti zgornje enačbe dobimo

$$-\frac{1}{8}\sin(\varphi) + \frac{3}{8}\left(-\sin(\varphi) + \frac{1}{3}d_1\cos(\varphi)\right) + \frac{3}{8}\left(\sin(\varphi) - \frac{1}{3}d_2\cos(\varphi)\right) + \frac{1}{8}\sin(\varphi) = 0,$$

od koder je razvidno, da mora biti $d = d_1 = d_2$. Iz prve komponente enačbe, ki jo zapišemo v obliki

$$\frac{1}{8}\cos(\varphi) + \frac{3}{8}\left(\cos(\varphi) + \frac{1}{3}d_1\sin(\varphi)\right) + \frac{3}{8}\left(\cos(\varphi) + \frac{1}{3}d_2\sin(\varphi)\right) + \frac{1}{8}\cos(\varphi) = 1,$$

potem sledi

$$\cos(\varphi) + \frac{1}{4}d \sin(\varphi) = 1,$$

kar pomeni, da je $d = 4(1/\sin(\varphi) - \cot(\varphi))$. Z nekaj dodatnega računanja izpeljemo, da sta kontrolni točki \mathbf{b}_1 in \mathbf{b}_2 dani z

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \left(4 - \cos(\varphi), 4 \cot(\varphi) - \frac{4}{\sin(\varphi)} + \sin(\varphi) \right),$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \left(4 - \cos(\varphi), -4 \cot(\varphi) + \frac{4}{\sin(\varphi)} - \sin(\varphi) \right).$$

V Matlabu narišite aproksimacije krožnic iz (1), (2) in (3) pri izbiri $\varphi = \pi/6$. Primerjajte napake $\max_{t \in t} |1 - \|\mathbf{b}(t)\||$ za $\mathbf{t} = (i/1000)_{i=0}^{1000}$. Rezultati so prikazani na spodnji sliki. Rdeča krivulja je aproksimacija iz točke (1), napaka je $1.0363 \cdot 10^{-2}$. Zelena krivulja je aproksimacija iz točke (2), napaka je $8.9746 \cdot 10^{-3}$. Modra krivulja je aproksimacija iz točke (3), napaka je $2.3864 \cdot 10^{-5}$, zato aproksimacija na sliki prekriva dejansko krožnico.

