

Naloga 13. *Polinomi dveh spremenljivk.*

Prostor polinomov \mathbb{P}_n^2 dveh spremenljivk stopnje n je dimenzije $\binom{n+2}{2}$ in ga lahko opišemo s funkcijami $x^i y^j$, $0 \leq i + j \leq n$. Za geometrijsko oblikovanje je priročajša predstavitev z Bernsteinovimi baznimi polinomi dveh spremenljivk, pri definiciji katerih namesto kartezičnih uporabljamo baricentrične koordinate. Baricentrične koordinate točke $\mathbf{T} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ glede na trikotnik $T = (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)$ z oglišči $\mathbf{T}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, so podane s trojico $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, ki je enolično določena kot rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

Bernsteinovi bazni polinomi dveh spremenljivk stopnje n so definirani kot

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k, \quad i + j + k = n,$$

in sestavljajo bazo za \mathbb{P}_n^2 . Vsak polinom $p \in \mathbb{P}_n^2$ lahko torej predstavimo v tako imenovani Bézierjevi obliki kot

$$p = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n$$

za neka realna števila $b_{i,j,k}$.

1. V Matlabu sestavite metodo `pointbary`, ki kartezične koordinate (x, y) točke \mathbf{T} pretvori v baricentrične koordinate (u, v, w) glede na trikotnik T . Pripravite tudi metodo `vectorbary`, ki vrne baricentrične koordinate vektorja $\mathbf{T} - \mathbf{0}$.
2. Vrednost polinoma $p \in \mathbb{P}_n^2$, podanega v Bézierjevi obliki, lahko izračunamo z de Casteljaujevim postopkom:

$$b_{i,j,k}^r = u b_{i+1,j,k}^{r-1} + v b_{i,j+1,k}^{r-1} + w b_{i,j,k+1}^{r-1}, \quad i + j + k = n - r, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Ta se začne s koeficienti $b_{i,j,k}^0 = b_{i,j,k}$, $i + j + k = n$, konča pa z vrednostjo $b_{0,0,0}^n$ polinoma p v točki \mathbf{T} . Postopek lahko enostavno prilagodimo za računanje vrednosti trikotniškega razcveta $p[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n]$ polinoma p pri argumentih $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. V tem primeru v r -tem koraku postopka uporabimo baricentrične koordinate argumenta \mathbf{P}_r (kar so lahko v odvisnosti od konteksta baricentrične koordinate točke ali vektorja). Sestavite metodo `blossom3`, ki izračuna trikotniški razcvet pri podanih baricentričnih koordinatah, in njeno izpeljanko `decasteljau3`, ki izračuna vrednost polinoma.

```
function b = blossom3(B,U)
% Opis:
% blossom3 izračuna razcvet polinoma dveh spremenljivk
%
% Definicija:
% b = blossom3(B,U)
%
```

```
% Vhodna podatka:
% B      matrika velikosti n+1 x n+1, ki predstavlja
%         koeficiente polinoma dveh spremenljivk stopnje n v
%         Bezierjevi obliki (element matrike na mestu (i,j),
%         j <= n+2-i, določa koeficient polinoma z indeksom
%         (n+2-i-j, j-1, i-1)),
% u      matrika velikosti n x 3, v kateri vrstice
%         predstavljajo baricentrične koordinate točk glede
%         na domenski trikotnik, za katere izvajamo razcvet
%         polinoma
%
% Izhodni podatek:
% b      vrednost razcveta polinoma, določenega z matriko B,
%         v točkah, določenih z matriko u
```

3. S pomočjo implementiranih metod izračunajte vrednost polinoma

$$2B_{3,0,0}^3 + 5B_{2,0,1}^3 - B_{1,2,0}^3 + B_{2,1,0}^3 + 3B_{1,1,1}^3 - 4B_{0,2,1}^3 + B_{0,0,3}^3$$

nad trikotnikom z oglišči $\mathbf{T}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{T}_2 = (5, 1)$, $\mathbf{T}_3 = (3, 3)$ v točkah $(0, 0)$, $(1, 1)$ in $(4, 2)$. Z upoštevanjem, da se odvod $p \in \mathbb{P}_n^2$ v smereh $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r$, $r \leq n$, izraža kot

$$D_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r}^r p(x, y) = \frac{n!}{(n-r)!} p[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r, \underbrace{\mathbf{T}, \dots, \mathbf{T}}_{n-r}],$$

določite še prve in druge odvode polinoma p v teh točkah v smereh x in y .