# Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Jan Fekonja, Anže Marinko
IŠRM2, FMF
Predmet: Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

december 2018

## 1 Uvod

Hodogram parametrične krivulje $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je odvod krivulje same $r\prime(t)$ podan kot parametrična krivulja. Polinomska krivulja $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je krivulja s Pitagorejskim hodogramom (PH), če vsota kvadratov vseh $n$ polinomov na koordinatnih komponentah hodograma krivulje sovpada s kvadratom nekega polinoma $\sigma(t)$. Oglejmo si ravninske krivulje s PH.

## 2 Ravninske krivulje s Pitagorejskim hodogramom

Ključna lastnost, ki razlikuje ravninsko krivuljo s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ od "navadne"polinomske krivulje je privzeta vključitev Pitagorejskega pogoja v svoj hodogram, in sicer komponente $r\prime(t) = (x\prime(t), y\prime(t))$ morajo zadoščati pogoju

$$x\prime^2(t) + y\prime^2(t) = \sigma^2(t)$$

za nek polinom $\sigma(t)$. To lastnost je dosežena z upoštevanjem sledeče karakterizacije Pitagorejskih trojic polinomov.

**Izrek 1.** *Pitagorejski pogoj*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \tag{1}$$

*izpolnjujejo polinomi $a(t), b(t), c(t)$ natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi $u(t), v(t), w(t)$ v obliki*

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \end{aligned} \tag{2}$$

*kjer imata $u(t)$ in $v(t)$ paroma različne ničle.*

*Dokaz.* Očitno je pogoj (2) zadosten za (1). Potrebnost pogoja pa je dokazana v [1] na strani 382. □

**Opomba 1.** *Rešitve, kjer je $w(t)$ konstantna, imenujejo primitivne Pitagorejske trojice.*

Tedaj je ravninska krivulja s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ definirana z zamenjavo treh polinomov $u(t), v(t), w(t)$ v izrazih

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y\prime(t) &= 2u(t)v(t)w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

in z integriranjem.

Vsak nekonstantni skupni faktor $u(t)$ in $v(t)$ lahko absorbiramo v $w(t)$. Poleg tega moramo dopustiti določene izbire za $w(t), u(t), v(t)$, ki dajejo "degenerirane"krivulje s PH:

1. če je $w(t) = 0$ ali $u(t) = v(t) = 0$, je dobljeni hodogram $x\prime(t) = y\prime(t) = 0$ in definira eno točko namesto zveznega loka,
2. če so $w(t), u(t), v(t)$ vse konstante (z $w$ in vsaj eno od $u$, $v$ neničelno) dobimo enakomerno parametrizirano premico, trivialno krivuljo s PH,
3. če sta $u(t)$ in $v(t)$ konstanti, kjer je vsaj ena različna od nič in $w(t)$ ni konstanta, je dobljen lok spet linearen, vendar njegova parametrična hitrost ni konstantna (v splošnem),
4. prav tako nastanejo nekonstantno parametrizirani linearni loki (vzporedni z osjo x), če je $w(t) \neq 0$ in je eden od $u(t)$ in $v(t)$ nič.

V nadaljevanju bomo obravnavali le primere, kjer so $w(t), u(t), v(t)$ vse neničelne, in $u(t), v(t)$ nista obe konstanti.

**Opomba 2.** *Če je $w$ polinom stopnje $\lambda$ in je $\mu$ večja izmed stopenj polinomov $u$ in $v$, je krivulja s PH dobljena z integracijo hodograma (3) stopnje $n = \lambda + 2\mu + 1$.*

# 3 Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH

Osredotočimo se predvsem na primitivne Pitagorejske hodograme ($u$ in $v$ brez skupne ničle, $w(t) = 1$). Taki hodogrami definirajo regularne krivulje s PH, ki zadoščajo $r\prime(t) \neq 0$ za vse $t$. Točka na parametrični krivulji, kjer je $r\prime(t) = 0$, je neregularna točka - običajno je to konica ali nenaden obrat tangente. Uporaba nekonstantnega polinoma $w(t)$ naredi konice (kar je nezaželena lastnost) na ustrezni krivulji s PH, če ima $w(t)$ realne ničle znotraj domene parametra krivulje. Krivulje s PH definirane z integracijo (3) primitivnih hodogramov so lihe stopnje, $n = 2\mu + 1$.

Najenostavnejše netrivialne krivulje s PH dobljene z $w(t) = 1$ in linearnima Bernsteinovima polinomoma:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned}$$

ki zadoščajo $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$ in $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$, tako da imata $u(t), v(t)$ različne ničle in nista obe konstanti, nam dajo hodogram

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t), \\ y\prime(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0)B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo tega hodograma dobimo kubično krivuljo s PH z Bézierjevimi kontrolnimi točkami oblike

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0),\\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0),\\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1),
\end{aligned}$$

kjer je kontrolna točka $\mathbf{p}_0$ definirana z integracijsko konstanto prosto izbrana.

Krivulje pete stopnje s PH pa lahko definiramo s kvadratičnimi polinomi:

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_0B_0^2(t) + u_1B_1^2(t) + u_2B_2^2(t),\\
v(t) &= v_0B_0^2(t) + v_1B_1^2(t) + v_2B_2^2(t),
\end{aligned}$$

in z integracijo dobimo Bézierjeve kontrolne točke oblike:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0),\\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0),\\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \frac{1}{15}(u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0),\\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1),\\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2),
\end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{p}_0$ ponovno poljubna, velja pa

$$(u_2v_0 - u_0v_2)^2 \neq 4(u_0v_1 - u_1v_0)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

# 4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne krivulje s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s

$$\sigma(t) = |r\prime(t)| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

in je polinom v $t$. Če je $r(t)$ (lihe) stopnje $n$, morata biti $u(t)$ in $v(t)$ stopinje $m = \frac{1}{2}(n-1)$ in je lahko zapisan v Bernsteinovi obliki kot

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=0}^{m} u_kB_k^m(t),\\
v(t) &= \sum_{k=0}^{m} v_kB_k^m(t).
\end{aligned}$$

Torej je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_kB_k^{n-1}(t),$$

kjer so koeficienti

$$\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}}(u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Za kubične krivulje s PH je npr. $\sigma(t)$ kvadratna in ima Bernsteinove koeficiente

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\
\sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\
\sigma_2 &= u_1^2 + v_1^2.
\end{aligned}$$

Za krivulje pete stopnje s PH pa je $\sigma(t)$ kvadratična z Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\
\sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\
\sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{3}(u_0 u_2 + v_0 v_2), \\
\sigma_3 &= u_1 u_2 + v_1 v_2, \\
\sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2.
\end{aligned}$$

Da bi integrirali $\sigma(t)$ in tako dobili dolžino loka $s$ kot polinomsko funkcijo parametra,

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

uporabimo integracijsko pravilo za Bernsteinove bazne polinome. To nam da

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} s_k B_k^n(t),$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n$.

Torej je skupna dolžina loka $S$ preprosto $S = s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n}$. Za izračun dolžine loka izseka krivulje s PH za $t \in [a, b]$ pa vzamemo kar razliko $s(b) - s(a)$.

Podobno je veliko preprosteje določiti vrednost parametra $t_*$, do katerega je dolžina loka (merjeno od $t = 0$) enaka dani vrednosti $s_*$ - t.j. rešiti enačbo $s(t_*) = s_*$ za $t_*$.

Običajno se $r(t)$ prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov $t_0, \ldots, t_N$, ki ustreza enotnemu prirastku parametra $\Delta t = t_k - t_{k-1}, k = 1, \ldots, N$. Vendar pa s tem dobimo neenakomerno razmaknjene (po dolžini loka) točke $r(t_k)$ na krivulji, saj parametrična hitrost $\sigma(t)$ v splošnem ni konstantna.

Vseeno, če parametrična hitrost krivulje s PH ni konstantna, lahko s $s(t)$ enostavno popravimo to težavo. Naj bodo $t_0, \ldots, t_N$ vrednosti parametrov točk, ki so enakomerno razporejene z razmakom dolžine loka $\Delta s = S/N$, tako da

$$s(t_k) = k\Delta s, k = 1, \ldots, N-1,$$

kjer $t_0 = 0$ in $t_N = 1$. Sedaj iz $\sigma(t) = ds/dt$ in $\sigma(t)$ pozitivno za vse $t$, ko polinoma $u$ in $v$ nimata nobene skupne ničle, sledi, da je $s(t)$ monotono naraščajoča s $t$ in s tem za vsak $k$ vrednost $s$ pri $t_k$ leži med $t_{k-1}$ in 1. Kot začetni približek vzamemo

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

in izboljšujmo rezultat z uporabo Newton-Raphsonove iteracije

$$t_k^{(r)} = t_{k-1}^{(r-1)} + \frac{s(t_k^{(r-1)})}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \ldots.$$

Zadošča že kakšna iteracija, da dosežemo zadovoljivo natančnost.

***Slika**. Enakomerno povečanje parametra krivulje s PH (levo) in dolžine loka (desno). Prikaz točk na krivulji, kjer $\Delta t =$ konstanta oz. $\Delta s =$ konstantna.*

# 5 Lastnosti odvoda krivulje

Ker je parametrična hitrost krivulje s PH $r(t)$ definirane z integracijo polinom v $t$, imajo osnovne lastnosti njenih odvodov - enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost - racionalno odvisnost od parametra krivulje. Natančneje, definirani so v smislu polinomov $u(t)$ in $v(t)$, kjer

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2\frac{uv\prime - u\prime v}{\sigma^2}.$$

# 6 Racionalni odmiki krivulj s PH

Odmiki pri vsaki razdalji $d$ od krivulje s PH $r(t)$, definirani kot

$$r_d(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t),$$

dovoljujejo natančno predstavitev v smislu racionalnih Bézierjevevih krivulj, ker je enotska normala $\mathbf{n}(t)$ racionalno odvisna od parametra krivulje $t$.

Naj bodo kontrolne točke krivulje s PH $r(t)$ zapisane v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Definirajmo prve diference kot

$$\Delta\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

kjer je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Naj bo $\Delta\mathbf{P}_k^{\perp} = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$.

Odmik za razdaljo $d$ od krivulje s PH $r(t)$ je definiran zgoraj z $r_d(t)$, kjer je normala $\mathbf{n}(t)$ na $r(t)$ podana zgoraj. Odmik lahko izrazimo kot

$$r_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)}\right),$$

kjer so $W(t), X(t), Y(t)$ polinomi stopnje $2n-1$, katerih koeficienti

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), \quad k = 0, \ldots, 2n-1,$$

določajo Bézierjeve kontrolne točke racionalne krivulje odmika.

Homogene koordinate za kontrolne točke odmika so lahko strnjeno izražene v smislu prvotne krivulje kot

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=max(0,k-n)}^{min(n-1,k)} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn\Delta\mathbf{P}_j^{\perp}), \quad k = 0, \ldots, 2n-1.$$

S tem dobimo za kubične krivulje s PH 6 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj pete stopnje, za krivulje s PH pete stopnje pa dobimo 10 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj devete stopnje.

Na tem mestu pridejo slike obravnavane na koncu 17. poglavja, ki govorijo o stabilnosti zamikov ...

# 7 Nadaljevanje

Obravnava 19. poglavja, implementacija v matlab, zaključek ...

# Literatura

[1] R. T. Farouki: Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, poglavje 17 in 19.