Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Jan Fekonja, Anže Marinko
IŠRM2, FMF
Predmet: Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

december 2018

Kazalo

1 Uvod

Hodogram parametrične krivulje $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je samo njen odvod $r\prime(t)$ podan kot parametrična krivulja. Polinomska krivulja $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če so n koordinatnih komponent njenega hodograma elementi Pitagorejskega nabora $(n+1)$ polinomov oziroma če vsota njihovih kvadratov sovpada s kvadratom drugega polinoma $\sigma(t)$. Krivulje s PH v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ zahtevajo precej drugačne pristope njihove karakterizacije, saj Pitagorejski nabori treh in štirih polinomov vključujejo različne algebraične strukture. Ogledali si bomo ravninske krivulje s PH.

2 Ravninske krivulje s Pitagorejskim hodogramom

Ključna lastnost, ki razlikuje ravninsko krivuljo s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ od "navadne"polinomske krivulje je privzeta vključitev Pitagorejske strukture v svoj hodogram, in sicer komponente $r\prime(t) = (x\prime(t), y\prime(t))$ morajo zadoščati pogoju

$$x\prime^2(t) + y\prime^2(t) = \sigma^2(t)$$

za nek polinom $\sigma(t)$. To lastnost je dosežena z upoštevanjem sledeče karakterizacije Pitagorejskih trojic polinomov.

Izrek 1. *Pitagorejski pogoj*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \tag{1}$$

izpolnjujejo polinomi $a(t), b(t), c(t)$ natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi $u(t), v(t), w(t)$ v obliki

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \end{aligned} \tag{2}$$

kjer imata $u(t)$ in $v(t)$ paroma različne ničle.

Dokaz. Očitno je pogoj 2 zadosten za 1. Potrebnost pogoja pa je dokazana v [1] na strani 382. □

Opomba 1. *Rešitve, kjer je $w(t)$ konstantna, imenujejo primitivne Pitagorejske trojice.*

Tedaj je ravninska krivulja PH $r(t) = (x(t), y(t))$ definirana z nadomestitvijo treh polinomov $u(t), v(t), w(t)$ v izrazih

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y\prime(t) &= 2u(t)v(t)w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

in z integriranjem. Vsak nekonstantni skupni faktor $u(t)$ in $v(t)$ lahko absorbiramo v $w(t)$. Poleg tega moramo dopustiti določene izbire za $w(t), u(t), v(t)$, ki dajejo "degenerirane"krivulje s PH:

1. če je $w(t) = 0$ ali $u(t) = v(t) = 0$, je dobljeni hodogram $x\prime(t) = y\prime(t) = 0$ definira eno točko namesto zveznega loka,
2. če so $w(t), u(t), v(t)$ vse konstante (z w in vsaj eno od u, v neničelno) dobimo enakomerno parametrizirano premico, trivialno krivuljo s PH,
3. če sta $u(t)$ in $v(t)$ konstanti, kjer je vsaj ena različna od nič in $w(t)$ ni konstanta, je dobljen lok spet linearen, vendar njegova parametrična hitrost ni konstantna (v splošnem),
4. prav tako nastanejo nekonstantno parametrizirani linearni loki (vzporedni z osjo x), če je $w(t) \neq 0$ in je eden od $u(t)$ in $v(t)$ nič.

V nadaljevanju bomo obravnavali le primere, kjer so $w(t), u(t), v(t)$ vse neničelne, in $u(t), v(t)$ nista obe konstanti.

Opomba 2. *Če je w polinom stopnje λ in je μ večja izmed stopenj polinomov u in v, je krivulja s PH dobljena z integracijo hodograma (3) stopnje $n = \lambda + 2\mu + 1$.*

3 Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH

Osredotočimo se predvsem na primitivne Pitagorejske hodograme (u in v brez skupne ničle, $w(t) = 1$). Taki hodogrami definirajo regularne krivulje s PH, ki zadoščajo $r\prime(t) \neq 0$ za vse t. Točka na parametrični krivulji, kjer je $r\prime(t) = 0$, je neregularna točka - običajno je to konica ali nenaden obrat tangente. Uporaba ne-konstantnega polinoma $w(t)$ naredi konice (nezaželena značilnost) na ustrezni krivulji s PH, če ima $w(t)$ realne ničle znotraj domene parametra krivulje. Krivulje s PH definirane z integracijo (3) primitivnih hodogramov so lihe stopnje, $n = 2\mu + 1$.

Najenostavnejše netrivialne krivulje s PH dobljene z $w(t) = 1$ in linearnih Bernsteinovih polinomov:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned}$$

ki zadoščajo $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$ in $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$, tako da imata $u(t), v(t)$ različne ničle in nista obe konstanti, nam dajo hodogram

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1) - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y\prime(t) &= 2 u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2 u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo tega hodograma dobimo kubično krivuljo s PH z Bézierjevimi kontrolnimi točkami oblike

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1), \end{aligned}$$

kjer je kontrolna točka $\mathbf{p}_0$ definirana z integracijsko konstanto prosto izbrana.

Krivulje pete stopnje s PH pa lahko definiramo s kvadratičnimi polinomi:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t), \end{aligned}$$

in z integracijo dobimo Bézierjeve kontrolne točke oblike:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1) + \frac{1}{15}(u_0 u_2 - v_0 v_2, u_0 v_2 + u_2 v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2 v_2), \end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{p}_0$ ponovno poljubna, velja pa

$$(u_2 v_0 - u_0 v_2)^2 \neq 4(u_0 v_1 - u_1 v_0)(u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne krivulje s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s

$$\sigma(t) = |r\prime(t)| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

in je polinom v t. Če je $r(t)$ (lihe) stopnje n, morata biti $u(t)$ in $v(t)$ stopinje $m = \frac{1}{2}(n-1)$ in je lahko zapisan v Bernsteinovi obliki kot

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=0}^{m} u_k B_k^m(t), \\
v(t) &= \sum_{k=0}^{m} v_k B_k^m(t).
\end{aligned}
$$

Torej je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

kjer so koeficienti

$$\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Za kubične krivulje s PH je npr. $\sigma(t)$ kvadratna in ima Bernsteinove koeficiente

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\
\sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\
\sigma_2 &= u_1^2 + v_1^2.
\end{aligned}
$$

Za krivulje pete stopnje s PH pa je $\sigma(t)$ kvadratična z Bernsteinovimi koeficienti

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\
\sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\
\sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{3}(u_0 u_2 + v_0 v_2), \\
\sigma_3 &= u_1 u_2 + v_1 v_2, \\
\sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2.
\end{aligned}
$$

Da bi integrirali $\sigma(t)$ in tako dobili dolžino loka s kot polinomsko funkcijo parametra,

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

uporabimo integracijsko pravilo za Bernsteinove bazne polinome. To nam da

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k,$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n$.

Torej je skupna dolžina loka S preprosto $S = s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n}$. Za izračun dolžine loka izseka krivulje s PH za $t \in [a, b]$ vzamemo kar razliko $s(b) - s(a)$.

Podobno je veliko preprosteje določiti vrednost parametra t_*, do katerega je dolžina loka (merjeno od $t = 0$) enaka dani vrednosti s_* - t.j. rešiti enačbo

$s(t_*) = s_*$ za t_*. Običajno se $r(t)$ prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov $t_0, \ldots, t_N$, ki ustreza enotnemu prirastku parametra $\Delta t = t_k - t_{k-1}, k = 1, \ldots, N$. Vendar pa s tem dobimo neenakomerno razmaknjene (po dolžini loka) točke $r(t_k)$ na krivulji, saj parametrična hitrost $\sigma(t)$ v splošnem ni konstantna.

Vseeno, če parametrična hitrost krivulje s PH ni konstantna, lahko s $s(t)$ enostavno popravimo to težavo. Naj bodo $t_0, \ldots, t_N$ vrednosti parametrov točk, ki so enakomerno razporejene z razmakom dolžine loka $\Delta s = S/N$, tako da

$$s(t_k) = k\Delta s, k = 1, \ldots, N-1,$$

kjer $t_0 = 0$ in $t_N = 1$. Sedaj iz $\sigma(t) = ds/dt$ in $\sigma(t)$ pozitivno za vse t, ko polinoma u in v nimata nobene skupne ničle, sledi, da je $s(t)$ monotono naraščajoča s t in s tem za vsak k vrednost s pri t_k leži med t_{k-1} in 1. Kot začetni približek vzamemo

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

in izboljšujmo rezultat z uporabo Newton-Raphsonove iteracije

$$t_k^{(r)} = t_{k-1}^{(r-1)} + \frac{s(t_k^{(r-1)}}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \ldots.$$

Literatura

[1] R. T. Farouki: Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, poglavje 17 in 19.