

# Ravninske krivulje s pitagorejskim hodogramom

Jan Fekonja, Anže Marinko

IŠRM2, FMF

Predmet: Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

december 2018

## 1 Uvod

Hodogram parametrične krivulje  $r(t)$  v  $\mathbb{R}^n$  je odvod krivulje same  $r'(t)$  podan kot parametrična krivulja. Polinomska krivulja  $r(t)$  v  $\mathbb{R}^n$  je krivulja s Pitagorejskim hodogramom (PH), če vsota kvadratov vseh  $n$  polinomov na koordinatnih komponentah hodograma krivulje sovпада s kvadratom nekega polinoma  $\sigma(t)$ . Oglejmo si ravninske krivulje s PH.

## 2 Ravninske krivulje s Pitagorejskim hodogramom

Ključna lastnost, ki razlikuje ravninsko krivuljo s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  od "navadne" polinomske krivulje je privzeta vključitev Pitagorejskega pogoja v svoj hodogram, in sicer komponente  $r'(t) = (x'(t), y'(t))$  morajo zadoščati pogoju

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$$

za nek polinom  $\sigma(t)$ . To lastnost je dosežena z upoštevanjem sledeče karakterizacije Pitagorejskih trojic polinomov.

**Izrek 1.** *Pitagorejski pogoj*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \tag{1}$$

*izpolnjujejo polinomi  $a(t), b(t), c(t)$  natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi  $u(t), v(t), w(t)$  v obliki*

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \end{aligned} \tag{2}$$

*kjer imata  $u(t)$  in  $v(t)$  paroma različne ničle.*

*Dokaz.* Očitno je pogoj (2) zadosten za (1). Potrebno je dokazati, da je pogoj (1) zadosten za (2). Potrebno je dokazati, da je pogoj (1) zadosten za (2). Potrebno je dokazati, da je pogoj (1) zadosten za (2). □

**Opomba 1.** *Rešitve, kjer je  $w(t)$  konstantna, imenujejo primitivne Pitagorejske trojice.*

Tedaj je ravninska krivulja s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  definirana z zamenjavo treh polinomov  $u(t), v(t), w(t)$  v izrazih

$$\begin{aligned} x'(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y'(t) &= 2u(t)v(t)w(t) \end{aligned} \quad (3)$$

in z integriranjem.

Vsak nekonstantni skupni faktor  $u(t)$  in  $v(t)$  lahko absorbiramo v  $w(t)$ . Poleg tega moramo dopustiti določene izbire za  $w(t), u(t), v(t)$ , ki dajejo "degenerirane" krivulje s PH:

1. če je  $w(t) = 0$  ali  $u(t) = v(t) = 0$ , je dobljeni hodogram  $x'(t) = y'(t) = 0$  in definira eno točko namesto zveznega loka,
2. če so  $w(t), u(t), v(t)$  vse konstante (z  $w$  in vsaj eno od  $u, v$  neničelno) dobimo enakomerno parametrizirano premico, trivialno krivuljo s PH,
3. če sta  $u(t)$  in  $v(t)$  konstanti, kjer je vsaj ena različna od nič in  $w(t)$  ni konstanta, je dobljen lok spet linearen, vendar njegova parametrična hitrost ni konstantna (v splošnem),
4. prav tako nastanejo nekonstantno parametrizirani linearni loki (vzporedni z osjo  $x$ ), če je  $w(t) \neq 0$  in je eden od  $u(t)$  in  $v(t)$  nič.

V nadaljevanju bomo obravnavali le primere, kjer so  $w(t), u(t), v(t)$  vse neničelne, in  $u(t), v(t)$  nista obe konstanti.

**Opomba 2.** Če je  $w$  polinom stopnje  $\lambda$  in je  $\mu$  večja izmed stopenj polinomov  $u$  in  $v$ , je krivulja s PH dobljena z integracijo hodograma (3) stopnje  $n = \lambda + 2\mu + 1$ .

### 3 Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH

Osredotočimo se predvsem na primitivne Pitagorejske hodograme ( $u$  in  $v$  brez skupne ničle,  $w(t) = 1$ ). Taki hodogrami definirajo regularne krivulje s PH, ki zadoščajo  $r'(t) \neq 0$  za vse  $t$ . Točka na parametrični krivulji, kjer je  $r'(t) = 0$ , je neregularna točka - običajno je to konica ali nenaden obrat tangente. Uporaba nekonstantnega polinoma  $w(t)$  naredi konice (kar je nezaželen lastnost) na ustrezni krivulji s PH, če ima  $w(t)$  realne ničle znotraj domene parametra krivulje. Krivulje s PH definirane z integracijo (3) primitivnih hodogramov so lihe stopnje,  $n = 2\mu + 1$ .

Najenostavnejše netrivialne krivulje s PH dobljene z  $w(t) = 1$  in linearnima Bernsteinovima polinomoma:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned}$$

ki zadoščajo  $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$  in  $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$ , tako da imata  $u(t), v(t)$  različne ničle in nista obe konstanti, nam dajo hodogram

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo tega hodograma dobimo kubično krivuljo s PH z Bézierjevimi kontrolnimi točkami oblike

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1),\end{aligned}$$

kjer je kontrolna točka  $\mathbf{p}_0$  definirana z integracijsko konstanto prosto izbrana.

Krivulje pete stopnje s PH pa lahko definiramo s kvadratičnimi polinomi:

$$\begin{aligned}u(t) &= u_0B_0^2(t) + u_1B_1^2(t) + u_2B_2^2(t), \\ v(t) &= v_0B_0^2(t) + v_1B_1^2(t) + v_2B_2^2(t),\end{aligned}$$

in z integracijo dobimo Bézierjeve kontrolne točke oblike:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \frac{1}{15}(u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2),\end{aligned}$$

kjer je  $\mathbf{p}_0$  ponovno poljubna, velja pa

$$(u_2v_0 - u_0v_2)^2 \neq 4(u_0v_1 - u_1v_0)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

## 4 Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne krivulje s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  je podana s

$$\sigma(t) = |r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

in je polinom v  $t$ . Če je  $r(t)$  (lihe) stopnje  $n$ , morata biti  $u(t)$  in  $v(t)$  stopinje  $m = \frac{1}{2}(n-1)$  in je lahko zapisan v Bernsteinovi obliki kot

$$\begin{aligned}u(t) &= \sum_{k=0}^m u_k B_k^m(t), \\ v(t) &= \sum_{k=0}^m v_k B_k^m(t).\end{aligned}$$

Torej je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

kjer so koeficienti

$$\sigma_k = \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Za kubične krivulje s PH je npr.  $\sigma(t)$  kvadratna in ima Bernsteinove koeficiente

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\ \sigma_2 &= u_1^2 + v_1^2. \end{aligned}$$

Za krivulje pete stopnje s PH pa je  $\sigma(t)$  kvadratična z Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{3}(u_0 u_2 + v_0 v_2), \\ \sigma_3 &= u_1 u_2 + v_1 v_2, \\ \sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2. \end{aligned}$$

Da bi integrirali  $\sigma(t)$  in tako dobili dolžino loka  $s$  kot polinomske funkcije parametra,

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

uporabimo integracijsko pravilo za Bernsteinove bazne polinome. To nam da

$$s(t) = \sum_{k=0}^n s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n s_k B_k^n(t),$$

kjer je  $s_0 = 0$  in  $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Torej je skupna dolžina loka  $S$  preprosto  $S = s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{n-1}}{n}$ . Za izračun dolžine loka izseka krivulje s PH za  $t \in [a, b]$  pa vzamemo kar razliko  $s(b) - s(a)$ .

Podobno je veliko preprosteje določiti vrednost parametra  $t_*$ , do katerega je dolžina loka (merjeno od  $t = 0$ ) enaka dani vrednosti  $s_*$  - t.j. rešiti enačbo  $s(t_*) = s_*$  za  $t_*$ .

Običajno se  $r(t)$  prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov  $t_0, \dots, t_N$ , ki ustreza enotnemu prirastku parametra  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Vendar pa s tem dobimo neenakomerno razmaknjene (po dolžini loka) točke  $r(t_k)$  na krivulji, saj parametrična hitrost  $\sigma(t)$  v splošnem ni konstantna.

Vseeno, če parametrična hitrost krivulje s PH ni konstantna, lahko s  $s(t)$  enostavno popravimo to težavo. Naj bodo  $t_0, \dots, t_N$  vrednosti parametrov točk, ki so enakomerno razporejene z razmakom dolžine loka  $\Delta s = S/N$ , tako da

$$s(t_k) = k\Delta s, k = 1, \dots, N-1,$$

kjer  $t_0 = 0$  in  $t_N = 1$ . Sedaj iz  $\sigma(t) = ds/dt$  in  $\sigma(t)$  pozitivno za vse  $t$ , ko polinoma  $u$  in  $v$  nimata nobene skupne ničle, sledi, da je  $s(t)$  monotono

naraščajoča s  $t$  in s tem za vsak  $k$  vrednost  $s$  pri  $t_k$  leži med  $t_{k-1}$  in 1. Kot začetni približek vzamemo

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

in izboljšujemo rezultat z uporabo Newton-Raphsonove iteracije

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \dots$$

Zadošča že kakšna iteracija, da dosežemo zadovoljivo natančnost.

**Slika.** Enakomerno povečanje parametra krivulje s PH (levo) in dolžine loka (desno). Prikaz točk na krivulji, kjer  $\Delta t = \text{konstanta}$  oz.  $\Delta s = \text{konstantna}$ .

## 5 Lastnosti odvoda krivulje

Ker je parametrična hitrost krivulje s PH  $r(t)$  definirane z integracijo polinom v  $t$ , imajo osnovne lastnosti njenih odvodov - enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost - racionalno odvisnost od parametra krivulje. Natančneje, definirani so v smislu polinomov  $u(t)$  in  $v(t)$ , kjer

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

## 6 Racionalni odmiki krivulj s PH

Odmiki pri vsaki razdalji  $d$  od krivulje s PH  $r(t)$ , definirani kot

$$r_d(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t),$$

dovoljujejo natančno predstavitev v smislu racionalnih Bézierjevskih krivulj, ker je enotska normala  $\mathbf{n}(t)$  racionalno odvisna od parametra krivulje  $t$ .

Naj bodo kontrolne točke krivulje s PH  $r(t)$  zapisane v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Definirajmo prve difference kot

$$\Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \quad k = 0, \dots, n-1$$

kjer je  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ . Naj bo  $\Delta \mathbf{P}_k^\perp = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$ .

Odmik za razdaljo  $d$  od krivulje s PH  $r(t)$  je definiran zgoraj z  $r_d(t)$ , kjer je normala  $\mathbf{n}(t)$  na  $r(t)$  podana zgoraj. Odmik lahko izrazimo kot

$$r_d(t) = \left( \frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right),$$

kjer so  $W(t), X(t), Y(t)$  polinomi stopnje  $2n-1$ , katerih koeficienti

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), \quad k = 0, \dots, 2n-1,$$

določajo Bézierjeve kontrolne točke racionalne krivulje odmika.

Homogene koordinate za kontrolne točke odmika so lahko strnjeno izražene v smislu prvotne krivulje kot

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn \Delta \mathbf{P}_j^\perp), \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

S tem dobimo za kubične krivulje s PH 6 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj pete stopnje, za krivulje s PH pete stopnje pa dobimo 10 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj devete stopnje.

Na tem mestu pridejo slike obravnavane na koncu 17. poglavja, ki govorijo o stabilnosti zamikov ...

## 7 Nadaljevanje

Obravnavaj 19. poglavja, implementacija v matlab, zaključek ...

## Literatura

- [1] R. T. Farouki: Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, poglavje 17 in 19.