Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Jan Fekonja, Anže Marinko
IŠRM2, FMF
Predmet: Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

I. Uvod

hodograf parametrične krivulje $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je odvod krivulje same $r\prime(t)$ podan kot parametrična krivulja. Polinomska krivulja $r(t)$ v $\mathbb{R}^n$ je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če vsota kvadratov vseh n polinomov na koordinatnih komponentah hodografa krivulje sovpada s kvadratom nekega polinoma $\sigma(t)$. Oglejmo si ravninske krivulje s PH.

II. Ravninske krivulje s Pitagorejskim hodografom

Ključna lastnost, ki razlikuje ravninsko krivuljo s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ od "navadne"polinomske krivulje je privzeta vključitev Pitagorejskega pogoja v svoj hodograf, in sicer komponente $r\prime(t) = (x\prime(t), y\prime(t))$ morajo zadoščati pogoju

$$x\prime^2(t) + y\prime^2(t) = \sigma^2(t)$$

za nek polinom $\sigma(t)$. To lastnost je dosežena z upoštevanjem sledeče karakterizacije Pitagorejskih trojic polinomov.

Izrek 1. *Pitagorejski pogoj*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \tag{1}$$

izpolnjujejo polinomi $a(t), b(t), c(t)$ natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi $u(t), v(t), w(t)$ v obliki

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \end{aligned} \tag{2}$$

kjer imata $u(t)$ in $v(t)$ paroma različne ničle.

Dokaz. Očitno je pogoj (2) zadosten za (1). Potrebnost pogoja pa je dokazana v [1] na strani 382. □

Opomba 1. *Rešitve, kjer je $w(t)$ konstantna, imenujejo primitivne Pitagorejske trojice.*

Tedaj je ravninska krivulja s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ definirana z zamenjavo treh polinomov $u(t), v(t), w(t)$ v izrazih

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y\prime(t) &= 2u(t)v(t)w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

in z integriranjem.

Vsak nekonstantni skupni faktor $u(t)$ in $v(t)$ lahko absorbiramo v $w(t)$. Poleg tega moramo dopustiti določene izbire za $w(t), u(t), v(t)$, ki dajejo "degenerirane"krivulje s PH:

1) če je $w(t) = 0$ ali $u(t) = v(t) = 0$, je dobljeni hodograf $x\prime(t) = y\prime(t) = 0$ in definira eno točko namesto zveznega loka,
2) če so $w(t), u(t), v(t)$ vse konstante (z w in vsaj eno od u, v neničelno) dobimo enakomerno parametrizirano premico, trivialno krivuljo s PH,
3) če sta $u(t)$ in $v(t)$ konstanti, kjer je vsaj ena različna od nič in $w(t)$ ni konstanta, je dobljen lok spet linearen, vendar njegova parametrična hitrost ni konstantna (v splošnem),
4) prav tako nastanejo nekonstantno parametrizirani linearni loki (vzporedni z osjo x), če je $w(t) \neq 0$ in je eden od $u(t)$ in $v(t)$ nič.

V nadaljevanju bomo obravnavali le primere, kjer so $w(t), u(t), v(t)$ vse neničelne, in $u(t), v(t)$ nista obe konstanti.

Opomba 2. *Če je w polinom stopnje λ in je μ večja izmed stopenj polinomov u in v, je krivulja s PH dobljena z integracijo hodografa (3) stopnje $n = \lambda + 2\mu + 1$.*

III. Bézierjeve kontrolne točke krivulj s PH

Osredotočimo se predvsem na primitivne Pitagorejske hodografe (u in v brez skupne ničle, $w(t) = 1$). Taki hodografi definirajo regularne krivulje s PH, ki zadoščajo $r\prime(t) \neq 0$ za vse t. Točka na parametrični krivulji, kjer je $r\prime(t) = 0$, je neregularna točka - običajno je to konica ali nenaden obrat tangente. Uporaba nekonstantnega polinoma $w(t)$ naredi konice (kar je nezaželena lastnost) na ustrezni krivulji s PH, če ima $w(t)$ realne ničle znotraj domene parametra krivulje. Krivulje s PH definirane z integracijo (3) primitivnih hodografov so lihe stopnje, $n = 2\mu + 1$.

Najenostavnejše netrivialne krivulje s PH dobljene z $w(t) = 1$ in linearnima Bernsteinovima polinomoma:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned}$$

ki zadoščajo $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$ in $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$, tako da imata $u(t), v(t)$ različne ničle in nista obe konstanti, nam dajo hodograf

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + \\ &\quad (u_0 u_1 - v_0 v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t), \\ y\prime(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0)B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo tega hodografa dobimo kubično krivuljo s PH z Bézierjevimi kontrolnimi točkami oblike

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1), \end{aligned}$$

kjer je kontrolna točka $\mathbf{p}_0$ definirana z integracijsko konstanto prosto izbrana.

Krivulje pete stopnje s PH pa lahko definiramo s kvadratičnimi polinomi:

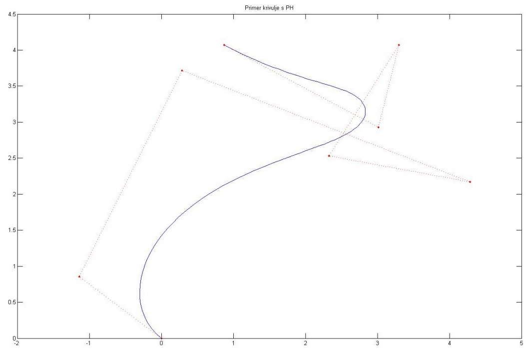
$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t), \end{aligned}$$

in z integracijo dobimo Bézierjeve kontrolne točke oblike:

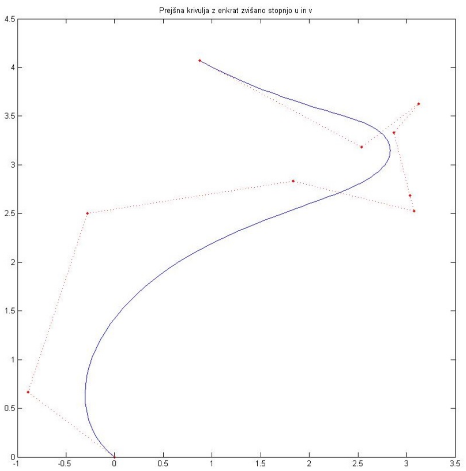
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1) + \\ & \quad \frac{1}{15}(u_0 u_2 - v_0 v_2, u_0 v_2 + u_2 v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2 v_2), \end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{p}_0$ ponovno poljubna, velja pa

$$(u_2 v_0 - u_0 v_2)^2 \neq 4(u_0 v_1 - u_1 v_0)(u_1 v_2 - u_2 v_1).$$



(a) Primer, kjer je stopnja u 2, stopnja v pa 3.



(b) Ista krivulja kot levo z enkrat zvišano stopnjo u in v.

IV. Parametrična hitrost in dolžina loka

Parametrična hitrost regularne krivulje s PH $r(t) = (x(t), y(t))$ je podana s

$$\sigma(t) = |r\prime(t)| = \sqrt{x\prime^2(t) + y\prime^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

in je polinom v t. Če je $r(t)$ (lihe) stopnje n, morata biti $u(t)$ in $v(t)$ stopinje $m = \frac{1}{2}(n-1)$ in je lahko zapisan v Bernsteinovi obliki kot

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{m} u_k B_k^m(t), \\ v(t) &= \sum_{k=0}^{m} v_k B_k^m(t). \end{aligned}$$

Torej je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

kjer so koeficienti

$$\sigma_k = \sum_{j=max(0,k-m)}^{min(m,k)} \frac{\binom{m}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}),$$
$$k = 0, \ldots, n-1.$$

Za kubične krivulje s PH je npr. $\sigma(t)$ kvadratna in ima Bernsteinove koeficiente

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\ \sigma_2 &= u_1^2 + v_1^2. \end{aligned}$$

Za krivulje pete stopnje s PH pa je $\sigma(t)$ kvadratična z Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0 u_1 + v_0 v_1, \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{3}(u_0 u_2 + v_0 v_2), \\ \sigma_3 &= u_1 u_2 + v_1 v_2, \\ \sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2. \end{aligned}$$

Da bi integrirali $\sigma(t)$ in tako dobili dolžino loka s kot polinomsko funkcijo parametra,

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

uporabimo integracijsko pravilo za Bernsteinove bazne polinome. To nam da

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n} s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} s_k B_k^n(t),$$

kjer je $s_0 = 0$ in $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, \ldots, n$.

Torej je skupna dolžina loka S preprosto $S = s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n}$. Za izračun dolžine loka izseka krivulje s PH za $t \in [a, b]$ pa vzamemo kar razliko $s(b) - s(a)$.

Podobno je veliko preprosteje določiti vrednost parametra t_*, do katerega je dolžina loka (merjeno od $t = 0$) enaka dani vrednosti s_* - t.j. rešiti enačbo $s(t_*) = s_*$ za t_*.

Običajno se $r(t)$ prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov $t_0, \ldots, t_N$, ki ustreza enotnemu prirastku parametra $\Delta t = t_k - t_{k-1}, k = 1, \ldots, N$. Vendar pa s tem dobimo neenakomerno razmaknjene (po dolžini loka) točke $r(t_k)$ na krivulji, saj parametrična hitrost $\sigma(t)$ v splošnem ni konstantna.

Vseeno, če parametrična hitrost krivulje s PH ni konstantna, lahko s $s(t)$ enostavno popravimo to težavo. Naj bodo $t_0, \ldots, t_N$ vrednosti parametrov točk, ki so enakomerno razporejene z razmakom dolžine loka $\Delta s = S/N$, tako da

$$s(t_k) = k\Delta s, k = 1, \ldots, N-1,$$

kjer $t_0 = 0$ in $t_N = 1$. Sedaj iz $\sigma(t) = ds/dt$ in $\sigma(t)$ pozitivno za vse t, ko polinoma u in v nimata nobene skupne ničle, sledi, da je $s(t)$ monotono naraščajoča s t in s tem za vsak k vrednost s pri t_k leži med t_{k-1} in 1. Kot začetni približek vzamemo

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

in izboljšujmo rezultat z uporabo Newton-Raphsonove iteracije

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \ldots.$$

Zadošča že kakšna iteracija, da dosežemo zadovoljivo natančnost.

V. Lastnosti odvoda krivulje

Ker je parametrična hitrost krivulje s PH $r(t)$ definirane z integracijo polinom v t, imajo osnovne lastnosti njenih odvodov - enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost - racionalno odvisnost od parametra krivulje. Natančneje, definirani so v smislu polinomov $u(t)$ in $v(t)$, kjer

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2\frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

VI. Racionalni odmiki krivulj s PH

Odmiki pri vsaki razdalji d od krivulje s PH $r(t)$, definirani kot

$$r_d(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t),$$

dovoljujejo natančno predstavitev v smislu racionalnih Bézierjevevih krivulj, ker je enotska normala $\mathbf{n}(t)$ racionalno odvisna od parametra krivulje t.

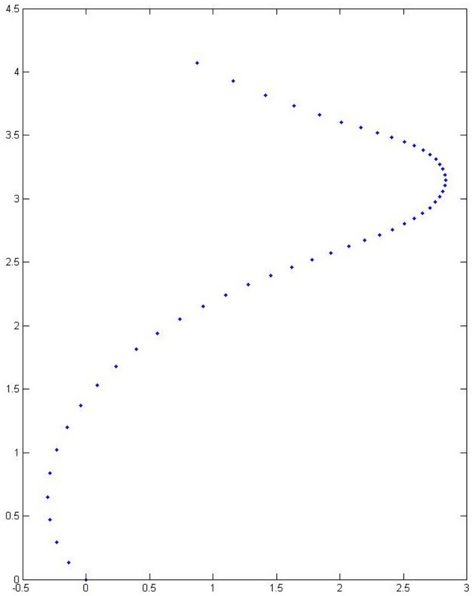
Naj bodo kontrolne točke krivulje s PH $r(t)$ zapisane v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \qquad k = 0, \ldots, n.$$

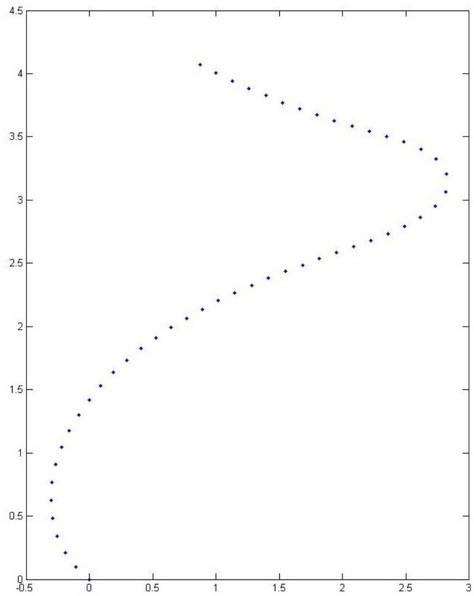
Definirajmo prve diference kot

$$\Delta\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

kjer je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Naj bo $\Delta\mathbf{P}_k^{\perp} = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$.



(a) $\Delta t = konst.$



(b) $\Delta s = konst.$

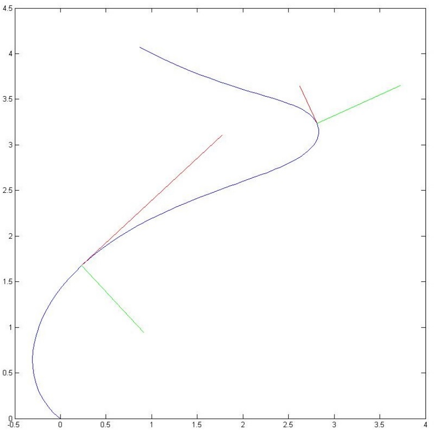
Slika 2: Enakomerno povečanje parametra krivulje s PH (levo) in dolžine loka (desno) - parametrizacija po nekaj iteracijah. Prikaz točk na krivulji.

Odmik za razdaljo d od krivulje s PH $r(t)$ je definiran zgoraj z $r_d(t)$, kjer je normala $\mathbf{n}(t)$ na $r(t)$ podana zgoraj. Odmik lahko izrazimo kot

$$r_d(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right),$$

kjer so $W(t), X(t), Y(t)$ polinomi stopnje $2n-1$, katerih koeficienti

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), \quad k = 0, \ldots, 2n-1,$$



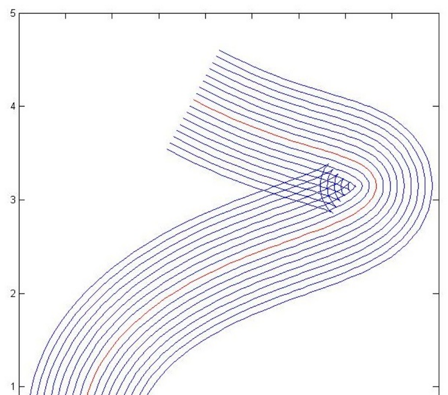
Slika 3: $t = 0.2$ in $t = 0.7$

določajo Bézierjeve kontrolne točke racionalne krivulje odmika.

Homogene koordinate za kontrolne točke odmika so lahko strnjeno izražene v smislu prvotne krivulje kot

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=max(0,k-n)}^{min(n-1,k)} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}}(\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn\Delta\mathbf{P}_j^{\perp}),$$
$$k = 0, \dots, 2n-1.$$

S tem dobimo za kubične krivulje s PH 6 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj pete stopnje, za krivulje s PH pete stopnje pa dobimo 10 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj devete stopnje.



Slika 4: Krivulja s PH (rdeča) in racionalni odmiki za $d = -0.6, -0.5, \dots, 0.5, 0.6$.

Opazimo, da so racionalni odmiki eksaktni za vsak d tudi v primeru špic in ko krivulja prečka samo sebe.

VII. Kompleksna predstavitev

Kompleksna predstavitev $\mathbb{R}^2$ je še posebej dragocena v analizi ravninskih krivulj s PH, saj ponuja enostavno in eleganto karekterizacijo lastnosti pitagorejskih hodografov. Vse kaj lahko naredimo s kompleksno predstavitvijo bi načeloma lahko dosegli z uporabo samo realnih spremenljivk. Vendar zaradi uporabnih geometrijskih vpogledov, ki jih nudi, se močno zanašamo na kompleksno predstavitev ravninskih krivulj s PH.

VIII. Kompleksne krivulje in hodografi

Vpeljemo presikavo hodografske ravnine, to je ravnina, v kateri je odvod $r\prime(t)$ parametrične krivulje $r(t)$. S to shemo uvedemo korespondenco ena na ena med množicamo regularnih krivulj s PH in regularnih "navadnih"polinomskih krivulj, ki nudi ogrudje za primerjavo in razlikovanje njunih lastnosti.

Imejmo polinomsko krivuljo v kompleksni ravnini, ki je v Bézierjevi obliki

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k,\ t \in [0,1], \tag{4}$$

kjer kompleksne vrednosti $p_k = x_k + iy_k$, $k = 0, ..., n$ določajo kontrolne točke. Hodograf $w(t) = r\prime(t)$ krivulje 4 izrazimo kot kompleksno Bézierjevo krivuljo stopnje $n-1$,

$$w(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k \binom{n-1}{k}(1-t)^{n-1-k}t^k,\ t \in [0,1], \tag{5}$$

s kontrolnimi točkami

$$w_k = n\Delta p_k = n(p_{k+1} - p_k),\ k = 0, ..., n-1. \tag{6}$$

Razlike $\Delta p_k = p_{k+1} - p_k$ določajo n usmerjenih "nog"kontrolnega poligona. Zaradi jasnosti obravnavamo krivulje in njene hodografe v dveh ločenih kompleksnih ravninah $z = x + iy$ in $w = u + iv$.

IX. Korespondenca ena na ena

Uporabimo $\mathbb{C}$ za predstavitev $\mathbb{R}^2$. Naj bo Π množica vseh regularnih polinomskih krivulj in naj bo $\hat{\Pi}$ množica vseh regularnih krivulj s PH. Čeprav sta π in $\hat{\Pi}$ neskončni množici, saj obe vsebujeta krivulje poljubnih stopenj, je jasno, da velja $\hat{\Pi} \subset \Pi$, saj vsaka regularna krivulje s PH je tudi regularna polinomska krivulja, vendar obstajajo regularne polinomske krivulje, katerih hodografi niso Pitagorejski (na primer, parabola $r(t) = t + it^2$).

Preprost tristopenski postopek P, ki pretvori poljubno odvedljivo ravninsko krivuljo $r(t)$ v novo krivuljo $\hat{r}(t)$:

1) odvedemo dano krivuljo $r(t)$, da dobimo njen hodograf $w(t) = r'(t)$;
2) uporabimo preslikavo $w \to w^2$ mad ravninskim hodografom, da dobimo $\hat{w}(t) = w^2(t)$;
3) integriramo preslikan hodograf $\hat{w}(t)$, da dobimo novo krivuljo $\hat{r}(t) = \int \hat{w}(t)dt$.

V tem postopku predpostavimo $r(0) = \hat{r}(0) = 0$.

Izrek 2. *P definira bijektivno preslikavo ali krespodenco ena na ena med množicamoa Π in $\hat{\Pi}$ ragularnih polinomskih krivulj in regularnih PH krivulj.*

Tabela I: Ujemajoče se krivulje nižjih stopenj.

	polinomska krivulja $r(t)$	krivulja s PH $\hat{r}(t)$
$n=1$	ravne črte	ravne črte
$n=2$	parabole	Tschirnhausove kubične krivulje
$n=3$	regularne kubične krivulje	regularni kvintiki s PH
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dokaz. Dokaz v [1] na straneh 409 in 410. □

V splošnem velja, da z inverzno preslikavo $w \to \sqrt{w}$ ne dobimo polinomskega hodografa, kadar jo uporabimo na splošnem polinomskem hodografu. Pravzaprav dobimo polinomski hodograph samo kadar jo uporabimo na Pitagorejskem hodografu. Torej velja $P(\Pi) = \hat{\Pi}$ in $P^{-1}(\hat{\Pi}) = \Pi$.

Če sta regularna polinomska krivulja $r(t)$ in regularna krivulja s PH $\hat{r}(t)$ med sebom povezani s preslikavama P in P^{-1}m potem lahko takšne pare izrazimo kot:

$$r(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau + i\int_0^t v(\tau)d\tau,$$
$$\hat{r}(t) = \int_0^t (u^2(\tau) - v^2(\tau)d\tau) + i\int_0^t 2u(\tau)v(\tau)d\tau, \tag{7}$$

kjer sta $u(t)$ in $v(t)$ razmeroma preprosta polinoma in predpostavimo $r(0) = \hat{r}(0) = 0$.

Opomba 3. *Množica $\hat{\Pi}$ regularnih krivulj s PH ima enako kardinalnost ali moč kot množica Π regularnih polinomskih krivulj.*

Lema 1. *Stonji n in $\hat{n}$ pripadajočima krivuljama $r(t)$ in $\hat{r}(t)$ sta povezani z $\hat{n} = 2n - 1$.*

Dokaz. Pri postopku P najprej odvajamo krivuljo $r(t)$ stopnje n in dobimo njen hodograf $w(t)$ stopnje $n-1$. Nato kvadriramo $w(t)$ in dobimo hodograf $\hat{w}(t)$ stopnje $2n-2$. Na koncu integriramo $\hat{w}(t)$ in dobimo novo krivuljo $\hat{r}(t)$ stopnje $2n-1$. □

Očitno ne obstajajo regularne krivulje s PH, ki so sode stopnje. Ravne črte v Π ustrezajo (drugačnim) ravnim črtam v $\hat{\Pi}$, ampak P preslika regularne polinomske krivulje stopnje ≥ 2 v regularne krivulje s PH višje lihe stopnje (glej tabelo I).

Izrek 3. *Kontrolne točke regularne krivulje s PH stopnje $2n-1$ so podane kot n kompleksnih vrednosti $w_0, ..., w_{n-1}$ z rekurzivno formulo*

$$p_{k+1} = p_k + \frac{1}{2n-1}\sum_{j=max(0,k-n+1}^{min(k,n-1} \frac{\binom{n-1}{j}\binom{n-1}{k-j}}{\binom{2n-2}{k}} w_j w_{k-j} \tag{8}$$

za $k = 0, 1, ..., 2n-2$, kjer je p_0 poljuben in $w_0, ..., w_{n-1}$ so takšni, da hodograf $w(t)$ definiran v (4) ne pokvari originalnega.

Dokaz. Dokaz v [1] na strani 413. □

X. Rotacijske invariance hodografov

Kompleksna predstavite ponuja preprost dokaz za rotacijsko invariantnost zadostne in potrebne oblike

$$\begin{aligned} x\prime(t) &= u^2(t) - v^2(t), \\ y\prime(t) &= 2u(t)v(t), \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) \end{aligned} \tag{9}$$

za primitivne ravninske pitagorejske hodografe $r\prime(t) = (x\prime(t), y\prime(t))$ zadošča

$$x\prime^2(t) + y\prime^2(t) = \sigma^2(t), \tag{10}$$

kjer $D(u,v) = konstanta \Rightarrow gcd(x\prime, y\prime) = konstanta$. Ob rotaciji

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}\prime(t) \\ \widetilde{y}\prime(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\prime(t) \\ y\prime(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

po kotu θ, poskužamo izraziti rotacijski hodograf $\widetilde{r}\prime(t) = (\widetilde{x}\prime(t), \widetilde{y}\prime(t))$ v smislu dveh novih polinomov $\widetilde{u}(t)$, $\widetilde{x}(v)$ kot

$$\widetilde{x}\prime(t) = \widetilde{u}^2(t) - \widetilde{v}^2(t),\ \widetilde{y}\prime(t) = 2\widetilde{u}(t)\widetilde{v}(t). \tag{12}$$

Opazimo lahko, da je preoblikovan hodograf,

$$\begin{aligned} \widetilde{x}\prime(t) &= cos\theta[\widetilde{u}^2(t) - \widetilde{v}^2(t)] - sin\theta 2u(t)v(t), \\ \widetilde{y}\prime(t) &= sin\theta[\widetilde{u}^2(t) - \widetilde{v}^2(t)] + cos\theta 2u(t)v(t), \end{aligned} \tag{13}$$

dobljen z vstavljanjem polinomov v (12)

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(t) &= cos\frac{1}{2}\theta u(t) - sin\frac{1}{2}\theta v(t), \\ \widetilde{v}(t) &= sin\frac{1}{2}\theta u(t) + cos\frac{1}{2}\theta v(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Z uporabo kompleksne predstavitve $r\prime(t) = w^2(t)$, kjer je $w(t) = u(t) + iv(t)$, pri rotaciji dobimo $\widetilde{r}\prime(t) = exp(i\theta)w^2(t) = \widetilde{r}\prime(t) = \widetilde{w}^2(t)$, kjer je realni in imaginarni del $\widetilde{w} = exp(i\frac{1}{2}\theta)w(t) = \widetilde{u}(t) + i\widetilde{v}(t)$ definiran z (14).

XI. Karekterizacija krivulje pete stopnje s PH

Kontrolne točke (8) za krivulje pete stopnje s PH so oblike

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{1}{5}w_0^2, \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{5}w_0 w_1, \\ p_3 &= p_2 + \frac{1}{5}\frac{2w_1^2 + w_0 w_2}{3}, \\ p_4 &= p_3 + \frac{1}{5}w_1 w_2, \\ p_5 &= p_4 + \frac{1}{5}w_2^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Z uporabo kompleksne oblike dobimo karakterizacijo za krivulje pete stopnje s PH v smislu geometrije kontrolnih poligonov. Ponovno zapišemo enačbe (15) v smislu $\Delta p_k = p_{k-1} - p_k$ kot

$$
\begin{aligned}
\Delta p_0 = \frac{w_0^2}{5},\ \Delta p_1 = \frac{w_0 w_1}{5}, \\
\Delta p_2 = \frac{2w_1^2 + w_0 w_2}{15}, \\
\Delta p_3 = \frac{w_1 w_2}{5},\ \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Za regularne krivulje velja $\Delta p_0 \neq 0$ in $\Delta p_4 \neq 0$.

Izrek 4. *Naj bodo noge kontrolnega polinoma regularne krivulje pete stopnje definirane kot kompleksne vrednosti $\Delta p_0, ..., \Delta p_4$. Potem ima krivulja pitagorejski hodograf natanko tedaj, ko te vrednosti zadoščajo enačbi:*

$$\Delta p_0 (\Delta p_3)^2 = \Delta p_4 (\Delta p_1)^2, \tag{17}$$

in se ujemajo z nasednjim sistemom umejitev:

$$
\begin{aligned}
3\Delta p_0 \Delta p_1 \Delta p_2 - (\Delta p_0)^2 \Delta p_3 - 2(\Delta p_1)^3 = 0, \\
3\Delta p_4 \Delta p_3 \Delta p_2 - (\Delta p_4)^2 \Delta p_1 - 2(\Delta p_3)^3 = 0, \\
3\Delta p_0 \Delta p_3 \Delta p_2 - \Delta p_4 \Delta p_0 \Delta p_1 - 2(\Delta p_1)^2 \Delta p_3 = 0, \\
3\Delta p_4 \Delta p_1 \Delta p_2 - \Delta p_0 \Delta p_4 \Delta p_3 - 2(\Delta p_3)^2 \Delta p_1 = 0, \\
9\Delta p_0 (\Delta p_2)^2 - 6(\Delta p_1)^2 \Delta p_2 - 2\Delta p_0 \Delta p_1 \Delta p_3 - (\Delta p_0)^2 \Delta p_4 = 0, \\
9\Delta p_4 (\Delta p_2)^2 - 6(\Delta p_3)^2 \Delta p_2 - 2\Delta p_4 \Delta p_3 \Delta p_1 - (\Delta p_4)^2 \Delta p_3 = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Če sta oba Δp_1 in Δp_3 neničelna, potem enačba (17) in ena od prvih štirih enačb (18) predstavlja zadosten in potreben pogoj, da je krivulja pete stopnje krivulja s PH. Če $\Delta p_1 = \Delta p_3 = 0$, potem (17) in prve štiri enačbe iz (18) postanejo identitete in moramo vzeti eno izmed dveh zadnjih enačb iz (18) za pogoj.

Dokaz. Dokaz v [1] na straneh 417 in 418. □

XII. Geometrija kontrolnega poligona

A. Samo štiti različne kontrolne točke

Ta primer nastopi, ko vzamemo $w_1 = 0$ v (15), torej je $p_1 = p_2$ in $p_3 = p_4$. Potem je kontrolni poligon naslednje oblike:

$$
\begin{aligned}
\Delta p_0 = \frac{w_0^2}{5},\ \Delta p_1 = 0, \\
\Delta p_2 = \pm \frac{w_0 w_2}{15},\ \Delta p_3 = 0,\ \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.
\end{aligned}
$$

Čeprev imamo samo štiri različne kontrolne točke, ta hodogaf definira pravo krivuljo pete stopnje s PH, in ne kubično krivuljo s PH zvišane stopnje. Še več, ta krivulja je regularna, če velja $w_0, w_2 \neq 0$.

B. Samo pet različnih kontrolnih točk

V tem primeri je vrednost od w_1 izbrana tako, da velja $2w_1^2 + w_0 w_2 = 0$, in zato velja $p_2 = p_3$. Tako velja, da je $\Delta p_2 = 0$ in ostale noge kontrolnega pogolina lahko izrazimo s samo w_0 in w_2:

$$
\begin{aligned}
\Delta p_0 = \frac{w_0^2}{5},\ \Delta p_1 = \pm i \frac{w_0}{5} \sqrt{\frac{w_0 w_2}{2}}, \\
\Delta p_3 = \pm i \frac{w_2}{5} \sqrt{\frac{w_0 w_2}{2}},\ \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.
\end{aligned}
$$

Za tako degenerirano obliko, sta pogoja (17) in (18) lahko reducirana na:

$$
\begin{aligned}
\Delta p_0 (\Delta p_3)^2 = \Delta p_4 (\Delta p_1)^2, \\
\Delta p_0 \Delta p_4 + 2\Delta p_1 \Delta p_3 = 0.
\end{aligned}
$$

C. Krivulja s PH povišane stopnje

Stopnjo katerekoli krivulje s PH je mogoče dvigniti, ne da bi pri tem ogrozili pitagorejsko naravo njenega hodografa, saj višanje stopnje pomeni le redundantno predstavitev. Če postopek višanje stopnje nanesemo dvakrat na kontrolni poligon kubične krivulje s PH, potem ima krivulja pete stopnje s PH kontrolne točke:

$$
\begin{aligned}
p_1 = p_0 + \frac{1}{5} w_0^2, \\
p_2 = p_1 + \frac{1}{1}(w_0^2 + w_0 w_1), \\
p_3 = p_2 + \frac{1}{30}(w_0^2 + 4w_0 w_1 + w_1^2), \\
p_4 = p_3 + \frac{1}{10}(w_0 w_1 + w_1^2), \\
p_5 = p_4 + \frac{1}{5} w_1^2.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Preverimo lahko, da so enačbe (19) oblike (15) le da so w_0, w_1, w_2 zamenjani z $w_0, \frac{1}{2}(w_0 + w_1), w_1$. Od tod sledi, da je vrednost w_1 v enačba (15) vedno povprečje vrednosti w_0 in w_2.

Literatura

[1] R. T. Farouki: Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, poglavje 17 in 19.