

# Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

Jan Fekonja, Anže Marinko

IŠRM2, FMF

Predmet: Geometrijsko podprto računalniško oblikovanje

## I. UVOD

hodograf parametrične krivulje  $r(t)$  v  $\mathbb{R}^n$  je odvod krivulje same  $r'(t)$  podan kot parametrična krivulja. Polinomska krivulja  $r(t)$  v  $\mathbb{R}^n$  je krivulja s Pitagorejskim hodografom (PH), če vsota kvadratov vseh  $n$  polinomov na koordinatnih komponentah hodografa krivulje sovпада s kvadratom nekega polinoma  $\sigma(t)$ . Oglejmo si ravninske krivulje s PH.

## II. RAVNINSKE KRIVULJE S PITAGOREJSKIM HODOGRAFOM

Ključna lastnost, ki razlikuje ravninsko krivuljo s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  od "navadne" polinomske krivulje je privzeta vključitev Pitagorejskega pogoja v svoj hodograf, in sicer komponente  $r'(t) = (x'(t), y'(t))$  morajo zadoščati pogoju

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$$

za nek polinom  $\sigma(t)$ . To lastnost je dosežena z upoštevanjem sledeče karakterizacije Pitagorejskih trojic polinomov.

**Izrek 1.** *Pitagorejski pogoji*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \quad (1)$$

izpolnjujejo polinomi  $a(t), b(t), c(t)$  natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z drugimi polinomi  $u(t), v(t), w(t)$  v obliki

$$\begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \end{aligned} \quad (2)$$

kjer imata  $u(t)$  in  $v(t)$  paroma različne ničle.

**Dokaz.** Očitno je pogoj (2) zadosten za (1). Potrebnost pogoja pa je dokazana v [1] na strani 382.  $\square$

**Opomba 1.** *Rešitve, kjer je  $w(t)$  konstantna, imenujejo primitivne Pitagorejske trojice.*

Tedaj je ravninska krivulja s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  definirana z zamenjavo treh polinomov  $u(t), v(t), w(t)$  v izrazih

$$\begin{aligned} x'(t) &= [u^2(t) - v^2(t)]w(t) \\ y'(t) &= 2u(t)v(t)w(t) \end{aligned} \quad (3)$$

in z integriranjem.

Vsak nekonstantni skupni faktor  $u(t)$  in  $v(t)$  lahko absorbiramo v  $w(t)$ . Poleg tega moramo dopustiti določene izbire za  $w(t), u(t), v(t)$ , ki dajejo "degenerirane" krivulje s PH:

- 1) če je  $w(t) = 0$  ali  $u(t) = v(t) = 0$ , je dobljen hodograf  $x'(t) = y'(t) = 0$  in definira eno točko namesto zveznega loka,

- 2) če so  $w(t), u(t), v(t)$  vse konstante (z  $w$  in vsaj eno od  $u, v$  neničelno) dobimo enakomerno parametrizirano premico, trivialno krivuljo s PH,
- 3) če sta  $u(t)$  in  $v(t)$  konstanti, kjer je vsaj ena različna od nič in  $w(t)$  ni konstanta, je dobljen lok spet linearen, vendar njegova parametrična hitrost ni konstantna (v splošnem),
- 4) prav tako nastanejo nekonstantno parametrizirani linearni loki (vzporedni z osjo  $x$ ), če je  $w(t) \neq 0$  in je eden od  $u(t)$  in  $v(t)$  nič.

V nadaljevanju bomo obravnavali le primere, kjer so  $w(t), u(t), v(t)$  vse neničelne, in  $u(t), v(t)$  nista obe konstanti.

**Opomba 2.** *Če je  $w$  polinom stopnje  $\lambda$  in je  $\mu$  večja izmed stopenj polinomov  $u$  in  $v$ , je krivulja s PH dobljena z integracijo hodografa (3) stopnje  $n = \lambda + 2\mu + 1$ .*

## III. BÉZIERJEVE KONTROLNE TOČKE KRIVULJ S PH

Osredotočimo se predvsem na primitivne Pitagorejske hodografe ( $u$  in  $v$  brez skupne ničle,  $w(t) = 1$ ). Taki hodografi definirajo regularne krivulje s PH, ki zadoščajo  $r'(t) \neq 0$  za vse  $t$ . Točka na parametrični krivulji, kjer je  $r'(t) = 0$ , je neregularna točka - običajno je to konica ali nenaden obrat tangente. Uporaba nekonstantnega polinoma  $w(t)$  naredi konice (kar je nezaželeno lastnost) na ustrezni krivulji s PH, če ima  $w(t)$  realne ničle znotraj domene parametra krivulje. Krivulje s PH definirane z integracijo (3) primitivnih hodografov so lihe stopnje,  $n = 2\mu + 1$ .

Najenostavnejše netrivialne krivulje s PH dobljene z  $w(t) = 1$  in linearnima Bernsteinovima polinomoma:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned}$$

ki zadoščajo  $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$  in  $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$ , tako da imata  $u(t), v(t)$  različne ničle in nista obe konstanti, nam dajo hodograf

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 + u_1 v_0)B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo tega hodografa dobimo kubično krivuljo s PH z Bézierjevimi kontrolnimi točkami oblike

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1), \end{aligned}$$

kjer je kontrolna točka  $\mathbf{p}_0$  definirana z integracijsko konstanto prosto izbrana.

Krivulje pete stopnje s PH pa lahko definiramo s kvadratičnimi polinomi:

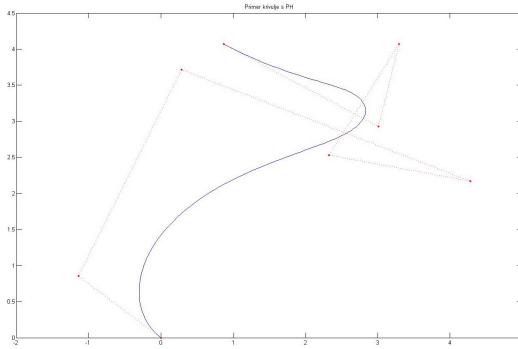
$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t), \end{aligned}$$

in z integracijo dobimo Bézierjeve kontrolne točke oblike:

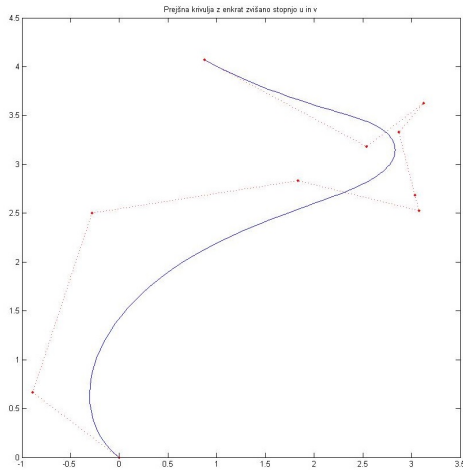
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \\ &\quad \frac{1}{15}(u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2), \end{aligned}$$

kjer je  $\mathbf{p}_0$  ponovno poljubna, velja pa

$$(u_2v_0 - u_0v_2)^2 \neq 4(u_0v_1 - u_1v_0)(u_1v_2 - u_2v_1).$$



(a) Primer, kjer je stopnja  $u$  2, stopnja  $v$  pa 3.



(b) Ista krivulja kot levo z enkrat zvišano stopnjo  $u$  in  $v$ .

#### IV. PARAMETRIČNA HITROST IN DOLŽINA LOKA

Parametrična hitrost regularne krivulje s PH  $r(t) = (x(t), y(t))$  je podana s

$$\sigma(t) = |r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

in je polinom v  $t$ . Če je  $r(t)$  (lihe) stopnje  $n$ , morata biti  $u(t)$  in  $v(t)$  stopinje  $m = \frac{1}{2}(n-1)$  in je lahko zapisan v Bernsteinovi obliki kot

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^m u_k B_k^m(t), \\ v(t) &= \sum_{k=0}^m v_k B_k^m(t). \end{aligned}$$

Torej je

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k B_k^{n-1}(t),$$

kjer so koeficienti

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{m}{k-j}}{\binom{n-1}{k}} (u_j u_{k-j} + v_j v_{k-j}), \\ k &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Za kubične krivulje s PH je npr.  $\sigma(t)$  kvadratna in ima Bernsteinove koeficiente

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0u_1 + v_0v_1, \\ \sigma_2 &= u_1^2 + v_1^2. \end{aligned}$$

Za krivulje pete stopnje s PH pa je  $\sigma(t)$  kvadratična z Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= u_0^2 + v_0^2, \\ \sigma_1 &= u_0u_1 + v_0v_1, \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{3}(u_0u_2 + v_0v_2), \\ \sigma_3 &= u_1u_2 + v_1v_2, \\ \sigma_4 &= u_2^2 + v_2^2. \end{aligned}$$

Da bi integrirali  $\sigma(t)$  in tako dobili dolžino loka  $s$  kot polinomsko funkcijo parametra,

$$s(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

uporabimo integracijsko pravilo za Bernsteinove bazne polinome. To nam da

$$s(t) = \sum_{k=0}^n s_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n s_k B_k^n(t),$$

kjer je  $s_0 = 0$  in  $s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Torej je skupna dolžina loka  $S$  preprosto  $S = s(1) = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{n-1}}{n}$ . Za izračun dolžine loka izseka krivulje s PH za  $t \in [a, b]$  pa vzamemo kar razliko  $s(b) - s(a)$ .

Podobno je veliko preprosteje določiti vrednost parametra  $t_*$ , do katerega je dolžina loka (merjeno od  $t = 0$ ) enaka dani vrednosti  $s_*$  - t.j. rešiti enačbo  $s(t_*) = s_*$  za  $t_*$ .

Običajno se  $r(t)$  prikaže z vrednotenjem vrednosti parametrov  $t_0, \dots, t_N$ , ki ustreza enotnemu prirastku parametra  $\Delta t = t_k - t_{k-1}, k = 1, \dots, N$ . Vendar pa s tem dobimo neenakomerno razmaknjene (po dolžini loka) točke  $r(t_k)$  na krivulji, saj parametrična hitrost  $\sigma(t)$  v splošnem ni konstantna.

Vseeno, če parametrična hitrost krivulje s PH ni konstantna, lahko s  $s(t)$  enostavno popravimo to težavo. Naj bodo  $t_0, \dots, t_N$  vrednosti parametrov točk, ki so enakomerno razporejene z razmakom dolžine loka  $\Delta s = S/N$ , tako da

$$s(t_k) = k\Delta s, k = 1, \dots, N-1,$$

kjer  $t_0 = 0$  in  $t_N = 1$ . Sedaj iz  $\sigma(t) = ds/dt$  in  $\sigma(t)$  pozitivno za vse  $t$ , ko polinoma  $u$  in  $v$  nimata nobene skupne ničle, sledi, da je  $s(t)$  monotono naraščajoča s  $t$  in s tem za vsak  $k$  vrednost  $s$  pri  $t_k$  leži med  $t_{k-1}$  in 1. Kot začetni približek vzamemo

$$t_k^{(0)} = t_{k-1} + \frac{\Delta s}{\sigma(t_{k-1})}$$

in izboljšujemo rezultat z uporabo Newton-Raphsonove iteracije

$$t_k^{(r)} = t_k^{(r-1)} - \frac{s(t_k^{(r-1)}) - k\Delta s}{\sigma(t_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \dots$$

Zadošča že kakšna iteracija, da dosežemo zadovoljivo natančnost.

## V. LASTNOSTI ODVODA KRIVULJE

Ker je parametrična hitrost krivulje s PH  $r(t)$  definirane z integracijo polinom v  $t$ , imajo osnovne lastnosti njenih odvodov - enotski tangentni vektor, normala in ukrivljenost - racionalno odvisnost od parametra krivulje. Natančneje, definirani so v smislu polinomov  $u(t)$  in  $v(t)$ , kjer

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

## VI. RACIONALNI ODMIKI KRIVULJ S PH

Odmiki pri vsaki razdalji  $d$  od krivulje s PH  $r(t)$ , definirani kot

$$r_d(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t),$$

dovoljujejo natančno predstavitev v smislu racionalnih Bézierjevih krivulj, ker je enotska normala  $\mathbf{n}(t)$  racionalno odvisna od parametra krivulje  $t$ .

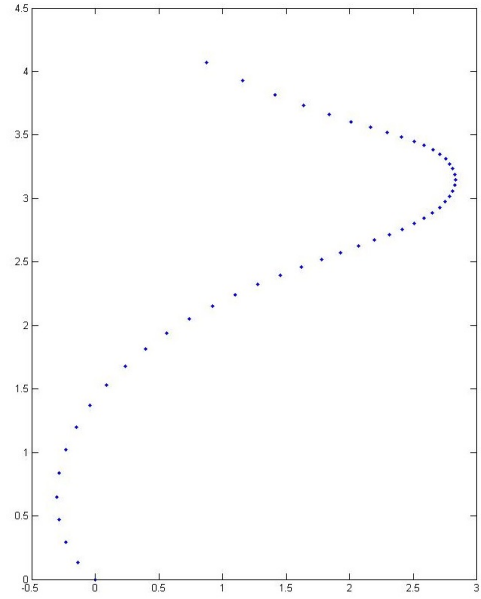
Naj bodo kontrolne točke krivulje s PH  $r(t)$  zapisane v homogenih koordinatah kot

$$\mathbf{P}_k = (W_k, X_k, Y_k) = (1, x_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

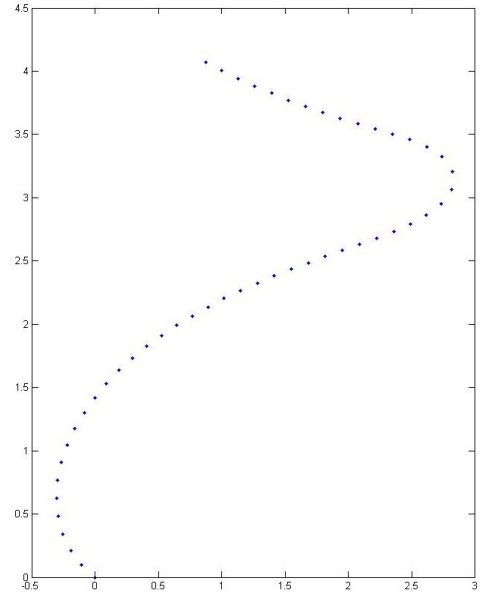
Definirajmo prve difference kot

$$\Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k = (0, \Delta x_k, \Delta y_k), \quad k = 0, \dots, n-1$$

kjer je  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ . Naj bo  $\Delta \mathbf{P}_k^\perp = (0, \Delta y_k, -\Delta x_k)$ .



(a)  $\Delta t = konst.$



(b)  $\Delta s = konst.$

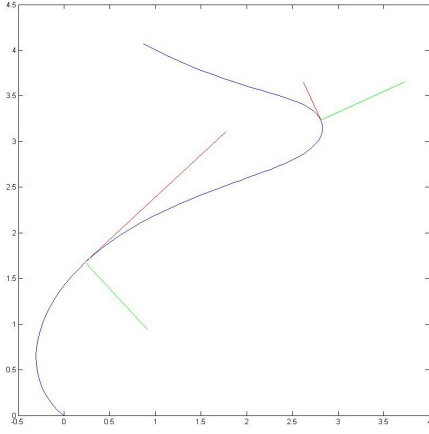
Slika 2: Enakomerno povečanje parametra krivulje s PH (levo) in dolžine loka (desno) - parametrizacija po nekaj iteracijah. Prikaz točk na krivulji.

Odmik za razdaljo  $d$  od krivulje s PH  $r(t)$  je definiran zgoraj z  $r_d(t)$ , kjer je normala  $\mathbf{n}(t)$  na  $r(t)$  podana zgoraj. Odmik lahko izrazimo kot

$$r_d(t) = \left( \frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right),$$

kjer so  $W(t), X(t), Y(t)$  polinomi stopnje  $2n-1$ , katerih koeficienti

$$\mathbf{O}_k = (W_k, X_k, Y_k), \quad k = 0, \dots, 2n-1,$$

Slika 3:  $t = 0.2$  in  $t = 0.7$ 

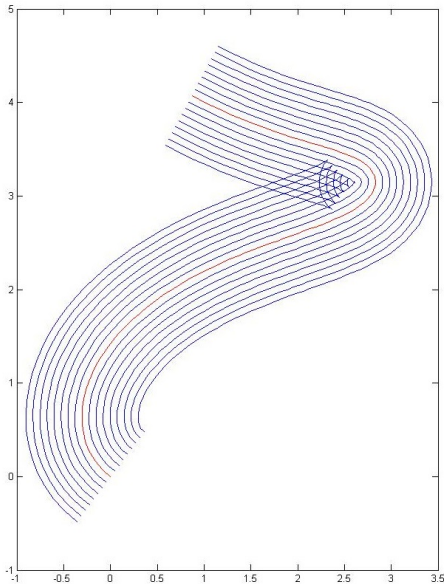
določajo Bézierjeve kontrolne točke racionalne krivulje odmika.

Homogene koordinate za kontrolne točke odmika so lahko strnjeno izražene v smislu prvotne krivulje kot

$$\mathbf{O}_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(n-1, k)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{2n-1}{k}} (\sigma_j \mathbf{P}_{k-j} + dn \Delta \mathbf{P}_j^\perp),$$

$$k = 0, \dots, 2n-1.$$

S tem dobimo za kubične krivulje s PH 6 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj pete stopnje, za krivulje s PH pete stopnje pa dobimo 10 kontrolnih točk racionalnih odmikov kot krivulj devete stopnje.

Slika 4: Krivulja s PH (rdeča) in racionalni odmiki za  $d = -0.6, -0.5, \dots, 0.5, 0.6$ .

Opazimo, da so racionalni odmiki eksaktni za vsak  $d$  tudi v primeru špic in ko krivulja prečka samo sebe.

## VII. KOMPLEKSNA PREDSTAVITEV

Kompleksna predstavitev  $\mathbb{R}^2$  je še posebej dragocena v analizi ravninskih krivulj s PH, saj ponuja enostavno in eleganto karekterizacijo lastnosti pitagorejskih hodografov. Vse kaj lahko naredimo s kompleksno predstavitvijo bi načeloma lahko dosegli z uporabo samo realnih spremenljivk. Vendar zaradi uporabnih geometrijskih vpogledov, ki jih nudi, se močno zanašamo na kompleksno predstavitev ravninskih krivulj s PH.

## VIII. KOMPLEKSNE KRIVULJE IN HODOGRAFI

Vpeljemo preslikavo hodografske ravnine, to je ravnina, v kateri je odvod  $r'(t)$  parametrične krivulje  $r(t)$ . S to shemo uvedemo korespondenco ena na ena med množicami regularnih krivulj s PH in regularnih "navadnih" polinomskih krivulj, ki nudi ogrudje za primerjavo in razlikovanje njunih lastnosti.

Imejmo polinomsko krivuljo v kompleksni ravnini, ki je v Bézierjevi obliki

$$r(t) = \sum_{k=0}^n p_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

kjer kompleksne vrednosti  $p_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  določajo kontrolne točke. Hodograf  $w(t) = r'(t)$  krivulje 4 izrazimo kot kompleksno Bézierjevo krivuljo stopnje  $n-1$ ,

$$w(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k \binom{n-1}{k} (1-t)^{n-1-k} t^k, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

s kontrolnimi točkami

$$w_k = n \Delta p_k = n(p_{k+1} - p_k), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (6)$$

Razlike  $\Delta p_k = p_{k+1} - p_k$  določajo  $n$  usmerjenih "nog" kontrolnega poligona. Zaradi jasnosti obravnavamo krivulje in njene hodografe v dveh ločenih kompleksnih ravninah  $z = x + iy$  in  $w = u + iv$ .

## IX. KORESPONDENCA ENA NA ENA

Uporabimo  $\mathbb{C}$  za predstavitev  $\mathbb{R}^2$ . Naj bo  $\Pi$  množica vseh regularnih polinomskih krivulj in naj bo  $\hat{\Pi}$  množica vseh regularnih krivulj s PH. Čeprav sta  $\pi$  in  $\hat{\Pi}$  neskončni množici, saj obe vsebujeta krivulje poljubnih stopenj, je jasno, da velja  $\hat{\Pi} \subset \Pi$ , saj vsaka regularna krivulja s PH je tudi regularna polinomska krivulja, vendar obstajajo regularne polinomske krivulje, katerih hodografi niso Pitagorejski (na primer, parabola  $r(t) = t + it^2$ ).

Preprost tristopenjski postopek  $P$ , ki pretvori poljubno odvedljivo ravninsko krivuljo  $r(t)$  v novo krivuljo  $\hat{r}(t)$ :

- 1) odvedemo dano krivuljo  $r(t)$ , da dobimo njen hodograf  $w(t) = r'(t)$ ;
- 2) uporabimo preslikavo  $w \rightarrow w^2$  nad ravninskim hodografom, da dobimo  $\hat{w}(t) = w^2(t)$ ;
- 3) integriramo preslikan hodograf  $\hat{w}(t)$ , da dobimo novo krivuljo  $\hat{r}(t) = \int \hat{w}(t) dt$ .

V tem postopku predpostavimo  $r(0) = \hat{r}(0) = 0$ .

**Izrek 2.**  $P$  definira bijektivno preslikavo ali korespondenco ena na ena med množicama  $\Pi$  in  $\hat{\Pi}$  regularnih polinomskih krivulj in regularnih PH krivulj.

Tabela I: Ujemajoče se krivulje nižjih stopenj.

	polinomska krivulja $r(t)$	krivulja s PH $\hat{r}(t)$
$n = 1$	ravne črte	ravne črte
$n = 2$	parabole	Tschirnhausove kubične krivulje
$n = 3$	regularne kubične krivulje	regularni kvintiki s PH
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

*Dokaz.* Dokaz v [1] na straneh 409 in 410.  $\square$

V splošnem velja, da z inverzno preslikavo  $w \rightarrow \sqrt{w}$  ne dobimo polinomskega hodografa, kadar jo uporabimo na splošnem polinomskem hodografu. Pravzaprav dobimo polinomske hodographe samo kadar jo uporabimo na Pitagorejskem hodografu. Torej velja  $P(\Pi) = \hat{\Pi}$  in  $P^{-1}(\hat{\Pi}) = \Pi$ .

Če sta regularna polinomska krivulja  $r(t)$  in regularna krivulja s PH  $\hat{r}(t)$  med seboj povezani s preslikavama  $P$  in  $P^{-1}$  m potem lahko takšne pare izrazimo kot:

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t u(\tau) d\tau + i \int_0^t v(\tau) d\tau, \\ \hat{r}(t) &= \int_0^t (u^2(\tau) - v^2(\tau)) d\tau + i \int_0^t 2u(\tau)v(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

kjer sta  $u(t)$  in  $v(t)$  razmeroma preprosta polinoma in predpostavimo  $r(0) = \hat{r}(0) = 0$ .

**Opomba 3.** Množica  $\hat{\Pi}$  regularnih krivulj s PH ima enako kardinalnost ali moč kot množica  $\Pi$  regularnih polinomskih krivulj.

**Lema 1.** Stonji  $n$  in  $\hat{n}$  pripadajočima krivuljama  $r(t)$  in  $\hat{r}(t)$  sta povezani z  $\hat{n} = 2n - 1$ .

*Dokaz.* Pri postopku  $P$  najprej odvajamo krivuljo  $r(t)$  stopnje  $n$  in dobimo njen hodograf  $w(t)$  stopnje  $n - 1$ . Nato kvadriramo  $w(t)$  in dobimo hodograf  $\hat{w}(t)$  stopnje  $2n - 2$ . Na koncu integriramo  $\hat{w}(t)$  in dobimo novo krivuljo  $\hat{r}(t)$  stopnje  $2n - 1$ .  $\square$

Očitno ne obstajajo regularne krivulje s PH, ki so sode stopnje. Ravne črte v  $\Pi$  ustrezajo (drugačnim) ravnim črtam v  $\hat{\Pi}$ , ampak  $P$  preslika regularne polinomske krivulje stopnje  $\geq 2$  v regularne krivulje s PH višje lihe stopnje (glej tabelo I).

**Izrek 3.** Kontrolne točke regularne krivulje s PH stopnje  $2n - 1$  so podane kot  $n$  kompleksnih vrednosti  $w_0, \dots, w_{n-1}$  z rekurzivno formulo

$$p_{k+1} = p_k + \frac{1}{2n-1} \sum_{j=\max(0, k-n+1)}^{\min(k, n-1)} \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n-1}{k-j}}{\binom{2n-2}{k}} w_j w_{k-j} \quad (8)$$

za  $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$ , kjer je  $p_0$  poljuben in  $w_0, \dots, w_{n-1}$  so takšni, da hodograf  $w(t)$  definiran v (4) ne pokvari originalnega.

*Dokaz.* Dokaz v [1] na strani 413.  $\square$

## X. ROTACIJSKE INVARIANCE HODOGRAFOV

Kompleksna predstavitev ponuja preprost dokaz za rotacijsko invariantnost zadostne in potrebne oblike

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t), \\ y'(t) &= 2u(t)v(t), \\ \sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

za primitivne ravninske pitagorejske hodographe  $r'(t) = (x'(t), y'(t))$  zadošča

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t), \quad (10)$$

kjer  $D(u, v) = \text{konstanta} \Rightarrow \gcd(x', y') = \text{konstanta}$ . Ob rotaciji

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

po kotu  $\theta$ , poskušamo izraziti rotacijski hodograf  $\tilde{r}'(t) = (\tilde{x}'(t), \tilde{y}'(t))$  v smislu dveh novih polinomov  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{v}(t)$  kot

$$\tilde{x}'(t) = \tilde{u}^2(t) - \tilde{v}^2(t), \quad \tilde{y}'(t) = 2\tilde{u}(t)\tilde{v}(t). \quad (12)$$

Opazimo lahko, da je preoblikovan hodograf,

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= \cos\theta[\tilde{u}^2(t) - \tilde{v}^2(t)] - \sin\theta 2\tilde{u}(t)\tilde{v}(t), \\ \tilde{y}'(t) &= \sin\theta[\tilde{u}^2(t) - \tilde{v}^2(t)] + \cos\theta 2\tilde{u}(t)\tilde{v}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

dobljen z vstavljanjem polinomov v (12)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \cos\frac{1}{2}\theta u(t) - \sin\frac{1}{2}\theta v(t), \\ \tilde{v}(t) &= \sin\frac{1}{2}\theta u(t) + \cos\frac{1}{2}\theta v(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Z uporabo kompleksne predstavitve  $r'(t) = w^2(t)$ , kjer je  $w(t) = u(t) + iv(t)$ , pri rotaciji dobimo  $\tilde{r}'(t) = \exp(i\theta)w^2(t) = \tilde{w}^2(t)$ , kjer je realni in imaginarni del  $\tilde{w} = \exp(i\frac{1}{2}\theta)w(t) = \tilde{u}(t) + i\tilde{v}(t)$  definiran z (14).

## XI. KAREKTERIZACIJA KRIVULJE PETE STOPNJE S PH

Kontrolne točke (8) za krivulje pete stopnje s PH so oblike

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{1}{5}w_0^2, \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{5}w_0w_1, \\ p_3 &= p_2 + \frac{1}{5}\frac{2w_1^2 + w_0w_2}{3}, \\ p_4 &= p_3 + \frac{1}{5}w_1w_2, \\ p_5 &= p_4 + \frac{1}{5}w_2^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Z uporabo kompleksne oblike dobimo karakterizacijo za krivulje pete stopnje s PH v smislu geometrije kontrolnih poligonov. Ponovno zapišemo enačbe (15) v smislu  $\Delta p_k = p_{k-1} - p_k$  kot

$$\begin{aligned}\Delta p_0 &= \frac{w_0^2}{5}, \quad \Delta p_1 = \frac{w_0 w_1}{5}, \\ \Delta p_2 &= \frac{2w_1^2 + w_0 w_2}{15}, \\ \Delta p_3 &= \frac{w_1 w_2}{5}, \quad \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.\end{aligned}\quad (16)$$

Za regularne krivulje velja  $\Delta p_0 \neq 0$  in  $\Delta p_4 \neq 0$ .

**Izrek 4.** *Naj bodo noge kontrolnega polinoma regularne krivulje pete stopnje definirane kot kompleksne vrednosti  $\Delta p_0, \dots, \Delta p_4$ . Potem ima krivulja pitagorejski hodograf natančno tedaj, ko te vrednosti zadoščajo enačbi:*

$$\Delta p_0(\Delta p_3)^2 = \Delta p_4(\Delta p_1)^2, \quad (17)$$

in se ujemajo z naslednjim sistemom umejitev:

$$\begin{aligned}3\Delta p_0\Delta p_1\Delta p_2 - (\Delta p_0)^2\Delta p_3 - 2(\Delta p_1)^3 &= 0, \\ 3\Delta p_4\Delta p_3\Delta p_2 - (\Delta p_4)^2\Delta p_1 - 2(\Delta p_3)^3 &= 0, \\ 3\Delta p_0\Delta p_3\Delta p_2 - \Delta p_4\Delta p_0\Delta p_1 - 2(\Delta p_1)^2\Delta p_3 &= 0, \\ 3\Delta p_4\Delta p_1\Delta p_2 - \Delta p_0\Delta p_4\Delta p_3 - 2(\Delta p_3)^2\Delta p_1 &= 0, \\ 9\Delta p_0(\Delta p_2)^2 - 6(\Delta p_1)^2\Delta p_2 - 2\Delta p_0\Delta p_1\Delta p_3 - (\Delta p_0)^2\Delta p_4 &= 0, \\ 9\Delta p_4(\Delta p_2)^2 - 6(\Delta p_3)^2\Delta p_2 - 2\Delta p_4\Delta p_3\Delta p_1 - (\Delta p_4)^2\Delta p_3 &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

Če sta oba  $\Delta p_1$  in  $\Delta p_3$  neničelna, potem enačba (17) in ena od prvih štirih enačb (18) predstavlja zadosten in potreben pogoj, da je krivulja pete stopnje krivulja s PH. Če  $\Delta p_1 = \Delta p_3 = 0$ , potem (17) in prve štiri enačbe iz (18) postanejo identitete in moramo vzeti eno izmed dveh zadnjih enačb iz (18) za pogoj.

*Dokaz.* Dokaz v [1] na straneh 417 in 418.  $\square$

## XII. GEOMETRIJA KONTROLNEGA POLIGONA

### A. Samo štiti različne kontrolne točke

Ta primer nastopi, ko vzamemo  $w_1 = 0$  v (15), torej je  $p_1 = p_2$  in  $p_3 = p_4$ . Potem je kontrolni poligon naslednje oblike:

$$\begin{aligned}\Delta p_0 &= \frac{w_0^2}{5}, \quad \Delta p_1 = 0, \\ \Delta p_2 &= \pm \frac{w_0 w_2}{15}, \quad \Delta p_3 = 0, \quad \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.\end{aligned}$$

Čeprav imamo samo štiri različne kontrolne točke, ta hodograf definira pravo krivuljo pete stopnje s PH, in ne kubično krivuljo s PH zvišane stopnje. Še več, ta krivulja je regularna, če velja  $w_0, w_2 \neq 0$ .

### B. Samo pet različnih kontrolnih točk

V tem primeri je vrednost od  $w_1$  izbrana tako, da velja  $2w_1^2 + w_0 w_2 = 0$ , in zato velja  $p_2 = p_3$ . Tako velja, da je  $\Delta p_2 = 0$  in ostale noge kontrolnega pogolna lahko izrazimo s samo  $w_0$  in  $w_2$ :

$$\begin{aligned}\Delta p_0 &= \frac{w_0^2}{5}, \quad \Delta p_1 = \pm i \frac{w_0}{5} \sqrt{\frac{w_0 w_2}{2}}, \\ \Delta p_3 &= \pm i \frac{w_2}{5} \sqrt{\frac{w_0 w_2}{2}}, \quad \Delta p_4 = \frac{w_2^2}{5}.\end{aligned}$$

Za tako degenerirano obliko, sta pogoja (17) in (18) lahko reducirana na:

$$\begin{aligned}\Delta p_0(\Delta p_3)^2 &= \Delta p_4(\Delta p_1)^2, \\ \Delta p_0\Delta p_4 + 2\Delta p_1\Delta p_3 &= 0.\end{aligned}$$

### C. Krivulja s PH povišane stopnje

Stopnjo katerekoli krivulje s PH je mogoče dvigniti, ne da bi pri tem ogrozili pitagorejsko naravo njenega hodografa, saj višanje stopnje pomeni le redundantno predstavitev. Če postopek višanje stopnje nanese dvakrat na kontrolni poligon kubične krivulje s PH, potem ima krivulja pete stopnje s PH kontrolne točke:

$$\begin{aligned}p_1 &= p_0 + \frac{1}{5}w_0^2, \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{1}(w_0^2 + w_0 w_1), \\ p_3 &= p_2 + \frac{1}{30}(w_0^2 + 4w_0 w_1 + w_1^2), \\ p_4 &= p_3 + \frac{1}{10}(w_0 w_1 + w_1^2), \\ p_5 &= p_4 + \frac{1}{5}w_1^2.\end{aligned}\quad (19)$$

Preverimo lahko, da so enačbe (19) oblike (15) le da so  $w_0, w_1, w_2$  zamenjani z  $w_0, \frac{1}{2}(w_0 + w_1), w_1$ . Od tod sledi, da je vrednost  $w_1$  v enačba (15) vedno povprečje vrednosti  $w_0$  in  $w_2$ .

## LITERATURA

- [1] R. T. Farouki: Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, poglavje 17 in 19.