Лекція №3. Модель з увігнутою функцією витрат

Розглянуту вище модель динамічного програмування можна використовувати при будь-яких функціях витрат. Особливий інтерес, однак, представляє окремий випадок завдання, при якому передбачається, що витрати на придбання є увігнутими функціями, тобто граничні витрати замовлення не зростають. Така ситуація виникає, наприклад, коли середня вартість одиниці замовлення $c(y)/y$ є постійною.

Модель, в якій вартість одиниці замовлення не залежить від розміру партії, була вперше проаналізовано Вагнером і Уайтіном в 1958р. і названа моделлю Вагнера-Уайтіна. У цьому випадку загальні змінні витрати замовлення фіксовані і не залежать від розкладу замовлень, отже, можна не включати їх в цільову функцію.

Алгоритм динамічного програмування

Має місце наступне твердження [15].

Теорема 3.1. *Будь-яка оптимальна стратегія - це стратегія замовлення при нульовому запасі, тобто стратегія, в який*

$$y_t I_{t-1}=0 \text{ для } t=1,...,T.$$

Простим наслідком теореми 3.1 є те, що при оптимальній стратегії *замовлення має розмір, необхідний для задоволення попиту на цілому числі наступних етапів.*

Дана властивість значно спрощує процес вирішення завдання методом динамічного програмування. Залишок I_t в кінці періоду t, $t=1, ..., T-1$, може приймати значення 0, d_{t+1}, $d_{t+1}+ d_{t+2}$, ..., $d_{t+1}+ d_{t+2}+ ... +d_T$.

Відповідно, розмір замовлення y_t дорівнює або 0, або $I_t+ d_t$. Тому

$$C_t^*(I_t) = \min\{C_{t-1}^*(I_t + d_t); C_{t-1}^*(0) + K_t + c_t(I_t + d_t)\} + h_t I_t. \tag{3.5}$$

Запас на кінець останнього періоду повинен дорівнювати нулю.

Якщо початковий рівень запасу позитивний, то поки він не вичерпається, замовлення не розміщуються. Нехай $I_0 = \sum_{t=1}^{k-1} d_t + d, d < d_k$.

Тоді можна покласти $d_k=d_k- d$ і або вирішувати завдання з k-го етапу, або етапи 1, ..., k-1 включити до завдання з нульовим попитом.

Приклад 3.2. Розглянемо чотирьохетапну модель для наступних вихідних даних:

Таблиця 3.5

Дані для прикладу 3.2

t	1	2	3	4
d_t	76	26	90	67
K_t	98	114	185	70

Витрати на зберігання одиниці продукції протягом одного етапу постійні і рівні 1. Витрати на закупівлю одиниці продукції становлять 2 на всіх етапах. Вихідний запас дорівнює 15 одиниць.

Отримаємо рішення алгоритмом прямої прогонки. Попит на першому етапі зменшимо на 15 одиниць. Сумарні витрати на придбання дорівнюють $c(d_1+...+d_T)=488$ і не залежать від розкладу замовлень, тому далі ці витрати в цільової функції не враховуємо.

Крок 1. I_1 приймає значення 0, d_2, $d_2 +d_3$, $d_2+d_3+d_4$, $y_1= I_1 +d_1 -I_0=I_1+61$, $C_1^*(I_1) = K_i + hI_1 = 98 + I_1$.

Таблиця 3.6

Алгоритм прямий прогонки

I_1	y_1	C_1^*	I_2	y_2	C_2^*	I_3	y_3	C_3^*
0	61	98						
26	87	124	0	0	124			
116	177	214	90	116	302	0	0	302
183	244	281	157	183	369	67	157	376

Крок 2. I_2 може дорівнювати 0, d_3, d_3+d_4,

$$C_2^*(I_2) = \min\{C_1^*(I_2 + d_2); C_1^*(0) + K_2\} + hI_2 = \min\{C_1^*(I_2 + 26); 212\} + I_2 .$$

Крок 3. I_3 або 0, або d_4,

$$C_3^*(I_3) = \min\{C_2^*(I_3 + d_3); C_2^*(0) + K_3\} + hI_3 = \min\{C_2^*(I_3 + 90); 309\} + I_3 .$$

Крок 4. I_4=0,

$$C_4^*(0) = \min\{C_3^*(d_4); C_3^*(0) + K_4\} = \min\{376; 302 + 70\} = 372, y_4 = 67.$$

Далі отримуємо, $I_3= d_4-y_4=0$, $y_3=0$, $I_2= I_3+d_3-y_3=90$, $y_2=116$, $I_1=I_2+d_2-y_2=0$, $y_1=61$.

Мережевий алгоритм

Завдання допускає також наступну інтерпретацію. Побудуємо ациклічні мережу з вузлами $V=\{1,2, ..., T+1\}$ і дугами (i, j), $1\leq i < j \leq T+1$.

Довжина l_{ij} дуги (i, j) - це вартість замовленого в період і для задоволення попиту на етапах i, $i+1$, ..., $j-1$, тобто

$$l_{ij} = K_i + c_i(\sum_{k=i}^{j-1} d_k) + \sum_{k=i}^{j-2} h_k \sum_{s=k+1}^{j-1} d_s = K_i + c_i(d_{i,j-1}) + \sum_{k=i}^{j-2} h_k d_{k+1,j-1}, \quad (3.6)$$

де $d_{ks} = \sum_{t=k}^{s} d_t$ - попит від періоду k до періоду s. Якщо питомі витрати зберігання постійні, останній доданок дорівнює $h\sum_{k+1}^{j-1} d_{k,j-1} = h\sum_{k=i+1}^{j-1}(j + 1 - k)d_k$.

Довжина найкоротшого шляху від вузла 1 до вузла $T+1$ в цій мережі - мінімальна вартість задоволення попиту періодів 1-T, вузли цього шляху відповідають періодам, в які робляться замовлення.

Приклад 3.3. Розглянемо задачу з прикладу 3.2. Як і раніше, вважаємо, $d_1=61$, змінні витрати на закупівлю не враховуються, тобто

$l_{ij} = K_i + h\sum_{k=i+1}^{j-1} d_{k,j-1}$.

Складемо матрицю довжин дуг. Можна скористатися тим, що $l_{i,i+1}=K_i$, $l_{i,j}=1=l_{ij}+h(j\text{-i})d_j$. Наприклад, $l_{13}=l_{12}+d_2$, $l_{14}=l_{13}+2d_3$ і так далі.

Для пошуку найкоротшого шляху використовуємо наступний алгоритм. Вузлам мережі 1,2, ... послідовно присвоюємо мітки, $r_1=0$, $r_j=\min\{r_i+l_{ij}\}$. Мітка вузла $T+1$ - довжина найкоротшого шляху. Дуга (i, j) лежить на найкоротшому шляху, якщо $r_j-r_i=l_{ij}$.

Таблиця 3.7

Мережевий алгоритм

	2	3	4	5	r_i
1	<u>98</u>	<u>124</u>	304	505	0
2		114	<u>204</u>	338	98
3			185	252	212
4				<u>70</u>	302

Отримуємо $r_2=l_{12}$, $r_3=\min\{l_{13},r_2+l_{23}\}$, $r_4=\min\{l_{14},r_2+l_{24},r_3+l_4\}$, $r_5=\min\{l_{15},r_2+l_{25},r_3+l_{35},r_4+l_{45}\}=372$. У таблиці підкреслені довжини дуг, які доставляють мінімум при визначенні міток. Таким чином, знаходимо, що замовлення розміщуються в моменти 4, 2 і 1, розміри замовлень $y_1=d_1=61$, $y_2=d_{23}=116$, $y_4= d_4=67$.

Теорема 3.2. Нехай t - останній період, в який зроблений замовлення в оптимальної стратегії замовлення для T-періодної завдання. Тоді для будь-якої заданої довжини $T'>T$ останнє замовлення може бути розміщений тільки на етапі $j\geq T'$. Крім того, якщо $t=T$, в оптимальному рішенні T' - пері одної завдання $y_t>0$.

Таким чином, якщо замовлення розміщене в період t, оптимальна стратегія для періодів 1,2, ..., t-1 не залежить від попиту в періоди після t і, отже, можна використовувати модель Вагнера - Уайтіна, навіть якщо попит в майбутньому невідомий.

Евристичний алгоритм Сільвера - Мила

Оптимальна стратегія досить чутлива до зміни попиту. Тому, незважаючи на ефективність розглянутих методів вирішення задачі управління запасами, велике значення на практиці мають прості наближені алгоритми, засновані на інтуїтивних міркуваннях.

Розглянемо евристичний алгоритм, який можна застосовувати до вирішення завдань управління запасами, в яких витрати на закупівлю одиниці продукції постійні і однакові для всіх етапів.

Як і раніше, нехай l_{ij} - витрати на розміщення замовлення і зберігання на етапах i, ..., j-1, за умови, що замовлення розміщується на етапі i, тобто

$$l_{ij} = K_i + \sum_{k=i}^{j-2} h_k d_{k+1,j-1}.$$

Для поточного етапу і визначається період t^*, що мінімізує середні витрати за період, тобто $\overline{l_{it}} = \frac{l_{it}}{t-i}$.

Функцію l_{ij} можна визначати за допомогою рекурентних співвідношень.

$$I_{ij} = K_i, l_{it} = l_{i,t-1} + d_t \sum_{k=i}^{t-2} h_k$$

Обчислення проводяться, поки $\overline{l_{\imath t}} < \overline{l_{\imath,t-1}}$.

Таким чином, алгоритм евристичного методу складається з наступних кроків.

0. i=1.

1. Визначається локальний мінімум t^* функції $\overline{l_{\imath \jmath}}$ з нерівностей

$$\overline{l_{\imath t^*-1}} \geq \overline{l_{\imath t^*}}, \overline{l_{\imath t^*+1}} \geq \overline{l_{\imath t^*}}.$$

На етапі і розміщується замовлення обсягом d_{i,t^*-1} для етапів i, ..., t^*-1.

2. i= t^*. Якщо i> T, обчислення закінчуються, розглянуто весь плановий період. Інакше перейти до кроку 1.

Приклад 3.4. Розглянемо застосування алгоритму до задачі з прикладу 3.2.

Ітерація 1. i=1.

Таблиця 3.8

Перша ітерація алгоритму

t	d_t	l_{1t}	$\overline{l_{1t}}$
2	61	98	98/1=98
3	26	98+26=124	124/2=62
4	90	124+2*90=304	304/3=101,33
5	67	304+3*67=505	505/4=126,25

Локальний мінімум досягається при t^*= 3, на першому етапі розміщується замовлення обсягом 61+26=87 одиниць для етапів 1 і 2.

Ітерація 2. i=3.

Таблиця 3.9

Друга ітерація алгоритму

t	d_t	l_{3t}	$\overline{l_{3t}}$
4	90	185	185/1=185
5	67	185+67=252	252/2=126

t^*=5, на третьому етапі замовляється 90+67=157 одиниць продукції. Бо 5> 4, обчислення закінчені. Вартість зберігання і розміщення замовлення складе 124+252=376 одиниць, що на 4 одиниці (1,1%) більше, ніж при оптимальному рішенні.