

СБОРНИК
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ФОРМУЛ

Нижний Новгород, 2007 - 2013.

Содержание

1	Греческий алфавит:	3
2	Основы:	4
2.1	Числа:	4
2.2	Основные законы сложения и умножения:	4
2.3	Свойства действительных степеней положительных чисел: . . .	4
2.4	Логарифмы:	4
2.5	Основные свойства логарифмов:	5
3	Формулы сокращенного умножения:	6
3.1	Треугольник Паскаля:	6
4	Неравенства:	7
5	Производные:	9
5.1	Таблица производных:	9
5.2	Формула Лейбница:	9
5.3	Правила дифференцирования:	9
5.4	Преобразование через exp:	10
6	Разложения:	11
6.1	5 основных разложений:	11
6.2	Остальные разложения:	11
6.3	Формула Тейлора:	12
6.4	Формула Маклорена:	12
6.5	Эквивалентность:	13
7	Таблица простейших интегралов:	14
8	Двойные и тройные интегралы:	16
9	Тригонометрия:	19
9.1	Соотношение между функциями одного угла:	19
9.2	Формулы сложения и вычитания:	19
9.3	Формулы двойных, тройных и половинных углов:	19
9.4	Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение:	20
9.5	Преобразование произведения в сумму:	20
9.6	Универсальная тригонометрическая подстановка:	21
9.7	Некоторые важные соотношения:	21

9.8	Другие формулы:	21
10	Таблица констант	23
10.1	Факториалы	23
10.2	Интеграл	25
10.3	Разложение чисел на простые	27
10.4	Таблица простых чисел	31
10.5	Число π	34
10.6	Число e	35
11	Преобразования	36
11.1	Преобразования Фурье	36
11.1.1	Некоторые преобразования Фурье	37
11.2	Преобразования Лапласа	38
11.2.1	Абсолютная сходимость	38
11.2.2	Условия существования преобразования Лапласа	38
11.2.3	Теорема о свертке	39
11.2.4	Умножение изображений	39
11.2.5	Дифференцирование и интегрирование оригинала	39
11.2.6	Дифференцирование и интегрирование изображения	39
11.2.7	Запаздывание оригиналов и изображений. Предельные теоремы	39
11.2.8	Другие свойства	39
11.2.9	Прямое и обратное преобразование Лапласа некоторых функций	40
11.3	Z-Преобразование	41
11.3.1	Обратное Z-преобразование	41
11.3.2	Область сходимости	41
11.3.3	Таблица некоторых Z-преобразований	42

1 Греческий алфавит:

α - альфа	β - бета	γ - гамма	δ - дельта
ε - эпсилон	ζ - дзетта	η - этта	θ - тетта
ι - йотта	κ - капша	λ - лямбда	μ - мю
ν - ню	ξ - кси	\omicron - омикрон	π - пи
ρ - ро	σ - сигма	τ - тау	φ - фи
χ - хи	ψ - пси	ω - омега	

2 Основы:

2.1 Числа:

N - Натуральные числа

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots)$

Z - Целые числа = натуральные числа + 0 + отрицательные числа

$(\dots - 5, -4, -3, -2, -1)$

Q - Рациональные числа = целые числа + несократимые дроби

$\left(\frac{n}{m} : n, m \in Z; \frac{1}{2}, \frac{3}{7}\right)$

R - Действительные числа = рациональные числа + иррациональные числа

$(\sqrt{2}, \sqrt{11}, \pi, e)$

C - Комплексные числа = числа вида

$z = a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi) : a, b \in R$

2.2 Основные законы сложения и умножения:

1. $a + b = b + a$ - коммутативность по сложению
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативность по сложению
3. $(a + b)c = ac + bc$ - дистрибутивность по сложению относительно умножения

2.3 Свойства действительных степеней положительных чисел:

$$\begin{aligned}(ab)^x &= a^x b^x & a^x a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}\end{aligned}$$

2.4 Логарифмы:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

2.5 Основные свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

3 Формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\dots\dots\dots (a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_k^n a^i b^{n-i}$$

$$\begin{aligned}(a + \underbrace{b+c}_d)^2 &= (a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = \\ &= a^2 + 2a(b+c) + b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + \underbrace{a_2 + \dots + a_m}_{A_1})^n &= (a_1 + A_1)^n = \sum_{i=0}^n C_k^n a_1^i A_1^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n C_k^n a_1^i (\underbrace{a_2 + a_3 + \dots + a_m}_{A_2})^{n-i} = \dots \end{aligned}$$

3.1 Треугольник Паскаля:

					1					
					1		1			
				1	2		1			
			1	3	3		1			
		1	4	6	4		1			
	1	5	10	10	5		1			
1	8	7	21	35	35	21	7		1	
1		28	56	70	56	28		8		1

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4 Неравенства:

Неравенства Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$$

Основные неравенства:

1. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \ (a > 0)$
2. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ (a \geq 0, b \geq 0)$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq ||a| - |b||$
5. $a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$

Формулы сравнения:

Формула Валлиса:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{139}{51840n^3} + O(n^{-4})\right)$$

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

$$x > 1 : x!^2 > x^x > x! > x$$

$$\log_x n \ll n^p \ (\forall p) \ll a^n \ (a > 0) \ll n^n$$

Так можно вычислить π :

$$\pi = 6 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Уравнение касательной и нормали:

$$y(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) - \text{уравнение касательной}$$

$$y(x) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0) - \text{уравнение нормали}$$

Эйлеровы интегралы:

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx \Rightarrow \Gamma(y+1) = y \Gamma(y)$$

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad B(a, b) = B(b, a) \quad B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

5 Производные:

5.1 Таблица производных:

$(c)' = 0$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sin(x))' = \cos(x)$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$(\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arccctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(a^x)' = a^x \ln(a) \ (a > 0)$
$(\log_a x)' = -\frac{1}{x \ln a} \ (a > 0); \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$
$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0)$	$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$(x^m)^{(n)} = \left(\prod_{i=m-n+1}^m i\right) \cdot x^{m-n}$
$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$(\sqrt[n]{x})' = x^{\frac{1}{n}-2}(1 - \ln(x)), \ (x > 0)$
$(x)' = \frac{x}{ x } = \operatorname{sign}(x)$	$(x^x)' = x^x (1 + \ln x)$
$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

5.2 Формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

5.3 Правила дифференцирования:

- $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

2. $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$
3. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
5. $(Cu(x))' = Cu'(x), \quad C - const$

5.4 Преобразование через exp:

$$a^t = e^{t \ln a}$$

6 Разложения:

6.1 5 основных разложений:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 (1+x)^m &= \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i)}{k!} x^k = 1 + mx + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{m-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 \sin(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\
 \cos(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
 \end{aligned}$$

6.2 Остальные разложения:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n) = 2^n n!$$

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{12})$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \forall x : |x| < 1 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + O(x^{14})$$

$$\operatorname{arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad \forall x : |x| < 1 = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + O(x^{10})$$

$$\operatorname{arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + O(x^7)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{3628800}x^{10} + O(x^{12}) \quad \forall x$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{39916800}x^{11} + O(x^{12}) \quad \forall x$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{12})$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + O(x^8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + O(x^{10})$$

6.3 Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)]$$

Остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)]$$

Остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o[(x-a)^n]$$

6.4 Формула Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

6.5 Эквивалентность:

$$x \rightarrow 0 \quad |\ln x| < \frac{1}{x^\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$x \rightarrow 1 \quad \ln x \approx x - 1$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \ln x < x^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$x \approx \arcsin x \approx \sin x \approx \operatorname{tg} x \approx \operatorname{arctg} x$$

7 Таблица простейших интегралов:

$$\begin{array}{ll}
 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & + C \\ -\operatorname{arctg}(x) & + C \end{cases} & \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin(x) & + C \\ -\arccos(x) & + C \end{cases} & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) & \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 \int \cos x dx = \sin x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C & \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \\
 \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C & \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \\
 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C & \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) \\
 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0) & \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C \\
 \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C & \int \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li}(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0) \\
 \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0) \\
 \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0)
 \end{array}$$

Методы решения:

$$\begin{array}{l}
 1. \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \\
 2. \int_a^b u dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du
 \end{array}$$

Формула Фруллани: $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0)$

Формула Эйлера - Пуассона: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Интеграл Дирихле: $D(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta$

Интеграл Лапласа: $L = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$

Интегралы Френеля: $L = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Интегралы Френеля: $L = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Интегралы Френеля: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$

Эйлеровы интегралы:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx = \frac{1}{y} \cdot \Gamma(y+1)$$

$$\Gamma^{(n)}(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} \ln^n x dx$$

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x dx = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

8 Двойные и тройные интегралы:

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_T f(x(t, \tau), y(t, \tau)) |J(t, \tau)| dt d\tau, \text{ где } J(t, \tau) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow J = r$$

$$\begin{cases} x = ar \cos \phi \\ y = br \sin \phi \end{cases} \Rightarrow J = abr$$

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{z'_x{}^2 + z'_y{}^2 + 1}$$

Площадь гладкой поверхности заданной параметрически:

$$T: \begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \\ z = z(t, \tau) \end{cases} \quad T \rightarrow D \quad D: \begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \end{cases}$$

Гаусовы коэффициенты:

$$E = x'_t{}^2 + y'_t{}^2 + z'_t{}^2$$

$$G = x'_\tau{}^2 + y'_\tau{}^2 + z'_\tau{}^2$$

$$F = x'_t x'_\tau + y'_t y'_\tau + z'_t z'_\tau$$

$$\Delta S = \iint_T \sqrt{EG - F^2} dt d\tau$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dD = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz$$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = \begin{vmatrix} x'_t & x'_u & x'_v \\ y'_t & y'_u & y'_v \\ z'_t & z'_u & z'_v \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x = r \cos \psi \cos \phi \\ y = r \cos \psi \sin \phi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \Rightarrow J = r^2 \cos \psi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \psi \\ y = r \sin \phi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \end{cases} \Rightarrow J = r^2 \sin \psi$$

$$\begin{cases} x = ar \cos \phi \sin \psi \\ y = br \sin \phi \sin \psi \\ z = cr \cos \psi \end{cases} \Rightarrow J = abcr^2 \sin \psi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$$

$$\begin{cases} x = ar \cos \phi \\ y = br \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = abr$$

Криволинейный интеграл 1 рода по плоской кривой:

$$y = y(x) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad x = x(t); y = y(t) \quad l = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Криволинейный интеграл 1 рода по плоской кривой:

$$x = x(t), y = y(t) \quad \int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Криволинейный интеграл 1 рода по пространственной кривой:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad \int_L f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Интеграл 2 рода по плоской кривой = криволинейному интегралу 2 рода:

$$x = x(t), y = y(t) \quad \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t) dt$$

Связь между интегралом 1 и 2 рода:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds$$

Интеграл 2 рода по плоскому контуру.

$$\int_a^b (Y(x) - y_0(x)) dx = - \oint_{c^*} y dx$$

Формула Грина:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy$$

Интеграл 2 рода по пространственной кривой:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t) dt$$

Интеграл 1 рода по поверхности:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_T f(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau)) \sqrt{EG - F^2} dt d\tau$$

$$\begin{cases} x = R \cos t \cos \tau \\ y = R \sin t \cos \tau \\ z = R \sin \tau \end{cases} \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = R \cos \tau \quad \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = \tau \end{cases} \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} =$$

Поверхностный интеграл 2 рода:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iint_T (P(V(u, v))A + Q(V(u, v))B + R(V(u, v))C) du dv, \quad V(u, v) = x(u, v), y(u, v), z(u, v)$$

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Соотнесение между интегралами 1 и 2 рода:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

Формула Стокса:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Формула Остроградского:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

9 Тригонометрия:

9.1 Соотношение между функциями одного угла:

1. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
2. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
3. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
4. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
5. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

9.2 Формулы сложения и вычитания:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \pm \operatorname{tg}(\beta)}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta)}$

9.3 Формулы двойных, тройных и половинных углов:

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$
5. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^4 \alpha$
6. $\cos 3\alpha = 4 \cos^4 \alpha - 3 \cos \alpha$
7. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$
8. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$

$$9. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

$$10. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$$

$$11. \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$12. \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

9.4 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение:

$$1. \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2. \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$3. \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$4. \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

9.5 Преобразование произведения в сумму:

$$1. \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$2. \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$3. \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

9.6 Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$1. \sin(\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$2. \cos(\alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

9.7 Некоторые важные соотношения:

$$1. \sum_{i=0}^n \sin i\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(2n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$2. \sum_{i=0}^n \cos i\alpha = \frac{\sin(2n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$3. \cos n\alpha = \cos^n \alpha + C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots$$

$$4. \sin n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

9.8 Другие формулы:

$$1. 1 \pm \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$2. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \pm 1 = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$3. 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$4. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$5. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$6. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$7. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

$$8. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

10 Таблица констант

10.1 Факториалы

$1! = 1$	$17! = 355687428096000$
$2! = 2$	$18! = 6402373705728000$
$3! = 6$	$19! = 121645100408832000$
$4! = 24$	$20! = 2432902008176640000$
$5! = 120$	$21! = 51090942171709440000$
$6! = 720$	$22! = 1124000727777607680000$
$7! = 5040$	$23! = 25852016738884976640000$
$8! = 40320$	$24! = 620448401733239439360000$
$9! = 362880$	$25! = 15511210043330985984000000$
$10! = 3628800$	$26! = 403291461126605635584000000$
$11! = 39916800$	$27! = 10888869450418352160768000000$
$12! = 479001600$	$28! = 304888344611713860501504000000$
$13! = 6227020800$	$29! = 8841761993739701954543616000000$
$14! = 87178291200$	$30! = 265252859812191058636308480000000$
$15! = 1307674368000$	$31! = 8222838654177922817725562880000000$
$16! = 20922789888000$	

$314! =$
20659137880503071791380637818439571007133129436819056465
84753601705317689969216034514966327868460943896091016261
06481775455792771670017019244272004840805112426377571750
37776724251512761149652829822488653655829061323638283949
77091205890547695526152937530587052641222934112797815637
53162842578089641088036650130847095140510294326707184614
63522339767687828093878998487884593050868977280112740242
28936104465037431750395819196488875548267337229187697942
71032225391726020104496768926679099582930467936583310036
45145659047333929552365659453811997786326119570813236432
20236940869632000
000

$614! =$
11797800694318095394658783454158875547465482329258856819
52932115077899252245979264156080696495060409979033272446
48798371336586626615057657989574271806267011230318114993
29469596455062044224620336307741114922176595412657839338
70737004745437969247652651564858515407435134668989910352
21852511235210432318483314743546545725955119032829997491

24

10.2 Интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503990	0.507979	0.511967	0.515954	0.519939	0.523923	0.527904	0.531882	0.535861
0.1	0.539828	0.543796	0.547759	0.551717	0.555670	0.559618	0.563560	0.567495	0.571424	0.575348
0.2	0.579260	0.583167	0.587065	0.590955	0.594835	0.598707	0.602569	0.606420	0.610262	0.614095
0.3	0.617912	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640577	0.644309	0.648028	0.651733
0.4	0.655422	0.659097	0.662758	0.666403	0.670032	0.673645	0.677242	0.680823	0.684387	0.687933
0.5	0.691463	0.694975	0.698469	0.701944	0.705402	0.708841	0.712261	0.715662	0.719043	0.722404
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754904
0.7	0.758037	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785238
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810571	0.813269
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826392	0.828944	0.831473	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843753	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857691	0.859929	0.862141
1.1	0.864334	0.866501	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882979
1.2	0.884931	0.886861	0.888768	0.890652	0.892513	0.894350	0.896166	0.897958	0.899728	0.901474
1.3	0.903200	0.904902	0.906583	0.908241	0.909878	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917733
1.4	0.919244	0.920730	0.922196	0.923642	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930564	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941793	0.942947	0.944080
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949498	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961637	0.962462	0.963271
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971284	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976701
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981689
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985733
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991577
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995200
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996426
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997363
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999757
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999834
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999887
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978
4.1	0.999979	0.999980	0.999981	0.999982	0.999983	0.999983	0.999984	0.999985	0.999985	0.999986
4.2	0.999987	0.999987	0.999988	0.999988	0.999989	0.999989	0.999990	0.999990	0.999991	0.999991
4.3	0.999991	0.999992	0.999992	0.999993	0.999993	0.999993	0.999993	0.999994	0.999994	0.999994
4.4	0.999995	0.999995	0.999995	0.999995	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996
4.5	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999998	0.999998	0.999998
4.6	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999999	0.999999
4.7	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.8	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

10.3 Разложение чисел на простые

1 = 1	2 = 2	3 = 3	4 = 2 ²	5 = 5	6 = 2 · 3
7 = 7	8 = 2 ³	9 = 3 ²	10 = 2 · 5	11 = 11	12 = 2 ² · 3
13 = 13	14 = 2 · 7	15 = 3 · 5	16 = 2 ⁴	17 = 17	18 = 2 · 3 ²
19 = 19	20 = 2 ² · 5	21 = 3 · 7	22 = 2 · 11	23 = 23	24 = 2 ³ · 3
25 = 5 ²	26 = 2 · 13	27 = 3 ³	28 = 2 ² · 7	29 = 29	30 = 2 · 3 · 5
31 = 31	32 = 2 ⁵	33 = 3 · 11	34 = 2 · 17	35 = 5 · 7	36 = 2 ² · 3 ²
37 = 37	38 = 2 · 19	39 = 3 · 13	40 = 2 ³ · 5	41 = 41	42 = 2 · 3 · 7
43 = 43	44 = 2 ² · 11	45 = 3 ² · 5	46 = 2 · 23	47 = 47	48 = 2 ⁴ · 3
49 = 7 ²	50 = 2 · 5 ²	51 = 3 · 17	52 = 2 ² · 13	53 = 53	54 = 2 · 3 ³
55 = 5 · 11	56 = 2 ³ · 7	57 = 3 · 19	58 = 2 · 29	59 = 59	60 = 2 ² · 3 · 5
61 = 61	62 = 2 · 31	63 = 3 ² · 7	64 = 2 ⁶	65 = 5 · 13	66 = 2 · 3 · 11
67 = 67	68 = 2 ² · 17	69 = 3 · 23	70 = 2 · 5 · 7	71 = 71	72 = 2 ³ · 3 ²
73 = 73	74 = 2 · 37	75 = 3 · 5 ²	76 = 2 ² · 19	77 = 7 · 11	78 = 2 · 3 · 13
79 = 79	80 = 2 ⁴ · 5	81 = 3 ⁴	82 = 2 · 41	83 = 83	84 = 2 ² · 3 · 7
85 = 5 · 17	86 = 2 · 43	87 = 3 · 29	88 = 2 ³ · 11	89 = 89	90 = 2 · 3 ² · 5
91 = 7 · 13	92 = 2 ² · 23	93 = 3 · 31	94 = 2 · 47	95 = 5 · 19	96 = 2 ⁵ · 3
97 = 97	98 = 2 · 7 ²	99 = 3 ² · 11	100 = 2 ² · 5 ²	101 = 101	102 = 2 · 3 · 17
103 = 103	104 = 2 ³ · 13	105 = 3 · 5 · 7	106 = 2 · 53	107 = 107	108 = 2 ² · 3 ³
109 = 109	110 = 2 · 5 · 11	111 = 3 · 37	112 = 2 ⁴ · 7	113 = 113	114 = 2 · 3 · 19
115 = 5 · 23	116 = 2 ² · 29	117 = 3 ² · 13	118 = 2 · 59	119 = 7 · 17	120 = 2 ³ · 3 · 5
121 = 11 ²	122 = 2 · 61	123 = 3 · 41	124 = 2 ² · 31	125 = 5 ³	126 = 2 · 3 ² · 7
127 = 127	128 = 2 ⁷	129 = 3 · 43	130 = 2 · 5 · 13	131 = 131	132 = 2 ² · 3 · 11
133 = 7 · 19	134 = 2 · 67	135 = 3 ³ · 5	136 = 2 ³ · 17	137 = 137	138 = 2 · 3 · 23
139 = 139	140 = 2 ² · 5 · 7	141 = 3 · 47	142 = 2 · 71	143 = 11 · 13	144 = 2 ⁴ · 3 ²
145 = 5 · 29	146 = 2 · 73	147 = 3 · 7 ²	148 = 2 ² · 37	149 = 149	150 = 2 · 3 · 5 ²
151 = 151	152 = 2 ³ · 19	153 = 3 ² · 17	154 = 2 · 7 · 11	155 = 5 · 31	156 = 2 ² · 3 · 13
157 = 157	158 = 2 · 79	159 = 3 · 53	160 = 2 ⁵ · 5	161 = 7 · 23	162 = 2 · 3 ⁴
163 = 163	164 = 2 ² · 41	165 = 3 · 5 · 11	166 = 2 · 83	167 = 167	168 = 2 ³ · 3 · 7
169 = 13 ²	170 = 2 · 5 · 17	171 = 3 ² · 19	172 = 2 ² · 43	173 = 173	174 = 2 · 3 · 29
175 = 5 ² · 7	176 = 2 ⁴ · 11	177 = 3 · 59	178 = 2 · 89	179 = 179	180 = 2 ² · 3 ² · 5
181 = 181	182 = 2 · 7 · 13	183 = 3 · 61	184 = 2 ³ · 23	185 = 5 · 37	186 = 2 · 3 · 31
187 = 11 · 17	188 = 2 ² · 47	189 = 3 ³ · 7	190 = 2 · 5 · 19	191 = 191	192 = 2 ⁶ · 3
193 = 193	194 = 2 · 97	195 = 3 · 5 · 13	196 = 2 ² · 7 ²	197 = 197	198 = 2 · 3 ² · 11
199 = 199	200 = 2 ³ · 5 ²	201 = 3 · 67	202 = 2 · 101	203 = 7 · 29	204 = 2 ² · 3 · 17
205 = 5 · 41	206 = 2 · 103	207 = 3 ² · 23	208 = 2 ⁴ · 13	209 = 11 · 19	210 = 2 · 3 · 5 · 7
211 = 211	212 = 2 ² · 53	213 = 3 · 71	214 = 2 · 107	215 = 5 · 43	216 = 2 ³ · 3 ³
217 = 7 · 31	218 = 2 · 109	219 = 3 · 73	220 = 2 ² · 5 · 11	221 = 13 · 17	222 = 2 · 3 · 37
223 = 223	224 = 2 ⁵ · 7	225 = 3 ² · 5 ²	226 = 2 · 113	227 = 227	228 = 2 ² · 3 · 19
229 = 229	230 = 2 · 5 · 23	231 = 3 · 7 · 11	232 = 2 ³ · 29	233 = 233	234 = 2 · 3 ² · 13
235 = 5 · 47	236 = 2 ² · 59	237 = 3 · 79	238 = 2 · 7 · 17	239 = 239	240 = 2 ⁴ · 3 · 5
241 = 241	242 = 2 · 11 ²	243 = 3 ⁵	244 = 2 ² · 61	245 = 5 · 7 ²	246 = 2 · 3 · 41
247 = 13 · 19	248 = 2 ³ · 31	249 = 3 · 83	250 = 2 · 5 ³	251 = 251	252 = 2 ² · 3 ² · 7
253 = 11 · 23	254 = 2 · 127	255 = 3 · 5 · 17	256 = 2 ⁸	257 = 257	258 = 2 · 3 · 43
259 = 7 · 37	260 = 2 ² · 5 · 13	261 = 3 ² · 29	262 = 2 · 131	263 = 263	264 = 2 ³ · 3 · 11
265 = 5 · 53	266 = 2 · 7 · 19	267 = 3 · 89	268 = 2 ² · 67	269 = 269	270 = 2 · 3 ³ · 5
271 = 271	272 = 2 ⁴ · 17	273 = 3 · 7 · 13	274 = 2 · 137	275 = 5 ² · 11	276 = 2 ² · 3 · 23
277 = 277	278 = 2 · 139	279 = 3 ² · 31	280 = 2 ³ · 5 · 7	281 = 281	282 = 2 · 3 · 47

283 = 283	284 = $2^2 \cdot 71$	285 = $3 \cdot 5 \cdot 19$	286 = $2 \cdot 11 \cdot 13$	287 = $7 \cdot 41$	288 = $2^5 \cdot 3^2$
289 = 17^2	290 = $2 \cdot 5 \cdot 29$	291 = $3 \cdot 97$	292 = $2^2 \cdot 73$	293 = 293	294 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$
295 = $5 \cdot 59$	296 = $2^3 \cdot 37$	297 = $3^3 \cdot 11$	298 = $2 \cdot 149$	299 = $13 \cdot 23$	300 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
301 = $7 \cdot 43$	302 = $2 \cdot 151$	303 = $3 \cdot 101$	304 = $2^4 \cdot 19$	305 = $5 \cdot 61$	306 = $2 \cdot 3^2 \cdot 17$
307 = 307	308 = $2^2 \cdot 7 \cdot 11$	309 = $3 \cdot 103$	310 = $2 \cdot 5 \cdot 31$	311 = 311	312 = $2^3 \cdot 3 \cdot 13$
313 = 313	314 = $2 \cdot 157$	315 = $3^2 \cdot 5 \cdot 7$	316 = $2^2 \cdot 79$	317 = 317	318 = $2 \cdot 3 \cdot 53$
319 = $11 \cdot 29$	320 = $2^6 \cdot 5$	321 = $3 \cdot 107$	322 = $2 \cdot 7 \cdot 23$	323 = $17 \cdot 19$	324 = $2^2 \cdot 3^4$
325 = $5^2 \cdot 13$	326 = $2 \cdot 163$	327 = $3 \cdot 109$	328 = $2^3 \cdot 41$	329 = $7 \cdot 47$	330 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
331 = 331	332 = $2^2 \cdot 83$	333 = $3^2 \cdot 37$	334 = $2 \cdot 167$	335 = $5 \cdot 67$	336 = $2^4 \cdot 3 \cdot 7$
337 = 337	338 = $2 \cdot 13^2$	339 = $3 \cdot 113$	340 = $2^2 \cdot 5 \cdot 17$	341 = $11 \cdot 31$	342 = $2 \cdot 3^2 \cdot 19$
343 = 7^3	344 = $2^3 \cdot 43$	345 = $3 \cdot 5 \cdot 23$	346 = $2 \cdot 173$	347 = 347	348 = $2^2 \cdot 3 \cdot 29$
349 = 349	350 = $2 \cdot 5^2 \cdot 7$	351 = $3^3 \cdot 13$	352 = $2^5 \cdot 11$	353 = 353	354 = $2 \cdot 3 \cdot 59$
355 = $5 \cdot 71$	356 = $2^2 \cdot 89$	357 = $3 \cdot 7 \cdot 17$	358 = $2 \cdot 179$	359 = 359	360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
361 = 19^2	362 = $2 \cdot 181$	363 = $3 \cdot 11^2$	364 = $2^2 \cdot 7 \cdot 13$	365 = $5 \cdot 73$	366 = $2 \cdot 3 \cdot 61$
367 = 367	368 = $2^4 \cdot 23$	369 = $3^2 \cdot 41$	370 = $2 \cdot 5 \cdot 37$	371 = $7 \cdot 53$	372 = $2^2 \cdot 3 \cdot 31$
373 = 373	374 = $2 \cdot 11 \cdot 17$	375 = $3 \cdot 5^3$	376 = $2^3 \cdot 47$	377 = $13 \cdot 29$	378 = $2 \cdot 3^3 \cdot 7$
379 = 379	380 = $2^2 \cdot 5 \cdot 19$	381 = $3 \cdot 127$	382 = $2 \cdot 191$	383 = 383	384 = $2^7 \cdot 3$
385 = $5 \cdot 7 \cdot 11$	386 = $2 \cdot 193$	387 = $3^2 \cdot 43$	388 = $2^2 \cdot 97$	389 = 389	390 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$
391 = $17 \cdot 23$	392 = $2^3 \cdot 7^2$	393 = $3 \cdot 131$	394 = $2 \cdot 197$	395 = $5 \cdot 79$	396 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
397 = 397	398 = $2 \cdot 199$	399 = $3 \cdot 7 \cdot 19$	400 = $2^4 \cdot 5^2$	401 = 401	402 = $2 \cdot 3 \cdot 67$
403 = $13 \cdot 31$	404 = $2^2 \cdot 101$	405 = $3^4 \cdot 5$	406 = $2 \cdot 7 \cdot 29$	407 = $11 \cdot 37$	408 = $2^3 \cdot 3 \cdot 17$
409 = 409	410 = $2 \cdot 5 \cdot 41$	411 = $3 \cdot 137$	412 = $2^2 \cdot 103$	413 = $7 \cdot 59$	414 = $2 \cdot 3^2 \cdot 23$
415 = $5 \cdot 83$	416 = $2^5 \cdot 13$	417 = $3 \cdot 139$	418 = $2 \cdot 11 \cdot 19$	419 = 419	420 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
421 = 421	422 = $2 \cdot 211$	423 = $3^2 \cdot 47$	424 = $2^3 \cdot 53$	425 = $5^2 \cdot 17$	426 = $2 \cdot 3 \cdot 71$
427 = $7 \cdot 61$	428 = $2^2 \cdot 107$	429 = $3 \cdot 11 \cdot 13$	430 = $2 \cdot 5 \cdot 43$	431 = 431	432 = $2^4 \cdot 3^3$
433 = 433	434 = $2 \cdot 7 \cdot 31$	435 = $3 \cdot 5 \cdot 29$	436 = $2^2 \cdot 109$	437 = $19 \cdot 23$	438 = $2 \cdot 3 \cdot 73$
439 = 439	440 = $2^3 \cdot 5 \cdot 11$	441 = $3^2 \cdot 7^2$	442 = $2 \cdot 13 \cdot 17$	443 = 443	444 = $2^2 \cdot 3 \cdot 37$
445 = $5 \cdot 89$	446 = $2 \cdot 223$	447 = $3 \cdot 149$	448 = $2^6 \cdot 7$	449 = 449	450 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5$
451 = $11 \cdot 41$	452 = $2^2 \cdot 113$	453 = $3 \cdot 151$	454 = $2 \cdot 227$	455 = $5 \cdot 7 \cdot 13$	456 = $2^3 \cdot 3 \cdot 19$
457 = 457	458 = $2 \cdot 229$	459 = $3^3 \cdot 17$	460 = $2^2 \cdot 5 \cdot 23$	461 = 461	462 = $2 \cdot 3 \cdot 77$
463 = 463	464 = $2^4 \cdot 29$	465 = $3 \cdot 5 \cdot 31$	466 = $2 \cdot 233$	467 = 467	468 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$
469 = $7 \cdot 67$	470 = $2 \cdot 5 \cdot 47$	471 = $3 \cdot 157$	472 = $2^3 \cdot 59$	473 = $11 \cdot 43$	474 = $2 \cdot 3 \cdot 79$
475 = $5^2 \cdot 19$	476 = $2^2 \cdot 7 \cdot 17$	477 = $3^2 \cdot 53$	478 = $2 \cdot 239$	479 = 479	480 = $2^5 \cdot 3 \cdot 5$
481 = $13 \cdot 37$	482 = $2 \cdot 241$	483 = $3 \cdot 7 \cdot 23$	484 = $2^2 \cdot 11^2$	485 = $5 \cdot 97$	486 = $2 \cdot 3^5$
487 = 487	488 = $2^3 \cdot 61$	489 = $3 \cdot 163$	490 = $2 \cdot 5 \cdot 7^2$	491 = 491	492 = $2^2 \cdot 3 \cdot 41$
493 = $17 \cdot 29$	494 = $2 \cdot 13 \cdot 19$	495 = $3^2 \cdot 5 \cdot 11$	496 = $2^4 \cdot 31$	497 = $7 \cdot 71$	498 = $2 \cdot 3 \cdot 83$
499 = 499	500 = $2^2 \cdot 5^3$	501 = $3 \cdot 167$	502 = $2 \cdot 251$	503 = 503	504 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
505 = $5 \cdot 101$	506 = $2 \cdot 11 \cdot 23$	507 = $3 \cdot 13^2$	508 = $2^2 \cdot 127$	509 = 509	510 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$
511 = $7 \cdot 73$	512 = 2^9	513 = $3^3 \cdot 19$	514 = $2 \cdot 257$	515 = $5 \cdot 103$	516 = $2^2 \cdot 3 \cdot 43$
517 = $11 \cdot 47$	518 = $2 \cdot 7 \cdot 37$	519 = $3 \cdot 173$	520 = $2^3 \cdot 5 \cdot 13$	521 = 521	522 = $2 \cdot 3^2 \cdot 29$
523 = 523	524 = $2^2 \cdot 131$	525 = $3 \cdot 5^2 \cdot 7$	526 = $2 \cdot 263$	527 = $17 \cdot 31$	528 = $2^4 \cdot 3 \cdot 11$
529 = 23^2	530 = $2 \cdot 5 \cdot 53$	531 = $3^2 \cdot 59$	532 = $2^2 \cdot 7 \cdot 19$	533 = $13 \cdot 41$	534 = $2 \cdot 3 \cdot 89$
535 = $5 \cdot 107$	536 = $2^3 \cdot 67$	537 = $3 \cdot 179$	538 = $2 \cdot 269$	539 = $7^2 \cdot 11$	540 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$
541 = 541	542 = $2 \cdot 271$	543 = $3 \cdot 181$	544 = $2^5 \cdot 17$	545 = $5 \cdot 109$	546 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
547 = 547	548 = $2^2 \cdot 137$	549 = $3^2 \cdot 61$	550 = $2 \cdot 5^2 \cdot 11$	551 = $19 \cdot 29$	552 = $2^3 \cdot 3 \cdot 23$
553 = $7 \cdot 79$	554 = $2 \cdot 277$	555 = $3 \cdot 5 \cdot 37$	556 = $2^2 \cdot 139$	557 = 557	558 = $2 \cdot 3^2 \cdot 31$
559 = $13 \cdot 43$	560 = $2^4 \cdot 5 \cdot 7$	561 = $3 \cdot 11 \cdot 17$	562 = $2 \cdot 281$	563 = 563	564 = $2^2 \cdot 3 \cdot 47$
565 = $5 \cdot 113$	566 = $2 \cdot 283$	567 = $3^4 \cdot 7$	568 = $2^3 \cdot 71$	569 = 569	570 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$
571 = 571	572 = $2^2 \cdot 11 \cdot 13$	573 = $3 \cdot 191$	574 = $2 \cdot 7 \cdot 41$	575 = $5^2 \cdot 23$	576 = $2^6 \cdot 3^2$

577 = 577	578 = 2 · 17 ²	579 = 3 · 193	580 = 2 ² · 5 · 29	581 = 7 · 83	582 = 2 · 3 · 97
583 = 11 · 53	584 = 2 ³ · 73	585 = 3 ² · 5 · 13	586 = 2 · 293	587 = 587	588 = 2 ² · 3 · 47
589 = 19 · 31	590 = 2 · 5 · 59	591 = 3 · 197	592 = 2 ⁴ · 37	593 = 593	594 = 2 · 3 ³ · 11
595 = 5 · 7 · 17	596 = 2 ² · 149	597 = 3 · 199	598 = 2 · 13 · 23	599 = 599	600 = 2 ³ · 3 · 5
601 = 601	602 = 2 · 7 · 43	603 = 3 ² · 67	604 = 2 ² · 151	605 = 5 · 11 ²	606 = 2 · 3 · 101
607 = 607	608 = 2 ⁵ · 19	609 = 3 · 7 · 29	610 = 2 · 5 · 61	611 = 13 · 47	612 = 2 ² · 3 ² · 17
613 = 613	614 = 2 · 307	615 = 3 · 5 · 41	616 = 2 ³ · 7 · 11	617 = 617	618 = 2 · 3 · 103
619 = 619	620 = 2 ² · 5 · 31	621 = 3 ³ · 23	622 = 2 · 311	623 = 7 · 89	624 = 2 ⁴ · 3 · 13
625 = 5 ⁴	626 = 2 · 313	627 = 3 · 11 · 19	628 = 2 ² · 157	629 = 17 · 37	630 = 2 · 3 ² · 5 · 7
631 = 631	632 = 2 ³ · 79	633 = 3 · 211	634 = 2 · 317	635 = 5 · 127	636 = 2 ² · 3 · 53
637 = 7 ² · 13	638 = 2 · 11 · 29	639 = 3 ² · 71	640 = 2 ⁷ · 5	641 = 641	642 = 2 · 3 · 107
643 = 643	644 = 2 ² · 7 · 23	645 = 3 · 5 · 43	646 = 2 · 17 · 19	647 = 647	648 = 2 ³ · 3 ⁴
649 = 11 · 59	650 = 2 · 5 ² · 13	651 = 3 · 7 · 31	652 = 2 ² · 163	653 = 653	654 = 2 · 3 · 109
655 = 5 · 131	656 = 2 ⁴ · 41	657 = 3 ² · 73	658 = 2 · 7 · 47	659 = 659	660 = 2 ² · 3 · 5 · 11
661 = 661	662 = 2 · 331	663 = 3 · 13 · 17	664 = 2 ³ · 83	665 = 5 · 7 · 19	666 = 2 · 3 ² · 37
667 = 23 · 29	668 = 2 ² · 167	669 = 3 · 223	670 = 2 · 5 · 67	671 = 11 · 61	672 = 2 ⁵ · 3 · 7
673 = 673	674 = 2 · 337	675 = 3 ³ · 5 ²	676 = 2 ² · 13 ²	677 = 677	678 = 2 · 3 · 113
679 = 7 · 97	680 = 2 ³ · 5 · 17	681 = 3 · 227	682 = 2 · 11 · 31	683 = 683	684 = 2 ² · 3 ² · 19
685 = 5 · 137	686 = 2 · 7 ³	687 = 3 · 229	688 = 2 ⁴ · 43	689 = 13 · 53	690 = 2 · 3 · 5 · 23
691 = 691	692 = 2 ² · 173	693 = 3 ² · 7 · 11	694 = 2 · 347	695 = 5 · 139	696 = 2 ³ · 3 · 29
697 = 17 · 41	698 = 2 · 349	699 = 3 · 233	700 = 2 ² · 5 ² · 7	701 = 701	702 = 2 · 3 ³ · 13
703 = 19 · 37	704 = 2 ⁶ · 11	705 = 3 · 5 · 47	706 = 2 · 353	707 = 7 · 101	708 = 2 ² · 3 · 59
709 = 709	710 = 2 · 5 · 71	711 = 3 ² · 79	712 = 2 ³ · 89	713 = 23 · 31	714 = 2 · 3 · 7 · 17
715 = 5 · 11 · 13	716 = 2 ² · 179	717 = 3 · 239	718 = 2 · 359	719 = 719	720 = 2 ⁴ · 3 ² · 5
721 = 7 · 103	722 = 2 · 19 ²	723 = 3 · 241	724 = 2 ² · 181	725 = 5 ² · 29	726 = 2 · 3 · 121
727 = 727	728 = 2 ³ · 7 · 13	729 = 3 ⁶	730 = 2 · 5 · 73	731 = 17 · 43	732 = 2 ² · 3 · 61
733 = 733	734 = 2 · 367	735 = 3 · 5 · 7 ²	736 = 2 ⁵ · 23	737 = 11 · 67	738 = 2 · 3 ² · 41
739 = 739	740 = 2 ² · 5 · 37	741 = 3 · 13 · 19	742 = 2 · 7 · 53	743 = 743	744 = 2 ³ · 3 · 31
745 = 5 · 149	746 = 2 · 373	747 = 3 ² · 83	748 = 2 ² · 11 · 17	749 = 7 · 107	750 = 2 · 3 · 5 ² · 5
751 = 751	752 = 2 ⁴ · 47	753 = 3 · 251	754 = 2 · 13 · 29	755 = 5 · 151	756 = 2 ² · 3 ³ · 7
757 = 757	758 = 2 · 379	759 = 3 · 11 · 23	760 = 2 ³ · 5 · 19	761 = 761	762 = 2 · 3 · 127
763 = 7 · 109	764 = 2 ² · 191	765 = 3 ² · 5 · 17	766 = 2 · 383	767 = 13 · 59	768 = 2 ⁸ · 3
769 = 769	770 = 2 · 5 · 7 · 11	771 = 3 · 257	772 = 2 ² · 193	773 = 773	774 = 2 · 3 ² · 43
775 = 5 ² · 31	776 = 2 ³ · 97	777 = 3 · 7 · 37	778 = 2 · 389	779 = 19 · 41	780 = 2 ² · 3 · 5 · 13
781 = 11 · 71	782 = 2 · 17 · 23	783 = 3 ³ · 29	784 = 2 ⁴ · 7 ²	785 = 5 · 157	786 = 2 · 3 · 131
787 = 787	788 = 2 ² · 197	789 = 3 · 263	790 = 2 · 5 · 79	791 = 7 · 113	792 = 2 ³ · 3 ² · 11
793 = 13 · 61	794 = 2 · 397	795 = 3 · 5 · 53	796 = 2 ² · 199	797 = 797	798 = 2 · 3 · 7 · 19
799 = 17 · 47	800 = 2 ⁵ · 5 ²	801 = 3 ² · 89	802 = 2 · 401	803 = 11 · 73	804 = 2 ² · 3 · 67
805 = 5 · 7 · 23	806 = 2 · 13 · 31	807 = 3 · 269	808 = 2 ³ · 101	809 = 809	810 = 2 · 3 ⁴ · 5
811 = 811	812 = 2 ² · 7 · 29	813 = 3 · 271	814 = 2 · 11 · 37	815 = 5 · 163	816 = 2 ⁴ · 3 · 17
817 = 19 · 43	818 = 2 · 409	819 = 3 ² · 7 · 13	820 = 2 ² · 5 · 41	821 = 821	822 = 2 · 3 · 137
823 = 823	824 = 2 ³ · 103	825 = 3 · 5 ² · 11	826 = 2 · 7 · 59	827 = 827	828 = 2 ² · 3 ² · 23
829 = 829	830 = 2 · 5 · 83	831 = 3 · 277	832 = 2 ⁶ · 13	833 = 7 ² · 17	834 = 2 · 3 · 139
835 = 5 · 167	836 = 2 ² · 11 · 19	837 = 3 ³ · 31	838 = 2 · 419	839 = 839	840 = 2 ³ · 3 · 5 · 7
841 = 29 ²	842 = 2 · 421	843 = 3 · 281	844 = 2 ² · 211	845 = 5 · 13 ²	846 = 2 · 3 ² · 47
847 = 7 · 11 ²	848 = 2 ⁴ · 53	849 = 3 · 283	850 = 2 · 5 ² · 17	851 = 23 · 37	852 = 2 ² · 3 · 71
853 = 853	854 = 2 · 7 · 61	855 = 3 ² · 5 · 19	856 = 2 ³ · 107	857 = 857	858 = 2 · 3 · 143
859 = 859	860 = 2 ² · 5 · 43	861 = 3 · 7 · 41	862 = 2 · 431	863 = 863	864 = 2 ⁵ · 3 ³
865 = 5 · 173	866 = 2 · 433	867 = 3 · 17 ²	868 = 2 ² · 7 · 31	869 = 11 · 79	870 = 2 · 3 · 5 · 29

871 = 13 · 67	872 = 2 ³ · 109	873 = 3 ² · 97	874 = 2 · 19 · 23	875 = 5 ³ · 7	876 = 2 ² · 3 · 7
877 = 877	878 = 2 · 439	879 = 3 · 293	880 = 2 ⁴ · 5 · 11	881 = 881	882 = 2 · 3 ² · 7
883 = 883	884 = 2 ² · 13 · 17	885 = 3 · 5 · 59	886 = 2 · 443	887 = 887	888 = 2 ³ · 3 · 37
889 = 7 · 127	890 = 2 · 5 · 89	891 = 3 ⁴ · 11	892 = 2 ² · 223	893 = 19 · 47	894 = 2 · 3 · 149
895 = 5 · 179	896 = 2 ⁷ · 7	897 = 3 · 13 · 23	898 = 2 · 449	899 = 29 · 31	900 = 2 ² · 3 ² · 5
901 = 17 · 53	902 = 2 · 11 · 41	903 = 3 · 7 · 43	904 = 2 ³ · 113	905 = 5 · 181	906 = 2 · 3 · 151
907 = 907	908 = 2 ² · 227	909 = 3 ² · 101	910 = 2 · 5 · 7 · 13	911 = 911	912 = 2 ⁴ · 3 · 7
913 = 11 · 83	914 = 2 · 457	915 = 3 · 5 · 61	916 = 2 ² · 229	917 = 7 · 131	918 = 2 · 3 ³ · 7
919 = 919	920 = 2 ³ · 5 · 23	921 = 3 · 307	922 = 2 · 461	923 = 13 · 71	924 = 2 ² · 3 · 7
925 = 5 ² · 37	926 = 2 · 463	927 = 3 ² · 103	928 = 2 ⁵ · 29	929 = 929	930 = 2 · 3 · 5 · 31
931 = 7 ² · 19	932 = 2 ² · 233	933 = 3 · 311	934 = 2 · 467	935 = 5 · 11 · 17	936 = 2 ³ · 3 ² · 7
937 = 937	938 = 2 · 7 · 67	939 = 3 · 313	940 = 2 ² · 5 · 47	941 = 941	942 = 2 · 3 · 157
943 = 23 · 41	944 = 2 ⁴ · 59	945 = 3 ³ · 5 · 7	946 = 2 · 11 · 43	947 = 947	948 = 2 ² · 3 · 7
949 = 13 · 73	950 = 2 · 5 ² · 19	951 = 3 · 317	952 = 2 ³ · 7 · 17	953 = 953	954 = 2 · 3 ² · 53
955 = 5 · 191	956 = 2 ² · 239	957 = 3 · 11 · 29	958 = 2 · 479	959 = 7 · 137	960 = 2 ⁶ · 3 · 5
961 = 31 ²	962 = 2 · 13 · 37	963 = 3 ² · 107	964 = 2 ² · 241	965 = 5 · 193	966 = 2 · 3 · 7 · 23
967 = 967	968 = 2 ³ · 11 ²	969 = 3 · 17 · 19	970 = 2 · 5 · 97	971 = 971	972 = 2 ² · 3 ⁵
973 = 7 · 139	974 = 2 · 487	975 = 3 · 5 ² · 13	976 = 2 ⁴ · 61	977 = 977	978 = 2 · 3 · 163
979 = 11 · 89	980 = 2 ² · 5 · 7 ²	981 = 3 ² · 109	982 = 2 · 491	983 = 983	984 = 2 ³ · 3 · 41
985 = 5 · 197	986 = 2 · 17 · 29	987 = 3 · 7 · 47	988 = 2 ² · 13 · 19	989 = 23 · 43	990 = 2 · 3 ² · 5
991 = 991	992 = 2 ⁵ · 31	993 = 3 · 331	994 = 2 · 7 · 71	995 = 5 · 199	996 = 2 ² · 3 · 83
997 = 997	998 = 2 · 499	999 = 3 ³ · 37	1000 = 2 ³ · 5 ³	1001 = 7 · 11 · 13	1002 = 2 · 3 · 167
1003 = 17 · 59	1004 = 2 ² · 251	1005 = 3 · 5 · 67	1006 = 2 · 503	1007 = 19 · 53	1008 = 2 ⁴ · 3 ² · 7
1009 = 1009	1010 = 2 · 5 · 101	1011 = 3 · 337	1012 = 2 ² · 11 · 23	1013 = 1013	1014 = 2 · 3 · 169
1015 = 5 · 7 · 29	1016 = 2 ³ · 127	1017 = 3 ² · 113	1018 = 2 · 509	1019 = 1019	1020 = 2 ² · 3 · 5 · 17
1021 = 1021	1022 = 2 · 7 · 73	1023 = 3 · 11 · 31	1024 = 2 ¹⁰	1025 = 5 ² · 41	1026 = 2 · 3 ³ · 23
1027 = 13 · 79	1028 = 2 ² · 257	1029 = 3 · 7 ³	1030 = 2 · 5 · 103	1031 = 1031	1032 = 2 ³ · 3 · 43
1033 = 1033	1034 = 2 · 11 · 47	1035 = 3 ² · 5 · 23	1036 = 2 ² · 7 · 37	1037 = 17 · 61	1038 = 2 · 3 · 173
1039 = 1039	1040 = 2 ⁴ · 5 · 13	1041 = 3 · 347	1042 = 2 · 521	1043 = 7 · 149	1044 = 2 ² · 3 ² · 29
1045 = 5 · 11 · 19	1046 = 2 · 523	1047 = 3 · 349	1048 = 2 ³ · 131	1049 = 1049	1050 = 2 · 3 · 167
1051 = 1051	1052 = 2 ² · 263	1053 = 3 ⁴ · 13	1054 = 2 · 17 · 31	1055 = 5 · 211	1056 = 2 ⁵ · 3 · 7
1057 = 7 · 151	1058 = 2 · 23 ²	1059 = 3 · 353	1060 = 2 ² · 5 · 53	1061 = 1061	1062 = 2 · 3 ² · 59
1063 = 1063	1064 = 2 ³ · 7 · 19	1065 = 3 · 5 · 71	1066 = 2 · 13 · 41	1067 = 11 · 97	1068 = 2 ² · 3 · 89
1069 = 1069	1070 = 2 · 5 · 107	1071 = 3 ² · 7 · 17	1072 = 2 ⁴ · 67	1073 = 29 · 37	1074 = 2 · 3 · 179
1075 = 5 ² · 43	1076 = 2 ² · 269	1077 = 3 · 359	1078 = 2 · 7 ² · 11	1079 = 13 · 83	1080 = 2 ³ · 3 ³ · 5
1081 = 23 · 47	1082 = 2 · 541	1083 = 3 · 19 ²	1084 = 2 ² · 271	1085 = 5 · 7 · 31	1086 = 2 · 3 · 181
1087 = 1087	1088 = 2 ⁶ · 17	1089 = 3 ² · 11 ²	1090 = 2 · 5 · 109	1091 = 1091	1092 = 2 ² · 3 · 91
1093 = 1093	1094 = 2 · 547	1095 = 3 · 5 · 73	1096 = 2 ³ · 137	1097 = 1097	1098 = 2 · 3 ² · 61
1099 = 7 · 157	1100 = 2 ² · 5 ² · 11	1101 = 3 · 367	1102 = 2 · 19 · 29	1103 = 1103	1104 = 2 ⁴ · 3 · 23
1105 = 5 · 13 · 17	1106 = 2 · 7 · 79	1107 = 3 ³ · 41	1108 = 2 ² · 277	1109 = 1109	1110 = 2 · 3 · 187
1111 = 11 · 101	1112 = 2 ³ · 139	1113 = 3 · 7 · 53	1114 = 2 · 557	1115 = 5 · 223	1116 = 2 ² · 3 ² · 31
1117 = 1117	1118 = 2 · 13 · 43	1119 = 3 · 373	1120 = 2 ⁵ · 5 · 7	1121 = 19 · 59	1122 = 2 · 3 · 191
1123 = 1123	1124 = 2 ² · 281	1125 = 3 ² · 5 ³	1126 = 2 · 563	1127 = 7 ² · 23	1128 = 2 ³ · 3 · 47
1129 = 1129	1130 = 2 · 5 · 113	1131 = 3 · 13 · 29	1132 = 2 ² · 283	1133 = 11 · 103	1134 = 2 · 3 ⁴ · 7
1135 = 5 · 227	1136 = 2 ⁴ · 71	1137 = 3 · 379	1138 = 2 · 569	1139 = 17 · 67	1140 = 2 ² · 3 · 5 · 19
1141 = 7 · 163	1142 = 2 · 571	1143 = 3 ² · 127	1144 = 2 ³ · 11 · 13	1145 = 5 · 229	1146 = 2 · 3 · 193
1147 = 31 · 37	1148 = 2 ² · 7 · 41	1149 = 3 · 383	1150 = 2 · 5 ² · 23	1151 = 1151	1152 = 2 ⁷ · 3 ² · 7
1153 = 1153	1154 = 2 · 577	1155 = 3 · 5 · 7 · 11	1156 = 2 ² · 17 ²	1157 = 13 · 89	1158 = 2 · 3 · 197
1159 = 19 · 61	1160 = 2 ³ · 5 · 29	1161 = 3 ³ · 43	1162 = 2 · 7 · 83	1163 = 1163	1164 = 2 ² · 3 · 97

1165 = 5 · 233	1166 = 2 · 11 · 53	1167 = 3 · 389	1168 = 2 ⁴ · 73	1169 = 7 · 167	1170 = 2 · 3 ² · 5 · 13
1171 = 1171	1172 = 2 ² · 293	1173 = 3 · 17 · 23	1174 = 2 · 587	1175 = 5 ² · 47	1176 = 2 ³ · 3 · 7 · 11
1177 = 11 · 107	1178 = 2 · 19 · 31	1179 = 3 ² · 131	1180 = 2 ² · 5 · 59	1181 = 1181	1182 = 2 · 3 · 17 · 11
1183 = 7 · 13 ²	1184 = 2 ⁵ · 37	1185 = 3 · 5 · 79	1186 = 2 · 593	1187 = 1187	1188 = 2 ² · 3 ³ · 11
1189 = 29 · 41	1190 = 2 · 5 · 7 · 17	1191 = 3 · 397	1192 = 2 ³ · 149	1193 = 1193	1194 = 2 · 3 · 197
1195 = 5 · 239	1196 = 2 ² · 13 · 23	1197 = 3 ² · 7 · 19	1198 = 2 · 599	1199 = 11 · 109	1200 = 2 ⁴ · 3 · 5 · 11
1201 = 1201	1202 = 2 · 601	1203 = 3 · 401	1204 = 2 ² · 7 · 43	1205 = 5 · 241	1206 = 2 · 3 ² · 67
1207 = 17 · 71	1208 = 2 ³ · 151	1209 = 3 · 13 · 31	1210 = 2 · 5 · 11 ²	1211 = 7 · 173	1212 = 2 ² · 3 · 101
1213 = 1213	1214 = 2 · 607	1215 = 3 ⁵ · 5	1216 = 2 ⁶ · 19	1217 = 1217	1218 = 2 · 3 · 7 · 31
1219 = 23 · 53	1220 = 2 ² · 5 · 61	1221 = 3 · 11 · 37	1222 = 2 · 13 · 47	1223 = 1223	1224 = 2 ³ · 3 ² · 17
1225 = 5 ² · 7 ²	1226 = 2 · 613	1227 = 3 · 409	1228 = 2 ² · 307	1229 = 1229	1230 = 2 · 3 · 5 · 41
1231 = 1231	1232 = 2 ⁴ · 7 · 11	1233 = 3 ² · 137	1234 = 2 · 617	1235 = 5 · 13 · 19	1236 = 2 ² · 3 · 103
1237 = 1237	1238 = 2 · 619	1239 = 3 · 7 · 59	1240 = 2 ³ · 5 · 31	1241 = 17 · 73	1242 = 2 · 3 ³ · 11
1243 = 11 · 113	1244 = 2 ² · 311	1245 = 3 · 5 · 83	1246 = 2 · 7 · 89	1247 = 29 · 43	1248 = 2 ⁵ · 3 · 13
1249 = 1249	1250 = 2 · 5 ⁴	1251 = 3 ² · 139	1252 = 2 ² · 313	1253 = 7 · 179	1254 = 2 · 3 · 107
1255 = 5 · 251	1256 = 2 ³ · 157	1257 = 3 · 419	1258 = 2 · 17 · 37	1259 = 1259	1260 = 2 ² · 3 ² · 5 · 11
1261 = 13 · 97	1262 = 2 · 631	1263 = 3 · 421	1264 = 2 ⁴ · 79	1265 = 5 · 11 · 23	1266 = 2 · 3 · 109
1267 = 7 · 181	1268 = 2 ² · 317	1269 = 3 ³ · 47	1270 = 2 · 5 · 127	1271 = 31 · 41	1272 = 2 ³ · 3 · 53
1273 = 19 · 67	1274 = 2 · 7 ² · 13	1275 = 3 · 5 ² · 17	1276 = 2 ² · 11 · 29	1277 = 1277	1278 = 2 · 3 ² · 71
1279 = 1279	1280 = 2 ⁸ · 5	1281 = 3 · 7 · 61	1282 = 2 · 641	1283 = 1283	1284 = 2 ² · 3 · 107
1285 = 5 · 257	1286 = 2 · 643	1287 = 3 ² · 11 · 13	1288 = 2 ³ · 7 · 23	1289 = 1289	1290 = 2 · 3 · 5 · 211
1291 = 1291	1292 = 2 ² · 17 · 19	1293 = 3 · 431	1294 = 2 · 647	1295 = 5 · 7 · 37	1296 = 2 ⁴ · 3 ⁴ · 11
1297 = 1297	1298 = 2 · 11 · 59	1299 = 3 · 433	1300 = 2 ² · 5 ² · 13	1301 = 1301	1302 = 2 · 3 · 109
1303 = 1303	1304 = 2 ³ · 163	1305 = 3 ² · 5 · 29	1306 = 2 · 653	1307 = 1307	1308 = 2 ² · 3 · 107
1309 = 7 · 11 · 17	1310 = 2 · 5 · 131	1311 = 3 · 19 · 23	1312 = 2 ⁵ · 41	1313 = 13 · 101	1314 = 2 · 3 ² · 73

10.4 Таблица простых чисел

Таблица простых чисел от 2-10314

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009
1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069	1087	1091
1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283
1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381
1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481
1483	1487	1489	1493	1499	1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567

1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753
1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871
1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979
1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053	2063	2069
2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137	2141	2143	2153
2161	2179	2203	2207	2213	2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273
2281	2287	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357	2371
2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423	2437	2441	2447	2459
2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591
2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767
2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861
2879	2887	2897	2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971
2999	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079	3083	3089
3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187	3191	3203	3209	3217
3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323
3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413	3433
3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527	3529	3533
3539	3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623
3631	3637	3643	3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821	3823	3833	3847
3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931
3943	3947	3967	3989	4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051
4057	4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139	4153	4157
4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231	4241	4243	4253	4259	4261
4271	4273	4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391
4397	4409	4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507
4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583	4591	4597	4603	4621
4637	4639	4643	4649	4651	4657	4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723
4729	4733	4751	4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937	4943	4951	4957
4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003	5009	5011	5021	5023	5039	5051
5059	5077	5081	5087	5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171
5179	5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279	5281	5297
5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387	5393	5399	5407	5413	5417
5419	5431	5437	5441	5443	5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507
5519	5521	5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639	5641
5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693	5701	5711	5717	5737
5741	5743	5749	5779	5783	5791	5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843
5849	5851	5857	5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053	6067	6073	6079
6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133	6143	6151	6163	6173	6197	6199
6203	6211	6217	6221	6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299
6301	6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367	6373	6379
6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473	6481	6491	6521	6529	6547
6551	6553	6563	6569	6571	6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659
6661	6673	6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761	6763
6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833	6841	6857	6863	6869

6871	6883	6899	6907	6911	6917	6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977
6983	6991	6997	7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207	7211	7213	7219
7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297	7307	7309	7321	7331	7333	7349
7351	7369	7393	7411	7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489
7499	7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561	7573	7577
7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643	7649	7669	7673	7681	7687
7691	7699	7703	7717	7723	7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817
7823	7829	7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919	7927
7933	7937	7949	7951	7963	7993	8009	8011	8017	8039	8053	8059	8069
8081	8087	8089	8093	8101	8111	8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179
8191	8209	8219	8221	8231	8233	8237	8243	8263	8269	8273	8287	8291
8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387	8389	8419	8423
8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501	8513	8521	8527	8537	8539	8543
8563	8573	8581	8597	8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669
8677	8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741	8747	8753
8761	8779	8783	8803	8807	8819	8821	8831	8837	8839	8849	8861	8863
8867	8887	8893	8923	8929	8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001
9007	9011	9013	9029	9041	9043	9049	9059	9067	9091	9103	9109	9127
9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199	9203	9209	9221	9227
9239	9241	9257	9277	9281	9283	9293	9311	9319	9323	9337	9341	9343
9349	9371	9377	9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533	9539	9547	9551
9587	9601	9613	9619	9623	9629	9631	9643	9649	9661	9677	9679	9689
9697	9719	9721	9733	9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803
9811	9817	9829	9833	9839	9851	9857	9859	9871	9883	9887	9901	9907
9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	10007	10009	10037	10039	10061	10067
10069	10079	10091	10093	10099	10103	10111	10133	10139	10141	10151	10159	10163
10169	10177	10181	10193	10211	10223	10243	10247	10253	10259	10267	10271	10273
10289	10301	10303	10313									

10.5 Число π

PI=3.

1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862
0899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848
1117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648
2337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245
8700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652
1384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462
3799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463
9522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812
7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050
7922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113
4999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468
5035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428
7554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959
0921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899
5773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855
8890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076
6010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425
9069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640
2474964732639141992726042699227967823547816360093417216412199245863150302861
8297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596
0236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793
8000816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757
4184946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025
4256887671790494601653466804988627232791786085784383827967976681454100953883
7863609506800642251252051173929848960841284886269456042419652850222106611863
0674427862203919494504712371378696095636437191728746776465757396241389086583
264599581339047802759009

10.6 Число e

PI=2.

718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353
547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260
595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149
934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069
551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443
747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696
770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576351
482208269895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117
301238197068416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815
301756717361332069811250996181881593041690351598888519345807273866738589422
879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827041978623
209002160990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016
768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704171898610687396
9655212671546889570350354021234078498193343210681701210056278802351920

11 Преобразования

11.1 Преобразования Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ix\omega} d\omega$$

Теорема о свертке:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

11.1.1 Некоторые преобразования Фурье

	Функция	Образ	Примечание
1	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$	Линейность
2	$f(t - a)$	$e^{i\omega a}F(\omega)$	Запаздывание
3	$e^{iat}f(t)$	$F(\omega - a)$	Частотный сдвиг
4	$f(at)$	$ a ^{-1}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Если a большое, то $f(at)$ сосредоточена около 0
5	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(i\omega)^n F(\omega)$	Св-ва преобразования Фурье n -й производной
6	$t^n f(t)$	$i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	Это обращение правила 5
7	$(f * g)(t)$	$F(\omega)G(\omega)$	Запись $f * g$ обозначает свертку функций f и g
8	$f(t)g(t)$	$\frac{(F * G)(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$	Это обращение правила 7
9	$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\delta(t)$ - функция Дирака
10	1	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$	Обращение 9
11	t^n	$i^n \sqrt{2\pi}\delta^{(n)}(\omega)$	n -натуральное число. Следствие 6 и 10.
12	e^{iat}	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega - a)$	Следствие 3 и 10.
13	$\cos(at)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)}{2}$	Следствие 1 и 12.
14	$\sin(at)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)}{2i}$	Так же из 1 и 12
15	e^{-at^2}	$\frac{1}{2a} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$	Функция Гаусса совпадает со изображением.
16	$W\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sinc}(Wt)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$
17	$\frac{1}{t}$	$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sgn}(\omega)$	Из 6 и 10.
18	$\frac{1}{t^n}$	$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \text{sgn}(\omega)$	Из 17.
19	$\text{sgn}(t)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\omega)^{-1}$	Из 17.
20	$\sqrt{2\pi}H(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$	Из 1 и 19.

11.2 Преобразования Лапласа

Преобразованием Лапласа функции действительной переменной $f(x)$, называется функция $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$, такая что:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного $F(s)$, называется функция $f(x)$ действительного переменного, такая что:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{sx} F(s) ds$$

где σ_1 - некоторое вещественное число.

11.2.1 Абсолютная сходимость

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то есть существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx = \int_0^{\infty} |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx$$

то он сходится абсолютно и равномерно для $\sigma \geq \sigma_0$ и $F(s)$ — аналитичная функция при $\sigma \geq \sigma_0$ ($\sigma = \operatorname{Re}(s)$ — действительная часть комплексной переменной s). Точная нижняя грань σ_a множества чисел σ , при которых это условие выполняется, называется абсциссой абсолютной сходимости преобразования Лапласа для функции $f(x)$.

11.2.2 Условия существования преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа существует в смысле абсолютной сходимости в следующих случаях: 1. Случай $\sigma \geq 0$: преобразование Лапласа существует, если существует интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ 2. Случай $\sigma > \sigma_a$: преобразование Лапласа существует, если интеграл $\int_0^{x_1} |f(x)| dx$ существует для каждого конечного $x_1 > 0$

и $|f(x)| \leq K e^{\sigma_a x}$ для $x > x_1 \geq 0$

3. Случай $\sigma > 0$ или $\sigma \geq \sigma_a$ (какая из границ больше): преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции $f'(x)$ (производная к $f(x)$) для $\sigma \geq \sigma_a$.

Примечание: это достаточные условия существования.

- 11.2.3 Теорема о свертке
- 11.2.4 Умножение изображений
- 11.2.5 Дифференцирование и интегрирование оригинала
- 11.2.6 Дифференцирование и интегрирование изображения
- 11.2.7 Запаздывание оригиналов и изображений. Предельные теоремы
- 11.2.8 Другие свойства

11.2.9 Прямое и обратное преобразование Лапласа некоторых функций

	$x(t)$	$X(j\omega)$	Примечание (область сходимости)
1	$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	
2	$\delta(t)$	1	$\forall s$
3	$\frac{(t - \tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$s > 0$
4	$\frac{t^n}{n!} u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$\frac{t^q}{\Gamma(q + 1)} u(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$	$s > 0$
6	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
7	$u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$	$s > 0$
8	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
9	$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$s > -\alpha$
10	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$s > -\alpha$
11	$(1 - e^{-\alpha t})u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$s > 0$
12	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
13	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
14	$\sinh(\alpha t)u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$s > \alpha $
15	$\cosh(\alpha t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$s > \alpha $
16	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$s > -\alpha$
17	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$s > -\alpha$
18	$\sqrt[n]{t} u(t)$	$s^{-\frac{n+1}{n}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$s > 0$
19	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) u(t)$	$-\frac{t_0}{s} [\ln(t_0 s) + \gamma]$	$s > 0; n > -1$; Постоянная Эйлера - Маскерони $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,5772156649015328606065120$
20	$J_n(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega^n (s + \sqrt{s^2 + \omega^2})^{-n}}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}$	функция Бесселя первого рода порядка n

11.3 Z-Преобразование

Z-преобразованием называют свертывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты. Если сигнал представляет импульсную характеристику линейной системы, то коэффициенты Z-преобразования показывают отклик системы на комплексные экспоненты $E(n) = z^{-n} = r^{-n} e^{-i\omega n}$, то есть на гармонические осцилляции с различными частотами и скоростями нарастания/затухания.

Двустороннее Z-преобразование

$$x(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

где n - целое, $z = Ae^{j\varphi}$ - комплексное число.

Одностороннее Z-преобразование

В случае когда $x[n]$ определена для $n \geq 0$:

$$x(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

11.3.1 Обратное Z-преобразование

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

11.3.2 Область сходимости

Область сходимости представляет из себя некоторое множество точек на комплексной плоскости, в которых выполнено условие:

$$OC = \left\{ z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} < \infty \right\}$$

11.3.3 Таблица некоторых Z-преобразований

	$x[n]$	$X(z)$	Область сходимости
1	$\delta[n]$	1	$\forall z$
2	$\delta[n - n_0]$	$\frac{1}{z^{n_0}}$	$\forall z$
3	$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
6	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7	$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
8	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
10	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
11	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $