

# СБОРНИК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Нижний Новгород, 2007-2009.

# Содержание

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Греческий алфавит:</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Основы:</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1       | Числа: . . . . .  | 4         |
| 2.2       | Основные законы сложения и умножения: . . . . .                           | 4         |
| 2.3       | Свойства действительных степеней положительных чисел: . . . . .           | 4         |
| 2.4       | Логарифмы: . . . . .  | 4         |
| 2.5       | Основные свойства логарифмов: . . . . .                                   | 4         |
| <b>3</b>  | <b>Формулы сокращенного умножения:</b>                                    | <b>5</b>  |
| 3.1       | Треугольник Паскаля: . . . . .  | 5         |
| <b>4</b>  | <b>Неравенства:</b>   | <b>6</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Производные:</b>   | <b>7</b>  |
| 5.1       | Таблица производных: . . . . .  | 7         |
| 5.2       | Формула Лейбница: . . . . .   | 7         |
| 5.3       | Правила дифференцирования: . . . . .                                      | 7         |
| 5.4       | Преобразование через exp: . . . . .                                       | 7         |
| <b>6</b>  | <b>Разложения:</b>  | <b>8</b>  |
| 6.1       | 5 основных разложений: . . . . .  | 8         |
| 6.2       | Остальные разложения: . . . . .   | 8         |
| 6.3       | Формула Тейлора: . . . . .  | 9         |
| 6.4       | Формула Маклорена: . . . . .  | 9         |
| 6.5       | Эквивалентность: . . . . .  | 9         |
| <b>7</b>  | <b>Таблица простейших интегралов:</b>                                     | <b>10</b> |
| <b>8</b>  | <b>Двойные и тройные интегралы:</b>                                       | <b>12</b> |
| <b>9</b>  | <b>Тригонометрия:</b>   | <b>14</b> |
| 9.1       | Соотношение между функциями одного угла: . . . . .                        | 14        |
| 9.2       | Формулы сложения и вычитания: . . . . .                                   | 14        |
| 9.3       | Формулы двойных, тройных и половинных углов: . . . . .                    | 14        |
| 9.4       | Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение: . . . . . | 15        |
| 9.5       | Преобразование произведения в сумму: . . . . .                            | 15        |
| 9.6       | Универсальная тригонометрическая подстановка: . . . . .                   | 15        |
| 9.7       | Некоторые важные соотношения: . . . . .                                   | 15        |
| 9.8       | Другие формулы: . . . . .   | 16        |
| <b>10</b> | <b>Таблица констант</b>   | <b>17</b> |
| 10.1      | Факториалы . . . . .  | 17        |
| 10.2      | Интеграл . . . . .  | 19        |
| 10.3      | Разложение чисел на простые . . . . .                                     | 19        |
| 10.4      | Таблица простых чисел . . . . .   | 23        |
| 10.5      | Число $\pi$ . . . . .   | 25        |
| 10.6      | Число $e$ . . . . .   | 26        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>11 Преобразования</b>  | <b>27</b> |
| 11.1 Преобразования Фурье . . . . .                                       | 27        |
| 11.1.1 Некоторые преобразования Фурье . . . . .                           | 28        |
| 11.2 Преобразования Лапласа . . . . .                                     | 28        |
| 11.2.1 Абсолютная сходимость . . . . .                                    | 29        |
| 11.2.2 Условия существования преобразования Лапласа . . . . .             | 29        |
| 11.2.3 Теорема о свертке . . . . .  | 29        |
| 11.2.4 Умножение изображений . . . . .                                    | 29        |
| 11.2.5 Дифференцирование и интегрирование оригинала . . . . .             | 29        |
| 11.2.6 Дифференцирование и интегрирование изображения . . . . .           | 29        |
| 11.2.7 Запаздывание оригиналов и изображений. Предельные теоремы . . . .  | 29        |
| 11.2.8 Другие свойства . . . . .  | 29        |
| 11.2.9 Прямое и обратное преобразование Лапласа некоторых функций . . . . | 30        |
| 11.3 Z-Преобразование . . . . .   | 31        |
| 11.3.1 Обратное Z-преобразование . . . . .                                | 31        |
| 11.3.2 Область сходимости . . . . .                                       | 31        |
| 11.3.3 Таблица некоторых Z-преобразований . . . . .                       | 32        |

# 1 Греческий алфавит:

|                         |                  |                      |                   |
|-------------------------|------------------|----------------------|-------------------|
| $\alpha$ - альфа        | $\beta$ - бета   | $\gamma$ - гамма     | $\delta$ - дельта |
| $\varepsilon$ - эpsilon | $\zeta$ - дзетта | $\eta$ - этта        | $\theta$ - тетта  |
| $\iota$ - йотта         | $\kappa$ - капша | $\lambda$ - лямбда   | $\mu$ - мю        |
| $\nu$ - ню              | $\xi$ - кси      | $\omicron$ - омикрон | $\pi$ - пи        |
| $\rho$ - ро             | $\sigma$ - сигма | $\tau$ - тау         | $\varphi$ - фи    |
| $\chi$ - хи             | $\psi$ - пси     | $\omega$ - омега     |                   |

## 2 Основы:

### 2.1 Числа:

$N$  - Натуральные числа  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots)$

$Z$  - Целые числа = натуральные числа + 0 + отрицательные числа  $(\dots - 5, -4, -3, -2, -1)$

$Q$  - Рациональные числа = целые числа + несократимые дроби  $\left(\frac{n}{m} : n, m \in Z; \frac{1}{2}, \frac{3}{7}\right)$

$R$  - Действительные числа = рациональные числа + иррациональные числа  $(\sqrt{2}, \sqrt{11}, \pi, e)$

$C$  - Комплексные числа = числа вида:  $z = a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi) : a, b \in R$

### 2.2 Основные законы сложения и умножения:

1.  $a + b = b + a$  - коммутативность по сложению
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  - ассоциативность по сложению
3.  $(a + b)c = ac + bc$  - дистрибутивность по сложению относительно умножения

### 2.3 Свойства действительных степеней положительных чисел:

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

### 2.4 Логарифмы:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

### 2.5 Основные свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

### 3 Формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

.....

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_k^n a^i b^{n-i}$$

$$(a + \underbrace{b + c}_d)^2 = (a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 =$$

$$= a^2 + 2a(b + c) + b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

.....

$$(a_1 + \underbrace{a_2 + \dots + a_m}_{A_1})^n = (a_1 + A_1)^n = \sum_{i=0}^n C_k^n a_1^i A_1^{n-i} = \sum_{i=0}^n C_k^n a_1^i (a_2 + \underbrace{a_3 + \dots + a_m}_{A_2})^{n-i} = \dots$$

#### 3.1 Треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 \\
 & 1 & 1 \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
 \end{array}$$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 4 Неравенства:

Неравенства Бернулли:  $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$   
Основные неравенства:

1.  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  ( $a > 0$ )
2.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ )
3.  $|a+b| \leq |a|+|b|$
4.  $|a-b| \geq ||a|-|b||$
5.  $a^2+b^2 \geq 2|a||b|$

Формулы сравнения:

$$\text{Формула Валлиса: } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\text{Формула Стирлинга: } n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{139}{51840n^3} + O(n^{-4})\right)$$

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

$$x > 1 : x!^2 > x^x > x! > x$$

$$\log_x n \ll n^p (\forall p) \ll a^n (a > 0) \ll n^n$$

Так можно вычислить  $\pi$ :

$$\pi = 6 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

Уравнение касательной и нормали:

$$y(x) = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0) - \text{уравнение касательной}$$

$$y(x) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0) + y(x_0) - \text{уравнение нормали}$$

Эйлеровы интегралы:

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx \Rightarrow \Gamma(y+1) = y \Gamma(y)$$

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad B(a, b) = B(b, a) \quad B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

## 5 Производные:

### 5.1 Таблица производных:

|  |   |
|--|---|
| $(c)' = 0$   | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$                         |
| $(x^n)' = nx^{n-1}$  | $(\sin(x))' = \cos(x)$                                      |
| $(\cos(x))' = -\sin(x)$  | $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$             |
| $(\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$                      | $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                    |
| $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                              | $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$              |
| $(\operatorname{arcctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$                       | $(a^x)' = a^x \ln(a) \ (a > 0)$                             |
| $(\log_a x)' = -\frac{1}{x \ln a} \ (a > 0); \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$              |
| $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$                         | $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$  |
| $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$           | $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$                              |
| $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0)$                                  | $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$      |
| $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$                 | $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$                   |
| $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$                         | $(\sqrt[n]{x})' = x^{\frac{1}{n}-2}(1 - \ln(x)), \ (x > 0)$ |
| $( x )' = \frac{x}{ x } = \operatorname{sign}(x)$                      | $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$                                   |
| $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$                    | $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$         |
| $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$                           | $(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$               |

### 5.2 Формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

### 5.3 Правила дифференцирования:

1.  $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
2.  $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$
3.  $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4.  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
5.  $(Cu(x))' = Cu'(x), \ C - \text{const}$

### 5.4 Преобразование через exp:

$$a^t = e^{t \ln a}$$



## 6 Разложения:

### 6.1 5 основных разложений:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 (1+x)^m &= \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i)}{k!} x^k = 1 + mx + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{m-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 \sin(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\
 \cos(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
 \end{aligned}$$

### 6.2 Остальные разложения:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n) = 2^n n!$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{12}) \\
 \operatorname{arctg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \forall x: |x| < 1 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + O(x^{14}) \\
 \operatorname{arcsin}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad \forall x: |x| < 1 = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + O(x^{10}) \\
 \operatorname{arccos}(x) &= \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + O(x^7) \\
 \operatorname{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^{10} + O(x^{12}) \quad \forall x \\
 \operatorname{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{39916800}x^{11} + O(x^{12}) \quad \forall x \\
 \operatorname{th}(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{12}) \\
 \frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + O(x^8) \\
 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \\
 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + O(x^{10})
 \end{aligned}$$

### 6.3 Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1} = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)} [a + \Theta(x - a)]$$

Остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1} = \frac{(x - a)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)} [a + \Theta(x - a)]$$

Остаточный член в форме Пеано:

$$R_{n+1} = o[(x - a)^n]$$

### 6.4 Формула Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

### 6.5 Эквивалентность:

$$x \rightarrow 0 \quad |\ln x| < \frac{1}{x^\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$x \rightarrow 1 \quad \ln x \approx x - 1$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \ln x < x^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$x \approx \arcsin x \approx \sin x \approx \operatorname{tg} x \approx \operatorname{arctg} x$$

## 7 Таблица простейших интегралов:

$$\begin{array}{ll}
 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & + C \\ -\operatorname{arcctg}(x) & + C \end{cases} & \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin(x) & + C \\ -\arccos(x) & + C \end{cases} & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) & \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 \int \cos x dx = \sin x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C & \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \\
 \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C & \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \\
 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C & \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) \\
 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0) & \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C \\
 \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C & \int \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li}(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0) \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0) \\
 \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0) \\
 \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0)
 \end{array}$$

Методы решения:

1.  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$
2.  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

Формула Фруллани:  $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0)$

Формула Эйлера - Пуассона:  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Интеграл Дирихле:  $D(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta$

Интеграл Лапласа:  $L = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$

Интегралы Френеля:  $L = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Интегралы Френеля:  $L = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Интегралы Френеля:  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$

Эйлеровы интегралы:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx = \frac{1}{y} \cdot \Gamma(y+1)$$

$$\Gamma^{(n)}(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} \ln^n x dx$$

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x dx = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

## 8 Двойные и тройные интегралы:

$$\iint_D f(x, y) dD = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_T f(x(t, \tau), y(t, \tau)) |J(t, \tau)| dt d\tau, \text{ где } J(t, \tau) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \tau)}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow J = r$$

$$\begin{cases} x = ar \cos \phi \\ y = br \sin \phi \end{cases} \Rightarrow J = abr$$

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}$$

Площадь гладкой поверхности заданной параметрически:

$$T: \begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \\ z = z(t, \tau) \end{cases} \quad T \rightarrow D \quad D: \begin{cases} x = x(t, \tau) \\ y = y(t, \tau) \end{cases}$$

Гаусовы коэффициенты:

$$E = x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2$$

$$G = x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2$$

$$F = x_t' x_\tau' + y_t' y_\tau' + z_t' z_\tau'$$

$$\Delta S = \iint_T \sqrt{EG - F^2} dt d\tau$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dD = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz$$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = \begin{vmatrix} x_t' & x_u' & x_v' \\ y_t' & y_u' & y_v' \\ z_t' & z_u' & z_v' \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x = r \cos \psi \cos \phi \\ y = r \cos \psi \sin \phi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \Rightarrow J = r^2 \cos \psi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \psi \\ y = r \sin \phi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \end{cases} \Rightarrow J = r^2 \sin \psi \quad \begin{cases} x = ar \cos \phi \sin \psi \\ y = br \sin \phi \sin \psi \\ z = cr \cos \psi \end{cases} \Rightarrow J = abcr^2 \sin \psi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r \quad \begin{cases} x = ar \cos \phi \\ y = br \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = abr$$

Криволинейный интеграл 1 рода по плоской кривой:

$$y = y(x) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad x = x(t); y = y(t) \quad l = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Криволинейный интеграл 1 рода по плоской кривой:

$$x = x(t), y = y(t) \quad \int_L f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Криволинейный интеграл 1 рода по пространственной кривой:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad \int_L f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Интеграл 2 рода по плоской кривой = криволинейному интегралу 2 рода:

$$x = x(t), y = y(t) \quad \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t) dt$$

Связь между интегралом 1 и 2 рода:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds$$

Интеграл 2 рода по плоскому контуру.

$$\int_a^b (Y(x) - y_0(x)) dx = - \oint_{c*} y dx$$

Формула Грина:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy$$

Интеграл 2 рода по пространственной кривой:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^T (P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t) dt$$

Интеграл 1 рода по поверхности:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_T f(x(t, \tau), y(t, \tau), z(t, \tau)) \sqrt{EG - F^2} dt d\tau$$

$$\begin{cases} x = R \cos t \cos \tau \\ y = R \sin t \cos \tau \\ z = R \sin \tau \end{cases} \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = R \cos \tau \quad \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = \tau \end{cases} \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = R$$

Поверхностный интеграл 2 рода:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_T (P(V(u, v))A + Q(V(u, v))B + R(V(u, v))C) du dv, \quad V(u, v) = x(u, v), y(u, v), z(u, v)$$

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Соотношение между интегралами 1 и 2 рода:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

Формула Стокса:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Формула Остроградского:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

## 9 Тригонометрия:

### 9.1 Соотношение между функциями одного угла:

1.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
2.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
3.  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
4.  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
5.  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

### 9.2 Формулы сложения и вычитания:

1.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$
2.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
3.  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \pm \operatorname{tg}(\beta)}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta)}$

### 9.3 Формулы двойных, тройных и половинных углов:

1.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
2.  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
3.  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
4.  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$
5.  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^4 \alpha$
6.  $\cos 3\alpha = 4 \cos^4 \alpha - 3 \cos \alpha$
7.  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$
8.  $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$
9.  $\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \Rightarrow \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
10.  $\cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \Rightarrow \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$
11.  $\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
12.  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

## 9.4 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение:

1.  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
2.  $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
3.  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
4.  $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

## 9.5 Преобразование произведения в сумму:

1.  $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
2.  $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
3.  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

## 9.6 Универсальная тригонометрическая подстановка:

1.  $\sin(\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
2.  $\cos(\alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
3.  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

## 9.7 Некоторые важные соотношения:

1.  $\sum_{i=0}^n \sin i\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(2n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
2.  $\sum_{i=0}^n \cos i\alpha = \frac{\sin(2n+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
3.  $\cos n\alpha = \cos^n \alpha + C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots$



$$4. \sin n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

## 9.8 Другие формулы:

$$1. 1 \pm \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$2. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \pm 1 = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$3. 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$4. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$5. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$6. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$7. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

$$8. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

## 10 Таблица констант

### 10.1 Факториалы

|                        |  |
|------------------------|--|
| $1! = 1$               | $17! = 355687428096000$                    |
| $2! = 2$               | $18! = 6402373705728000$                   |
| $3! = 6$               | $19! = 121645100408832000$                 |
| $4! = 24$              | $20! = 2432902008176640000$                |
| $5! = 120$             | $21! = 51090942171709440000$               |
| $6! = 720$             | $22! = 1124000727777607680000$             |
| $7! = 5040$            | $23! = 25852016738884976640000$            |
| $8! = 40320$           | $24! = 620448401733239439360000$           |
| $9! = 362880$          | $25! = 15511210043330985984000000$         |
| $10! = 3628800$        | $26! = 403291461126605635584000000$        |
| $11! = 39916800$       | $27! = 10888869450418352160768000000$      |
| $12! = 479001600$      | $28! = 304888344611713860501504000000$     |
| $13! = 6227020800$     | $29! = 8841761993739701954543616000000$    |
| $14! = 87178291200$    | $30! = 265252859812191058636308480000000$  |
| $15! = 1307674368000$  | $31! = 8222838654177922817725562880000000$ |
| $16! = 20922789888000$ |  |

314! =  
 2065913788050307179138063781843957100713312943681905646584753601705317689969  
 2160345149663278684609438960910162610648177545579277167001701924427200484080  
 5112426377571750377767242515127611496528298224886536558290613236382839497709  
 1205890547695526152937530587052641222934112797815637531628425780896410880366  
 5013084709514051029432670718461463522339767687828093878998487884593050868977  
 2801127402422893610446503743175039581919648887554826733722918769794271032225  
 3917260201044967689266790995829304679365833100364514565904733392955236565945  
 381199778632611957081323643220236940869632000000000000000000000000000000  
 00

614! =  
 1179780069431809539465878345415887554746548232925885681952932115077899252245  
 9792641560806964950604099790332724464879837133658662661505765798957427180626  
 7011230318114993294695964550620442246203363077411149221765954126578393387073  
 7004745437969247652651564858515407435134668989910352218525112352104323184833  
 1474354654572595511903282999749193677375582739813908992389148551965911698991  
 2400218302808522964848036459073666149266902373180453691005003999481345409397  
 6662347773708015629805292131525741078514979475999866561449742736870946801929  
 2624472512824801326501474374815609277956196568712261533695761928371942530523  
 7386322377329043231473666765261763276057777622339683866975372323272131337073  
 4374763197743125163015922143403333934429870974355617588379163137714309631866  
 8605148150893488507622961834263210698513847336824432066119800334857749742368  
 1100559816314390070891957866073013694435833275386017155889843130333337252794  
 9651440199276311114218029992954561258867959235402028097475354066907471013017  
 8070572469432226417916767325059960733249190648735055518325213644586030100720  
 1558818388274061385038831592115139742024899015814551693068605143756213088145  
 2972613231990899349568564668043174366932942983038263247555263969038287122405  
 1908510632129481085028106489738588789350251484821816330504499502952103603299  
 41811200  
 00  
 0000

## 10.2 Интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| x   | 0.00     | 0.01     | 0.02     | 0.03     | 0.04     | 0.05     | 0.06     | 0.07     | 0.08     | 0.09     |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.0 | 0.500000 | 0.503990 | 0.507979 | 0.511967 | 0.515954 | 0.519939 | 0.523923 | 0.527904 | 0.531882 | 0.535857 |
| 0.1 | 0.539828 | 0.543796 | 0.547759 | 0.551717 | 0.555670 | 0.559618 | 0.563560 | 0.567495 | 0.571424 | 0.575346 |
| 0.2 | 0.579260 | 0.583167 | 0.587065 | 0.590955 | 0.594835 | 0.598707 | 0.602569 | 0.606420 | 0.610262 | 0.614092 |
| 0.3 | 0.617912 | 0.621720 | 0.625516 | 0.629300 | 0.633072 | 0.636831 | 0.640577 | 0.644309 | 0.648028 | 0.651732 |
| 0.4 | 0.655422 | 0.659097 | 0.662758 | 0.666403 | 0.670032 | 0.673645 | 0.677242 | 0.680823 | 0.684387 | 0.687933 |
| 0.5 | 0.691463 | 0.694975 | 0.698469 | 0.701944 | 0.705402 | 0.708841 | 0.712261 | 0.715662 | 0.719043 | 0.722405 |
| 0.6 | 0.725747 | 0.729069 | 0.732371 | 0.735653 | 0.738914 | 0.742154 | 0.745373 | 0.748571 | 0.751748 | 0.754903 |
| 0.7 | 0.758037 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| 0.8 | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802338 | 0.805106 | 0.807850 | 0.810571 | 0.813267 |
| 0.9 | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823815 | 0.826392 | 0.828944 | 0.831473 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| 1.0 | 0.841345 | 0.843753 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857691 | 0.859929 | 0.862144 |
| 1.1 | 0.864334 | 0.866501 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.879000 | 0.881000 | 0.882977 |
| 1.2 | 0.884931 | 0.886861 | 0.888768 | 0.890652 | 0.892513 | 0.894350 | 0.896166 | 0.897958 | 0.899728 | 0.901475 |
| 1.3 | 0.903200 | 0.904902 | 0.906583 | 0.908241 | 0.909878 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| 1.4 | 0.919244 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923642 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930564 | 0.931888 |
| 1.5 | 0.933193 | 0.934478 | 0.935745 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941793 | 0.942947 | 0.944083 |
| 1.6 | 0.945201 | 0.946301 | 0.947384 | 0.948449 | 0.949498 | 0.950529 | 0.951543 | 0.952540 | 0.953521 | 0.954486 |
| 1.7 | 0.955435 | 0.956367 | 0.957284 | 0.958185 | 0.959071 | 0.959941 | 0.960796 | 0.961637 | 0.962462 | 0.963273 |
| 1.8 | 0.964070 | 0.964852 | 0.965621 | 0.966375 | 0.967116 | 0.967843 | 0.968557 | 0.969258 | 0.969946 | 0.970621 |
| 1.9 | 0.971284 | 0.971933 | 0.972571 | 0.973197 | 0.973810 | 0.974412 | 0.975002 | 0.975581 | 0.976148 | 0.976705 |
| 2.0 | 0.977250 | 0.977784 | 0.978308 | 0.978822 | 0.979325 | 0.979818 | 0.980301 | 0.980774 | 0.981237 | 0.981691 |
| 2.1 | 0.982136 | 0.982571 | 0.982997 | 0.983414 | 0.983823 | 0.984222 | 0.984614 | 0.984997 | 0.985371 | 0.985738 |
| 2.2 | 0.986097 | 0.986447 | 0.986791 | 0.987126 | 0.987455 | 0.987776 | 0.988089 | 0.988396 | 0.988696 | 0.988989 |
| 2.3 | 0.989276 | 0.989556 | 0.989830 | 0.990097 | 0.990358 | 0.990613 | 0.990863 | 0.991106 | 0.991344 | 0.991576 |
| 2.4 | 0.991802 | 0.992024 | 0.992240 | 0.992451 | 0.992656 | 0.992857 | 0.993053 | 0.993244 | 0.993431 | 0.993613 |
| 2.5 | 0.993790 | 0.993963 | 0.994132 | 0.994297 | 0.994457 | 0.994614 | 0.994766 | 0.994915 | 0.995060 | 0.995201 |
| 2.6 | 0.995339 | 0.995473 | 0.995604 | 0.995731 | 0.995855 | 0.995975 | 0.996093 | 0.996207 | 0.996319 | 0.996427 |
| 2.7 | 0.996533 | 0.996636 | 0.996736 | 0.996833 | 0.996928 | 0.997020 | 0.997110 | 0.997197 | 0.997282 | 0.997365 |
| 2.8 | 0.997445 | 0.997523 | 0.997599 | 0.997673 | 0.997744 | 0.997814 | 0.997882 | 0.997948 | 0.998012 | 0.998074 |
| 2.9 | 0.998134 | 0.998193 | 0.998250 | 0.998305 | 0.998359 | 0.998411 | 0.998462 | 0.998511 | 0.998559 | 0.998605 |
| 3.0 | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| 3.1 | 0.999032 | 0.999065 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| 3.2 | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| 3.3 | 0.999517 | 0.999534 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999651 |
| 3.4 | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| 3.5 | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999822 | 0.999828 | 0.999835 |
| 3.6 | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| 3.7 | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| 3.8 | 0.999928 | 0.999931 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| 3.9 | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |
| 4.0 | 0.999968 | 0.999970 | 0.999971 | 0.999972 | 0.999973 | 0.999974 | 0.999975 | 0.999976 | 0.999977 | 0.999978 |
| 4.1 | 0.999979 | 0.999980 | 0.999981 | 0.999982 | 0.999983 | 0.999983 | 0.999984 | 0.999985 | 0.999985 | 0.999986 |
| 4.2 | 0.999987 | 0.999987 | 0.999988 | 0.999988 | 0.999989 | 0.999989 | 0.999990 | 0.999990 | 0.999991 | 0.999991 |
| 4.3 | 0.999991 | 0.999992 | 0.999992 | 0.999993 | 0.999993 | 0.999993 | 0.999993 | 0.999994 | 0.999994 | 0.999994 |
| 4.4 | 0.999995 | 0.999995 | 0.999995 | 0.999995 | 0.999996 | 0.999996 | 0.999996 | 0.999996 | 0.999996 | 0.999996 |
| 4.5 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999997 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 |
| 4.6 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999998 | 0.999999 | 0.999999 |
| 4.7 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 |
| 4.8 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 | 0.999999 |
| 4.9 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |

## 10.3 Разложение чисел на простые

|                           |                                       |                                       |                                       |                           |   |
|---------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|---|
| 1 = 1                     | 2 = 2                                 | 3 = 3                                 | 4 = 2 <sup>2</sup>                    | 5 = 5                     | 6 = 2 · 3                                 |
| 7 = 7                     | 8 = 2 <sup>3</sup>                    | 9 = 3 <sup>2</sup>                    | 10 = 2 · 5                            | 11 = 11                   | 12 = 2 <sup>2</sup> · 3                   |
| 13 = 13                   | 14 = 2 · 7                            | 15 = 3 · 5                            | 16 = 2 <sup>4</sup>                   | 17 = 17                   | 18 = 2 · 3 <sup>2</sup>                   |
| 19 = 19                   | 20 = 2 <sup>2</sup> · 5               | 21 = 3 · 7                            | 22 = 2 · 11                           | 23 = 23                   | 24 = 2 <sup>3</sup> · 3                   |
| 25 = 5 <sup>2</sup>       | 26 = 2 · 13                           | 27 = 3 <sup>3</sup>                   | 28 = 2 <sup>2</sup> · 7               | 29 = 29                   | 30 = 2 · 3 · 5                            |
| 31 = 31                   | 32 = 2 <sup>5</sup>                   | 33 = 3 · 11                           | 34 = 2 · 17                           | 35 = 5 · 7                | 36 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>2</sup>      |
| 37 = 37                   | 38 = 2 · 19                           | 39 = 3 · 13                           | 40 = 2 <sup>3</sup> · 5               | 41 = 41                   | 42 = 2 · 3 · 7                            |
| 43 = 43                   | 44 = 2 <sup>2</sup> · 11              | 45 = 3 <sup>2</sup> · 5               | 46 = 2 · 23                           | 47 = 47                   | 48 = 2 <sup>4</sup> · 3                   |
| 49 = 7 <sup>2</sup>       | 50 = 2 · 5 <sup>2</sup>               | 51 = 3 · 17                           | 52 = 2 <sup>2</sup> · 13              | 53 = 53                   | 54 = 2 · 3 <sup>3</sup>                   |
| 55 = 5 · 11               | 56 = 2 <sup>3</sup> · 7               | 57 = 3 · 19                           | 58 = 2 · 29                           | 59 = 59                   | 60 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 5               |
| 61 = 61                   | 62 = 2 · 31                           | 63 = 3 <sup>2</sup> · 7               | 64 = 2 <sup>6</sup>                   | 65 = 5 · 13               | 66 = 2 · 3 · 11                           |
| 67 = 67                   | 68 = 2 <sup>2</sup> · 17              | 69 = 3 · 23                           | 70 = 2 · 5 · 7                        | 71 = 71                   | 72 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>2</sup>      |
| 73 = 73                   | 74 = 2 · 37                           | 75 = 3 · 5 <sup>2</sup>               | 76 = 2 <sup>2</sup> · 19              | 77 = 7 · 11               | 78 = 2 · 3 · 13                           |
| 79 = 79                   | 80 = 2 <sup>4</sup> · 5               | 81 = 3 <sup>4</sup>                   | 82 = 2 · 41                           | 83 = 83                   | 84 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 7               |
| 85 = 5 · 17               | 86 = 2 · 43                           | 87 = 3 · 29                           | 88 = 2 <sup>3</sup> · 11              | 89 = 89                   | 90 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 5               |
| 91 = 7 · 13               | 92 = 2 <sup>2</sup> · 23              | 93 = 3 · 31                           | 94 = 2 · 47                           | 95 = 5 · 19               | 96 = 2 <sup>5</sup> · 3                   |
| 97 = 97                   | 98 = 2 · 7 <sup>2</sup>               | 99 = 3 <sup>2</sup> · 11              | 100 = 2 <sup>2</sup> · 5 <sup>2</sup> | 101 = 101                 | 102 = 2 · 3 · 17                          |
| 103 = 103                 | 104 = 2 <sup>3</sup> · 13             | 105 = 3 · 5 · 7                       | 106 = 2 · 53                          | 107 = 107                 | 108 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>3</sup>     |
| 109 = 109                 | 110 = 2 · 5 · 11                      | 111 = 3 · 37                          | 112 = 2 <sup>4</sup> · 7              | 113 = 113                 | 114 = 2 · 3 · 19                          |
| 115 = 5 · 23              | 116 = 2 <sup>2</sup> · 29             | 117 = 3 <sup>2</sup> · 13             | 118 = 2 · 59                          | 119 = 7 · 17              | 120 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 5              |
| 121 = 11 <sup>2</sup>     | 122 = 2 · 61                          | 123 = 3 · 41                          | 124 = 2 <sup>2</sup> · 31             | 125 = 5 <sup>3</sup>      | 126 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 7              |
| 127 = 127                 | 128 = 2 <sup>7</sup>                  | 129 = 3 · 43                          | 130 = 2 · 5 · 13                      | 131 = 131                 | 132 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 11             |
| 133 = 7 · 19              | 134 = 2 · 67                          | 135 = 3 <sup>3</sup> · 5              | 136 = 2 <sup>3</sup> · 17             | 137 = 137                 | 138 = 2 · 3 · 23                          |
| 139 = 139                 | 140 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 7          | 141 = 3 · 47                          | 142 = 2 · 71                          | 143 = 11 · 13             | 144 = 2 <sup>4</sup> · 3 <sup>2</sup>     |
| 145 = 5 · 29              | 146 = 2 · 73                          | 147 = 3 · 7 <sup>2</sup>              | 148 = 2 <sup>2</sup> · 37             | 149 = 149                 | 150 = 2 · 3 · 5 <sup>2</sup>              |
| 151 = 151                 | 152 = 2 <sup>3</sup> · 19             | 153 = 3 <sup>2</sup> · 17             | 154 = 2 · 7 · 11                      | 155 = 5 · 31              | 156 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 13             |
| 157 = 157                 | 158 = 2 · 79                          | 159 = 3 · 53                          | 160 = 2 <sup>5</sup> · 5              | 161 = 7 · 23              | 162 = 2 · 3 <sup>4</sup>                  |
| 163 = 163                 | 164 = 2 <sup>2</sup> · 41             | 165 = 3 · 5 · 11                      | 166 = 2 · 83                          | 167 = 167                 | 168 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 7              |
| 169 = 13 <sup>2</sup>     | 170 = 2 · 5 · 17                      | 171 = 3 <sup>2</sup> · 19             | 172 = 2 <sup>2</sup> · 43             | 173 = 173                 | 174 = 2 · 3 · 29                          |
| 175 = 5 <sup>2</sup> · 7  | 176 = 2 <sup>4</sup> · 11             | 177 = 3 · 59                          | 178 = 2 · 89                          | 179 = 179                 | 180 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>2</sup> · 5 |
| 181 = 181                 | 182 = 2 · 7 · 13                      | 183 = 3 · 61                          | 184 = 2 <sup>3</sup> · 23             | 185 = 5 · 37              | 186 = 2 · 3 · 31                          |
| 187 = 11 · 17             | 188 = 2 <sup>2</sup> · 47             | 189 = 3 <sup>3</sup> · 7              | 190 = 2 · 5 · 19                      | 191 = 191                 | 192 = 2 <sup>6</sup> · 3                  |
| 193 = 193                 | 194 = 2 · 97                          | 195 = 3 · 5 · 13                      | 196 = 2 <sup>2</sup> · 7 <sup>2</sup> | 197 = 197                 | 198 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 11             |
| 199 = 199                 | 200 = 2 <sup>3</sup> · 5 <sup>2</sup> | 201 = 3 · 67                          | 202 = 2 · 101                         | 203 = 7 · 29              | 204 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 17             |
| 205 = 5 · 41              | 206 = 2 · 103                         | 207 = 3 <sup>2</sup> · 23             | 208 = 2 <sup>4</sup> · 13             | 209 = 11 · 19             | 210 = 2 · 3 · 5 · 7                       |
| 211 = 211                 | 212 = 2 <sup>2</sup> · 53             | 213 = 3 · 71                          | 214 = 2 · 107                         | 215 = 5 · 43              | 216 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>3</sup>     |
| 217 = 7 · 31              | 218 = 2 · 109                         | 219 = 3 · 73                          | 220 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 11         | 221 = 13 · 17             | 222 = 2 · 3 · 37                          |
| 223 = 223                 | 224 = 2 <sup>5</sup> · 7              | 225 = 3 <sup>2</sup> · 5 <sup>2</sup> | 226 = 2 · 113                         | 227 = 227                 | 228 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 19             |
| 229 = 229                 | 230 = 2 · 5 · 23                      | 231 = 3 · 7 · 11                      | 232 = 2 <sup>3</sup> · 29             | 233 = 233                 | 234 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 13             |
| 235 = 5 · 47              | 236 = 2 <sup>2</sup> · 59             | 237 = 3 · 79                          | 238 = 2 · 7 · 17                      | 239 = 239                 | 240 = 2 <sup>4</sup> · 3 · 5              |
| 241 = 241                 | 242 = 2 · 11 <sup>2</sup>             | 243 = 3 <sup>5</sup>                  | 244 = 2 <sup>2</sup> · 61             | 245 = 5 · 7 <sup>2</sup>  | 246 = 2 · 3 · 41                          |
| 247 = 13 · 19             | 248 = 2 <sup>3</sup> · 31             | 249 = 3 · 83                          | 250 = 2 · 5 <sup>3</sup>              | 251 = 251                 | 252 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>2</sup> · 7 |
| 253 = 11 · 23             | 254 = 2 · 127                         | 255 = 3 · 5 · 17                      | 256 = 2 <sup>8</sup>                  | 257 = 257                 | 258 = 2 · 3 · 43                          |
| 259 = 7 · 37              | 260 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 13         | 261 = 3 <sup>2</sup> · 29             | 262 = 2 · 131                         | 263 = 263                 | 264 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 11             |
| 265 = 5 · 53              | 266 = 2 · 7 · 19                      | 267 = 3 · 89                          | 268 = 2 <sup>2</sup> · 67             | 269 = 269                 | 270 = 2 · 3 <sup>3</sup> · 5              |
| 271 = 271                 | 272 = 2 <sup>4</sup> · 17             | 273 = 3 · 7 · 13                      | 274 = 2 · 137                         | 275 = 5 <sup>2</sup> · 11 | 276 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 23             |
| 277 = 277                 | 278 = 2 · 139                         | 279 = 3 <sup>2</sup> · 31             | 280 = 2 <sup>3</sup> · 5 · 7          | 281 = 281                 | 282 = 2 · 3 · 47                          |
| 283 = 283                 | 284 = 2 <sup>2</sup> · 71             | 285 = 3 · 5 · 19                      | 286 = 2 · 11 · 13                     | 287 = 7 · 41              | 288 = 2 <sup>5</sup> · 3 <sup>2</sup>     |
| 289 = 17 <sup>2</sup>     | 290 = 2 · 5 · 29                      | 291 = 3 · 97                          | 292 = 2 <sup>2</sup> · 73             | 293 = 293                 | 294 = 2 · 3 · 7 <sup>2</sup>              |
| 295 = 5 · 59              | 296 = 2 <sup>3</sup> · 37             | 297 = 3 <sup>3</sup> · 11             | 298 = 2 · 149                         | 299 = 13 · 23             | 300 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 5 <sup>2</sup> |
| 301 = 7 · 43              | 302 = 2 · 151                         | 303 = 3 · 101                         | 304 = 2 <sup>4</sup> · 19             | 305 = 5 · 61              | 306 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 17             |
| 307 = 307                 | 308 = 2 <sup>2</sup> · 7 · 11         | 309 = 3 · 103                         | 310 = 2 · 5 · 31                      | 311 = 311                 | 312 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 13             |
| 313 = 313                 | 314 = 2 · 157                         | 315 = 3 <sup>2</sup> · 5 · 7          | 316 = 2 <sup>2</sup> · 79             | 317 = 317                 | 318 = 2 · 3 · 53                          |
| 319 = 11 · 29             | 320 = 2 <sup>6</sup> · 5              | 321 = 3 · 107                         | 322 = 2 · 7 · 23                      | 323 = 17 · 19             | 324 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>4</sup>     |
| 325 = 5 <sup>2</sup> · 13 | 326 = 2 · 163                         | 327 = 3 · 109                         | 328 = 2 <sup>3</sup> · 41             | 329 = 7 · 47              | 330 = 2 · 3 · 5 · 11                      |
| 331 = 331                 | 332 = 2 <sup>2</sup> · 83             | 333 = 3 <sup>2</sup> · 37             | 334 = 2 · 167                         | 335 = 5 · 67              | 336 = 2 <sup>4</sup> · 3 · 7              |
| 337 = 337                 | 338 = 2 · 13 <sup>2</sup>             | 339 = 3 · 113                         | 340 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 17         | 341 = 11 · 31             | 342 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 19             |
| 343 = 7 <sup>3</sup>      | 344 = 2 <sup>3</sup> · 43             | 345 = 3 · 5 · 23                      | 346 = 2 · 173                         | 347 = 347                 | 348 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 29             |
| 349 = 349                 | 350 = 2 · 5 <sup>2</sup> · 7          | 351 = 3 <sup>3</sup> · 13             | 352 = 2 <sup>5</sup> · 11             | 353 = 353                 | 354 = 2 · 3 · 59                          |
| 355 = 5 · 71              | 356 = 2 <sup>2</sup> · 89             | 357 = 3 · 7 · 17                      | 358 = 2 · 179                         | 359 = 359                 | 360 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>2</sup> · 5 |
| 361 = 19 <sup>2</sup>     | 362 = 2 · 181                         | 363 = 3 · 11 <sup>2</sup>             | 364 = 2 <sup>2</sup> · 7 · 13         | 365 = 5 · 73              | 366 = 2 · 3 · 61                          |

|                             |                               |                              |                               |                            |                                      |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| 367 = 367                   | 368 = $2^4 \cdot 23$          | 369 = $3^2 \cdot 41$         | 370 = $2 \cdot 5 \cdot 37$    | 371 = $7 \cdot 53$         | 372 = $2^2 \cdot 3 \cdot 31$         |
| 373 = 373                   | 374 = $2 \cdot 11 \cdot 17$   | 375 = $3 \cdot 5^3$          | 376 = $2^3 \cdot 47$          | 377 = $13 \cdot 29$        | 378 = $2 \cdot 3^3 \cdot 7$          |
| 379 = 379                   | 380 = $2^2 \cdot 5 \cdot 19$  | 381 = $3 \cdot 127$          | 382 = $2 \cdot 191$           | 383 = 383                  | 384 = $2^7 \cdot 3$                  |
| 385 = $5 \cdot 7 \cdot 11$  | 386 = $2 \cdot 193$           | 387 = $3^2 \cdot 43$         | 388 = $2^2 \cdot 97$          | 389 = 389                  | 390 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$   |
| 391 = $17 \cdot 23$         | 392 = $2^3 \cdot 7^2$         | 393 = $3 \cdot 131$          | 394 = $2 \cdot 197$           | 395 = $5 \cdot 79$         | 396 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$       |
| 397 = 397                   | 398 = $2 \cdot 199$           | 399 = $3 \cdot 7 \cdot 19$   | 400 = $2^4 \cdot 5^2$         | 401 = 401                  | 402 = $2 \cdot 3 \cdot 67$           |
| 403 = $13 \cdot 31$         | 404 = $2^2 \cdot 101$         | 405 = $3^4 \cdot 5$          | 406 = $2 \cdot 7 \cdot 29$    | 407 = $11 \cdot 37$        | 408 = $2^3 \cdot 3 \cdot 17$         |
| 409 = 409                   | 410 = $2 \cdot 5 \cdot 41$    | 411 = $3 \cdot 137$          | 412 = $2^2 \cdot 103$         | 413 = $7 \cdot 59$         | 414 = $2 \cdot 3^2 \cdot 23$         |
| 415 = $5 \cdot 83$          | 416 = $2^5 \cdot 13$          | 417 = $3 \cdot 139$          | 418 = $2 \cdot 11 \cdot 19$   | 419 = 419                  | 420 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$  |
| 421 = 421                   | 422 = $2 \cdot 211$           | 423 = $3^2 \cdot 47$         | 424 = $2^3 \cdot 53$          | 425 = $5^2 \cdot 17$       | 426 = $2 \cdot 3 \cdot 71$           |
| 427 = $7 \cdot 61$          | 428 = $2^2 \cdot 107$         | 429 = $3 \cdot 11 \cdot 13$  | 430 = $2 \cdot 5 \cdot 43$    | 431 = 431                  | 432 = $2^4 \cdot 3^3$                |
| 433 = 433                   | 434 = $2 \cdot 7 \cdot 31$    | 435 = $3 \cdot 5 \cdot 29$   | 436 = $2^2 \cdot 109$         | 437 = $19 \cdot 23$        | 438 = $2 \cdot 3 \cdot 73$           |
| 439 = 439                   | 440 = $2^3 \cdot 5 \cdot 11$  | 441 = $3^2 \cdot 7^2$        | 442 = $2 \cdot 13 \cdot 17$   | 443 = 443                  | 444 = $2^2 \cdot 3 \cdot 37$         |
| 445 = $5 \cdot 89$          | 446 = $2 \cdot 223$           | 447 = $3 \cdot 149$          | 448 = $2^6 \cdot 7$           | 449 = 449                  | 450 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$        |
| 451 = $11 \cdot 41$         | 452 = $2^2 \cdot 113$         | 453 = $3 \cdot 151$          | 454 = $2 \cdot 227$           | 455 = $5 \cdot 7 \cdot 13$ | 456 = $2^3 \cdot 3 \cdot 19$         |
| 457 = 457                   | 458 = $2 \cdot 229$           | 459 = $3^3 \cdot 17$         | 460 = $2^2 \cdot 5 \cdot 23$  | 461 = 461                  | 462 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$   |
| 463 = 463                   | 464 = $2^4 \cdot 29$          | 465 = $3 \cdot 5 \cdot 31$   | 466 = $2 \cdot 233$           | 467 = 467                  | 468 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$       |
| 469 = $7 \cdot 67$          | 470 = $2 \cdot 5 \cdot 47$    | 471 = $3 \cdot 157$          | 472 = $2^3 \cdot 59$          | 473 = $11 \cdot 43$        | 474 = $2 \cdot 3 \cdot 79$           |
| 475 = $5^2 \cdot 19$        | 476 = $2^2 \cdot 7 \cdot 17$  | 477 = $3^2 \cdot 53$         | 478 = $2 \cdot 239$           | 479 = 479                  | 480 = $2^5 \cdot 3 \cdot 5$          |
| 481 = $13 \cdot 37$         | 482 = $2 \cdot 241$           | 483 = $3 \cdot 7 \cdot 23$   | 484 = $2^2 \cdot 11^2$        | 485 = $5 \cdot 97$         | 486 = $2 \cdot 3^5$                  |
| 487 = 487                   | 488 = $2^3 \cdot 61$          | 489 = $3 \cdot 163$          | 490 = $2 \cdot 5 \cdot 7^2$   | 491 = 491                  | 492 = $2^2 \cdot 3 \cdot 41$         |
| 493 = $17 \cdot 29$         | 494 = $2 \cdot 13 \cdot 19$   | 495 = $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ | 496 = $2^4 \cdot 31$          | 497 = $7 \cdot 71$         | 498 = $2 \cdot 3 \cdot 83$           |
| 499 = 499                   | 500 = $2^2 \cdot 5^3$         | 501 = $3 \cdot 167$          | 502 = $2 \cdot 251$           | 503 = 503                  | 504 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$        |
| 505 = $5 \cdot 101$         | 506 = $2 \cdot 11 \cdot 23$   | 507 = $3 \cdot 13^2$         | 508 = $2^2 \cdot 127$         | 509 = 509                  | 510 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$   |
| 511 = $7 \cdot 73$          | 512 = $2^9$                   | 513 = $3^3 \cdot 19$         | 514 = $2 \cdot 257$           | 515 = $5 \cdot 103$        | 516 = $2^2 \cdot 3 \cdot 43$         |
| 517 = $11 \cdot 47$         | 518 = $2 \cdot 7 \cdot 37$    | 519 = $3 \cdot 173$          | 520 = $2^3 \cdot 5 \cdot 13$  | 521 = 521                  | 522 = $2 \cdot 3^2 \cdot 29$         |
| 523 = 523                   | 524 = $2^2 \cdot 131$         | 525 = $3 \cdot 5^2 \cdot 7$  | 526 = $2 \cdot 263$           | 527 = $17 \cdot 31$        | 528 = $2^4 \cdot 3 \cdot 11$         |
| 529 = $23^2$                | 530 = $2 \cdot 5 \cdot 53$    | 531 = $3^2 \cdot 59$         | 532 = $2^2 \cdot 7 \cdot 19$  | 533 = $13 \cdot 41$        | 534 = $2 \cdot 3 \cdot 89$           |
| 535 = $5 \cdot 107$         | 536 = $2^3 \cdot 67$          | 537 = $3 \cdot 179$          | 538 = $2 \cdot 269$           | 539 = $7^2 \cdot 11$       | 540 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$        |
| 541 = 541                   | 542 = $2 \cdot 271$           | 543 = $3 \cdot 181$          | 544 = $2^5 \cdot 17$          | 545 = $5 \cdot 109$        | 546 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$   |
| 547 = 547                   | 548 = $2^2 \cdot 137$         | 549 = $3^2 \cdot 61$         | 550 = $2 \cdot 5^2 \cdot 11$  | 551 = $19 \cdot 29$        | 552 = $2^3 \cdot 3 \cdot 23$         |
| 553 = $7 \cdot 79$          | 554 = $2 \cdot 277$           | 555 = $3 \cdot 5 \cdot 37$   | 556 = $2^2 \cdot 139$         | 557 = 557                  | 558 = $2 \cdot 3^2 \cdot 31$         |
| 559 = $13 \cdot 43$         | 560 = $2^4 \cdot 5 \cdot 7$   | 561 = $3 \cdot 11 \cdot 17$  | 562 = $2 \cdot 281$           | 563 = 563                  | 564 = $2^2 \cdot 3 \cdot 47$         |
| 565 = $5 \cdot 113$         | 566 = $2 \cdot 283$           | 567 = $3^4 \cdot 7$          | 568 = $2^3 \cdot 71$          | 569 = 569                  | 570 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$   |
| 571 = 571                   | 572 = $2^2 \cdot 11 \cdot 13$ | 573 = $3 \cdot 191$          | 574 = $2 \cdot 7 \cdot 41$    | 575 = $5^2 \cdot 23$       | 576 = $2^6 \cdot 3^2$                |
| 577 = 577                   | 578 = $2 \cdot 17^2$          | 579 = $3 \cdot 193$          | 580 = $2^2 \cdot 5 \cdot 29$  | 581 = $7 \cdot 83$         | 582 = $2 \cdot 3 \cdot 97$           |
| 583 = $11 \cdot 53$         | 584 = $2^3 \cdot 73$          | 585 = $3^2 \cdot 5 \cdot 13$ | 586 = $2 \cdot 293$           | 587 = 587                  | 588 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$        |
| 589 = $19 \cdot 31$         | 590 = $2 \cdot 5 \cdot 59$    | 591 = $3 \cdot 197$          | 592 = $2^4 \cdot 37$          | 593 = 593                  | 594 = $2 \cdot 3^3 \cdot 11$         |
| 595 = $5 \cdot 7 \cdot 17$  | 596 = $2^2 \cdot 149$         | 597 = $3 \cdot 199$          | 598 = $2 \cdot 13 \cdot 23$   | 599 = 599                  | 600 = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$        |
| 601 = 601                   | 602 = $2 \cdot 7 \cdot 43$    | 603 = $3^2 \cdot 67$         | 604 = $2^2 \cdot 151$         | 605 = $5 \cdot 11^2$       | 606 = $2 \cdot 3 \cdot 101$          |
| 607 = 607                   | 608 = $2^5 \cdot 19$          | 609 = $3 \cdot 7 \cdot 29$   | 610 = $2 \cdot 5 \cdot 61$    | 611 = $13 \cdot 47$        | 612 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$       |
| 613 = 613                   | 614 = $2 \cdot 307$           | 615 = $3 \cdot 5 \cdot 41$   | 616 = $2^3 \cdot 7 \cdot 11$  | 617 = 617                  | 618 = $2 \cdot 3 \cdot 103$          |
| 619 = 619                   | 620 = $2^2 \cdot 5 \cdot 31$  | 621 = $3^3 \cdot 23$         | 622 = $2 \cdot 311$           | 623 = $7 \cdot 89$         | 624 = $2^4 \cdot 3 \cdot 13$         |
| 625 = $5^4$                 | 626 = $2 \cdot 313$           | 627 = $3 \cdot 11 \cdot 19$  | 628 = $2^2 \cdot 157$         | 629 = $17 \cdot 37$        | 630 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  |
| 631 = 631                   | 632 = $2^3 \cdot 79$          | 633 = $3 \cdot 211$          | 634 = $2 \cdot 317$           | 635 = $5 \cdot 127$        | 636 = $2^2 \cdot 3 \cdot 53$         |
| 637 = $7^2 \cdot 13$        | 638 = $2 \cdot 11 \cdot 29$   | 639 = $3^2 \cdot 71$         | 640 = $2^7 \cdot 5$           | 641 = 641                  | 642 = $2 \cdot 3 \cdot 107$          |
| 643 = 643                   | 644 = $2^2 \cdot 7 \cdot 23$  | 645 = $3 \cdot 5 \cdot 43$   | 646 = $2 \cdot 17 \cdot 19$   | 647 = 647                  | 648 = $2^3 \cdot 3^4$                |
| 649 = $11 \cdot 59$         | 650 = $2 \cdot 5^2 \cdot 13$  | 651 = $3 \cdot 7 \cdot 31$   | 652 = $2^2 \cdot 163$         | 653 = 653                  | 654 = $2 \cdot 3 \cdot 109$          |
| 655 = $5 \cdot 131$         | 656 = $2^4 \cdot 41$          | 657 = $3^2 \cdot 73$         | 658 = $2 \cdot 7 \cdot 47$    | 659 = 659                  | 660 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ |
| 661 = 661                   | 662 = $2 \cdot 331$           | 663 = $3 \cdot 13 \cdot 17$  | 664 = $2^3 \cdot 83$          | 665 = $5 \cdot 7 \cdot 19$ | 666 = $2 \cdot 3^2 \cdot 37$         |
| 667 = $23 \cdot 29$         | 668 = $2^2 \cdot 167$         | 669 = $3 \cdot 223$          | 670 = $2 \cdot 5 \cdot 67$    | 671 = $11 \cdot 61$        | 672 = $2^5 \cdot 3 \cdot 7$          |
| 673 = 673                   | 674 = $2 \cdot 337$           | 675 = $3^3 \cdot 5^2$        | 676 = $2^2 \cdot 13^2$        | 677 = 677                  | 678 = $2 \cdot 3 \cdot 113$          |
| 679 = $7 \cdot 97$          | 680 = $2^3 \cdot 5 \cdot 17$  | 681 = $3 \cdot 227$          | 682 = $2 \cdot 11 \cdot 31$   | 683 = 683                  | 684 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$       |
| 685 = $5 \cdot 137$         | 686 = $2 \cdot 7^3$           | 687 = $3 \cdot 229$          | 688 = $2^4 \cdot 43$          | 689 = $13 \cdot 53$        | 690 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$   |
| 691 = 691                   | 692 = $2^2 \cdot 173$         | 693 = $3^2 \cdot 7 \cdot 11$ | 694 = $2 \cdot 347$           | 695 = $5 \cdot 139$        | 696 = $2^3 \cdot 3 \cdot 29$         |
| 697 = $17 \cdot 41$         | 698 = $2 \cdot 349$           | 699 = $3 \cdot 233$          | 700 = $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ | 701 = 701                  | 702 = $2 \cdot 3^3 \cdot 13$         |
| 703 = $19 \cdot 37$         | 704 = $2^6 \cdot 11$          | 705 = $3 \cdot 5 \cdot 47$   | 706 = $2 \cdot 353$           | 707 = $7 \cdot 101$        | 708 = $2^2 \cdot 3 \cdot 59$         |
| 709 = 709                   | 710 = $2 \cdot 5 \cdot 71$    | 711 = $3^2 \cdot 79$         | 712 = $2^3 \cdot 89$          | 713 = $23 \cdot 31$        | 714 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$   |
| 715 = $5 \cdot 11 \cdot 13$ | 716 = $2^2 \cdot 179$         | 717 = $3 \cdot 239$          | 718 = $2 \cdot 359$           | 719 = 719                  | 720 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$        |
| 721 = $7 \cdot 103$         | 722 = $2 \cdot 19^2$          | 723 = $3 \cdot 241$          | 724 = $2^2 \cdot 181$         | 725 = $5^2 \cdot 29$       | 726 = $2 \cdot 3 \cdot 11^2$         |
| 727 = 727                   | 728 = $2^3 \cdot 7 \cdot 13$  | 729 = $3^6$                  | 730 = $2 \cdot 5 \cdot 73$    | 731 = $17 \cdot 43$        | 732 = $2^2 \cdot 3 \cdot 61$         |

|                              |                                    |                               |                                    |                              |                                       |
|------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 733 = 733                    | 734 = $2 \cdot 367$                | 735 = $3 \cdot 5 \cdot 7^2$   | 736 = $2^5 \cdot 23$               | 737 = $11 \cdot 67$          | 738 = $2 \cdot 3^2 \cdot 41$          |
| 739 = 739                    | 740 = $2^2 \cdot 5 \cdot 37$       | 741 = $3 \cdot 13 \cdot 19$   | 742 = $2 \cdot 7 \cdot 53$         | 743 = 743                    | 744 = $2^3 \cdot 3 \cdot 31$          |
| 745 = $5 \cdot 149$          | 746 = $2 \cdot 373$                | 747 = $3^2 \cdot 83$          | 748 = $2^2 \cdot 11 \cdot 17$      | 749 = $7 \cdot 107$          | 750 = $2 \cdot 3 \cdot 5^3$           |
| 751 = 751                    | 752 = $2^4 \cdot 47$               | 753 = $3 \cdot 251$           | 754 = $2 \cdot 13 \cdot 29$        | 755 = $5 \cdot 151$          | 756 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$         |
| 757 = 757                    | 758 = $2 \cdot 379$                | 759 = $3 \cdot 11 \cdot 23$   | 760 = $2^3 \cdot 5 \cdot 19$       | 761 = 761                    | 762 = $2 \cdot 3 \cdot 127$           |
| 763 = $7 \cdot 109$          | 764 = $2^2 \cdot 191$              | 765 = $3^2 \cdot 5 \cdot 17$  | 766 = $2 \cdot 383$                | 767 = $13 \cdot 59$          | 768 = $2^8 \cdot 3$                   |
| 769 = 769                    | 770 = $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ | 771 = $3 \cdot 257$           | 772 = $2^2 \cdot 193$              | 773 = 773                    | 774 = $2 \cdot 3^2 \cdot 43$          |
| 775 = $5^2 \cdot 31$         | 776 = $2^3 \cdot 97$               | 777 = $3 \cdot 7 \cdot 37$    | 778 = $2 \cdot 389$                | 779 = $19 \cdot 41$          | 780 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$  |
| 781 = $11 \cdot 71$          | 782 = $2 \cdot 17 \cdot 23$        | 783 = $3^3 \cdot 29$          | 784 = $2^4 \cdot 7^2$              | 785 = $5 \cdot 157$          | 786 = $2 \cdot 3 \cdot 131$           |
| 787 = 787                    | 788 = $2^2 \cdot 197$              | 789 = $3 \cdot 263$           | 790 = $2 \cdot 5 \cdot 79$         | 791 = $7 \cdot 113$          | 792 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$        |
| 793 = $13 \cdot 61$          | 794 = $2 \cdot 397$                | 795 = $3 \cdot 5 \cdot 53$    | 796 = $2^2 \cdot 199$              | 797 = 797                    | 798 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$    |
| 799 = $17 \cdot 47$          | 800 = $2^5 \cdot 5^2$              | 801 = $3^2 \cdot 89$          | 802 = $2 \cdot 401$                | 803 = $11 \cdot 73$          | 804 = $2^2 \cdot 3 \cdot 67$          |
| 805 = $5 \cdot 7 \cdot 23$   | 806 = $2 \cdot 13 \cdot 31$        | 807 = $3 \cdot 269$           | 808 = $2^3 \cdot 101$              | 809 = 809                    | 810 = $2 \cdot 3^4 \cdot 5$           |
| 811 = 811                    | 812 = $2^2 \cdot 7 \cdot 29$       | 813 = $3 \cdot 271$           | 814 = $2 \cdot 11 \cdot 37$        | 815 = $5 \cdot 163$          | 816 = $2^4 \cdot 3 \cdot 17$          |
| 817 = $19 \cdot 43$          | 818 = $2 \cdot 409$                | 819 = $3^2 \cdot 7 \cdot 13$  | 820 = $2^2 \cdot 5 \cdot 41$       | 821 = 821                    | 822 = $2 \cdot 3 \cdot 137$           |
| 823 = 823                    | 824 = $2^3 \cdot 103$              | 825 = $3 \cdot 5^2 \cdot 11$  | 826 = $2 \cdot 7 \cdot 59$         | 827 = 827                    | 828 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$        |
| 829 = 829                    | 830 = $2 \cdot 5 \cdot 83$         | 831 = $3 \cdot 277$           | 832 = $2^6 \cdot 13$               | 833 = $7^2 \cdot 17$         | 834 = $2 \cdot 3 \cdot 139$           |
| 835 = $5 \cdot 167$          | 836 = $2^2 \cdot 11 \cdot 19$      | 837 = $3^3 \cdot 31$          | 838 = $2 \cdot 419$                | 839 = 839                    | 840 = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$   |
| 841 = $29^2$                 | 842 = $2 \cdot 421$                | 843 = $3 \cdot 281$           | 844 = $2^2 \cdot 211$              | 845 = $5 \cdot 13^2$         | 846 = $2 \cdot 3^2 \cdot 47$          |
| 847 = $7 \cdot 11^2$         | 848 = $2^4 \cdot 53$               | 849 = $3 \cdot 283$           | 850 = $2 \cdot 5^2 \cdot 17$       | 851 = $23 \cdot 37$          | 852 = $2^2 \cdot 3 \cdot 71$          |
| 853 = 853                    | 854 = $2 \cdot 7 \cdot 61$         | 855 = $3^2 \cdot 5 \cdot 19$  | 856 = $2^3 \cdot 107$              | 857 = 857                    | 858 = $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$   |
| 859 = 859                    | 860 = $2^2 \cdot 5 \cdot 43$       | 861 = $3 \cdot 7 \cdot 41$    | 862 = $2 \cdot 431$                | 863 = 863                    | 864 = $2^5 \cdot 3^3$                 |
| 865 = $5 \cdot 173$          | 866 = $2 \cdot 433$                | 867 = $3 \cdot 17^2$          | 868 = $2^2 \cdot 7 \cdot 31$       | 869 = $11 \cdot 79$          | 870 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$    |
| 871 = $13 \cdot 67$          | 872 = $2^3 \cdot 109$              | 873 = $3^2 \cdot 97$          | 874 = $2 \cdot 19 \cdot 23$        | 875 = $5^3 \cdot 7$          | 876 = $2^2 \cdot 3 \cdot 73$          |
| 877 = 877                    | 878 = $2 \cdot 439$                | 879 = $3 \cdot 293$           | 880 = $2^4 \cdot 5 \cdot 11$       | 881 = 881                    | 882 = $2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$         |
| 883 = 883                    | 884 = $2^2 \cdot 13 \cdot 17$      | 885 = $3 \cdot 5 \cdot 59$    | 886 = $2 \cdot 443$                | 887 = 887                    | 888 = $2^3 \cdot 3 \cdot 37$          |
| 889 = $7 \cdot 127$          | 890 = $2 \cdot 5 \cdot 89$         | 891 = $3^4 \cdot 11$          | 892 = $2^2 \cdot 223$              | 893 = $19 \cdot 47$          | 894 = $2 \cdot 3 \cdot 149$           |
| 895 = $5 \cdot 179$          | 896 = $2^7 \cdot 7$                | 897 = $3 \cdot 13 \cdot 23$   | 898 = $2 \cdot 449$                | 899 = $29 \cdot 31$          | 900 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$       |
| 901 = $17 \cdot 53$          | 902 = $2 \cdot 11 \cdot 41$        | 903 = $3 \cdot 7 \cdot 43$    | 904 = $2^3 \cdot 113$              | 905 = $5 \cdot 181$          | 906 = $2 \cdot 3 \cdot 151$           |
| 907 = 907                    | 908 = $2^2 \cdot 227$              | 909 = $3^2 \cdot 101$         | 910 = $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ | 911 = 911                    | 912 = $2^4 \cdot 3 \cdot 19$          |
| 913 = $11 \cdot 83$          | 914 = $2 \cdot 457$                | 915 = $3 \cdot 5 \cdot 61$    | 916 = $2^2 \cdot 229$              | 917 = $7 \cdot 131$          | 918 = $2 \cdot 3^3 \cdot 17$          |
| 919 = 919                    | 920 = $2^3 \cdot 5 \cdot 23$       | 921 = $3 \cdot 307$           | 922 = $2 \cdot 461$                | 923 = $13 \cdot 71$          | 924 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$  |
| 925 = $5^2 \cdot 37$         | 926 = $2 \cdot 463$                | 927 = $3^2 \cdot 103$         | 928 = $2^5 \cdot 29$               | 929 = 929                    | 930 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$    |
| 931 = $7^2 \cdot 19$         | 932 = $2^2 \cdot 233$              | 933 = $3 \cdot 311$           | 934 = $2 \cdot 467$                | 935 = $5 \cdot 11 \cdot 17$  | 936 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$        |
| 937 = 937                    | 938 = $2 \cdot 7 \cdot 67$         | 939 = $3 \cdot 313$           | 940 = $2^2 \cdot 5 \cdot 47$       | 941 = 941                    | 942 = $2 \cdot 3 \cdot 157$           |
| 943 = $23 \cdot 41$          | 944 = $2^4 \cdot 59$               | 945 = $3^3 \cdot 5 \cdot 7$   | 946 = $2 \cdot 11 \cdot 43$        | 947 = 947                    | 948 = $2^2 \cdot 3 \cdot 79$          |
| 949 = $13 \cdot 73$          | 950 = $2 \cdot 5^2 \cdot 19$       | 951 = $3 \cdot 317$           | 952 = $2^3 \cdot 7 \cdot 17$       | 953 = 953                    | 954 = $2 \cdot 3^2 \cdot 53$          |
| 955 = $5 \cdot 191$          | 956 = $2^2 \cdot 239$              | 957 = $3 \cdot 11 \cdot 29$   | 958 = $2 \cdot 479$                | 959 = $7 \cdot 137$          | 960 = $2^6 \cdot 3 \cdot 5$           |
| 961 = $31^2$                 | 962 = $2 \cdot 13 \cdot 37$        | 963 = $3^2 \cdot 107$         | 964 = $2^2 \cdot 241$              | 965 = $5 \cdot 193$          | 966 = $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$    |
| 967 = 967                    | 968 = $2^3 \cdot 11^2$             | 969 = $3 \cdot 17 \cdot 19$   | 970 = $2 \cdot 5 \cdot 97$         | 971 = 971                    | 972 = $2^2 \cdot 3^5$                 |
| 973 = $7 \cdot 139$          | 974 = $2 \cdot 487$                | 975 = $3 \cdot 5^2 \cdot 13$  | 976 = $2^4 \cdot 61$               | 977 = 977                    | 978 = $2 \cdot 3 \cdot 163$           |
| 979 = $11 \cdot 89$          | 980 = $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$      | 981 = $3^2 \cdot 109$         | 982 = $2 \cdot 491$                | 983 = 983                    | 984 = $2^3 \cdot 3 \cdot 41$          |
| 985 = $5 \cdot 197$          | 986 = $2 \cdot 17 \cdot 29$        | 987 = $3 \cdot 7 \cdot 47$    | 988 = $2^2 \cdot 13 \cdot 19$      | 989 = $23 \cdot 43$          | 990 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$  |
| 991 = 991                    | 992 = $2^5 \cdot 31$               | 993 = $3 \cdot 331$           | 994 = $2 \cdot 7 \cdot 71$         | 995 = $5 \cdot 199$          | 996 = $2^2 \cdot 3 \cdot 83$          |
| 997 = 997                    | 998 = $2 \cdot 499$                | 999 = $3^3 \cdot 37$          | 1000 = $2^3 \cdot 5^3$             | 1001 = $7 \cdot 11 \cdot 13$ | 1002 = $2 \cdot 3 \cdot 167$          |
| 1003 = $17 \cdot 59$         | 1004 = $2^2 \cdot 251$             | 1005 = $3 \cdot 5 \cdot 67$   | 1006 = $2 \cdot 503$               | 1007 = $19 \cdot 53$         | 1008 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$        |
| 1009 = 1009                  | 1010 = $2 \cdot 5 \cdot 101$       | 1011 = $3 \cdot 337$          | 1012 = $2^2 \cdot 11 \cdot 23$     | 1013 = 1013                  | 1014 = $2 \cdot 3 \cdot 13^2$         |
| 1015 = $5 \cdot 7 \cdot 29$  | 1016 = $2^3 \cdot 127$             | 1017 = $3^2 \cdot 113$        | 1018 = $2 \cdot 509$               | 1019 = 1019                  | 1020 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ |
| 1021 = 1021                  | 1022 = $2 \cdot 7 \cdot 73$        | 1023 = $3 \cdot 11 \cdot 31$  | 1024 = $2^{10}$                    | 1025 = $5^2 \cdot 41$        | 1026 = $2 \cdot 3^3 \cdot 19$         |
| 1027 = $13 \cdot 79$         | 1028 = $2^2 \cdot 257$             | 1029 = $3 \cdot 7^3$          | 1030 = $2 \cdot 5 \cdot 103$       | 1031 = 1031                  | 1032 = $2^3 \cdot 3 \cdot 43$         |
| 1033 = 1033                  | 1034 = $2 \cdot 11 \cdot 47$       | 1035 = $3^2 \cdot 5 \cdot 23$ | 1036 = $2^2 \cdot 7 \cdot 37$      | 1037 = $17 \cdot 61$         | 1038 = $2 \cdot 3 \cdot 173$          |
| 1039 = 1039                  | 1040 = $2^4 \cdot 5 \cdot 13$      | 1041 = $3 \cdot 347$          | 1042 = $2 \cdot 521$               | 1043 = $7 \cdot 149$         | 1044 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 29$       |
| 1045 = $5 \cdot 11 \cdot 19$ | 1046 = $2 \cdot 523$               | 1047 = $3 \cdot 349$          | 1048 = $2^3 \cdot 131$             | 1049 = 1049                  | 1050 = $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$  |
| 1051 = 1051                  | 1052 = $2^2 \cdot 263$             | 1053 = $3^4 \cdot 13$         | 1054 = $2 \cdot 17 \cdot 31$       | 1055 = $5 \cdot 211$         | 1056 = $2^5 \cdot 3 \cdot 11$         |
| 1057 = $7 \cdot 151$         | 1058 = $2 \cdot 23^2$              | 1059 = $3 \cdot 353$          | 1060 = $2^2 \cdot 5 \cdot 53$      | 1061 = 1061                  | 1062 = $2 \cdot 3^2 \cdot 59$         |
| 1063 = 1063                  | 1064 = $2^3 \cdot 7 \cdot 19$      | 1065 = $3 \cdot 5 \cdot 71$   | 1066 = $2 \cdot 13 \cdot 41$       | 1067 = $11 \cdot 97$         | 1068 = $2^2 \cdot 3 \cdot 89$         |
| 1069 = 1069                  | 1070 = $2 \cdot 5 \cdot 107$       | 1071 = $3^2 \cdot 7 \cdot 17$ | 1072 = $2^4 \cdot 67$              | 1073 = $29 \cdot 37$         | 1074 = $2 \cdot 3 \cdot 179$          |
| 1075 = $5^2 \cdot 43$        | 1076 = $2^2 \cdot 269$             | 1077 = $3 \cdot 359$          | 1078 = $2 \cdot 7^2 \cdot 11$      | 1079 = $13 \cdot 83$         | 1080 = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$        |
| 1081 = $23 \cdot 47$         | 1082 = $2 \cdot 541$               | 1083 = $3 \cdot 19^2$         | 1084 = $2^2 \cdot 271$             | 1085 = $5 \cdot 7 \cdot 31$  | 1086 = $2 \cdot 3 \cdot 181$          |
| 1087 = 1087                  | 1088 = $2^6 \cdot 17$              | 1089 = $3^2 \cdot 11^2$       | 1090 = $2 \cdot 5 \cdot 109$       | 1091 = 1091                  | 1092 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ |
| 1093 = 1093                  | 1094 = $2 \cdot 547$               | 1095 = $3 \cdot 5 \cdot 73$   | 1096 = $2^3 \cdot 137$             | 1097 = 1097                  | 1098 = $2 \cdot 3^2 \cdot 61$         |

|  |   |  |   |                            |  |
|--|---|--|---|----------------------------|--|
| 1099 = 7 · 157                         | 1100 = 2 <sup>2</sup> · 5 <sup>2</sup> · 11 | 1101 = 3 · 367                         | 1102 = 2 · 19 · 29                          | 1103 = 1103                | 1104 = 2 <sup>4</sup> · 3 · 23                 |
| 1105 = 5 · 13 · 17                     | 1106 = 2 · 7 · 79                           | 1107 = 3 <sup>3</sup> · 41             | 1108 = 2 <sup>2</sup> · 277                 | 1109 = 1109                | 1110 = 2 · 3 · 5 · 37                          |
| 1111 = 11 · 101                        | 1112 = 2 <sup>3</sup> · 139                 | 1113 = 3 · 7 · 53                      | 1114 = 2 · 557                              | 1115 = 5 · 223             | 1116 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>2</sup> · 31    |
| 1117 = 1117                            | 1118 = 2 · 13 · 43                          | 1119 = 3 · 373                         | 1120 = 2 <sup>5</sup> · 5 · 7               | 1121 = 19 · 59             | 1122 = 2 · 3 · 11 · 17                         |
| 1123 = 1123                            | 1124 = 2 <sup>2</sup> · 281                 | 1125 = 3 <sup>2</sup> · 5 <sup>3</sup> | 1126 = 2 · 563                              | 1127 = 7 <sup>2</sup> · 23 | 1128 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 47                 |
| 1129 = 1129                            | 1130 = 2 · 5 · 113                          | 1131 = 3 · 13 · 29                     | 1132 = 2 <sup>2</sup> · 283                 | 1133 = 11 · 103            | 1134 = 2 · 3 <sup>4</sup> · 7                  |
| 1135 = 5 · 227                         | 1136 = 2 <sup>4</sup> · 71                  | 1137 = 3 · 379                         | 1138 = 2 · 569                              | 1139 = 17 · 67             | 1140 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 5 · 19             |
| 1141 = 7 · 163                         | 1142 = 2 · 571                              | 1143 = 3 <sup>2</sup> · 127            | 1144 = 2 <sup>3</sup> · 11 · 13             | 1145 = 5 · 229             | 1146 = 2 · 3 · 191                             |
| 1147 = 31 · 37                         | 1148 = 2 <sup>2</sup> · 7 · 41              | 1149 = 3 · 383                         | 1150 = 2 · 5 <sup>2</sup> · 23              | 1151 = 1151                | 1152 = 2 <sup>7</sup> · 3 <sup>2</sup>         |
| 1153 = 1153                            | 1154 = 2 · 577                              | 1155 = 3 · 5 · 7 · 11                  | 1156 = 2 <sup>2</sup> · 17 <sup>2</sup>     | 1157 = 13 · 89             | 1158 = 2 · 3 · 193                             |
| 1159 = 19 · 61                         | 1160 = 2 <sup>3</sup> · 5 · 29              | 1161 = 3 <sup>3</sup> · 43             | 1162 = 2 · 7 · 83                           | 1163 = 1163                | 1164 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 97                 |
| 1165 = 5 · 233                         | 1166 = 2 · 11 · 53                          | 1167 = 3 · 389                         | 1168 = 2 <sup>4</sup> · 73                  | 1169 = 7 · 167             | 1170 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 5 · 13             |
| 1171 = 1171                            | 1172 = 2 <sup>2</sup> · 293                 | 1173 = 3 · 17 · 23                     | 1174 = 2 · 587                              | 1175 = 5 <sup>2</sup> · 47 | 1176 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 7 <sup>2</sup>     |
| 1177 = 11 · 107                        | 1178 = 2 · 19 · 31                          | 1179 = 3 <sup>2</sup> · 131            | 1180 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 59              | 1181 = 1181                | 1182 = 2 · 3 · 197                             |
| 1183 = 7 · 13 <sup>2</sup>             | 1184 = 2 <sup>5</sup> · 37                  | 1185 = 3 · 5 · 79                      | 1186 = 2 · 593                              | 1187 = 1187                | 1188 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>3</sup> · 11    |
| 1189 = 29 · 41                         | 1190 = 2 · 5 · 7 · 17                       | 1191 = 3 · 397                         | 1192 = 2 <sup>3</sup> · 149                 | 1193 = 1193                | 1194 = 2 · 3 · 199                             |
| 1195 = 5 · 239                         | 1196 = 2 <sup>2</sup> · 13 · 23             | 1197 = 3 <sup>2</sup> · 7 · 19         | 1198 = 2 · 599                              | 1199 = 11 · 109            | 1200 = 2 <sup>4</sup> · 3 · 5 <sup>2</sup>     |
| 1201 = 1201                            | 1202 = 2 · 601                              | 1203 = 3 · 401                         | 1204 = 2 <sup>2</sup> · 7 · 43              | 1205 = 5 · 241             | 1206 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 67                 |
| 1207 = 17 · 71                         | 1208 = 2 <sup>3</sup> · 151                 | 1209 = 3 · 13 · 31                     | 1210 = 2 · 5 · 11 <sup>2</sup>              | 1211 = 7 · 173             | 1212 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 101                |
| 1213 = 1213                            | 1214 = 2 · 607                              | 1215 = 3 <sup>5</sup> · 5              | 1216 = 2 <sup>6</sup> · 19                  | 1217 = 1217                | 1218 = 2 · 3 · 7 · 29                          |
| 1219 = 23 · 53                         | 1220 = 2 <sup>2</sup> · 5 · 61              | 1221 = 3 · 11 · 37                     | 1222 = 2 · 13 · 47                          | 1223 = 1223                | 1224 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>2</sup> · 17    |
| 1225 = 5 <sup>2</sup> · 7 <sup>2</sup> | 1226 = 2 · 613                              | 1227 = 3 · 409                         | 1228 = 2 <sup>2</sup> · 307                 | 1229 = 1229                | 1230 = 2 · 3 · 5 · 41                          |
| 1231 = 1231                            | 1232 = 2 <sup>4</sup> · 7 · 11              | 1233 = 3 <sup>2</sup> · 137            | 1234 = 2 · 617                              | 1235 = 5 · 13 · 19         | 1236 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 103                |
| 1237 = 1237                            | 1238 = 2 · 619                              | 1239 = 3 · 7 · 59                      | 1240 = 2 <sup>3</sup> · 5 · 31              | 1241 = 17 · 73             | 1242 = 2 · 3 <sup>3</sup> · 23                 |
| 1243 = 11 · 113                        | 1244 = 2 <sup>2</sup> · 311                 | 1245 = 3 · 5 · 83                      | 1246 = 2 · 7 · 89                           | 1247 = 29 · 43             | 1248 = 2 <sup>5</sup> · 3 · 13                 |
| 1249 = 1249                            | 1250 = 2 · 5 <sup>4</sup>                   | 1251 = 3 <sup>2</sup> · 139            | 1252 = 2 <sup>2</sup> · 313                 | 1253 = 7 · 179             | 1254 = 2 · 3 · 11 · 19                         |
| 1255 = 5 · 251                         | 1256 = 2 <sup>3</sup> · 157                 | 1257 = 3 · 419                         | 1258 = 2 · 17 · 37                          | 1259 = 1259                | 1260 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>2</sup> · 5 · 7 |
| 1261 = 13 · 97                         | 1262 = 2 · 631                              | 1263 = 3 · 421                         | 1264 = 2 <sup>4</sup> · 79                  | 1265 = 5 · 11 · 23         | 1266 = 2 · 3 · 211                             |
| 1267 = 7 · 181                         | 1268 = 2 <sup>2</sup> · 317                 | 1269 = 3 <sup>3</sup> · 47             | 1270 = 2 · 5 · 127                          | 1271 = 31 · 41             | 1272 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 53                 |
| 1273 = 19 · 67                         | 1274 = 2 · 7 <sup>2</sup> · 13              | 1275 = 3 · 5 <sup>2</sup> · 17         | 1276 = 2 <sup>2</sup> · 11 · 29             | 1277 = 1277                | 1278 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 71                 |
| 1279 = 1279                            | 1280 = 2 <sup>8</sup> · 5                   | 1281 = 3 · 7 · 61                      | 1282 = 2 · 641                              | 1283 = 1283                | 1284 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 107                |
| 1285 = 5 · 257                         | 1286 = 2 · 643                              | 1287 = 3 <sup>2</sup> · 11 · 13        | 1288 = 2 <sup>3</sup> · 7 · 23              | 1289 = 1289                | 1290 = 2 · 3 · 5 · 43                          |
| 1291 = 1291                            | 1292 = 2 <sup>2</sup> · 17 · 19             | 1293 = 3 · 431                         | 1294 = 2 · 647                              | 1295 = 5 · 7 · 37          | 1296 = 2 <sup>4</sup> · 3 <sup>4</sup>         |
| 1297 = 1297                            | 1298 = 2 · 11 · 59                          | 1299 = 3 · 433                         | 1300 = 2 <sup>2</sup> · 5 <sup>2</sup> · 13 | 1301 = 1301                | 1302 = 2 · 3 · 7 · 31                          |
| 1303 = 1303                            | 1304 = 2 <sup>3</sup> · 163                 | 1305 = 3 <sup>2</sup> · 5 · 29         | 1306 = 2 · 653                              | 1307 = 1307                | 1308 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 109                |
| 1309 = 7 · 11 · 17                     | 1310 = 2 · 5 · 131                          | 1311 = 3 · 19 · 23                     | 1312 = 2 <sup>5</sup> · 41                  | 1313 = 13 · 101            | 1314 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 73                 |

## 10.4 Таблица простых чисел

Таблица простых чисел от 2-10314

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2    | 3    | 5    | 7    | 11   | 13   | 17   | 19   | 23   | 29   | 31   | 37   | 41   |
| 43   | 47   | 53   | 59   | 61   | 67   | 71   | 73   | 79   | 83   | 89   | 97   | 101  |
| 103  | 107  | 109  | 113  | 127  | 131  | 137  | 139  | 149  | 151  | 157  | 163  | 167  |
| 173  | 179  | 181  | 191  | 193  | 197  | 199  | 211  | 223  | 227  | 229  | 233  | 239  |
| 241  | 251  | 257  | 263  | 269  | 271  | 277  | 281  | 283  | 293  | 307  | 311  | 313  |
| 317  | 331  | 337  | 347  | 349  | 353  | 359  | 367  | 373  | 379  | 383  | 389  | 397  |
| 401  | 409  | 419  | 421  | 431  | 433  | 439  | 443  | 449  | 457  | 461  | 463  | 467  |
| 479  | 487  | 491  | 499  | 503  | 509  | 521  | 523  | 541  | 547  | 557  | 563  | 569  |
| 571  | 577  | 587  | 593  | 599  | 601  | 607  | 613  | 617  | 619  | 631  | 641  | 643  |
| 647  | 653  | 659  | 661  | 673  | 677  | 683  | 691  | 701  | 709  | 719  | 727  | 733  |
| 739  | 743  | 751  | 757  | 761  | 769  | 773  | 787  | 797  | 809  | 811  | 821  | 823  |
| 827  | 829  | 839  | 853  | 857  | 859  | 863  | 877  | 881  | 883  | 887  | 907  | 911  |
| 919  | 929  | 937  | 941  | 947  | 953  | 967  | 971  | 977  | 983  | 991  | 997  | 1009 |
| 1013 | 1019 | 1021 | 1031 | 1033 | 1039 | 1049 | 1051 | 1061 | 1063 | 1069 | 1087 | 1091 |
| 1093 | 1097 | 1103 | 1109 | 1117 | 1123 | 1129 | 1151 | 1153 | 1163 | 1171 | 1181 | 1187 |
| 1193 | 1201 | 1213 | 1217 | 1223 | 1229 | 1231 | 1237 | 1249 | 1259 | 1277 | 1279 | 1283 |
| 1289 | 1291 | 1297 | 1301 | 1303 | 1307 | 1319 | 1321 | 1327 | 1361 | 1367 | 1373 | 1381 |
| 1399 | 1409 | 1423 | 1427 | 1429 | 1433 | 1439 | 1447 | 1451 | 1453 | 1459 | 1471 | 1481 |
| 1483 | 1487 | 1489 | 1493 | 1499 | 1511 | 1523 | 1531 | 1543 | 1549 | 1553 | 1559 | 1567 |
| 1571 | 1579 | 1583 | 1597 | 1601 | 1607 | 1609 | 1613 | 1619 | 1621 | 1627 | 1637 | 1657 |
| 1663 | 1667 | 1669 | 1693 | 1697 | 1699 | 1709 | 1721 | 1723 | 1733 | 1741 | 1747 | 1753 |



|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1759 | 1777 | 1783 | 1787 | 1789 | 1801 | 1811 | 1823 | 1831 | 1847 | 1861 | 1867 | 1871 |
| 1873 | 1877 | 1879 | 1889 | 1901 | 1907 | 1913 | 1931 | 1933 | 1949 | 1951 | 1973 | 1979 |
| 1987 | 1993 | 1997 | 1999 | 2003 | 2011 | 2017 | 2027 | 2029 | 2039 | 2053 | 2063 | 2069 |
| 2081 | 2083 | 2087 | 2089 | 2099 | 2111 | 2113 | 2129 | 2131 | 2137 | 2141 | 2143 | 2153 |
| 2161 | 2179 | 2203 | 2207 | 2213 | 2221 | 2237 | 2239 | 2243 | 2251 | 2267 | 2269 | 2273 |
| 2281 | 2287 | 2293 | 2297 | 2309 | 2311 | 2333 | 2339 | 2341 | 2347 | 2351 | 2357 | 2371 |
| 2377 | 2381 | 2383 | 2389 | 2393 | 2399 | 2411 | 2417 | 2423 | 2437 | 2441 | 2447 | 2459 |
| 2467 | 2473 | 2477 | 2503 | 2521 | 2531 | 2539 | 2543 | 2549 | 2551 | 2557 | 2579 | 2591 |
| 2593 | 2609 | 2617 | 2621 | 2633 | 2647 | 2657 | 2659 | 2663 | 2671 | 2677 | 2683 | 2687 |
| 2689 | 2693 | 2699 | 2707 | 2711 | 2713 | 2719 | 2729 | 2731 | 2741 | 2749 | 2753 | 2767 |
| 2777 | 2789 | 2791 | 2797 | 2801 | 2803 | 2819 | 2833 | 2837 | 2843 | 2851 | 2857 | 2861 |
| 2879 | 2887 | 2897 | 2903 | 2909 | 2917 | 2927 | 2939 | 2953 | 2957 | 2963 | 2969 | 2971 |
| 2999 | 3001 | 3011 | 3019 | 3023 | 3037 | 3041 | 3049 | 3061 | 3067 | 3079 | 3083 | 3089 |
| 3109 | 3119 | 3121 | 3137 | 3163 | 3167 | 3169 | 3181 | 3187 | 3191 | 3203 | 3209 | 3217 |
| 3221 | 3229 | 3251 | 3253 | 3257 | 3259 | 3271 | 3299 | 3301 | 3307 | 3313 | 3319 | 3323 |
| 3329 | 3331 | 3343 | 3347 | 3359 | 3361 | 3371 | 3373 | 3389 | 3391 | 3407 | 3413 | 3433 |
| 3449 | 3457 | 3461 | 3463 | 3467 | 3469 | 3491 | 3499 | 3511 | 3517 | 3527 | 3529 | 3533 |
| 3539 | 3541 | 3547 | 3557 | 3559 | 3571 | 3581 | 3583 | 3593 | 3607 | 3613 | 3617 | 3623 |
| 3631 | 3637 | 3643 | 3659 | 3671 | 3673 | 3677 | 3691 | 3697 | 3701 | 3709 | 3719 | 3727 |
| 3733 | 3739 | 3761 | 3767 | 3769 | 3779 | 3793 | 3797 | 3803 | 3821 | 3823 | 3833 | 3847 |
| 3851 | 3853 | 3863 | 3877 | 3881 | 3889 | 3907 | 3911 | 3917 | 3919 | 3923 | 3929 | 3931 |
| 3943 | 3947 | 3967 | 3989 | 4001 | 4003 | 4007 | 4013 | 4019 | 4021 | 4027 | 4049 | 4051 |
| 4057 | 4073 | 4079 | 4091 | 4093 | 4099 | 4111 | 4127 | 4129 | 4133 | 4139 | 4153 | 4157 |
| 4159 | 4177 | 4201 | 4211 | 4217 | 4219 | 4229 | 4231 | 4241 | 4243 | 4253 | 4259 | 4261 |
| 4271 | 4273 | 4283 | 4289 | 4297 | 4327 | 4337 | 4339 | 4349 | 4357 | 4363 | 4373 | 4391 |
| 4397 | 4409 | 4421 | 4423 | 4441 | 4447 | 4451 | 4457 | 4463 | 4481 | 4483 | 4493 | 4507 |
| 4513 | 4517 | 4519 | 4523 | 4547 | 4549 | 4561 | 4567 | 4583 | 4591 | 4597 | 4603 | 4621 |
| 4637 | 4639 | 4643 | 4649 | 4651 | 4657 | 4663 | 4673 | 4679 | 4691 | 4703 | 4721 | 4723 |
| 4729 | 4733 | 4751 | 4759 | 4783 | 4787 | 4789 | 4793 | 4799 | 4801 | 4813 | 4817 | 4831 |
| 4861 | 4871 | 4877 | 4889 | 4903 | 4909 | 4919 | 4931 | 4933 | 4937 | 4943 | 4951 | 4957 |
| 4967 | 4969 | 4973 | 4987 | 4993 | 4999 | 5003 | 5009 | 5011 | 5021 | 5023 | 5039 | 5051 |
| 5059 | 5077 | 5081 | 5087 | 5099 | 5101 | 5107 | 5113 | 5119 | 5147 | 5153 | 5167 | 5171 |
| 5179 | 5189 | 5197 | 5209 | 5227 | 5231 | 5233 | 5237 | 5261 | 5273 | 5279 | 5281 | 5297 |
| 5303 | 5309 | 5323 | 5333 | 5347 | 5351 | 5381 | 5387 | 5393 | 5399 | 5407 | 5413 | 5417 |
| 5419 | 5431 | 5437 | 5441 | 5443 | 5449 | 5471 | 5477 | 5479 | 5483 | 5501 | 5503 | 5507 |
| 5519 | 5521 | 5527 | 5531 | 5557 | 5563 | 5569 | 5573 | 5581 | 5591 | 5623 | 5639 | 5641 |
| 5647 | 5651 | 5653 | 5657 | 5659 | 5669 | 5683 | 5689 | 5693 | 5701 | 5711 | 5717 | 5737 |
| 5741 | 5743 | 5749 | 5779 | 5783 | 5791 | 5801 | 5807 | 5813 | 5821 | 5827 | 5839 | 5843 |
| 5849 | 5851 | 5857 | 5861 | 5867 | 5869 | 5879 | 5881 | 5897 | 5903 | 5923 | 5927 | 5939 |
| 5953 | 5981 | 5987 | 6007 | 6011 | 6029 | 6037 | 6043 | 6047 | 6053 | 6067 | 6073 | 6079 |
| 6089 | 6091 | 6101 | 6113 | 6121 | 6131 | 6133 | 6143 | 6151 | 6163 | 6173 | 6197 | 6199 |
| 6203 | 6211 | 6217 | 6221 | 6229 | 6247 | 6257 | 6263 | 6269 | 6271 | 6277 | 6287 | 6299 |
| 6301 | 6311 | 6317 | 6323 | 6329 | 6337 | 6343 | 6353 | 6359 | 6361 | 6367 | 6373 | 6379 |
| 6389 | 6397 | 6421 | 6427 | 6449 | 6451 | 6469 | 6473 | 6481 | 6491 | 6521 | 6529 | 6547 |
| 6551 | 6553 | 6563 | 6569 | 6571 | 6577 | 6581 | 6599 | 6607 | 6619 | 6637 | 6653 | 6659 |
| 6661 | 6673 | 6679 | 6689 | 6691 | 6701 | 6703 | 6709 | 6719 | 6733 | 6737 | 6761 | 6763 |
| 6779 | 6781 | 6791 | 6793 | 6803 | 6823 | 6827 | 6829 | 6833 | 6841 | 6857 | 6863 | 6869 |
| 6871 | 6883 | 6899 | 6907 | 6911 | 6917 | 6947 | 6949 | 6959 | 6961 | 6967 | 6971 | 6977 |
| 6983 | 6991 | 6997 | 7001 | 7013 | 7019 | 7027 | 7039 | 7043 | 7057 | 7069 | 7079 | 7103 |
| 7109 | 7121 | 7127 | 7129 | 7151 | 7159 | 7177 | 7187 | 7193 | 7207 | 7211 | 7213 | 7219 |
| 7229 | 7237 | 7243 | 7247 | 7253 | 7283 | 7297 | 7307 | 7309 | 7321 | 7331 | 7333 | 7349 |
| 7351 | 7369 | 7393 | 7411 | 7417 | 7433 | 7451 | 7457 | 7459 | 7477 | 7481 | 7487 | 7489 |
| 7499 | 7507 | 7517 | 7523 | 7529 | 7537 | 7541 | 7547 | 7549 | 7559 | 7561 | 7573 | 7577 |
| 7583 | 7589 | 7591 | 7603 | 7607 | 7621 | 7639 | 7643 | 7649 | 7669 | 7673 | 7681 | 7687 |
| 7691 | 7699 | 7703 | 7717 | 7723 | 7727 | 7741 | 7753 | 7757 | 7759 | 7789 | 7793 | 7817 |
| 7823 | 7829 | 7841 | 7853 | 7867 | 7873 | 7877 | 7879 | 7883 | 7901 | 7907 | 7919 | 7927 |
| 7933 | 7937 | 7949 | 7951 | 7963 | 7993 | 8009 | 8011 | 8017 | 8039 | 8053 | 8059 | 8069 |
| 8081 | 8087 | 8089 | 8093 | 8101 | 8111 | 8117 | 8123 | 8147 | 8161 | 8167 | 8171 | 8179 |
| 8191 | 8209 | 8219 | 8221 | 8231 | 8233 | 8237 | 8243 | 8263 | 8269 | 8273 | 8287 | 8291 |
| 8293 | 8297 | 8311 | 8317 | 8329 | 8353 | 8363 | 8369 | 8377 | 8387 | 8389 | 8419 | 8423 |
| 8429 | 8431 | 8443 | 8447 | 8461 | 8467 | 8501 | 8513 | 8521 | 8527 | 8537 | 8539 | 8543 |

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 8563  | 8573  | 8581  | 8597  | 8599  | 8609  | 8623  | 8627  | 8629  | 8641  | 8647  | 8663  | 8669  |
| 8677  | 8681  | 8689  | 8693  | 8699  | 8707  | 8713  | 8719  | 8731  | 8737  | 8741  | 8747  | 8753  |
| 8761  | 8779  | 8783  | 8803  | 8807  | 8819  | 8821  | 8831  | 8837  | 8839  | 8849  | 8861  | 8863  |
| 8867  | 8887  | 8893  | 8923  | 8929  | 8933  | 8941  | 8951  | 8963  | 8969  | 8971  | 8999  | 9001  |
| 9007  | 9011  | 9013  | 9029  | 9041  | 9043  | 9049  | 9059  | 9067  | 9091  | 9103  | 9109  | 9127  |
| 9133  | 9137  | 9151  | 9157  | 9161  | 9173  | 9181  | 9187  | 9199  | 9203  | 9209  | 9221  | 9227  |
| 9239  | 9241  | 9257  | 9277  | 9281  | 9283  | 9293  | 9311  | 9319  | 9323  | 9337  | 9341  | 9343  |
| 9349  | 9371  | 9377  | 9391  | 9397  | 9403  | 9413  | 9419  | 9421  | 9431  | 9433  | 9437  | 9439  |
| 9461  | 9463  | 9467  | 9473  | 9479  | 9491  | 9497  | 9511  | 9521  | 9533  | 9539  | 9547  | 9551  |
| 9587  | 9601  | 9613  | 9619  | 9623  | 9629  | 9631  | 9643  | 9649  | 9661  | 9677  | 9679  | 9689  |
| 9697  | 9719  | 9721  | 9733  | 9739  | 9743  | 9749  | 9767  | 9769  | 9781  | 9787  | 9791  | 9803  |
| 9811  | 9817  | 9829  | 9833  | 9839  | 9851  | 9857  | 9859  | 9871  | 9883  | 9887  | 9901  | 9907  |
| 9923  | 9929  | 9931  | 9941  | 9949  | 9967  | 9973  | 10007 | 10009 | 10037 | 10039 | 10061 | 10067 |
| 10069 | 10079 | 10091 | 10093 | 10099 | 10103 | 10111 | 10133 | 10139 | 10141 | 10151 | 10159 | 10163 |
| 10169 | 10177 | 10181 | 10193 | 10211 | 10223 | 10243 | 10247 | 10253 | 10259 | 10267 | 10271 | 10273 |
| 10289 | 10301 | 10303 | 10313 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

## 10.5 Число $\pi$

PI=3.

1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862  
0899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848  
1117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648  
2337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245  
8700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652  
1384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462  
3799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463  
9522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812  
7145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050  
7922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113  
4999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468  
5035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428  
7554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959  
0921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899  
5773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855  
8890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076  
6010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425  
9069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640  
2474964732639141992726042699227967823547816360093417216412199245863150302861  
8297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596  
0236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793  
8000816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757  
4184946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025  
4256887671790494601653466804988627232791786085784383827967976681454100953883  
7863609506800642251252051173929848960841284886269456042419652850222106611863  
0674427862203919494504712371378696095636437191728746776465757396241389086583  
264599581339047802759009

## 10.6 Число $e$

PI=2.

718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353  
547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260  
595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149  
934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069  
551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443  
747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696  
770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576351  
482208269895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117  
301238197068416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815  
301756717361332069811250996181881593041690351598888519345807273866738589422  
879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827041978623  
209002160990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016  
768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704171898610687396  
9655212671546889570350354021234078498193343210681701210056278802351920

## 11 Преобразования

### 11.1 Преобразования Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ix\omega} d\omega$$

Теорема о свертке:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

### 11.1.1 Некоторые преобразования Фурье

|    | Функция                                 | Образ  | Примечание   |
|----|---|--|--|
| 1  | $af(t) + bg(t)$                         | $aF(\omega) + bG(\omega)$  | Линейность   |
| 2  | $f(t - a)$                              | $e^{i\omega a} F(\omega)$  | Запаздывание   |
| 3  | $e^{iat} f(t)$                          | $F(\omega - a)$  | Частотный сдвиг  |
| 4  | $f(at)$                                 | $ a ^{-1} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$                                  | Если $a$ большое, то $f(at)$ сосредоточена около 0   |
| 5  | $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$                 | $(i\omega)^n F(\omega)$  | Св-ва преобразования Фурье $n$ -й производной  |
| 6  | $t^n f(t)$                              | $i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$                                      | Это обращение правила 5  |
| 7  | $(f * g)(t)$                            | $F(\omega)G(\omega)$   | Запись $f * g$ обозначает свертку функций $f$ и $g$  |
| 8  | $f(t)g(t)$                              | $\frac{(F * G)(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$                                      | Это обращение правила 7  |
| 9  | $\delta(t)$                             | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  | $\delta(t)$ - функция Дирака   |
| 10 | 1                                       | $\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$  | Обращение 9  |
| 11 | $t^n$                                   | $i^n \sqrt{2\pi}\delta^{(n)}(\omega)$                                      | $n$ -натуральное число. Следствие 6 и 10.  |
| 12 | $e^{iat}$                               | $\sqrt{2\pi}\delta(\omega - a)$  | Следствие 3 и 10.  |
| 13 | $\cos(at)$                              | $\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)}{2}$            | Следствие 1 и 12.  |
| 14 | $\sin(at)$                              | $\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)}{2i}$           | Так же из 1 и 12   |
| 15 | $e^{-at^2}$                             | $\frac{1}{2a} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$                                    | Функция Гаусса совпадает со изображением.  |
| 16 | $W\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}(Wt)$ | $\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$                                | $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ |
| 17 | $\frac{1}{t}$                           | $-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sgn}(\omega)$                                | Из 6 и 10.   |
| 18 | $\frac{1}{t^n}$                         | $-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \text{sgn}(\omega)$ | Из 17.   |
| 19 | $\text{sgn}(t)$                         | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} (i\omega)^{-1}$                                      | Из 17.   |
| 20 | $\sqrt{2\pi} H(t)$                      | $\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$                                    | Из 1 и 19.   |

### 11.2 Преобразования Лапласа

Преобразованием Лапласа функции действительной переменной  $f(x)$ , называется функция  $F(s)$  комплексной переменной  $s = \sigma + i\omega$ , такая что:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного  $F(s)$ , называ-

ется функция  $f(x)$  действительного переменного, такая что:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{sx} F(s) ds$$

где  $\sigma_1$  - некоторое вещественное число.

### 11.2.1 Абсолютная сходимость

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при  $\sigma = \sigma_0$ , то есть существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx = \int_0^{\infty} |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx$$

то он сходится абсолютно и равномерно для  $\sigma \geq \sigma_0$  и  $F(s)$  — аналитичная функция при  $\sigma \geq \sigma_0$  ( $\sigma = \operatorname{Re}(s)$  — действительная часть комплексной переменной  $s$ ). Точная нижняя грань  $\sigma_a$  множества чисел  $\sigma$ , при которых это условие выполняется, называется абсциссой абсолютной сходимости преобразования Лапласа для функции  $f(x)$ .

### 11.2.2 Условия существования преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа существует в смысле абсолютной сходимости в следующих случаях:

1. Случай  $\sigma \geq 0$  : преобразование Лапласа существует, если существует интеграл  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$
2. Случай  $\sigma > \sigma_a$ : преобразование Лапласа существует, если интеграл  $\int_0^{x_1} |f(x)| dx$  существует для каждого конечного  $x_1 > 0$  и  $|f(x)| \leq K e^{\sigma_a x}$  для  $x > x_1 \geq 0$
3. Случай  $\sigma > 0$  или  $\sigma \geq \sigma_a$  (какая из границ больше): преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции  $f'(x)$  (производная к  $f(x)$  ) для  $\sigma \geq \sigma_a$ .

Примечание: это достаточные условия существования.

### 11.2.3 Теорема о свертке

### 11.2.4 Умножение изображений

### 11.2.5 Дифференцирование и интегрирование оригинала

### 11.2.6 Дифференцирование и интегрирование изображения

### 11.2.7 Запаздывание оригиналов и изображений. Предельные теоремы

### 11.2.8 Другие свойства

### 11.2.9 Прямое и обратное преобразование Лапласа некоторых функций

|    | $x(t)$  | $X(j\omega)$  | Примечание (область сходимости)   |
|----|---|---|---|
| 1  | $\delta(t - \tau)$                                      | $e^{-\tau s}$   |   |
| 2  | $\delta(t)$   | 1   | $\forall s$   |
| 3  | $\frac{(t - \tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau)$ | $\frac{e^{-\tau s}}{(s + \alpha)^{n+1}}$                                  | $s > 0$   |
| 4  | $\frac{t^n}{n!} u(t)$                                   | $\frac{1}{s^{n+1}}$   | $s > 0$   |
| 5  | $\frac{t^q}{\Gamma(q + 1)} u(t)$                        | $\frac{1}{s^{q+1}}$   | $s > 0$   |
| 6  | $u(t)$  | $\frac{1}{s}$   | $s > 0$   |
| 7  | $u(t - \tau)$   | $\frac{e^{-\tau s}}{s}$   | $s > 0$   |
| 8  | $tu(t)$   | $\frac{1}{s^2}$   | $s > 0$   |
| 9  | $\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} u(t)$                     | $\frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$  | $s > -\alpha$   |
| 10 | $e^{-\alpha t} u(t)$                                    | $\frac{1}{s + \alpha}$  | $s > -\alpha$   |
| 11 | $(1 - e^{-\alpha t}) u(t)$                              | $\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$  | $s > 0$   |
| 12 | $\sin(\omega t) u(t)$                                   | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$   | $s > 0$   |
| 13 | $\cos(\omega t) u(t)$                                   | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$  | $s > 0$   |
| 14 | $\sinh(\alpha t) u(t)$                                  | $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$   | $s >  \alpha $  |
| 15 | $\cosh(\alpha t) u(t)$                                  | $\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$  | $s >  \alpha $  |
| 16 | $e^{-\alpha t} \sin(\omega t) u(t)$                     | $\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$                                | $s > -\alpha$   |
| 17 | $e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u(t)$                     | $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$                            | $s > -\alpha$   |
| 18 | $\sqrt[n]{t} u(t)$                                      | $s^{-\frac{n+1}{n}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$                   | $s > 0$   |
| 19 | $\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) u(t)$                    | $-\frac{t_0}{s} [\ln(t_0 s) + \gamma]$                                    | $s > 0; n > -1$ ; Постоянная Эйлера - Маскерони<br>$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,5772156649015328606065120$ |
| 20 | $J_n(\omega t) u(t)$                                    | $\frac{\omega^n (s + \sqrt{s^2 + \omega^2})^{-n}}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}$ | функция Бесселя первого рода порядка n  |

## 11.3 Z-Преобразование

Z-преобразованием называют свертывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты. Если сигнал представляет импульсную характеристику линейной системы, то коэффициенты Z-преобразования показывают отклик системы на комплексные экспоненты  $E(n) = z^{-n} = r^{-n} e^{-i\omega n}$ , то есть на гармонические осцилляции с различными частотами и скоростями нарастания/затухания.

### Двустороннее Z-преобразование

$$x(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

где  $n$  - целое,  $z = Ae^{j\varphi}$  - комплексное число.

### Одностороннее Z-преобразование

В случае когда  $x[n]$  определена для  $n \geq 0$ :

$$x(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

#### 11.3.1 Обратное Z-преобразование

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

#### 11.3.2 Область сходимости

Область сходимости представляет из себя некоторое множество точек на комплексной плоскости, в которых выполнено условие:

$$OC = \left\{ z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} < \infty \right\}$$



### 11.3.3 Таблица некоторых Z-преобразований

|    | $x[n]$                     | $X(z)$   | Область сходимости |
|----|----------------------------|--|--------------------|
| 1  | $\delta[n]$                | 1  | $\forall z$        |
| 2  | $\delta[n - n_0]$          | $\frac{1}{z^{n_0}}$  | $\forall z$        |
| 3  | $u[n]$                     | $\frac{z}{z - 1}$  | $ z  > 1$          |
| 4  | $a^n u[n]$                 | $\frac{1}{1 - az^{-1}}$  | $ z  >  a $        |
| 5  | $na^n u[n]$                | $\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$  | $ z  >  a $        |
| 6  | $-a^n u[-n - 1]$           | $\frac{1}{1 - az^{-1}}$  | $ z  <  a $        |
| 7  | $-na^n u[-n - 1]$          | $\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$  | $ z  <  a $        |
| 8  | $\cos(\omega_0 n)u[n]$     | $\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$      | $ z  > 1$          |
| 9  | $\sin(\omega_0 n)u[n]$     | $\frac{1 - z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$      | $ z  > 1$          |
| 10 | $a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$ | $\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$ | $ z  >  a $        |
| 11 | $a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$ | $\frac{1 - az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$ | $ z  >  a $        |