泛函分析

上海财经大学　统计与管理学院

主讲：夏宁宁

Contents

第一章　概率论基础

0. 绪论

- 函数是数与数之间的对应关系
- 泛函是函数和数之间的对应关系
- 算子是函数空间和函数空间之间的对应关系

0. 绪论

- $\mathbb{R}^n$ → 一般空间

我们把注意力放在一般空间上，思路一旦打开，就有一系列新的研究结果。

- 这样的函数空间是无穷维的，比$\mathbb{R}^n$要复杂得多。

线性空间：Banach空间

Hilbert空间（可看作可数维的欧式空间）

↑

（赋予集合意义：距离，“向量”长度，正交等）

0. 绪论

- 泛函分析综合分析、代数、几何的观点和方法研究无穷维空间上的函数、算子和极限理论，处理和解决数学研究中最关心的一些基本问题。

- 泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化，而且还把这些概念和方法几何化，即把解析几何解决问题的模式推广到泛函分析的研究中。

1. 距离空间/度量空间

- 在数学分析中，我们研究的是定义在实直线$\mathbb{R}$上的函数。 $\mathbb{R}$上定义的距离函数$d(\cdot,\cdot)$为，

$$d(x,y) = |x-y|, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

- 在泛函分析中，我们将研究更为一般的“空间”及定义在其上的“函数”。

1. 距离空间/度量空间

定义1. 若非空集合X中任意两个元素x, y都对应一个函数$d(x, y)$使

1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

对任意的$x, y, z \in X$成立，则称(X, d)为距离空间/度量空间，称d为X上的一个距离/度量。

距离空间的例子：

1. $\mathbb{R}$

2. $\mathbb{R}^2$

3. $\mathbb{R}^n$

距离空间的例子：

4. l^{∞} 有界序列空间

设X代表所有的有界数列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots)$，简记$x=(\xi_j)$. 对每个$x=(\xi_j)$，存在常数$K_x$，使得对所有的$j$，$|\xi_j|\leq K_x$. ξ_j称为元素$x=(\xi_j)$的第j个坐标。

设$x=(\xi_j), y=(\eta_j)\in X$, 定义

$$d(x,y)=sup_{j\geq 1}|\xi_j-\eta_j|.$$

不难验证，$d(\cdot,\cdot)$满足距离定义，(l^{∞},d)称为有界序列空间。

距离空间的例子：

5. $C[a,b]$

定义在闭区间[a, b]上所有连续实值函数$x(t)$的集合。

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

$C[a,b]$中每个点都是一个函数，它是一个函数空间。

距离空间的例子：

6. 离散的距离空间

设X是任意的非空集合，对X中任意两点$x, y \in X$，定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当} x \neq y, \\ 0, & \text{当} x = y. \end{cases}$$

空间(X,d)称为离散的距离空间。

距离空间的例子：

7. 序列空间s.

令s表示实数列（或复数列）的全体。对s中任意两点

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots),\qquad y=(\eta_1,\cdots,\eta_j,\cdots)$$

令

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}.$$

距离空间的例子：

8. 空间$l^p(1 \le p < \infty)$.

设X代表满足条件$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p < \infty$的所有数列$x=(\xi_j)$的集合。若 $x=(\xi_j), y=(\eta_j)\in X$，定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}.$$

距离空间的例子：

9. 空间$L^p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$.

a,b是任意两个实数，且$-\infty < a < b < \infty$. 设X代表所有满足条件$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$ 的区间$[a,b]$上可测函数$x(t)$的集合，这样的$x(t)$成为$[a,b]$上p方可积函数。X中两个元素$x = x(t), y = y(t)$看作是相等的，如果$x(t)$与$y(t)$是几乎处处相等的，即

$$x(t) = y(t) \ \ a.e. \text{于}[a,b].$$

定义

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

距离空间的例子：

10. 有界函数空间B(A).

定义在集合A上的有界函数的集合。

$$d(x,y)=sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|,$$

其中sup表示上确界。

距离空间的例子：

11. 可测函数空间$\mathcal{M}(X)$.

设X为$\mathbb{R}^n$ 中Lebesgue可测函数。 $\mathcal{M}(X)$为X上实值（或复值）的L可测函数全体， m为L测度。

若$m(X) < \infty$，对任意可测函数$f(t)$及g(t)，由于

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|} < 1.$$

所以这是X上的可积函数，令

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\,dt.$$

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定义2. 设$\{x_n\}$是距离空间(X,d)中点列，如果存在$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

则称点列$\{x_n\}$是(X,d)中的收敛点列，$\{x_n\}$按距离d收敛到x，并记作$x_n\xrightarrow{d}x$或$x_n\to x$，x是点列$\{x_n\}$的极限。

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定义3. 对距离空间(X,d)，

(1) 设$x_0 \in X, r > 0, B(x_0,r) = \{x \in X: d(x,x_0) < r\}$ 称为以x_0为心，r为半径的开球（也称为x_0的$r-$邻域）.

(2) X中的点集O称为开的，如果对任何$y \in O$，都有$r > 0$，使$B(y,r) \subset O$.

(3) 设$y \in X$, X的子集U称为y的邻域，如果有$r > 0$，使$B(y,r) \subset U$.

(4) 对$E \subset X$，点x_0称为E的极限点（聚点），如果对任何$r > 0$，球$B(x_0,r)$包含了E中异于x_0的点.

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

(5) X中的点集F成为闭的，如果F的极限点都在F中。

(6) 设$G \subset X$，点$x_0 \in X$称为G的内点，若G是x_0的邻域。

(7) 点集G的内点全体称为G的内部。

(8) 设$G \subset X$, G的所有点和所有聚点构成点集合称为G的闭包，记为$\bar{G}$（它是包含G的最小闭集）.

备注：开集、闭集性质

开集　设X是一个距离空间，$G \subset X$, 若G的每一个点都是内点，则称G使一个开集。

x_0是G的内点，若存在开球$B(x_0, r)$，使得$B(x_0, r) \subset G$.

例．$B(x_0, r)$是一个开集。

注．开球是开集，但开集不一定是开球。

备注：开集、闭集性质

定理 设X是一个距离空间，X中的开集具有以下性质：

（1）全空间与空集是开集；

（2）任意多个开集的并集是开集；

（3）任意有限多个开集的交集是开集。

备注：开集、闭集性质

定理 设X是一个距离空间，集合$\mathrm{A} \subset X$，则$A^c = X \backslash A$是开集当且仅当$\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$.

备注：开集、闭集性质

闭集 设X是一个距离空间，集合$A \subset X$称为闭的，下面三个定义等价：

（1）A的极限点都在A中；

（2）$A = \overline{A}$;

（3）补集$A^c = X \backslash A$是开的。

备注：开集、闭集性质

定理 设X是一个距离空间，则

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$$

和 $S(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ 是闭集。

备注：开集、闭集性质

定理 设(X,d)是一个距离空间，则

（1）全空间与空集是闭集；

（2）任意多个闭集的交是闭集；

（3）有限多个闭集的并集是闭集。

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定义4. 设T是从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射。$x_0 \in X, y_0 \in Y$，$Tx_0 = y_0$.

- 如果对y_0的任何邻域V_{y_0}都有x_0的邻域U_{x_0}，使得 $Tx \in V_{y_0}$当$x \in U_{x_0}$时，则称T在x_0处连续。
- 如果T在X中每点都连续，就称T是连续映射。

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定理1（连续映射） 设T是从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射，那么T在$x_0 \in X$连续的充要条件为当$x_n \to x_0$时，必有$Tx_n \to Tx_0$.

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定理2（连续映射） 设T是从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射。T是连续的充要条件为Y中任意开集O的原像$T^{-1}O$ 是X中开集。

2. 距离空间中的拓扑，可分空间

定义5 设 (X,d)是距离空间，

- 子集$D \subset X$称为X的稠密集，如果$\overline{D} = X$.
- 如果X有一个可数的稠密子集，则称X是可分的。

可分空间的例子：

(1) $\mathbb{R}$可分

(2) $\mathbb{C}$可分

(3) 离散的距离空间 X，当且仅当 X 是可数时，才是可分的。

(4) 空间$l^p(1 \leq p < \infty)$ 是可分的。

(5) $C[a,b]$是可分的。

(6) 空间s可分。

(7) 空间l^∞（有界序列空间）是不可分的。

3. 收敛性，柯西序列和完备性

定义6（序列的收敛性）

设$\{x_n\}$是距离空间(X,d)中点列，如果存在$x \in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

则称点列$\{x_n\}$是(X,d)中的收敛点列，$\{x_n\}$按距离d收敛到x，并记作$x_n \xrightarrow{d} x$或$x_n \to x$，x是点列$\{x_n\}$的极限。

3. 收敛性，柯西序列和完备性

定义7 设M是距离空间(X,d)中点集，定义

$$\delta(M)=sup_{x,y\in M}\, d(x,y),$$

为点集M的直径。

- 若$\delta(M)<\infty$（有限），则称M为(X,d)中的有界集。

- 显然，若M是有界集，则$M\subseteq B(x_0,r)$，其中x_0为X中任意一点，r是一个（足够大的）实数。反之亦然。

3. 收敛性，柯西序列和完备性

引理1（有界性，极限）

令(X,d)是距离空间，则

（1） X中的收敛序列是有界的，且极限唯一。

(2) 在X中若$x_n \to x$ 且$y_n \to y$,则$d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

某些具体空间中点列收敛的具体意义：

1. $\mathbb{R}^n$ 空间： $\mathbb{R}^n$ 中点列收敛为依坐标收敛。

某些具体空间中点列收敛的具体意义：

2. $C[a,b]$ 空间： 点列收敛为一致收敛。

某些具体空间中点列收敛的具体意义：

3. 序列空间s： 点列收敛为依坐标收敛。

某些具体空间中点列收敛的具体意义：

4. 空间l^∞： 点列收敛为一致收敛。

某些具体空间中点列收敛的具体意义：

5. 可测函数空间$\mathcal{M}(X)$：点列收敛为依测度收敛。

3. 收敛性，柯西序列和完备性

定义8 设$\{x_n\}$是距离空间(X,d)中序列，如果对$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 使得对于任意 $m,n \geq N$, 有$d(x_m,x_n) < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$为柯西序列（Cauchy序列）.

3. 收敛性，柯西序列和完备性

定理3 距离空间中的每个收敛序列都是柯西序列.

3. 收敛性，柯西序列和完备性

定义9 如果空间X中的每个柯西序列都收敛，则称距离空间(X,d)为完备的。

- 柯西序列在完备的距离空间中是收敛的。

子空间的完备性定理

定理4（完备子空间） 完备距离空间X的子空间M是完备的，当且仅当集合M在X中是闭的。

完备空间的例子：

1. $\mathbb{R}^n$ 是完备的。

完备空间的例子：

2. l^∞ 是完备的。

完备空间的例子：

3. $l^p (1 \le p < \infty)$ 是完备的。

完备空间的例子：

4. $L^p[a,b](1 \leq p < \infty)$是完备的。

完备空间的例子：

5. $C[a,b]$ 是完备的。

不完备空间的例子：

1. 有理数空间$\mathbb{Q}$.

2. 令X是$[0,1]$上所有连续实值函数的集合，且定义

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt.$$

(X,d)是距离空间，但不完备。

4. 距离空间的完备化

定义10 对距离空间(X,d)，若有完备的距离空间$(\tilde{X},\rho)$，使X等距于$\tilde{X}$的稠密子集，

即存在映射 $T: X \to \tilde{X}$ 使

$$d(x,y) = \rho(Tx,Ty), \qquad \forall x,y \in X.$$

且$T(X)$是$\tilde{X}$中稠密子集，则称$\tilde{X}$为X的完备化。

4. 距离空间的完备化

定理5 任何距离空间都存在完备化。

4. 距离空间的完备化

完备化方法：

1. 做闭包：加入所有原来空间里没有的Cauchy列的极限（缺点：极限无法具体写出）。

2. 把Q嵌入到另一个完备空间R中，嵌入意味着

（1）Q中元素在R中的距离不变（等距嵌入）；

（2）$Q \subset R$，Q在R中稠密；

（3）R是Q的完备化空间。

4. 距离空间的完备化

完备化的过程中，“扩充”一个空间X到另一个空间$\widetilde{X}$，最大的困难在于如何用原来空间中的元素来刻画新加进来的元素，而新加进来的元素在原来的空间里是没有的。

4. 距离空间的完备化

定理证明

（1）先构造空间$\widetilde{X}$和距离ρ；

（2）证明(X, d)与$(\widetilde{X}, \rho)$中的一个稠密子空间等距；

（3）证明$(\widetilde{X}, \rho)$完备，这个空间$\widetilde{X}$就是我们需要的空间；

（4）在等距的意义下，证明完备化空间的唯一性。

5. 列紧性

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质，例如，有限覆盖定理。推广到一般距离空间，我们从不同的角度给出几种（紧集）定义。

定义1 距离空间X中的集合M成为列紧的，如果M中任何序列都含有一个收敛的子序列（这个子序列的极限未必在M中）。闭的列紧集成为自列紧集。

注1. 列紧集的子集是列紧的。

注2. 集合A是自列紧的，则收敛子列的极限必在A中。

5. 列紧性

定义2 设M, N都是距离空间(X, d)中的集合，ε为给定的正数，如果对M中任何一点x，必存在N中一点x'，使 $d(x,x')<\varepsilon$, 则称N是M的ε−网。

定义3 距离空间X中的集合M 称为完全有界的，如果对任给的$\varepsilon>0$, 总存在由有限个元组成的M的ε−网。

定义4 距离空间X中的集合M 称为紧的，如果M的任何开覆盖都存在有限的子覆盖。

5. 列紧性

定理1 在距离空间X中，列紧性蕴含完全有界性；若更设X是完备的，则列紧性与完全有界性等价。

5. 列紧性

定理2 在距离空间中，任何完全有界集都是可分的。

5. 列紧性

定理3 在距离空间中，紧性与自列紧性等价。

5. 对角线方法

分析中常用到的一种被称为对角线方法的技巧，它是证明紧性的典型方法。为便于今后使用，我们来详细地介绍这种方法。

设$\{\alpha_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ $(k=1,2,\cdots)$是一串有界数列，则对每个k，由于$\{\alpha_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列，必有一个收敛子序列$\left\{\alpha_{kn_k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$.

一般说来，对不同的k，$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$是不同的正整数子序列。对角线方法就是要对所有$k$，找到一个共同的正整数列的子序列$\{n(j)\}_{j=1}^{\infty}$使得对每个$k$，$\left\{\alpha_{kn(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$都收敛。

具体做法如下：

5. 对角线方法

把$\{\alpha_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ $(k=1,2,\cdots)$排成一个无穷方阵，第一个数列$\{\alpha_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$排在第一行，第二个数列$\{\alpha_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$排在第二行。依此类推，便有

$$
\begin{array}{cccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \cdots \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{kn} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}
$$

5. 对角线方法

先看第一行，由于把$\{\alpha_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$是有界数列，必有收敛子列$\{\alpha_{1n_1(j)}\}_{j=1}^{\infty}$，然后再看第二行的子序列$\{\alpha_{2n_1(j)}\}_{j=1}^{\infty}$，它也是有界的，必有收敛子序列，记为$\{\alpha_{2n_2(j)}\}_{j=1}^{\infty}$。再看第三行的子序列$\{\alpha_{3n_2(j)}\}_{j=1}^{\infty}$，它也是有界的，故有收敛子列，记为$\{\alpha_{3n_3(j)}\}_{j=1}^{\infty}$. 如此继续下去，便得到一串收敛数列排成的无穷方阵

$$
\begin{array}{cccccc}
\alpha_{1n_1(1)} & \alpha_{1n_1(2)} & \alpha_{1n_1(3)} & \cdots & \alpha_{1n_1(j)} & \cdots \\
\alpha_{2n_2(1)} & \alpha_{2n_2(2)} & \alpha_{2n_2(3)} & \cdots & \alpha_{2n_2(j)} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\alpha_{kn_k(1)} & \alpha_{kn_k(2)} & \alpha_{kn_k(3)} & \cdots & \alpha_{kn_k(j)} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}
$$

方阵中每一行都是一个收敛的无穷数列。

5. 对角线方法

对应地，我们得到这些数列的第二个指标排成的无穷方阵

$$
\begin{array}{cccccc}
n_1(1) & n_1(2) & n_1(3) & \ldots & n_1(\mathrm{j}) & \ldots \\
n_2(1) & n_2(2) & n_2(3) & \ldots & n_2(j) & \ldots \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
n_k(1) & n_k(2) & n_k(3) & \ldots & n_k(j) & \ldots \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}
$$

根据前面的选取，方阵中下面一行的指标序列都是上面一行的指标序列的子序列，即$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$是$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子序列，$\{n_3(j)\}_{j=1}^{\infty}$是$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子序列等等。现在我们把上述方阵中对角线上的元素取出来，得到一个指标序列$\{n_j(j)\}_{j=1}^{\infty}$。这就是我们要找的正整数列的子序列，使得对每个k，$\left\{\alpha_{kn_j(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$都收敛。

5. 对角线方法

事实上，对每个k，当$j \geq k$以后，$\{n_j(j)\}_{j=1}^{\infty}$便是$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子序列，从而$\left\{\alpha_{kn_j(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$是$\left\{\alpha_{kn_k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$的子序列。而$\left\{\alpha_{kn_k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$是收敛的，故$\left\{\alpha_{kn_j(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$也是收敛的。

5. 在具体空间中什么样的集合是列紧的

例1. （1）在R中，闭区间$[a,b]$是自列紧集。

（2）在R^n中，有界闭集是自列紧集。

例2. 对于$[0,1]$上的一族连续函数$\mathcal{F}$，把它看作是$C[0,1]$空间中的一个点集，$\mathcal{F}$何时是列紧的？

5. 在具体空间中什么样的集合是列紧的

定义5. 设$\mathcal{F}$是一族从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的函数，如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$d(x,x')<\delta$时，对一切$f\in\mathcal{F}$ 都有$\rho\big(f(x),f(x')\big)<\varepsilon$，则称$\mathcal{F}$是等度连续的。

5. 在具体空间中什么样的集合是列紧的

定理4（Arzelá-Ascoli）． $\mathcal{F} \subset C[0,1]$是列紧的当且仅当$\mathcal{F}$是一致有界和等度连续的。

一致有界:$\exists K > 0$，对于每一点$t \in [0,1]$及一切$f \in \mathcal{F}$，$|f(t)| \leq K$.

等度连续：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$|t_1 - t_2| < \delta$时，$\forall f \in \mathcal{F}$, 有

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

6. 完备距离空间的应用：闭球套定理

闭球套定理. 设X是完备的距离空间(X,d)，$\bar{B}_n=\bar{B}(x_n,r_n)(n=1,2,\dots)$是$X$中的一系列闭球套：

$$\bar{B}_1\supset\bar{B}_2\supset\cdots\supset\bar{B}_n\supset\cdots,$$

且$r_n\to 0(n\to\infty)$，则存在X中唯一的一点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n$.

6. 完备距离空间的应用

例1. 证明三角形的中线交于一点.

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

- 不动点问题是数学研究中的重要问题之一，不动点定理是泛函分析中最基本的一个存在性定理。

所谓一个映射T的不动点是指T把这个点映射为自身，即

设$x \in X$，若$Tx = x$，则称x为映射T的不动点。

- 任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题。事实上，

$$F(x) = 0 \iff F_1(x) = x, \text{其中} F_1(x) = F(x) + x.$$

例如在实数范围内求解方程

$$y = x^2 - 2x + 1 = 0,$$

令$\mathrm{T}x = x^2 - x + 1$，则求解一元二次方程的问题转化为：

是否存在$x \in R$，使得$\mathrm{T}x = x$，即映射T有没有不动点。

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

- 各类方程的研究中，解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的理论课题，在许多关于解的存在唯一性定理中，“不动点理论”起着关键的作用。

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

定义. 设(X,d)是距离空间，T是从X到Y中的映射，如果存在常数$q>0$，使对所有$x,y\in X$，

$$d(Tx,Ty)\le qd(x,y),$$

则称T满足Lipschitz条件，q称为T的Lipschitz常数。

特别地，如果$q<1$，则T称为压缩映射。

设$x\in X$，使$\mathrm{T}x=x$，则x称为映射T的不动点。

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

定理1. 设(X,d)是距离空间，映射T：$X \longrightarrow X$满足Lipschitz条件，则T是连续的。

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

定理2（压缩映射原理）． 设(X,d)是距离空间，映射$T: X \longrightarrow X$是压缩映射，则T在X中恰好有一个不动点。

设这个不动点为$\bar{x}$，则对任何初始点$x_0 \in X$，逐次迭代点列$x_{n+1} = Tx_n, n = 0,1,2,\cdots$ 收敛于$\bar{x}$，且关于收敛速度有如下的估计式：

$$d(x_n,\bar{x}) \leq q^n(1-q)^{-1}d(Tx_0,x_0),$$

这里q是T的Lipschitz常数。

6. 完备距离空间的应用：压缩映射原理

例2. 考虑线性方程组

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i \ (i = 1,2,\cdots,n),$$

其中$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 < 1$，则方程组有唯一解。

Thank You !