习题4

1. 设 $\sup_{n\geq 1}|\alpha_n|<\infty$, 在 ℓ^1 上定义算子 T : $y=Tx$, 其中 $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}$, $\eta_k=\alpha_k\xi_k$ $(k=1,2,\ldots)$. 证明 T 是 ℓ^1 上的有界线性算子并且 $\|T\|=\sup_{n\geq 1}|\alpha_n|$.

2. 设 $x(t)\in C[a,b]$, $f(x)=x(a)-x(b)$, 证明 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函，并求 $\|f\|$.

3.对 $f\in L[a,b]$, 定义

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

证明：

(1) 若 T 为 $L[a,b]\to C[a,b]$ 的算子，则 $\|T\|=1$;

(2) 若 T 为 $L[a,b]\to L[a,b]$ 的算子，则 $\|T\|=b-a$.

4.考虑 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的算子序列 $\{T_n\}$, 其中 $(T_nx)(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子，但不按范数收敛于该算子.

5. 设 X 是完备的距离空间. $\mathcal{F}$ 是 X 上的实连续函数族且具有性质：对于每个 $x\in X$, 存在常数 $M_x>0$, 使得对于每一个 $F\in\mathcal{F}$,

$$|F(x)|\leq M_x.$$

证明存在开集 U 以及常数 $M>0$, 使得对于每一个 $x\in U$ 及所有 $F\in\mathcal{F}$, 有

$$|F(x)|\leq M.$$

6. 设 X 是 ℓ^∞ 中只有有限多非零项的序列构成的子空间，定义 $T:X\to X, x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\to y=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)$, 式中 $y_k=\dfrac{1}{k}x_k$, 证明：

1. $T\in\mathcal{B}(X)$, 并计算 $\|T\|$;
2. T^{-1} 无界;
3. 这是否与Banach逆算子定理矛盾?