泛函分析

夏宁宁

上海财经大学

统计与管理学院

第二章　赋范线性空间

- 1 赋范线性空间的基本概念
- 2 完备的赋范线性空间：Banach 空间
- 3 几何结构：Riesz 引理
- 4 有限维的赋范线性空间

- 上一章，我们在集合上赋予距离，定义了开集、闭集、可分、完备等拓扑结构.
- 这一章，我们在线性空间上引进元素的长度的概念，给出元素的“度量”.
  目的：把平面上的向量的一些性质“类比”推广到所研究的空间来.
- 在 $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 空间中，向量有长度（或模），但在一般的线性空间中（可能是无穷维空间），向量的长度如何来定义？

线性空间

定义 1

设 X 是非空集合，K 是数域（实数域或复数域）. 如果在 X 上定义了加法运算，即：对 X 中每对元素 x, y 都对应 X 中一个元素 z，用 $z = x + y$ 表示；又定义了数乘运算，即对每个数 $\alpha \in K$ 和每个元素 $x \in X$ 都对应 X 中一个元素 u，用 $u = \alpha X$ 表示；而且满足如下公设：

（1）$x + y = y + x$;

（2）$x + (y + z) = (x + y) + z$;

（3）X 中存在唯一的元素，用 θ 表示，使对每个 $x \in X, x + \theta = x$. θ 称为 X 中的零元;

（4）对 X 中每个元素 x，都存在唯一的元素，用 $-x$ 表示，使 $x + (-x) = \theta$;

(5) $\alpha\ (x+y) = \alpha x + \alpha y$;

(6) $(\alpha+\beta)\ x = \alpha x + \beta y$;

(7) $\alpha\ (\beta x) = (\alpha\beta)\ x$;

(8) $1\ x = x$.

这里 $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in K$, 则称 X 按上述加法和数乘成为线性空间, 通常又称为向量空间, 空间中的元素又称为向量或点。

容易证明, 在线性空间 X 中对所有向量 x 和数 α 都有

$$\begin{aligned} 0\ x &= \theta, \\ (-1)\ x &= -x, \\ \alpha\ \theta &= \theta. \end{aligned}$$

- 在欧式平面 $\mathbb{R}^2$ 上：

  点 $x=(x_1,x_2)$ 长度记为 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$,

  即 $\|x\|=d\,(x,0)$ 且 $d\,(x,y)=\|x-y\|$.

  $\|x\|$ 称为向量的“模”，或元素的“长度”.

- 现在我们将这一概念推广到一般的线性空间，给出范数的定义.

范数与赋范线性空间

定义 2

X 是数域 K 上的线性空间，函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $\forall x \in X$，$\|x\| \geq 0$，$\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$；

(2) $\forall x \in X$，$\alpha \in K$，$\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$；

(3) $\forall x, y \in X$，$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数，定义了范数的线性空间称为赋范线性空间，记为 $(X, \|\cdot\|)$.

定义 3

设 x_n 是赋范线性空间 X 中的点列，$x \in X$. 如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 x_n 按范数收敛到 x，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

赋范线性空间的例子

例 1

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，令 $C(\Omega)$ 表示 Ω 上一切连续函数的集合，定义

$$(x+y)\ (t)=x(t)+y(t),\ (\alpha x)\ (t)=\alpha\ x(t),\quad \text{当}\ t\in\Omega.$$

这里 α 是常数. 又以

$$\|x\|=\max_{t\in\Omega}|x(t)|$$

作为范数. 容易证明 $C(\Omega)$ 是赋范线性空间.

例 2

设 (Ω, μ) 是 σ-有限测度空间，即 μ 是令 Ω 上的测度，而 Ω 可以表示成 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，这里 $\mu(E_n) < \infty, n = 1, 2, \ldots$
对 $p \geq 1$，设

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ x(t) : \int_{\Omega} |x(t)|^p \, d\mu(t) < +\infty \right\}.$$

有时简记为 $\mathcal{L}^p$. 根据不等式

$$|a+b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq [\, 2 \max\{|a|, |b|\} \,]^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

$\mathcal{L}^p$ 按加法和数乘运算形成一个线性空间，这里几乎处处相等的函数视为 $\mathcal{L}^p$ 中同一个元素.

对 $x \in \mathcal{L}^p$，定义

$$\|x\| = \left[\int_\Omega |x(t)|^p \ d\mu(t)\right]^{1/p},$$

容易验证如此定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数定义（1）（2）.
利用 Minkowski 不等式可验证它也满足（3），于是 $\mathcal{L}^p$ 是一个赋范线性空间.

- 当 $\Omega = [a,b]$，μ 是 Lebesgue 测度时，$\mathcal{L}^p$ 就是上一章的 $\mathcal{L}^p[a,b]$.
- 当 Ω 是样本空间，μ 是概率测度，$\mathcal{L}^p$ 就是所有 p 阶矩有限的随机变量的全体构成的空间.

例 3

在例 2 中，特别地取 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, \mu(n) = 1, n = 1, 2, \ldots,$ 则

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ x = \{\xi_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \right\},$$

相应的范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}, \text{当 } x = \{\xi_n\}.$$

这种特殊的 $\mathcal{L}^p$ 也是赋范线性空间，一般记为 ℓ^p（同上一章的 ℓ^p）.

范数的连续性

定理 1

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，则

(1) 对于 $\forall x, y \in X$，有 $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$.

(2) 范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数，即

$$x_n \to x \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty).$$

(3) 范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的，即

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad x_n + y_n \to x + y,$$

$$\alpha_n \to \alpha,\ x_n \to x \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \alpha_n x_n \to \alpha x.$$

证明

（1）由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y-x\|$.

（2）由（1）知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0,$$

可知 $\|x_n\| \to \|x\|$，即范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.

(3) (i) 由 $\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$ 可知 $x_n + y_n \to x + y$.

(ii) 由 $\alpha_n \to \alpha$ 可知 $|\alpha_n|$ 有界.

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x\| &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \\ &\leq |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| \to 0,\end{aligned}$$

所以范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的.

范数与距离的关系

- 在 $\mathcal{R}^n$ 中，我们看到了范数与距离的关系：$d(x,y) = \|x-y\|$.
- 对赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$，总可以用下面方式引进距离

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad \forall x,y \in X.$$

由范数的定义，易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上，$\forall x, y \in X$，有

（1）

$$d(x,y) = \|x-y\| \geq 0,$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = 0 \text{ 当且仅当 } x = y;$$

（2）

$$d(y,x) = \|y-x\| = |-1| \cdot \|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y);$$

（3）

$$d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

我们把 (X,d) 称为由范数诱导的距离空间.

注 1. 赋范线性空间是距离空间.

今后凡说赋范线性空间的距离都是指由范数诱导的距离.

2. 赋范线性空间有了距离就可以定义开集、闭集、收敛，以及完备性等概念.

事实上，$d(x_n, x) \to 0$ 即 $\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

定义 4

完备的赋范线性空间称为Banach空间.

- Banach 空间是完备的距离空间，因此具有完备距离空间的所有性质.

问题：赋范线性空间一定是距离空间，反过来，距离空间一定是赋范线性空间吗？

赋范线性空间诱导出的距离具有以下性质：

定理 2

设 X 是赋范线性空间，d 是由范数诱导的距离，则对 $\forall x, y, z \in X$，$\alpha \in K$，都有

$$d(x, y) = d(x+z, y+z); \tag{1}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y). \tag{2}$$

证明：

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= \|(x+z)-(y+z)\| \\ &= \|x-y\| = d(x, y); \end{aligned}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \cdot \|x-y\| = |\alpha|\, d(x, y).$$

- 上述（1）（2）是范数诱导的距离需要满足的必要条件.
- 不是所有的距离都是由范数产生的.

  例：在空间 S，即全体实数列组成的集合上定义距离

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

  其中 $x=(\xi_k),y=(\eta_k)\in S$.

  现考虑 $d(\alpha x,0)$，显然，只要 $\alpha\neq 0$，则 $d(\alpha x,0)\neq|\alpha|\,d(x,0)$.

  可见，这个距离不满足（2）式，因此空间 S 中的距离不是由任何一个范数诱导而来的.

- 赋范线性空间有了距离就可以考虑空间的完备性，有了完备性，极限运算才能很好地进行.

- 任何一个距离空间都可以完备化，赋范线性空间是距离空间，因而任何赋范线性空间都可以完备化.

定理 3

赋范线性空间可以完备化.

证明：略（根据距离空间的完备化方法来证明赋范线性空间的完备性）.

例 1

$C[a,b]$：闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体. 定义

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \ \forall x \in C[a,b].$$

由范数诱导的距离

$$d\,(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|, \ \forall x,y \in C[a,b].$$

易验证 $C[a,b]$ 是线性空间，并且是完备的，可分的，所以 $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

例 2

设 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数，在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt.$$

可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数，即 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是一个赋范线性空间. 但在由此范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

下是不完备的，因此赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ 不完备.

同样可以证明在范数 $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$，$p \geq 1$ 下形成的赋范线性空间都是不完备的.

完备化空间为

$$\left(\tilde{X}, \|\cdot\|_1\right) = \left\{ x(t) \middle| \int_a^b |x(t)| dt < \infty \right\}$$
$$= \{\text{全体在 [a,b] 上绝对可积的函数}\}.$$

可以看到这个新空间 $\tilde{X}$ 中的元素比 $C[a,b]$ 中的元素增加了，使得所有的 Cauchy 列都收敛.

$\mathcal{L}^p$ 空间

定义 5

- 设 $f(x)$ 是定义在区间上的可测函数，$p \geq 1$. 若 $|f|^p$ 在 $[a,b]$ 上可积，称 f 是 p 次幂可积的.
  全体在 $[a,b]$ 区间上 p 次幂可积的函数记为 $\mathcal{L}^p[a,b]$，简记为 $\mathcal{L}^p$ 空间，即

$$\mathcal{L}^p[a,b] = \left\{ x(t) \;\middle|\; \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

- $\mathcal{L}^p$ 中两个元 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 看作是相等的，如果 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是几乎处处相等的，即 $x(t) = y(t)$ a.e. 于 $[a,b]$.

设 $x=x(t)$，$y=y(t)\in\mathcal{L}^p$，$\alpha\in K$，定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad (\alpha x)(t)=\alpha\ x(t),\quad t\in[a,b].$$

利用不等式

$$|a+b|^p\le 2^p(|a|^p+|b|^p)$$

可以证明 $\mathcal{L}^p$ 是线性空间.

下面讨论如下内容：

（1）验证 $\mathcal{L}^p$ 空间是赋范线性空间；

（2）讨论 $\mathcal{L}^p$ 空间的完备性、可分性；

（3）$p=\infty$ 的情形；

（4）研究 $\mathcal{L}^p$ 的离散情形：ℓ^p 空间.

引理 1（Hölder 不等式）

设 E 是 Lebesgue 可测集，$x(t)$，$y(t)$ 是 E 上可测函数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ，则

$$\int_E |x(t)y(t)|dt \leqslant \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_E |y(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

引理 2（Minkowski 不等式）

设 E 是 Lebesgue 可测集，$x(t)$，$y(t)$ 可测，$p \geqslant 1$, 则

$$\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_E |y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

引理 3（Luzin 定理）

设 $f(x)$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数，则对任意的 $\delta > 0$ ，存在闭子集 $F_\delta \subset E$ ，使 $f(x)$ 在 F_δ 上是连续函数且 $m\,(E \backslash F_\delta) < \delta$.

引理 4（Weierstrass 定理）

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在多项式函数列 $\{f_n(x)\}$ ，使 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

$\mathcal{L}^p$ 空间：赋范线性空间

在 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 中，引入范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

（1）$\|x\| \geq 0$，$\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$，a.e.；

（2）

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \left(\int_a^b |\alpha\ x(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|x\|; \end{aligned}$$

（3）由 Minkowski 不等式得 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$\mathcal{L}^p[a,b]$ 空间：完备性

定理 4

$\mathcal{L}^p[a,b]$ 是 Banach 空间.

证明：

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 中的 Cauchy 列，则有正整数 N_k，使当 $n,m \geqslant N_k$ 时，$d\left(x_n, x_m\right) < \frac{1}{2^k}$，其中 $d(x,y) = \|x-y\|$.

不妨设 $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \ldots$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} d\left(x_{N_{k+1}}, x_{N_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

若 $p=1$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \left|x_{N_{k+1}}(t)-x_{N_k}(t)\right| dt=\sum_{k=1}^{\infty} d\left(x_{N_{k+1}},x_{N_k}\right)<\infty.$$

若 $p>1$，则存在 $q>1$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|x_{N_{k+1}}(t)-x_{N_k}(t)\right| dt\\
\leqslant&\left(\int_a^b \left|x_{N_{k+1}}(t)-x_{N_k}(t)\right|^p dt\right)^{1/p}\times\left(\int_a^b 1dt\right)^{1/q}\\
=&\, d\left(x_{N_{k+1}},x_{N_k}\right)(b-a)^{1/q},
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t) \right| dt \leqslant (b-a)^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} d\left(x_{N_{k+1}}, x_{N_k}\right) < \infty.$$

则

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t) \right| \right) dt < \infty.$$

这说明 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{N_i+1}(t) - x_{N_k}(t)|$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有限，从而 $\sum_{k=1}^{\infty} \left[x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t) \right]$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛.

$$于是\ \lim_{j\to\infty} x_{N_j}(t) = x_{N_1}(t) + \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j-1}\left[x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t)\right]$$

在 $[a,b]$ 上几乎处处存在. 设 $\lim\limits_{j\to\infty} x_{N_j}(t) = x(t)$, a.e. 于$[a,b]$, 则 $x(t)$ 可测.

根据 Fatou 引理（f_n 非负可测，则 $\int \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int f_n$），

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|x_{N_k}(t) - x(t)\right|^p dt &\leqslant \varliminf_{j\to\infty}\int_a^b \left|x_{N_k}(t) - x_{N_j}(t)\right|^p dt \\ &\leqslant \varliminf_{j\to\infty}\left[d\left(x_{N_k}, x_{N_j}\right)\right]^p \leqslant \frac{1}{2^{kp}},\end{aligned}$$

故 $X_{n_k}(t) - x(t) \in \mathcal{L}^p[a,b]$. 已知 $x_{N_k}(t) \in \mathcal{L}^p[a,b]$ ，由 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 是线性空间可知 $x(t) \in \mathcal{L}^p[a,b]$.

任给 $\epsilon > 0$ ，由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，存在正整数 N ，使

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ 当 } n, m \geqslant N.$$

显然存在正整数 K ，使 $N_k \geqslant N$ ，当 $k \geqslant K$. 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \epsilon, \text{ 当 } n \geqslant N, k \geqslant K.$$

根据 Fatou 引理，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}[d(x_n, x)]^p = \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \, dt &\leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_a^b |x_n(t) - x_{N_j}(t)|^p \, dt \\ &= \varliminf_{j\to\infty} \left[d\left(x_n, x_{N_j}\right)\right]^p \leqslant \epsilon^p.\end{aligned}$$

由此可见，$d(x_n, x) \to 0, n \to \infty$，即 $\|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$. $\square$

$\mathcal{L}^p[a,b]$ 空间：可分性

定理 5

$\mathcal{L}^p[a,b]$ 空间是可分的.

分析：只要找到 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 中的可数稠密子集即可：有理系数多项式全体.

（1）$\forall x \in \mathcal{L}^p[a,b]$ ，首先找到连续函数 $y(t)$ ，使得 $\|x(t)-y(t)\| < \epsilon$;

（2）进一步可以找到有理系数多项式 $p(t)$ ，使得 $\|y(t)-p(t)\| < \epsilon$，于是 $\|x(t)-p(t)\| < 2\epsilon$;

（3）由于全体有理系数多项式是 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 中的可数子集，所以 $\mathcal{L}^p$ 可分.

证明：

（1）（i）对于 $\forall\, x(t) \in \mathcal{L}^p$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \leq n, \\ 0, & |x(t)| > n. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

显然, $x_n(t) \in \mathcal{L}^p$ 且 $|x_n(t)| \leqslant n$。

（ii）由于

$$n^p\ m\{t \mid |x(t)| > n\} \leqslant \int_{\{t \big| |x(t)|>n\}} |x(t)|^p dt < \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty,$$

所以 $m\{t\big|\ |x(t)| > n\} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

（iii）由积分的绝对连续，有

$$\|x_n - x\|^p = \int_{\{t \big| |x(t)|>n\}} |x(t)|^p dt \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即对于 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$ ，当 $n \geqslant N$ 时，$\|x_n - x\| < \epsilon$.

(2) 对于上面的 $x_n(t)$，由 Luzin 定理，存在连续函数 $y(t)$，除去一个可测子集 A 外，

$$x_n(t) = y(t), \quad |y(t)| \le n, \text{ 且 } \quad mA < \left(\frac{\epsilon}{2n}\right)^p.$$

于是

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - y(t)\| = \left(\int_A |x_n(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{1/p} &\leqslant \left(\int_A (2n)^p\right)^{1/p} \\ &= 2n \cdot (mA)^{1/p} < \epsilon.\end{aligned}$$

(3) 对于连续函数 $y(t)$ ，由 Weierstrass 定理，$y(t)$ 可以用有理系数多项式 $p(t)$ 一致逼近，即

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\epsilon}{(b-a)^{1/p}},\quad \forall t\in[a,b].$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=\left(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p dt\right)^{1/p}<\epsilon.$$

即

$$\|x-p\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-y\|+\|y-p\|<3\epsilon.$$

注：在 $[a,b]$ 上连续函数属于 $\mathcal{L}^p[a,b]$ ，但连续函数的全体在 $\mathcal{L}^p$ 的范数下不完备。但它们是 $\mathcal{L}^p[a,b]$ 中的稠子集，也就是说，$\mathcal{L}^P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 在 $\mathcal{L}^p$ 范数下的完备化空间.

$\mathcal{L}^\infty$ 空间

定义 6

设 E 是可测集，$x(t)$ 是 E 上可测函数. 如果存在 E 的可测集 $E_0 \subset E, mE_0 = 0$ ，且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界，则称 $x(t)$ 为本性有界函数.

例

$\mathcal{L}^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数，其上定义

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subset E}} \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|.$$

1. 上述下确界是可达的，即 $\exists E_0 \subset E, mE_0 = 0$ ，使得 $\|x\| = \sup\limits_{E \setminus E_0} |x(t)|$.

证明：由下确界的定义，$\forall \frac{1}{n}, \exists E_n \subset E$ ，使得 $mE_n = 0$ 且

$$\sup_{E \setminus E_n} |x(t)| \leqslant \|x\| + \frac{1}{n}.$$

令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E_0 \subset E, mE_0 = 0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\| \leqslant \sup_{E \setminus E_0} |x(t)| \leqslant \sup_{E \setminus E_n} |x(t)| < \|x\| + \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$ ，得 $\|x\| = \sup_{E \setminus E_0} |x(t)|$，即 $x(t)$ 在 $E \setminus E_0$ 上有界（几乎处处有界）.

2. 称 $\|x\|$ 是 $x(t)$ 的本性上界，记为

$$\|x\| = \underset{E}{\text{ess sup}}\, |x(t)|.$$

3. $\|x\|$ 是 X 上的范数.

4. 收敛性. $x_n \to x \quad (n \to \infty)$，即 $\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$，等价于 $\{x_n(t)\}$ 除去一零测集外，在 E 上一致收敛于 $x(t)$ 。
由（1），$\exists E_0 \subset E, mE_0 = 0$, 使得

$$\|x_n - x\| = \sup_{E \backslash E_0} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即 $x_n(t) \rightrightarrows x(t), \quad \forall t \in E \backslash E_0.$

定理 6

$\mathcal{L}^\infty(E)$ 是不可分的 Banach 空间.

证明: 略.

命题

当 $mE < \infty$ 时，如果 $1 \leqslant p_2 < p_1 < \infty$ ，则

$$\mathcal{L}^\infty(E) \subset \mathcal{L}^{p_1}(E) \subset \mathcal{L}^{p_2}(E).$$

注：由此可证明，$\forall\, x(t) \in \mathcal{L}^\infty(E)$，$mE < \infty$，有 $\|x\|_p \to \|x\|_\infty \ (p \to \infty)$.

证明：

(i) 设 $x(t)\in\mathcal{L}^\infty(E)$，$x(t)$ 本性有界，结合 $mE<\infty$，有 $x(t)\in\mathcal{L}^{p_1}(E)$，即 $\mathcal{L}^\infty(E)\subset\mathcal{L}^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in\mathcal{L}^{p_1}(E)$，令 $B=\{t\in E\big||x(t)|\le 1\}$. 则

$$\begin{aligned}\int_E |x(t)|^{p_2}dt &= \int_B |x(t)|^{p_2}dt+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_2}dt\\ &\le m\ B+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_1}dt\\ &\le m\ E+\int_E |x(t)|^{p_1}dt<\infty,\end{aligned}$$

即 $x(t)\in\mathcal{L}^{p_2}(E)$.

ℓ^p 空间

ℓ^p $(p \geq 1)$ 表示全体 p 次方可和的数列，即

$$\ell^p = \left\{ x = (\xi_k) \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}.$$

1. 在线性空间 ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ 上赋予范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}.$$

2. 设 ℓ^∞ 是全体有界的数列，即

$$\ell^\infty = \left\{ x = (\xi_k) \;\middle|\; \{\xi_k\} \text{ 是有界的数列} \right\}.$$

在其上赋予范数 $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$.

结论:

(1) $\|x\|_p$ $(p \geqslant 1)$ 是范数;

(2) ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ 为可分的 Banach 空间;

(3) ℓ^∞ 是不可分的 Banach 空间.

特别地，当 $p = 2$ 时，$\mathcal{L}^2$ 空间和 ℓ^2 空间是完备、可分的赋范线性空间, 即可分的 Banach 空间。进一步, 我们以后会看到：他们都是内积空间（Hilbert 空间）.

凸集

定义 1

设 X 是线性空间，$A \subset X$，如果对任意的 $x, y \in A$，任意的 $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$，都有 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$，则称 A 是 X 中的凸集.

注：任意多个凸集的交集是凸的.
事实上，如果对于每个 $\gamma \in \Gamma$，A_γ 是凸集，则对于任意 $x, y \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 及 $\alpha \in [0,1]$，有 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A_\gamma$，$\forall \gamma \in \Gamma$，即

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma.$$

定理 1

设 $B(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|<1\}$ 是赋范线性空间 X 中开的单位球，则 $B(0,1)$ 是凸的.

注：单位球是 0 点的一个凸邻域，这是赋范线性空间十分重要的几何特征.

例

设 X 是有序实数组 $x=(x_1,x_2)$ 组成的空间，在 X 上定义

$$\phi(x)=\left(\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|}\right)^2.$$

则曲线 $\phi(x)=1$ 围成的区域不是凸集.
根据定理 1，可知 $\phi(x)$ 不是 X 上的范数.

子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，X_1 是 X 上的一个线性子空间，则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范线性空间，称之为 $(X, \|\cdot\|)$ 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2

设 X 是一个赋范线性空间，X_1 是 X 的一个子空间，如果 X_1 是开集，则 $X_1 = X$.

注 1. 定理 2 说明，赋范线性空间 X 的真子空间不能是开集.
注 2. 在 $\mathcal{R}^n$ 空间，所有的子空间都是闭的，但是在无穷维空间，子空间就可能不是闭的.

例

设 $Y=\{\{x_n\}\in\ell^\infty \mid$ 存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 有 $x_n=0\}$, 即 Y 中的数列仅有有限项不等于零. 显然 Y 是 ℓ^∞ 的一个线性子空间, 但是 Y 不是闭的.

事实上, 令 $y_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right), y=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right)$, 显然 $y_n\in Y$, 并且

$$\|y_n-y\|=\left\|\left(0,\cdots 0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right)\right\|=\frac{1}{n+1}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$, 所以 $\lim_{n\to\infty}y_n=y$. 但是 $y\notin Y$. 因此 Y 不是闭的.

定理 3

设 X 是赋范线性空间，$X_1 \subset X$ 是子空间，则

(1) 若子空间 X_1 是完备的，则 X_1 是闭的;

(2) 若 X 是 Banach 空间，X_1 是 X 的闭子空间，则 X_1 一定是 Banach 空间.

证明:

(1) 由完备性和闭集的定义.

(2) 根据定理，完备空间的任何闭子空间完备.

例

C 表示收敛数列的全体，定义范数 $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n|$，在通常加法和数乘的意义下，$C$ 是 Banach 空间 ℓ^∞ 的子空间.

命题

C 是 Banach 空间 ℓ^∞ 的闭子空间. $\Rightarrow C$ 是 Banach 空间.

证明: 设 $\{x_n\}$ 是 C 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, 其中 $x_n = \left(\xi_k^{(n)}\right)$, $x_0 = \left(\xi_k^{(0)}\right)$, 我们要证明 $x_0 \in C$, 即 x_0 是一个收敛的数列. 只需证 x_0 是一个 Cauchy 数列.

由于 $C \subset \ell^\infty$, 所以 $\{x_n\}$ 也是 ℓ^∞ 中的 Cauchy 列, 在 ℓ^∞ 中按范数收敛到 x_0, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geqslant N$ 时,

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此当 $n \geqslant N$ 时, 对于每一个 k , 都有 $\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

因为 $x_N = \left(\xi_k^{(N)}\right)_{k=1}^{\infty} \in C$ ，x_N 是一个收敛的数列 $(k \to \infty)$ ，所以 $\exists K$ ，当 $k, l \geqslant K$ 时，$\left|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

于是

$$\begin{aligned} \left|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}\right| &\leqslant \left|\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}\right| + \left|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}\right| + \left|\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

从而 $\left(\xi_k^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列，即它是收敛的数列. 因此 $x_0 \in C$. 所以 C 是 Banach 空间 ℓ^∞ 的闭子空间，由定理 3 (2) 知，C 是 Banach 空间.

例

$C_0=\{$全体收敛到 0 的数列$\}$，定义范数 $\|x\|=\sup\limits_k |\xi_k|$. 则 C_0 是 C 的闭子空间.

证：显然 C_0 是 C 的子空间，需要证明是闭的，只需证明，若

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0=\left(\xi_k^{(0)}\right) \quad (n\to\infty),$$

则 $x_0\in C_0$, 即 x_0 是收敛到 0 的数列.

注意到，在 C 中收敛是一致收敛，所以对于 $\forall\epsilon>0$, $\exists N$，当 k 充分大时，

$$\left|\xi_k^{(0)}\right| \leqslant \left|\xi_k^{(0)}-\xi_k^{(N)}\right|+\left|\xi_k^{(N)}\right|<\epsilon.$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k^{(0)}=0$. 我们有 $x_0\in C_0$, 即 c_0 是 C 的闭子空间.

综上, $C_0\subset C\subset \ell^\infty$ （都是 ℓ^∞ 的闭子空间）.

Riesz 引理

(1) 若 M 是赋范线性空间 X 中的一个真子空间，那么 M 可能在 X 中稠密，例如多项式函数的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间. 但在有限维空间，真子空间不可能在全空间中稠密.

(2) 若 M 是 X 的闭子空间，M 要在 X 中稠密只能是 $M=X$.

(3) 若 M 是 X 中的一个真闭子空间，则一定存在一个 X 中的点，它和 M 有正距离. (这个正距离能有多大?)

在通常的三维 Euclid 空间，设 M 是通过原点的平面（真的闭子空间），M 外的一个向量 x 与平面 M 的距离 $d(x, M) = \|x\|$ 当且仅当 x 与平面 M 正交（垂直）.

在一般的赋范线性空间中没有正交的概念，但我们能够问："X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x, M) = \|x\| > 0$?"

在一般的 Banach 空间，这一问题的答案是否定的. 但我们有下面的 Riesz 引理，这是赋范线性空间一个很重要的几何性质.

定理 4（Riesz 引理）

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间，M 是 X 的真的闭子空间，则对 $\forall\ 0<\epsilon<1, \exists\ x_0 \in X$，使得 $\|x_0\|=1$，且

$$d\left(x_0, M\right) \triangleq \inf_{x \in M} d\left(x_0, x\right)=\inf_{x \in M}\left\|x_0-x\right\| \geq 1-\epsilon .$$

线性空间中最重要的概念是线性相关与线性无关.

定义

线性空间 X 中有限的向量集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 说是线性相关的，如果存在不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$. 否则，就称其为线性无关的，这时关系 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$ 蕴含 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 一个无穷的向量集合 S 称为线性无关的，如果 S 的每个有限子集都是线性无关的. 否则，S 称为线性相关的.

容易看出，包含一个线性相关子集的集合一定线性相关，线性无关集一定不包含零向量.

定义

设 X 是线性空间，如果存在正整数 n，使 X 包含由 n 个向量组成的线性无关集，而且 X 中每 $n+1$ 个向量的集合都是线性相关的，则 X 称为有限维的，如此的 n 称为 X 的维数，有时记作 $\dim X = n$.

只有零向量的线性空间也称为有限维的，即零维的. 如果 X 不是有限维的，就称为无穷维的，这时记作 $\dim X = \infty$.

正如我们将要看到的，在泛函分析中最感兴趣的空间是无穷维的，但是考虑有限维空间却经常是有益的.

定义

线性空间 X 中的有限子集 S 称为 X 的基，如果 S 是线性无关的，而且 S 张成的线性空间就是整个 X.

- 在线性代数中我们已经知道：线性空间 X 是 n 维的，当且仅当 X 有一个由 n 个元素组成的基. n 维线性空间的每个基都含有 n 个元素.
- 有限维线性空间 X 的任意一个线性子空间 M 亦是有限维的，而且 $\dim M \leqslant \dim X$.

定义

设 T 是从赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ 到赋范线性空间 $\langle Y, \ \|\cdot\|_2\rangle$ 的映射，如果对一切 $x, y \in X$ 和数 α, β 都有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称 T 为从 X 到 Y 的线性算子．如果还存在常数 $C>0$，使对一切 $x \in X$ 都有

$$\|Tx\|_2 \leqslant C\|x\|_1,$$

则称 T 是有界的. 如上的 C 的下确界称为 T 的范数，记作 $\|T\|$. 显然

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2.$$

线性算子和一般函数不一样，它的性质要整齐得多. 这表现在下面结果中.

定理 1

设 X, Y 都是赋范线性空间，T 是从 X 到 Y 的线性算子. 则下述条件等价:

(1) T 在 X 中某点连续;

(2) T 在 X 中所有点连续;

(3) T 是有界的.

证明：设 X, Y 的范数分别为 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$.

$(3) \Rightarrow (2)$. 因 T 有界，存在常数 $C > 0$，使

$$\|Tx\|_2 \leqslant C\|x\|_1，\text{当} x \in X.$$

任给 $x, x' \in X$，则 $x - x' \in X$，于是

$$\|Tx - Tx'\|_2 = \|T(x - x')\|_2 \leqslant C\|x - x'\|_1,$$

这表明 T 在 x' 处连续.

(2) $\Rightarrow$ (1). 是显然的.

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 T 在 $x_0 \in X$ 处连续. 于是存在 $\delta > 0$，使

$$\|Tx - Tx_0\|_2 \leqslant 1\text{，当 } \|x - x_0\|_1 \leqslant \delta.$$

任给 $x \in X, x \neq 0$，记 $x_1 = \frac{\delta}{\|x\|_1}x$，由

$$\|(x_1 + x_0) - x_0\|_1 = \|x_1\|_1 = \delta,$$

可知

$$\|Tx_1\|_2 = \|T(x_1 + x_0) - Tx_0\|_2 \leqslant 1.$$

因 $x = \frac{\|x\|_1}{\delta} x_1$，故 $Tx = \frac{\|x\|_1}{\delta} Tx_1$，于是

$$\|Tx\|_2 = \frac{\|x\|_1}{\delta} \|Tx_1\|_2 \leqslant \frac{\|x\|_1}{\delta}.$$

取 $C = \frac{1}{\delta}$，则

$$\|Tx\|_2 \leqslant C\|x\|_1, \text{ 当} x \in X.$$

即 T 是有界的. 证毕.

设 X, Y 都是赋范线性空间，T 是从 X 到 Y 的有界线性算子. 记

$$R(T) \overset{\mathrm{d}}{=} \{y \in Y : 存在\ x \in X,\ 使\ y = Tx\},$$

称为 T 的值域 . 如果 $R(T) = Y$，称 T 是满射的. 如果对任何的 $y \in R(T)$，只有唯一的 $x \in X$，使 $y = Tx$，称 T 是单射的. 这时，可以定义从 $R(T)$ 到 X 中的算子:

$$T^{-1}y = x,\ 当\ y = Tx.$$

称 T^{-1} 为 T 的逆算子 . 显然 T^{-1} 也是线性算子，但一般说来 T^{-1} 未必是有界的.

如果 T 既是单射，又是满射的，则 T^{-1} 是从 Y 到 X 上的线性算子. 进一步，如果 T^{-1} 还是有界的，称 T 是有界可逆的.

例

设 $f \in C[0,1]$，定义

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \text{当}\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

易见 T 是从 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 中的有界线性算子. 根据数学分析知识容易知道，T 的值域为

$$R(T) = \{g : g' \in C[0,1]\ \text{且}\ g(0) = 0\},$$

而且 T 是单射的，当 $g \in R(T)$，

$$\left(T^{-1}g\right)(t) = g'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

这里 g' 表示 g 的导函数.

定义

线性空间 X 上的复值函数 $f: X \to \mathbf{C}$，称为线性泛函，如果对任意 $x, y \in X$，数 α, β 都有

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

显然，赋范线性空间上线性泛函是线性算子的特殊情形. 因此从定理 1 可知，赋范线性空间上线性泛函是有界的当且仅当它是连续的.

引理 1

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是赋范线性空间 X 中线性无关元素，则有 $\mu > 0$，使

$$|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leqslant \mu \left\| \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \right\|$$

对任意的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 成立.

证明：设

$$r = \inf \left\{ \left\| \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \right\| : \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| = 1 \right\}.$$

往证 $r > 0$.

由下确界定义，有

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(k)}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j^{(k)}\right|=1,\ k=1,2,\cdots,$$

使

$$\|y_k\|\to r,\ \text{当}\ k\to\infty.$$

从 $\left|\alpha_j^{(k)}\right|\leqslant 1, k=1,2,\cdots,j=1,\cdots,n$，可知存在 $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使

$$\alpha_j^{(k_m)}\to\beta_j,\ \text{当}\, m\to\infty, j=1,\cdots,n,$$

而且

$$|\beta_1|+\cdots+|\beta_n|=1.$$

当然 $x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \neq 0$. 此外由

$$\|y_{k_m} - x\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j^{(k_m)} - \beta_j\right| \|x_j\|$$

可见 $y_{k_m} \to x$，从而 $\|y_{k_m}\| \to \|x\|$，当 $m \to \infty$. 于是 $0 < \|x\| = r$.
取 $\mu = \frac{1}{r}$, 则由 r 的定义，

$$1 \leqslant \mu \left\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\right\|, \text{当} \left|\alpha_1\right| + \cdots + \left|\alpha_n\right| = 1.$$

现在，对一般的不全为 0 的 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，我们有

$$1 \leqslant \mu \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} \left|\alpha_j\right|} x_k \right\|.$$

由此立见引理成立. 证毕.

命题 2

设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是赋范线性空间 X 的基，则

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} e_j \to y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

必须且只须

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_j^{(k)} = \alpha_j, j = 1, \cdots, n.$$

证明: 易见

$$y_k - y = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(k)} - \alpha_j\right) e_j,\ k = 1, 2, \cdots$$

由引理 1，存在正数 μ, 对所有 k,

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j^{(k)}-\alpha_j\right| \leqslant \mu\left\|y_k-y\right\|.$$

由此可得必要性.

另外,

$$\left\|y_k-y\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j^{(k)}-\alpha_j\right|\left\|e_j\right\|,$$

可见充分性也成立. 证毕.

- 由命题 2 可见, 有限维赋范线性空间中点列收敛等价于按坐标收敛.

命题 3

任何 n 维实赋范线性空间必与 $\mathbb{R}^n$ 线性同构且同胚.

证明：设 X 是 n 维实赋范线性空间. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 对每个 $x \in X$, 有唯一表达式

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

这里 ξ_j $(j = 1, \cdots, n)$ 都是实数. 故 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. 定义 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 T：

$$Tx = (\xi_1, \cdots, \xi_n), \text{ 当 } x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n.$$

易证 T 是线性的、双射（既是单射又是满射），故 T 是同构映射.

根据引理 1 ，存在 $\mu > 0$, 对一切 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leqslant \mu \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\|.$$

于是对每个 $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in X$,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \right)^2 \\ &\leqslant \mu^2 \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\|^2 = \mu^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

即 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|$. 这说明 T 是有界的，根据定理 1，T 是连续的.

另一方面，对任何 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$，$x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \in X$，且 $Tx = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leqslant \sum_{j=1}^n |\xi_j| \, \|e_j\| \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{1/2} \|Tx\|,
\end{aligned}$$

这里 $\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{1/2}$ 是与 x 无关的常数. 这说明 T 的逆映射 T^{-1} 是有界的，从而连续. 故 X 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚. 证毕.

命题 4

在有限维赋范线性空间中, Bolzano-Weierstrass 聚点原理成立.

证明：设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是有限维赋范线性空间 X 的一个基，
$y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} e_j \in X, \|y_k\| \leqslant M, k = 1, 2, \cdots$，这里 M 是正的常数.
根据引理 1 ，存在正数 μ，使

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j^{(k)}\right| \leqslant \mu \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} e_j\right\| = \mu \|y_k\| \leqslant \mu M.$$

显然可有 $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使对每个 $j = 1, \cdots, n$,
$\lim\limits_{m \to \infty} \alpha_j^{(k_m)} = \beta_j$ 都存在. 由命题 2 ,

$$y_{k_m} \to \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \in X, \ m \to \infty. \quad \square$$

命题 5

赋范线性空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明:

"$\Rightarrow$" 由命题 3 知,有限维赋范线性空间与 $\mathbb{R}^n$ 线性同构且同胚,且 $\mathbb{R}^n$ 中有界集是列紧的,所以有限维空间的有界集是列紧集.

"$\Leftarrow$" 假如不然,X 是无穷维的. 考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$,任取 $x_1 \in S$,记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

因为 X 是无穷维的,所以由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间. 由 Riesz 引理,存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$ 使得

$$\|x_2 - x\| \geq \frac{1}{2}, \ \forall x \in X_1,$$

特别地,$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

令 X_2 是由 $\{x_1, x_2\}$ 生成的子空间，同样存在 $x_3 \in S$,

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}, \ \forall x \in X_2,$$

特别地 $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

这样一直做下去，得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,
$\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ $(i \neq j)$，所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列，与 S 列紧矛盾. 所以 X 是有限维的.

推论

设 X 是一个无穷维的赋范线性空间，那么单位球 $B(0,1)$ 和单位球面 $S(0,1)$ 都不是列紧的.

注 1. 如果单位球（面）列紧，由命题 5，则 X 是有限维的.

注 2. 在有限维空间中，任何有界闭集都是自列紧的，但是在无穷维赋范线性空间中，就没有“那么多”的紧集合. 这是有限维空间和无穷维空间的主要区别.

Thank you!