习题 3

1. 设 $\{x_n\}$ 为内积空间 X 中点列, $x \in H$. 若 $\|x_n\| \to \|x\|$, 且 $\forall\, y \in H$, $(x_n, y) \to (x, y)$ $(n \to \infty)$. 证明: $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

2. 设 E_n 是 n 维实线性空间, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 E_n 的一个基, (α_{ij}) $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是正定矩阵, 对 E_n 中的元素 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ 及 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, 定义

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \alpha_{ij} y_j, \tag{1}$$

证明: $(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积. 反之, 设 $(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积, 则必存在正定矩阵 $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 使得 (1) 成立.

3. 设 $M = \{x \mid x = \{\xi_n\} \in \ell^2,\ \xi_{2n} = 0,\ n = 1, 2, \dots\}$. 证明 M 是 ℓ^2 的闭子空间, 且求出 $M^{\perp}$.

4. 在 $C[-1, 1] = X$ 中, 令

(1) $M_1 = \{f \in X \mid f(x) = 0,\ -1 \le x < 0\}$;

(2) $M_2 = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

计算 M_1, M_2 在 X 中关于内积 $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$ 的正交补.

5. 设 X 是内积空间, $A \subset X$. 证明 $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.

6. 设 $A = \{e_k\}$ 是内积空间 X 的标准正交系. 证明 $\forall\, x, y \in X$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)(y, e_k)| \le \|x\|\|y\|.$$

7. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系. 如果对于任意的 $x \in H$, 其 Parseval 等式成立, 即 $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$, 则称 $\{e_n\}$ 是完备的.

下面证明: 如果 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的两个标准正交系, 并且满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|e_n - e'_n\|^2 < 1$, 那么如果 $\{e_n\}$, $\{e'_n\}$ 其中之一是完备的, 则另一个也是完备的.