

习题 1

1. 在 \mathbb{R} 上定义 $d(x, y) = \arctan |x - y|$, 问 (\mathbb{R}, d) 是不是距离空间?

2. 在 n 维欧式空间 \mathbb{R}^n 中, 对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i - y_i|,$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 n 个正数。证明 d 是 \mathbb{R}^n 中的距离, 并且按距离收敛等价于按坐标收敛。

3. 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$, 称

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$$

为点 x 到集合 A 的距离。证明 $\bar{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}$ 且 \bar{A} 是包含 A 的最小闭集。

4. 设 X 按照距离 d 为距离空间, $A \subset X$ 非空。令

$$f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) \quad (x \in X).$$

证明 $f(x)$ 是 X 上的连续函数。

5. 证明集合 $M = \{\sin nx \mid n = 1, 2, \dots\}$ 在空间 $\mathcal{C}[0, \pi]$ 中是有界集, 但不是列紧集。

6. 设 D 是 $[0, 1]$ 区间上具有连续导函数的实函数全体。在 D 上定义

$$d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t) - y'(t)|.$$

(i) 证明 D 是距离空间; (ii) 指出 D 中点列按距离收敛的意义; (iii) 证明 D 是完备的。

7. 证明存在闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数 $x(t)$, 使得

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin x(t) - a(t),$$

其中 $a(t)$ 是给定的 $[0, 1]$ 上的连续函数。