习题 2

1. 在 ℓ^∞（有界序列空间）中，按坐标定义线性运算且对 $x \in \ell^\infty, x = \{\xi_k\}$ 定义 $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n|$. 证明 ℓ^∞ 是一个赋范线性空间.

2. 设在线性空间 X 中定义的距离 d 满足平移不变性和相似性，即 $d(x+z, y+z) = d(x,y)$，$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\ d(x,y)$. 令 $\|x\| = d(x,0)$. 证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

3. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，对于 $x, y \in X$ ，令

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y; \\ \|x-y\|+1, & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

证明 d 是距离，但不是由范数诱导的距离，即不存在 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$，使得 $d(x,y) = \|x-y\|_1$，$x, y \in X$.

4. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，$X \neq \{0\}$. 证明 X 为 Banach 空间的充要条件是 X 中的单位球面 $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 是完备的.

5. 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，令

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \ dt \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |x(t)|,$$

证明 $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

6. 设 X 是 n 维赋范线性空间，E_0 是 X 的真闭子空间，证明存在 $x_0 \in X$ ，使得 $\|x_0\| = 1$ ，且

$$d(x_0, E_0) = \inf_{x \in E_0} \|x_0 - x\| = 1.$$

7. 我们已经学习了距离空间和赋范线性空间的很多知识点和理论，请把学到的知识应用于实设计一个（思政）案例来展现泛函分析的应用和魅力.
（1）选做本题可减免 1-6 题中的 3 题;
（2）可以组队来做（小组人数最多 3 人);
（3）需要提交一个 PPT 和一个 word 文档报告（原则上不低于 800 字）.