

## 第二章泊松过程作业

9月27号 周三课堂上交

1. 假定某天文台观察到的流星流是一个泊松过程，据以往资料统计为每小时平均观察到3颗流星，试求：

- (1) 在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率。
- (2) 该天文台观察到第一颗流星的时间的分布函数。

2. 某个中子计数器对到达计数器的离子只是每隔一个记录一次，假设离子数是按平均率为每分钟4个的泊松过程到达，令 $T$ 是两个相继被记录的离子之前时间间隔（以分钟为单位）。试求：(1)  $T$ 的概率密度函数；(2)  $P\{T \geq 1\}$ 。

3. 设电话员总机在 $(0, t]$ 内接到电话呼叫数 $N(t)$ 是具有强度（每分钟）为 $\lambda$ 的泊松过程，求
- (1) 两分钟内接到3次呼叫的概率；
  - (2) “第二分钟内收到第三次呼叫”的概率。

4. 设商场从早上8:00开始营业，平均每10分钟进入25人，而进入商场的顾客购物的概率为0.2，这里每位顾客是否购物是相互独立，且与进入商场的顾客数相互独立。考虑如下问题：

- (1) 在刚开始的2分钟内，没有顾客购物的概率为多少？
- (2) 试求相邻两购物顾客的购物时间间隔的分布？
- (3) 假设商场会在10:00开始打折，10:00之前进入商场的顾客会一直待在商场里等待打折开始，则在8:00-10:00之内到达的顾客其等待打折的平均总时间为多少？

5. 某商店每日8时开始营业，从8时到11时平均顾客到达率线性增加，在8时顾客平均到达率为5人/时，11时到达率达最高峰20人/时。从11时到13时，平均顾客到达率维持不变，为20人/时，从13时到17时，顾客到达率线性下降，到17时顾客到达率为12人/时。假定在不重叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互独立的，问在8:30-9:30间无顾客到达商店的概率是多少？在这段时间内到达商店的顾客数学期望是多少？

6. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为非齐次泊松过程，其强度函数为

$$\lambda(t) = \frac{1}{1+t^2}, t \geq 0$$

试求：

- (1)  $N(1)$ 的概率分布；
- (2)  $N(4) - N(2)$ 的概率分布；
- (3)  $N(t)$ 的均值函数与方差函数。

7. 考虑一个非齐次的泊松过程，它的强度函数 $\lambda(t)$ 有界且连续。证明：此过程等价于如下过程：记录强度为 $\lambda$ 的泊松过程事件发生的次数，这些事件在时刻 $t$ 以概率 $\frac{\lambda(t)}{\lambda}$ 被记录，并且 $\forall s, \lambda(s) < \lambda$ 。

8. 令 $T_1, T_2, \dots$ 定义强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程的事件发生的间隔时间
- (1)  $T_i$ 独立吗？

(2)  $T_i$  同分布吗?

(3) 求  $T_1$  的分布。

9. 设进入中国上空流星的个数是一泊松过程, 平均每年为 10000 个。每个流星能以陨石落于地面的概率为 0.0001, 试求一个月内落于中国地面陨石数  $W$  的数学期望和方程。
10. 数据包到达某计算机满足参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 设为  $\{N(t), t \geq 0\}$ 。设每个数据包含有的数据帧相互独立都服从参数为  $\beta$  的 Poisson 分布, 且与  $\{N(t), t \geq 0\}$  独立。设  $X(t)$  为在  $[0, t)$  内到达的数据帧的数目, 试求  $P\{X(t) = j | N(t) = n\}$  和  $E(X(t))$ 。