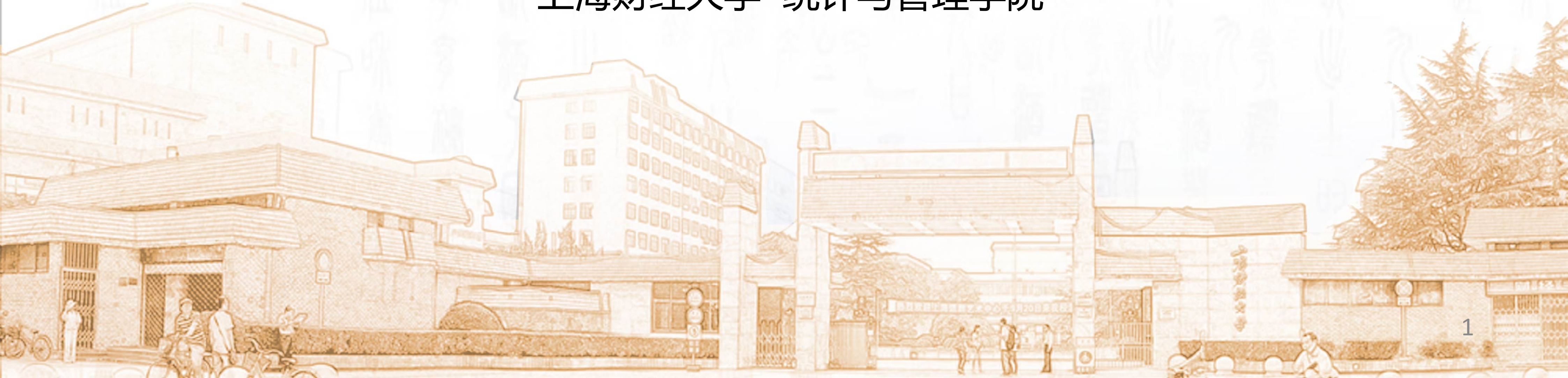
1917—2017
100th Anniversary
Shanghai University of Finance and Economics
上海财经大学 100周年校庆

随机过程

第六章 鞅

上海财经大学 统计与管理学院



第一节：引入

鞅来自于赌博，是一种平均赌本不变的赌法。鞅在金融数学、博弈论、现代概率随机分析中是重要的分析工具之一。

下面我们考虑一个赌博问题。假设一个赌博者正在进行一系列赌博，每次赌博输赢的概率都是$\frac{1}{2}$。令$\{Y_n, n = 1,2,\ldots\}$是一列同分布的随机变量，表示每次赌博的结果，满足

$$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

这里$\{Y_n = 1\}$和$\{Y_n = -1\}$分别表示赌博者在第n次赌博时赢和输的概率。如果赌博者采用的赌博策略（即所下赌注）依赖于前面的赌博结果，那么他的赌博可以用下面的随机变量序列

$$b_n = b_n(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}), n = 2,3,\ldots$$

描述，其中$b_n(b_n < \infty)$是第n次的赌注，若赌赢则获利b_n，否则输掉b_n。

第一节：引入

设X_0是该赌博者的初始赌资，则

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i$$

是他在第n次赌博后的赌资，则有

$$E(X_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = X_n$$

$$E(E(X_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n)) = E(X_{n+1}) = E(X_n)$$

这就说明了，如果每次赌博的输赢机会是均等的，并且赌博策略依赖于前面的赌博结果，则在期望的意义下，赌博是“公平”的。因此，任何赌博者都不可能通过改变赌博策略将公平的赌博变成有利于自己的赌博。

第一节：引入

条件期望的回忆：

- 设X, Y是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的离散型随机变量，则

$$E\left(X \mid Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\left(X = x_i \mid Y = y_j\right)$$

为X关于 $Y = y_j$ 的条件期望。$E[X \mid Y]$是随机变量Y的函数，可以表示成$g(Y)$，它在$Y = y$时，取值为$E[X \mid Y = y]$。

第一节：引入

条件期望的回忆：

$E[X \mid Y]$是随机变量Y的函数，可以表示成$g(Y)$，有如下的性质：

（1） $E[aX + bY \mid Z] = aE[X \mid Z] + bE[Y \mid Z]$；

（2） 当X和Y相互独立时，$E[X \mid Y] = E[X]$；

（3） $E[X] = E\big[E[X \mid Y]\big]$；

（4） $E[f(Y)X \mid Y] = f(Y)E[X \mid Y]$；

（5） $E[E[X \mid Y, Z] \mid Z] = E[X \mid Z]$；（条件期望的过滤性）

（6） $E[c \mid Y] = c$.

（7） (Jensen' s Inequality) 给定凸函数φ，则

$$\varphi(E(X \mid Y)) \le E(\varphi(X) \mid Y).$$

第二节：鞅

定义2.1 离散时间的随机过程$\{X_n, n \geq 1\}$被称为鞅，若对$\forall n \geq 1$，

(1)$E(|X_n|) < \infty$，$n = 1,2,\cdots$；

(2)$E(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots X_n) = X_n$

若$\{X_n, n \geq 1\}$是鞅，则

$$E(X_n) = E(E(X_{n+1}|X_1, X_2, \ldots X_n)) = E(X_{n+1}), \forall n \geq 1$$

即鞅的期望恒等。

第二节：鞅

定义2.2 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 为随机过程, 且X_n可表示为连续函数 $g(Y_1, \ldots, Y_n)$，则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 称为关于 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 的鞅，如果对 $n = 1, \cdots$,

$$E[|X_n|] < \infty$$

且

$E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \cdots, Y_n] = X_n$。

若 $\{X_n\}$ 为关于$\{Y_n, n \geq 1\}$ 的鞅，则

$$E(X_{n+1}) = E\big(E(X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)\big) = E(X_n)$$

即鞅的期望恒等。

例2.1 设$\{X_n\}$为对称随机游动，即$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$，其中$Y_1, Y_2, \cdots$独立同分布服从于两点分布（比如掷硬币）：

$$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$$

求证过程$\{X_n^2 - n\}$是关于$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$的鞅。

第二节：鞅

鞅的二个条件分别对应可积性和鞅性，其中鞅性条件可以进一步推广为对$\forall m > n$情形，满足

$$E(X_m|X_1,X_2 \dots, X_n) = X_n$$

即可。

事实上，有条件期望的过滤性

$$\begin{aligned}
&E(X_{n+k}|X_1,X_2 \dots, X_n) \\
&= E(E(X_{n+k}|X_1,X_2 \dots, X_{n+k-1})|X_1,X_2 \dots, X_n) \\
&= E(X_{n+k-1}|X_1,X_2 \dots, X_n) \\
&= \cdots \\
&= E(X_{n+1}|X_1,X_2 \dots, X_n) = X_n
\end{aligned}$$

此外可以将**定义2.1**中的离散情形鞅推广到连续过程鞅。

第二节：鞅

定义2.3 随机过程$\{X_t, t \in T\}$和$\{Y_t, t \in T\}$，更一般地，取$T = \{0,1,2,\cdots\}$或$[0,+\infty)$，且X_t可表示为连续函数$g(Y_s, s \le t)$, 过程$\{X_t\}$称为关于$\{Y_t, t \in T\}$的鞅，若

（1）$\forall t \in T$，$E|X_t| < \infty$；

（2）$\forall s < t$有$X_s = E(X_t|Y_1, Y_2 \dots, Y_s)$。

如（2）中为≤，则$\{X_t\}$称为关于$\{Y_t, t \in T\}$的下鞅，若（2）中为≥，则$\{X_t\}$称为关于$\{Y_t, t \in T\}$的上鞅。

第二节：鞅

例2.2 设$\{W_t, t \geq 0\}$是布朗运动，$W_t \sim N(0,t)$，求证

(1)$\{W_t, t \geq 0\}$为鞅。

(2)$\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$为$\{W_t, t \geq 0\}$鞅。

(3)对任意实数u，$\left\{\exp\left\{uW_t - \frac{u^2}{2}t\right\}, t \geq 0\right\}$为$\{W_t, t \geq 0\}$鞅。

第二节：鞅

例2.3 若$\{X_n\}$是一随机过程，满足：

$$E\left(|X_n|^2\right) < +\infty$$

求证若$\{X_n\}$关于$\{Y_n, n \geq 1\}$是鞅，则$\{X_n^2\}$是关于$\{Y_n, n \geq 1\}$的下鞅。

注： 同上，可证鞅的凸函数过程都是下鞅，即若函数φ为凸函数，$\{\varphi(X_t)\}$是下鞅。例如，鞅的绝对值过程即$\{|X_t|\}$也是下鞅。

第二节：鞅

定理2. 1

- 如果$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$关于$\{Z_t, t \in T\}$都是下鞅/上鞅/鞅，a, b是两个正常数/正常数/常数，则$\{aX_t + bY_t\}$也是关于$\{Z_t, t \in T\}$的下鞅。
- 若$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$关于$\{Z_t, t \in T\}$都是下鞅，则$\{\max(X_t, Y_t)\}$也是关于$\{Z_t, t \in T\}$的下鞅。
- 若$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$关于$\{Z_t, t \in T\}$都是上鞅，则 $\{\min(X_t, Y_t)\}$也是关于$\{Z_t, t \in T\}$的上鞅。

第二节：鞅

记Y_n为第n局游戏单位赌注的输赢，若每局只下一单位赌注，则n局后的输赢为$X_n = \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_\mathrm{n}$，若第$n$局下注$b_n = b_n(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$，则$n$局后的输赢为
$W_n = b_1 Y_1 + \cdots + b_n Y_n \ = b_1(X_1 - X_0) + \cdots + b_n(X_n - X_{n-1})$，其中$X_0$记为0。

命题2.1 若$\{b_n\}$为一（有界\非负有界\非负有界）序列，且$\{X_n$，$n \geq 1\}$为$\{Y_n, n \geq 1\}$的（鞅\上鞅\下鞅），则$\{W_n, n \geq 1\}$也为$\{Y_n, n \geq 1\}$的（鞅\上鞅\下鞅）。

第三节：停时

定义3.1 对于离散时间的随机过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ ，N为一取值为正整数的随机变量，若事件$\{N = n\}$只和随机变量序列$Z_1, \dots, Z_n$**有关**，则N被称为随机过程$\{Z_n, n \geq 1\}$的停时（马尔可夫时间）。（停时是一个不依赖于“将来”的随机时间）

例：

1. 某投资者购买了一份美式期权，在期满之前的任何一个营业日都可以实施权利，在n时间投资者是否实施期权，取决于该投资者对n时刻所得信息的判断，所以实施期权的日期相对于股票价格来说是一个停时。
2. 考虑公平赌博的例子，赌博者决定何时停止赌博只能以他已经赌过的结果为依据，而不能说，如果我下一次要输我现在就停止赌博，所以这就要求停止时间是一个停时。
3. 投掷硬币由正反面决定输赢1元，并设刚开始拥有5元赌注且决定输光或拥有10元赌本时退出游戏，设Y_n为第n步时手中的赌本，则退出游戏时间为$N = \min\{n: Y_n = 10 \text{ or } 0\}$, 被称为首中时，这里$\{N = n\} = \{0 < Y_1 < 10\} \cap \cdots \cap \{0 < Y_{n-1} < 10\} \cap \{Y_n = 10 \text{ or } 0\}$，只和$Y_1, \dots, Y_n$有关，从而$N$为一停时。

第三节：停时

例3.1 试证下述三个停时条件等价。

- 事件$\{N \le n\}$只和随机变量序列$Z_1, \dots, Z_n$有关
- 事件$\{N = n\}$只和随机变量序列$Z_1, \dots, Z_n$有关
- 事件$\{N > n\}$只和随机变量序列$Z_1, \dots, Z_n$有关

第三节：停时

定义3.2 假设只进行n局游戏，并记游戏的输赢总数为Y_n，若你打算N局后退出游戏，此时你的输赢为Y_N。则最终你在这n局游戏的输赢为$Y_{\min(n,N)}$，称$Y_{\min(n,N)}$为停时N前序列。

命题3.1 若N为一停时，则

1. 若Y_n为鞅，　则$Y_{\min(n,N)}$也是鞅；
2. 若Y_n为上鞅，则$Y_{\min(n,N)}$也是上鞅；
3. 若Y_n为下鞅，则$Y_{\min(n,N)}$也是下鞅。

第三节：停时

定义3.3 对于连续时间的随机过程$\{Z_t, t \geq 1\}$，T为一连续的随机变量，若事件$\{T \leq t\}$只和随机变量序列$Z_s, s \leq t$有关，则T被称为随机过程$\{Z_t, t \geq 1\}$的停时（马尔可夫时间）。

定理3.1（鞅的停时定理）

设$\{X_n, n \geq 1\}$为鞅，N为停时，满足

(1) $P(N < \infty) = 1$;

(2) X_N可积；

(3) $E\left(X_n 1_{\{N>n\}}\right) \to 0$, 当$n \to \infty$时，即 $\lim_{n\to\infty} E\left(X_n 1_{\{N>n\}}\right) = 0$。

则$E(X_N) = E(X_1)$。

第三节：停时

例3.2（随机游动首中时期望） X_n为对称随机游动，并记首中时为$N = \min\{n: |X_n| = K\}$，N是停时变量，此外由之前的结论可知$X_n^2 - n$是鞅，如果鞅的停时定理成立，则$E\left(X_N^2 - N\right) = E\left(X_1^2 - 1\right) = 0$，从而$E(N) = E\left(X_N^2\right) = K^2$.

第三节：停时

例3.3 $\{X(t), t \geq 0\}$为带有（线性）漂移的布朗运动，其中均值参数和方差参数分别为μ和σ^2。对于$a, b > 0$，$-b < x < a$，过程自0出发，在击中$-b$之前击中a的概率

$$P(T_a < T_{-b} < \infty | X(0) = 0) = \frac{e^{2\mu b/\sigma^2} - 1}{e^{2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}$$

其中，T_a表示布朗运动首次击中a的时间。

1917—2017
100th Anniversary
Shanghai University of Finance and Economics
上海财经大学 100周年校庆

谢 谢！

Thank You