目录

1 随机过程的基本概念

1.1 随机过程的定义与有穷维分布族

定义 1.1.1 (随机过程). 给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及指标集 $\mathbb{T} \neq \emptyset$，若 $\forall t, \forall c \in \mathbb{R}, \{\omega | \boldsymbol{X}_t(\omega) \leq c\} \in \mathscr{F}$，则称 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为随机过程 (*Stochastic Process*)。

定义 1.1.2 (样本轨道). 随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 是关于 $t \in \mathbb{T}$ 和 $\omega \in \Omega$ 的二元函数，当 ω 固定，$X(\cdot, \omega)$ 是 $t \in \mathbb{T}$ 的函数，称为样本轨道 (*Sample Path*)。

定义 1.1.3 (有穷维分布族). 给定实值随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$，对于 $\forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}$，可得 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n})$ 的联合分布函数为：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}) = P\{\boldsymbol{X}_{t_1} \leq x_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n} \leq x_{t_n}\}$$

有穷维分布函数族 $\mathscr{D} \triangleq \{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}) | \forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}\}$
定义 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n})$ 的联合矩母函数为：

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u_{t_1}, \cdots, u_{t_n}) = E\left[e^{\sum_{j=1}^n u_{t_j} \boldsymbol{X}_{t_j}}\right]$$

有穷维矩母函数族 $\mathscr{C} \triangleq \{\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u_{t_1}, \cdots, u_{t_n}) | \forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}\}$

定义 1.1.4 (独立随机过程). 随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}) = \prod_{k=1}^n F_{t_k}(x_{t_k}) \quad (\forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n)$$

则称 $\{\boldsymbol{X}_t, t \in \mathbb{T}\}$ 为独立随机过程。

定义 1.1.5 (均值函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$，定义均值函数为：

$$m(t) = E(\boldsymbol{X}_t)$$

定义 1.1.6 (方差函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$，定义方差函数为：

$$D(t) = Var(\boldsymbol{X}_t) = E(\boldsymbol{X}_t - m(t))^2$$

定义 1.1.7 (自相关函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$，定义自相关函数为：

$$R(s,t) = E(\boldsymbol{X}_s \boldsymbol{X}_t)$$

定义 1.1.8 (协方差函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$，定义协方差函数为：

$$k(s,t) = cov(\boldsymbol{X}_s \boldsymbol{X}_t) = E((\boldsymbol{X}_s - m(s))(\boldsymbol{X}_t - m(t))) = R(s,t) - m(s)m(t)$$

1.2 随机过程的分类

定义 1.2.1 (独立增量过程). 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：对于 $\forall 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ ，有 $\boldsymbol{X}_{t_2} - \boldsymbol{X}_{t_1}, \boldsymbol{X}_{t_3} - \boldsymbol{X}_{t_2}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n} - \boldsymbol{X}_{t_{n-1}}$ 相互独立，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为独立增量过程。

定义 1.2.2 (平稳增量过程). 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：对于 $\forall t, h \ge 0$ $(t, t+h \in \mathbb{T})$ ，有 $\boldsymbol{X}_{t+h} - \boldsymbol{X}_t$ 的分布与 t 无关，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为平稳增量过程。

定义 1.2.3 (平稳独立增量过程). 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 既是独立增量过程，又是平稳增量过程，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 是平稳独立增量过程。

定义 1.2.4 (计数过程). $\{\boldsymbol{N}(t), t \ge 0\}$ 称为一个计数过程，若：

(1). $\boldsymbol{N}(0) = 0$

(2). $\boldsymbol{N}(t) \in \mathbb{N}, \forall t \ge 0$

(3). $\boldsymbol{N}(s) \le \boldsymbol{N}(t), \forall s < t$

(4). 当 $s < t$ ，$\boldsymbol{N}(t) - \boldsymbol{N}(s)$ 等于 $(s, t]$ 中发生的事件的个数。

定义 1.2.5 (正态过程). 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 对于 $\forall n \ge 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}$ 有 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n}) \sim N(\mu, \Sigma)$，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为正态过程。

定义 1.2.6 (弱平稳过程/宽平稳过程/协方差平稳过程). 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：

(1) $m(t) \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$

(2) $k(s, s+t) = B(t)$

(3) $E\left(\boldsymbol{X}_t^2\right) < +\infty$

则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为弱平稳过程/宽平稳过程/协方差平稳过程。

定义 1.2.7 (强平稳过程/严平稳过程/狭义平稳过程). 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall h$，有：

$$P\left(\boldsymbol{X}_{t_1} \le \lambda_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n} \le \lambda_n\right) = P\left(\boldsymbol{X}_{t_1+h} \le \lambda_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n+h} \le \lambda_n\right)$$

即 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n})$ 与 $(\boldsymbol{X}_{t_1+h}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n+h})$ 同分布，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为强平稳过程/严平稳过程/狭义平稳过程。

2 泊松过程

2.1 泊松过程的定义

定义 2.1.1 (泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程，若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $\forall s, t \geq 0$，有

$$P\{\boldsymbol{N}(s+t) - \boldsymbol{N}(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

定义 2.1.2 (泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程，若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是平稳增量过程

(3). 对于 $\forall t > 0$ 和足够小的 $h > 0$，有：

$$P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$$
$$P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) \geq 2\} = o(h)$$

2.2 泊松过程的性质

定义 2.2.1 (分类泊松过程). 假定在 s 时刻发生的事件以概率 $P(s)$ 被归为 *1* 型，以概率 $1 - P(s)$ 被归为 *2* 型，且各个事件的归类相互独立。记 $\{\boldsymbol{N}_i(t), t \geq 0\}, i = 1, 2$ 为 t 时 i 型事件发生的个数。

2.3 非齐次的泊松过程

定义 2.3.1 (非齐次泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

(3). $P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) \geq 2\} = o(h)$

则称 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ $(\lambda(t) > 0, t \geq 0)$ 的非齐次泊松过程。

2.4 复合泊松过程

定义 2.4.1 (复合泊松过程)**.** $\{\boldsymbol{Y}_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ 独立同分布，$\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，且 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 与 $\{\boldsymbol{Y}_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ 独立，记：

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{N}(t)} \boldsymbol{Y}_k \ (t \geq 0)$$

则称 $\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$ 为复合泊松过程。

3 离散时间的马尔可夫链

3.1 马尔可夫链的基本概念

3.2 马氏链的状态分类

3.3 转移概率的极限状态与平稳分布

4 连续时间的马尔可夫链

4.1 连续时间马氏链的基本定义

4.2 转移率

4.3 $Kolmogorov$ 方程

4.4 生灭过程

5 布朗运动

5.1 布朗运动的定义及基本性质

5.2 布朗运动的首中时和最大值

5.3 布朗运动的推广