随机过程

第三章 离散时间的马尔可夫链

上海财经大学 统计与管理学院

第一节：马尔可夫链的基本概念

离散时间（参数）马尔可夫链：
离散参数$T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，状态空间$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$的马尔可夫过程。由俄国数学家**马尔可夫**于1907年提出。马尔可夫过程是研究离散事件动态系统状态空间的重要方法，在工业生产、公共卫生和经济管理等领域都用广泛的应用。

定义1.1 如果$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间和参数集合都是离散的，且有马氏性（马尔可夫性）：任$n \geq 1$，任状态$i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j \in E$，有

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\}$$
$$= P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

则称$\{X_n, n \geq 0\}$为马尔可夫链（简记马氏链或Markov链）。

第一节：马尔可夫链的基本概念

注1 由条件独立性的定义，可得上式等价于

$$P\{X_{n+1}=j, X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1} \mid X_n=i\}=$$
$$P\{X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1} \mid X_n=i\}\times P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$

即已知<u>**现在C**</u>（n 时），<u>**未来A**</u>$(n+1$时$)$与<u>**过去B**</u>$(\leq n-1$时$)$条件独立。

注2

马氏性等价于任$0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_r < n < n+m$,
任$i_0, i_1, \cdots i_r, i_n, i_{n+m} \in E$，有

$$P\{X_{n+m} = i_{n+m} \mid X_{n_1} = i_1, \cdots, X_{n_r} = i_r, X_n = i_n\}$$
$$= P(X_{n+m} = i_{n+m} \mid X_n = i_n)$$

第一节：马尔可夫链的基本概念

定义1.2 $\{X_n, n \geq 0\}$为马氏链，即

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

若右方与n无关，则上式可记为p_{ij}，称此马氏链为（时间）齐次的，并称p_{ij}为链的一步转移概率，即“自状态i出发一步到j的转移概率”，称$P = [p_{ij}]$为链的一步转移概率矩阵（可能无穷维）。

容易看出p_{ij}有性质：

（1）$p_{ij} \geq 0$;

（2）$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$。

例1.1【简单的疾病、死亡模型】

考虑一个包含两种健康状态S_1, S_2以及两种死亡状态S_3, S_4的模型，若个体病愈，则认为它处于状态S_1，若它患病，说它处于S_2，个体可以从S_1, S_2进入状态S_3, S_4，易见这是一个马氏链，状态空间为$\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$，一步转移概率矩阵为

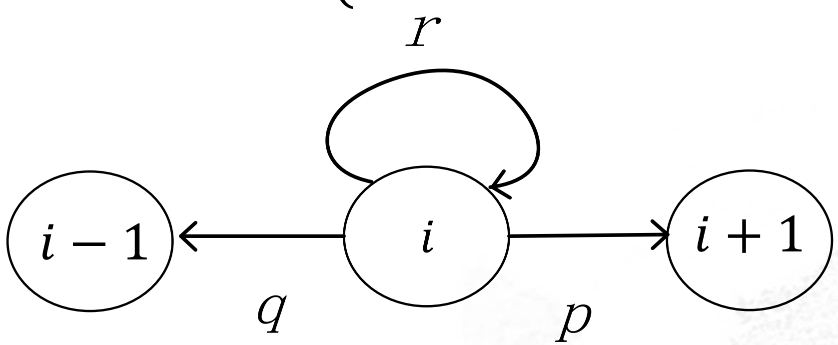
$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一节：马尔可夫链的基本概念

例1.2【自由的随机游动】

设有一质点在数轴上随机游动，每次移动只能向左或向右移动一个单位，或原地不动，移动的概率分别为p,q,r,其中$p+q+r=1$。以X_n表示n次移动后质点的坐标，则$\{X_n,n\geq 1\}$为齐次马氏链，状态空间为$\{0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$，转移概率满足

$$p_{\mathrm{ij}}=\begin{cases}p, j=i+1\\ q, j=i-1\\ r, \quad\ j=i\end{cases}$$



例1.3【Ehrefest模型】

设袋中有a个球，非红即黑，每次从中任取一球，若红（黑）则换一黑（红）放回，以X_n表示n次换后袋中红球个数，则$\{X_n, n \geq 1\}$为齐次马氏链，其状态空间为$E = \{0,1,\cdots,a\}$，

转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{a-1}{a} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{a} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理1.2 设随机过程$\{X_n, n \geq 0\}$满足：

（1）$X_n = f(X_{n-1}, Y_n)\ (n \geq 1)$，其中$f: E \times E \to E$，且$Y_n$取值在$E$上；

（2）$\{Y_n, n \geq 1\}$为独立同分布随机变量，且X_0与$\{Y_n, n \geq 1\}$也相互独立，

则$\{X_n, n \geq 0\}$是马氏链，而且其一步转移概率为$p_{ij} = P(f(i, Y_1) = j)$。

例1.4【独立和】设$\{Y_n\}$为独立同分布的随机序列，$P\{Y_n = k\} = a_k, k = 0,1,2,\cdots$;取

$$X_n = X_0 + \sum_{m=1}^{n} Y_m$$

其中， X_0和$\{Y_n\}$独立，则$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链。

例1.5【存储模型】某商店库房可存货T台，开业时存满货物，以X_n表示开业n个月末库存量。如果进货策略为：若$X_n \le s < T$，则将库房进满，否则不进货。

证明：$\{X_n, n \ge 1\}$为齐次马尔可夫链，并求转移概率矩阵P。

第一节：马尔可夫链的基本概念

定义1.3 称条件概率

$$p_{ij}^{(m)} = P\{X_{n+m} = j | X_n = i\}$$

为马氏链的m步转移概率，此时上式右方与初始时刻n无关，其表示给定时刻n时，过程处于状态i，间隔m步之后过程在时刻$n+m$转移到了状态j的条件概率，从而$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$，
并规定，$p_{ii}^{(0)} = 1, p_{ij}^{(0)} = 0, i \neq j$。

记$P^{(m)} = \left[p_{ij}^{(m)}\right]$为链的$m$步转移概率矩阵，则

$$P^{(1)} = P, P^{(0)} = I。$$

定理1.3 m步转移阵$P^{(m)}=\left[p_{ij}^{(m)}\right]_{i,j\in E}$具有如下性质：

（1）$p_{ij}^{(m)}\geq 0$;

（2）$\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{(m)}=1$;

（3）【Chapman-Kolmogorov方程】

$$p_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}^{(n)}p_{kj}^{(m)}$$

$$P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)}=P^{n+m}=P^{n}\cdot P^{m}$$

例1.6 (赌徒的破产) 系统的状态是0到3，反映赌博者A在赌博期间拥有的钱数，当他输光或拥有钱数为3时，赌博停止；否则他将持续赌博，每次以概率$p=\frac{1}{2}$赢1，以概率$q=1-p=\frac{1}{2}$输掉1。赌徒A从2元赌金开始赌博。求他经过4次赌博之后输光的概率。

定理1.4 对于以P为转移阵，以$E=\{0,1,\cdots\}$为状态空间的齐次马氏链，其r维分布

$$P\{X_{k_1}=i_1,\cdots,X_{k_r}=i_r\}=\sum_{j=0}^{\infty}s_j(0)p_{j,i_1}^{(k_1)}p_{i_1,i_2}^{(k_2-k_1)}\cdots p_{i_{r-1},i_r}^{(k_r-k_{r-1})}$$

其中$0<k_1<k_2<\cdots<k_r$, $p_{ij}^{(m)}$为m步转移概率,
$s_j(0)=P(X_0=j), j\in E$称为过程的初始分布。

注： 回忆$P^{(k)}=P^k$（由$C-K$方程可得），所以时齐马氏链的有穷维分布族由初始分布$P(X_0=j), j\in E$与转移概率矩阵P完全决定。

定理1.5 对于马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$，若$s_i(n) = P(X_n = i)$表示$X_n = i$的概率，$s(n) = \{s_i(n), i \in E\}$表示$X_n$的概率分布行向量，则

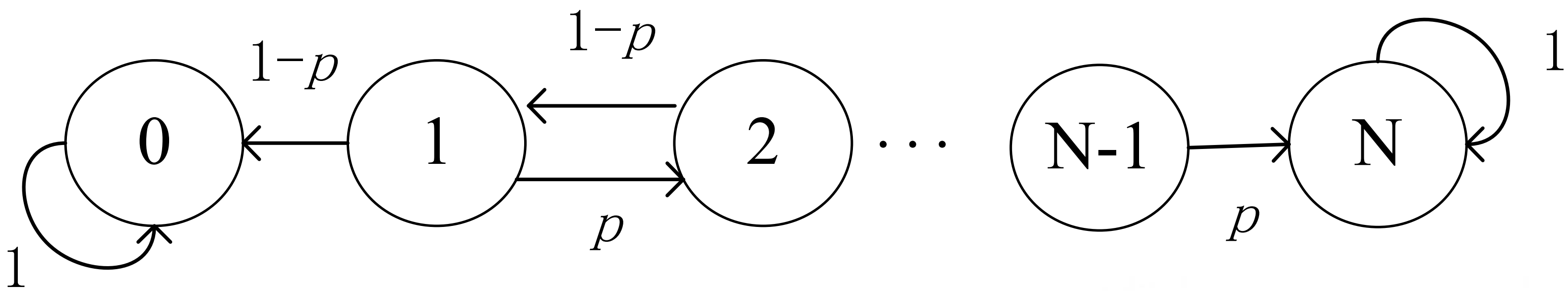
$$s(n+1) = s(n)P，\quad s(n) = s(0)P^n$$

例1.7 【市场占有率模型】某种鲜奶A改变了广告方式。经调查发现买A种鲜奶及另外三种鲜奶B, C, D的顾客每两个月的平均转换率如下(设市场中只有这4种鲜奶)：

$$A \rightarrow A(95\%)B(2\%)C(2\%)D(1\%);$$
$$B \rightarrow A(30\%)B(60\%)C(6\%)D(4\%);$$
$$C \rightarrow A(20\%)B(10\%)C(70\%)D(0\%);$$
$$D \rightarrow A(20\%)\ B(20\%)\ C(10\%)\ D(50\%).$$

假设目前购买A, B, C, D 4 种鲜奶的顾客分布为(25%, 30%, 35%, 10%)。试求半年后鲜奶A, B, C, D的市场份额.

例1.8（赌徒破产问题）假设有一个赌徒，每一次赌博，以概率p赢一块钱，以概率$1-p$输一块钱。若我们假设在他破产或拥有财富N时停止赌博，且每次赌博的输赢是相互独立的。那么他从拥有i块钱开始，在破产之前拥有财富N的概率为多少？



第二节：马氏链的状态分类

引入：假设明天的天气只和今天的天气有关。如果今天下雨，那么明天下雨的概率为 0.7，若今天不下雨，则明天下雨的概率为 0.4 。用 X_n 表示某天是否下雨，则 $\{X_n, n \geq 1\}$为一齐次马氏链，且状态空间为$E = \{0,1\}$, 其中0表示下雨, 1表示不下雨，且有

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}, P^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.5715 & 0.4285 \\ 0.5714 & 0.4286 \end{bmatrix}$$

$$P^{(12)} = \begin{bmatrix} 0.5714 & 0.4286 \\ 0.5714 & 0.4286 \end{bmatrix}$$

$P^{(n)}, n \to \infty$的特点？

（1）随着n的变化，$P^{(n)}$保持不变。

（2）$P^{(n)}$每一列的元素相同。

定义2.1 设$\{X_n, n \geq 0\}$是一马氏链，对$i, j \in E$，如存在$n \geq 0$，使$p_{ij}^{(n)} > 0$，则称“状态i可达状态j”，记为$i \to j$。若$i \to j, j \to i$称状态i, j相通，记作$i \leftrightarrow j$。

定理2.1 互通是一种等价关系，即满足：

（1）自返性：$i \leftrightarrow i$；

（2）对称性：若$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$；

（3）传递性：如果$i \leftrightarrow j$且$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$。

我们把任何两个互通状态归为一类，即同在一类的状态应该都是互通的，并且任何一个状态不能同时属于两个不同的类。

定义2.2 若马尔可夫链只存在一个类，就称它是不可约的，否则称为可约的。

例2.1 考虑疾病死亡模型，状态空间为$\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$，一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

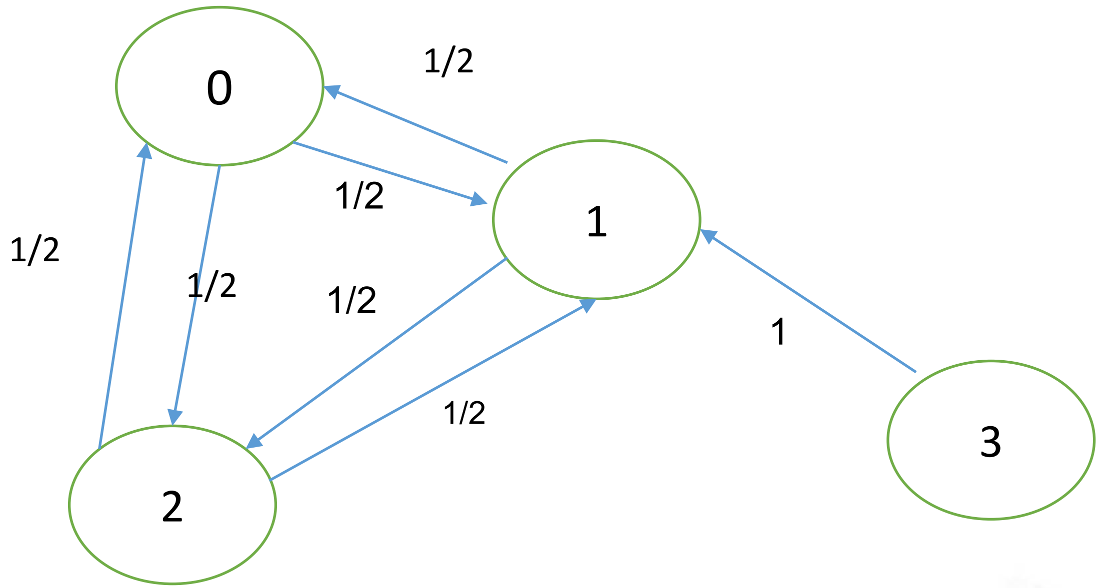
$S_1 \to S_2, S_2 \to S_1$，　$\{S_1, S_2\}$为一个类

$S_3 \to S_3$，　$\{S_3\}$为一个类

$S_4 \to S_4$，　$\{S_4\}$一个类

第二节：马氏链的状态分类

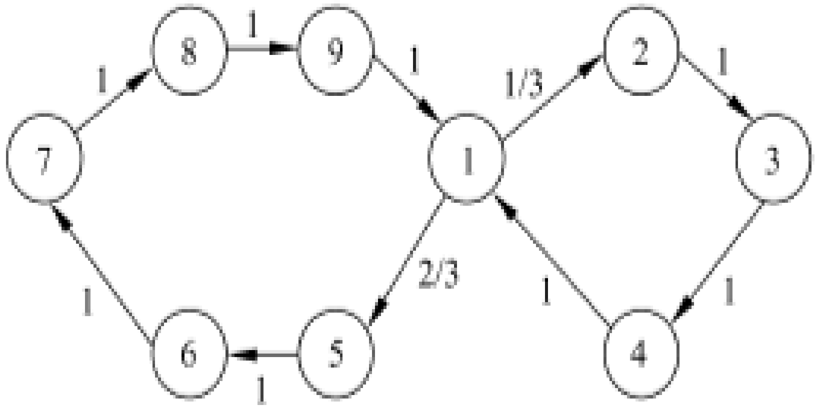
例2.2 假设一马氏链的转移状态图如下，求其状态空间、转移概率矩阵并分析各状态的关系。



定义2.3 若$i \in E$，有性质$P\{X_n = i | X_0 = i\} \equiv 0$(对一切$n \geq 1$)，称$i$为不可回态，否则称为可回态。

定义2.4 对于可回态，称集合$\left\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$的最大公约数$d_i$为$i$的周期。当$d_i > 1$时，称$i$为周期的；当$d_i = 1$时，称$i$为非周期的。

例2.3 设马氏链的状态空间为$E=\{1,2,\cdots,9\}$，状态间的转移概率如下图所示：判断状态1的周期。



第二节：马氏链的状态分类

定理2.2 相通的状态有相同的周期。

第二节：马氏链的状态分类

定义2.5 设状态$i,j \in E$，首达时间定义为

$$T_{ij} = \inf\{n \geq 1 : X_n = j, X_0 = i\}$$

T_{ij}表示马尔可夫链从状态i出发，首次到达状态j的时间，称为自i到j的首达时间。若集合$\{n \geq 1 : X_n = j, X_0 = i\}$为空集，则令$T_{ij} = \infty$。$T_{ii}$表示从$i$出发，首次回到$i$的时间。

定义2.6 设状态$i,j \in E$，首达概率定义为

$$f_{ij}^{(n)} = P\left(T_{ij} = n \middle| X_0 = i\right)$$

$$= P(X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i)$$

并且令$f_{ij}^{(0)} = 0$，$i \neq j$，$f_{ii}^{(0)} = 1$。

$f_{ij}^{(n)}$表示过程从状态i出发经n步首次到达状态j的概率。

定理2.3【首次命中分解】

$$\text{对}\forall n \geq 1,\text{有} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}\text{。}$$

定义2.7 设状态$i.j \in E$，**可达概率**定义为

$$f_{ij} = P\left(T_{ij} < +\infty | X_0 = i\right) = P\{\exists n，使得 X_n = j | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

它是自i出发的链（有限步）终将到达j的概率。

定理2.4 对任意状态$i,j \in E$，$f_{ij} > 0$的充要条件是$i \rightarrow j$。

第二节：马氏链的状态分类

定义2.8 设状态$i,j \in E$，平均可达时间定义为

$$\mu_{ij} = \begin{cases} E\left[T_{ij}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & f_{ij} = 1 \\ \infty & f_{ij} < 1 \end{cases}$$

当$f_{ij} = 1$时，μ_{ij}表示由i出发到达j的平均可达时间。

定义2.9

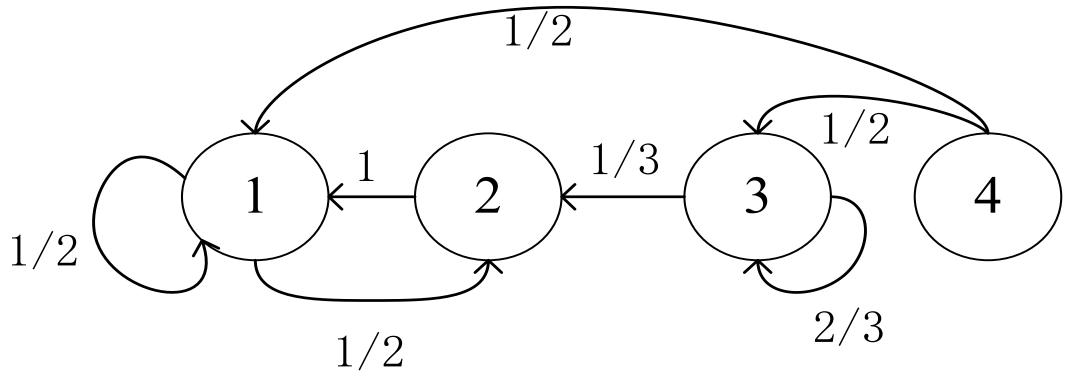
- 称状态i为**常返**的：若 $f_{ii}= 1$， 即$P(T_{ii} < \infty) = 1$，
  - 称i为**正常返**的：若状态i为常返的，且$\mu_{ii} < \infty$，
    - 称状态i为**遍历**的：若i为正常返的，且为非周期的，
  - 称i为**零常返**的：若状态i为常返的，且$\mu_{ii} = \infty$，
- 称状态i为非常返的：若 $f_{ii}< 1$， 即$P(T_{ii} < \infty) < 1$。

例2.4 设马氏链的状态空间为$E=\{1,2,3,4\}$，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

确定哪些状态是常返的，哪些是非常返的。

解：

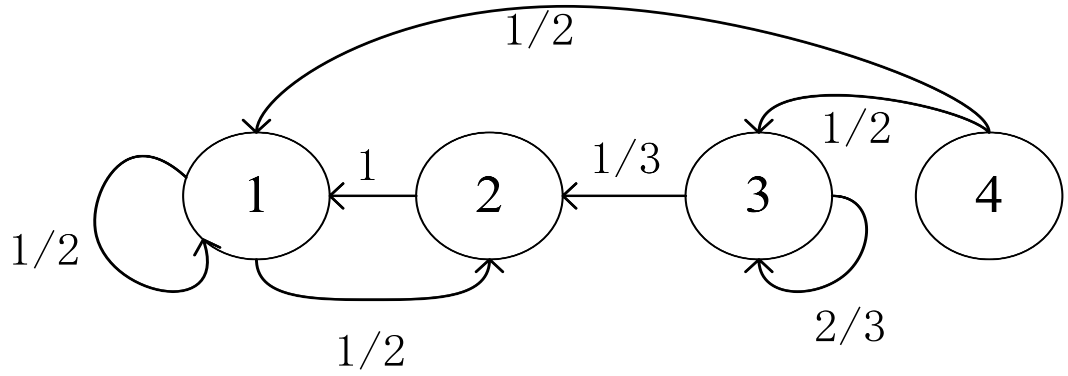


可作出马氏链的转移概率图如上图所示。下面将分别计算四个状态的可达概率和平均返回时间。

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad \mu_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\infty$$

状态1是正常返状态。

第二节：马氏链的状态分类



$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1$$

$$\mu_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)}=1\times 0+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots=3<\infty$$

状态2是正常返状态。

$$f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)}=\frac{2}{3}+0+\cdots=\frac{2}{3},\quad f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{44}^{(n)}=0+0+\cdots=0$$

状态3、4是非常返状态。

定理2.5 状态i是常返的，当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$；
状态i是非常返的，当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$。

注：若状态i是常返的，则从状态i出发，将会无限次的回到i。
若状态i是非常返的，从状态i出发，马氏链处于状态i的次数服从均值为$\frac{1}{1-f_{ii}}$的几何分布，即马氏链处于状态i的次数为k的概率为$f_{ii}^{k-1}(1-f_{ii})$。
所以若状态i是常返的，当且仅当从i出发，返回到i的次数期望是无限的。

定理2.6 如果$i \leftrightarrow j$，则i与j同为常返或非常返。

定理2.7 设马氏链 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的状态空间为E， 已知状态 i 常返，若$i \to j$, 则状态j 必常返, 且$f_{ji} = 1, j \to i$ 。

定理2.8 设i常返且有周期d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}}$$

其中μ_{ii}为i的平均返回时间，当$\mu_{ii} = \infty$时，$\frac{d}{\mu_{ii}} = 0$。

证明：略。

推论2.1 设i是常返状态，则

（1）i是零常返状态当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

（2）i是遍历状态当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$。

定理2.9 如果$i \leftrightarrow j$，则

（1）i与j同为常返或非常返，如果为常返，则它们同为正常返或零常返；

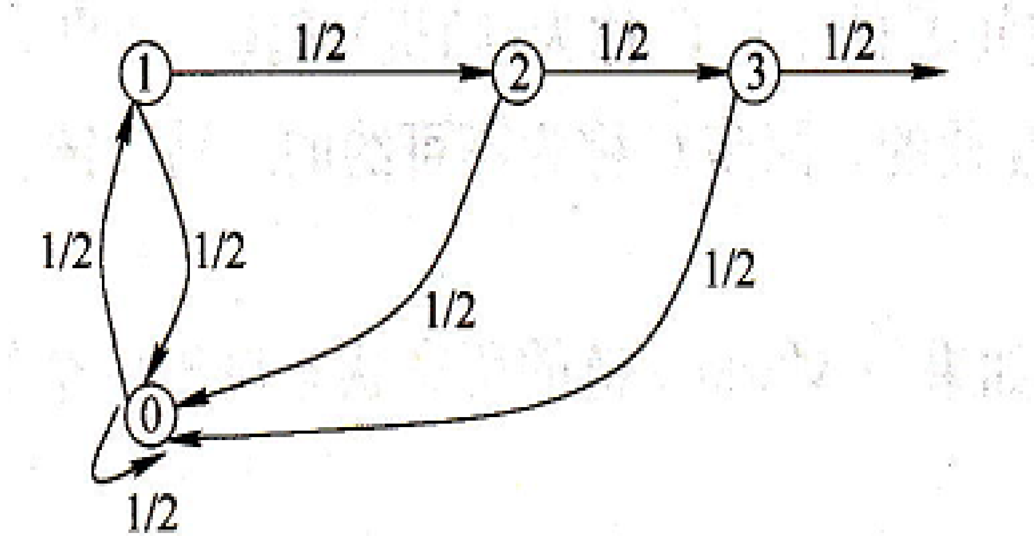
（2）若其中一状态是遍历的，则另一状态也是遍历的。

注： 该定理说明在判断某一马氏链状态的性质时，对于互通的状态，只需要对最简单的状态进行判断即可。

例2.5 设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间$E = \{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为

$$p_{00} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,i+1} = \frac{1}{2}, \quad p_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \in E$$

讨论该马氏链状态的常返性与周期性。



第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

考虑一个离散时间马氏链经历一段时间之后，处于某种状态的概率

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) =?$$

希望它与很远的过去处于什么状态无关，即和系统的初始状态如何无关。

定义3.1 对于离散时间的马氏链$\{X_n, n = 0,1,..\}$，记$s_j(n) = P(X_n = j)$。若$\lim\limits_{n\to\infty} s_j(n) = \pi_j^*(j \in E)$存在，且满足$\sum_{j\in E} \pi_j^* = 1$，则称$\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots\}$为马氏链的极限分布。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

可从从 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 出发？

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} s_i(0) p_{ij}^{(n)}$$

$$= \sum_{i\in E} s_i(0) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}\text{存在且和}i\text{无关}} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \sum_{i\in E} s_i(0) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

定理3.1 若j是非常返状态或零常返状态，则对于任意的$i \in E$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

定理3.2 若j为正常返状态，周期为d，则对于任意$i \in E$以及$0 \leq r \leq d-1$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_{jj}},$$

其中$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$；

定理3.3 若状态j是遍历的（正常返且非周期），则对所有的$i \in E$，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}$$

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

定理3.4 对于**不可约的遍历链**（正常返且非周期），有极限$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$存在，且与初始状态$i$无关，即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

定理3.5

（1）有限状态的马氏链不可能都是非常返的。即有限的马氏链至少有一个常返状态。

（2）有限马氏链的常返状态都是正常返的，即有限的马氏链至少有一个正常返状态，且没有零常返状态。

（3）不可约有限马氏链只有正常返状态。

（4）不可约非周期的有限马氏链的状态都是遍历的。

（5）不可约非周期的有限马氏链的状态j有$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$对于所有$i \in E$成立。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

总结：不可约非周期的有限马氏链，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$存在且和$i$无关，故

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \frac{1}{\mu_{jj}} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

可以通过计算平均返回时间μ_{jj}获得极限分布。

然而，$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$ →计算仍不简便？

定义3.2 设马尔可夫链$\{X_n, n \geq 1\}$有转移概率矩阵$P = (p_{ij})$，若存在一个概率分布$\{\pi_j, j \geq 0\}$，满足

$$\pi_j \geq 0, \qquad \sum_{j \in E} \pi_j = 1, \qquad \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}$$

则称$\{\pi_j, j \geq 0\}$为该马尔可夫链的平稳分布。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

定理3.6 对于不可约遍历马氏链，令

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}, \qquad j \geq 0,$$

则π_j是方程组

$$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i\, p_{ij}$$

满足条件$\pi_i \geq 0$, $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$的唯一解。即$\{\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}, j \geq 0\}$为该马尔可夫链的平稳分布， 且此时平稳分布就是极限分布。

注：对于不可约遍历马氏链，**定理3.6**可得，$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$。可通过求解平稳分布来获得极限分布，且而对于平稳分布，只需求解方程组$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i\, p_{ij}$（或$\pi = \pi P$）且$\sum_{i\in E} \pi_i = 1$。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

定理3.7 不可约非周期马尔可夫链是正常返的充要条件是它存在平稳分布。

推论3.1

（1）对于不可约非周期马尔可夫链，若所有状态是非常返或所有状态是零常返，则不存在平稳分布。

（2）不可约非周期的有限（状态）马氏链必存在平稳分布$\{\pi_j, j \geq 0\}$，且$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j$。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

例3.1 设马尔可夫链的状态空间$E = \{1,2\}$，其转移概率矩阵

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

求平稳分布、$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} p_{ij}^{(n)}$以及各状态的平均返回时间。

例3.2 设某地有1600户居民，某产品只有甲、乙、丙三个厂家在该地销售。经统计，8月份买甲、乙、丙三厂的户数分别为480,320,800。9月份，原买甲的有48户转买乙产品，有96户转买丙产品；原买乙的有32户转买甲产品，有64户转买丙产品；原买丙的有64户转买甲产品，有32户转买乙产品。求当顾客流如此长期的稳定下去，三种产品的占有率为多少？

例3.3（PageRank）

- 1996年初，谷歌公司的创始人，当时还是美国斯坦福大学研究生的佩奇和布林开始了对网页排序问题的研究。
- 在1999年，一篇以佩奇为第一作者的论文发表了，论文中介绍了一种叫做PageRank的算法。这种算法的主要思想是：越“重要”的网页，页面上的链接质量也越高，同时越容易被其它“重要”的网页链接。于是，算法完全利用网页之间互相链接的关系来计算网页的重要程度，将网页排序彻底变成一个数学问题，终于摆脱了访问量统计的思想。

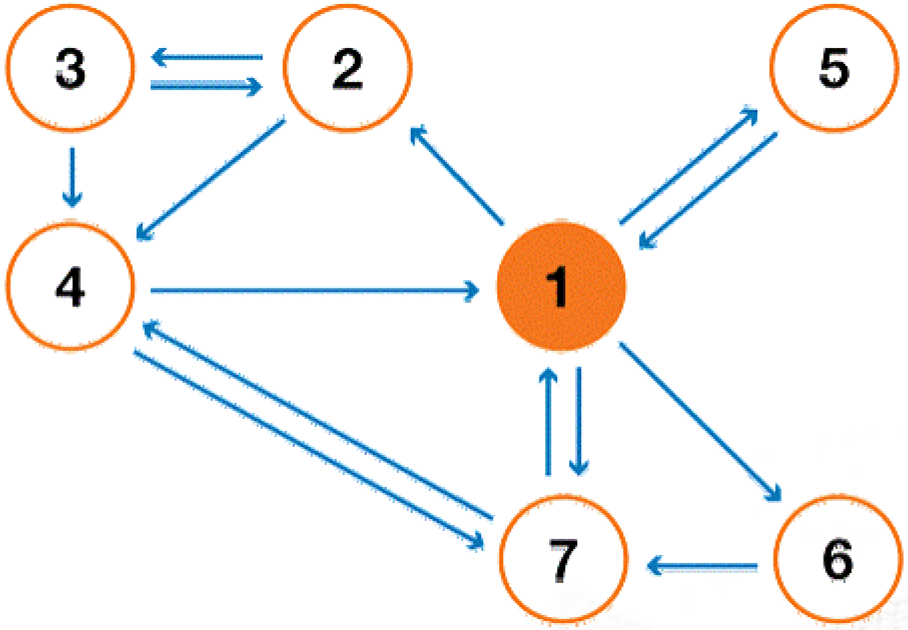
第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

- PageRank是定义在网页集合上的一个函数，它对每个网页给出一个正实数，表示网页的重要程度，整体构成一个向量，PageRank值越高，网页就越重要，在互联网搜索的排序中可能就被排在前面。

- 假设互联网是一个有向图，在其基础上定义一个马尔可夫链，表示网页浏览者在互联网上随机浏览网页的过程。假设浏览者在每个网页依照连接出去的超链接以等概率跳转到下一个网页，并在网上持续不断进行这样的随机跳转，这个过程形成一个马尔可夫链。PageRank表示这个马尔可夫链的平稳分布。每个网页的PageRank值就是平稳概率。

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

假设我们有一个小网站，其中有7个页面标记为1到7，并且页面之间有链接，如下图所示，判断每个网站的排名。



第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

由于“导航”应该是纯随机的，可以使用以下简单规则得到转移概率矩阵：对于一个具有K的节点(一个具有K链接到其他页面的页面)，每个节点的概率等于1/K。因此，该例子的转移矩阵为：

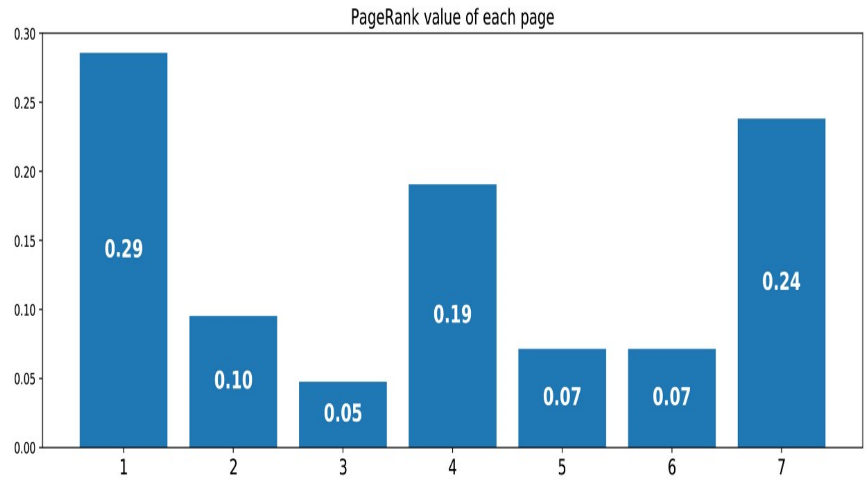
$$p=\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第三节：转移概率的极限状态与平稳分布

非周期、不可约且状态空间有限的马氏链，处于各个状态的概率收敛，且收敛到平稳分布。通过求解

$$\pi p = \pi, \quad \sum_{i=1}^{7} \pi_i = 1$$

这里$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7)$，我们可以获得每页的PageRank值（平稳分布的值，如下图所示），所以这个小网站的PageRank排名是$1 > 7 > 4 > 2 > 5 = 6 > 3$。



1917—2017
100th Anniversary
Shanghai University of Finance and Economics
上海财经大学 100周年校庆

谢　谢！

Thank You