第四章 连续时间马氏链作业

11 月 13 号 周一提交

1. 设连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$有转移概率矩阵

$$\mathrm{P(t)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3\mathrm{e}^{-3t} & 1-\mathrm{e}^{-3t} & 2-2\mathrm{e}^{-3t} \\ 2-2\mathrm{e}^{-3t} & 1+4\mathrm{e}^{-3t} & 2-2\mathrm{e}^{-3t} \\ 2-2\mathrm{e}^{-3t} & 1-\mathrm{e}^{-3t} & 2+3\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

（1）计算转移速率矩阵 Q;

（2）计算质点在各状态的平均停留时间。

2. 有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方法产生新的细菌，并不会死去。假设在长为h的一段时间内，一个细菌分裂成两个，即产生新细菌的概率为$\lambda h + o(h)$。令$X(t)$表示时刻t的群体的大小。

（1）试说明$\{X(t)，t \geq 0\}$是生灭过程。

（2）写出科尔莫格罗夫向前方程，并求解$p_{ij}(t)$。

（3）若$X(0) = 1$，求$D(X(t))$。

3. 一质点在 1,2,3 点上作随机游动。若在时刻t质点位于这三个点之一，则在$[t, t+h)$内，它以概率$\frac{1}{2}h + o(h)$分别转移到其他两点之一。试求质点随机游动的科尔莫格罗夫方程，转移概率$p_{ij}(t)$及极限分布。

4. 设某车间有 M 台车床，由于个各种原因车床时而工作，时而停止。假设时刻t，一台正在工作的车床，在时刻$t + \mathrm{h}$停止工作的概率为$\mu h + o(h)$，而时刻t不工作的车床，在时刻 t+h 开始工作的概率为$\lambda h + o(h)$，且各车床工作情况是相互独立的。若$N(t)$表示时刻t正在工作的车床数，求

（1）试说明$\{N(t)，t \geq 0\}$是生灭过程。

（2）$\{N(t)，t \geq 0\}$的极限分布。

（3）若$M = 10$，$\lambda = 60, \mu = 30$，系统处于稳定状态时有一半以上车床在工作的概率。

5. 一条电路共给 2 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现做若下假设：

（1）若一焊工在 t 使用电、而在$(t, t+h)$内停止用电的概率为$\mu h + o(h)$；

（2）若一焊工在t使没有用电、 而在$(t, t+h)$内用电的概率为$\lambda h + o(h)$；

每一焊工的工作情况是统计独立的。 设$X(t)$表示在t是正在用电的焊工数。

（1）求该过程的状态空间。

（2）求该过程的转移率矩阵。

6. 设有一出租汽车站。到达该站的出租汽车数服从泊松分布，平均每分钟到达一辆出租汽车；到达该站的顾客数也服从泊松分布，平均每分钟到达顾客 2 人。如果出租汽车到站时无顾客候车，不论是否已有汽车停留在站上，该辆汽车就停留在站上候车；反之，如果顾客到达汽车站时发现站上没有汽车，他就离去；如果顾客到站时有汽车在候客，他就可以立刻雇一辆。

（1）在其车站上等候的出租汽车数为何？

（2）在到站的潜在顾客中有多少雇得了出租汽车？