随机过程

第二章 泊松过程

上海财经大学 统计与管理学院

第一节：泊松过程的定义

定义1.1 随机过程$\{N(t), t \ge 0\}$称为参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松过程(Poisson process)，若满足:

（1）是一计数过程，且$N(0) = 0$;

（2）是独立增量过程: 对$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$t_i \ge 0, 1 \le i \le n$，增量

$$N(t_2) - N(t_1),\ N(t_3) - N(t_2),\ \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立;

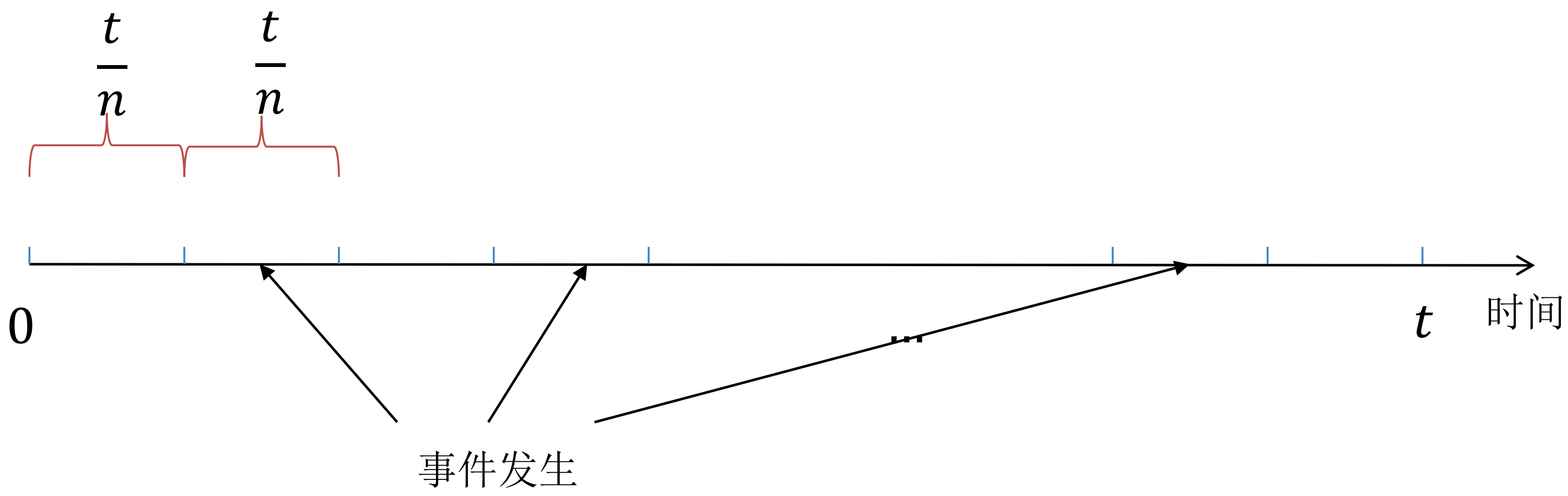
（3）在任一长度为t的时间区间内，事件发生的次数服从参数为λt的泊松分布，即对任意的$s, t \ge 0$有

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

注：λ称为泊松过程的强度或者速率。

第一节：泊松过程的定义

泊松过程的伯努利近似：



$$\mathrm{E}[N(t)] = \lambda t,$$

划分小区间个数为 n，

每个小区间事件发生一次的概率 $p_n \approx \frac{\lambda t}{n}$， $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda t$

第一节：泊松过程的定义

定义 1.2 随机过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松过程，若满足:

（1）是计数过程，且$N(0) = 0$；

（2）具有增量平稳性: 对$0 \leq s < \mathrm{t}$，增量$N(t) - N(s)$的分布只依赖于$t - s$；

（3）是独立增量过程: 对$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$t_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$，增量

$$N(t_2) - N(t_1)，N(t_3) - N(t_2), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立;

（4）对任意$t > 0$和充分小的$h > 0$，有

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h),$$

$$P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h).$$

第一节：泊松过程的定义

例1.1 设$\{N(t), t \geq 0\}$为参数为 λ的泊松过程，求均值函数和协方差函数。

第一节：泊松过程的定义

例1.2 设从早上8:00开始，某火车站售票处连续售票，乘客以10人/小时的平均速率到达，则9:00-10:00这1小时内最多有5名乘客来此购票的概率是多少？10:00-11:00没有人来买票的概率是多少？

第一节：泊松过程的定义

例1.3 顾客依泊松过程达到商店，速率为λ=4人/小时，已知商店上午9点开门，求到9点半时仅有一位顾客，而到11点半时总计达到5位顾客的概率。

第一节：泊松过程的定义

例1.4 设$\{N(t),t\geq 0\}$为泊松过程，强度参数为λ，证明：当$t\to+\infty$时，

$$E\left(\frac{N(t)}{t}-\lambda\right)^2\to 0$$

第二节：泊松过程的性质

以X_1记第一个事件来到的时刻。对$n > 1$，以X_n记第$(n-1)$个到第n个事件发生的时间间隔。

例如，若$X_1 = 5, X_2 = 10$，则泊松过程的第一个事件发生的时刻为5，第二个事件发生的时刻为15。

定理2.1 $\{X_n, n = 1,2,\cdots\}$为独立同分布的参数为λ的指数随机变量。

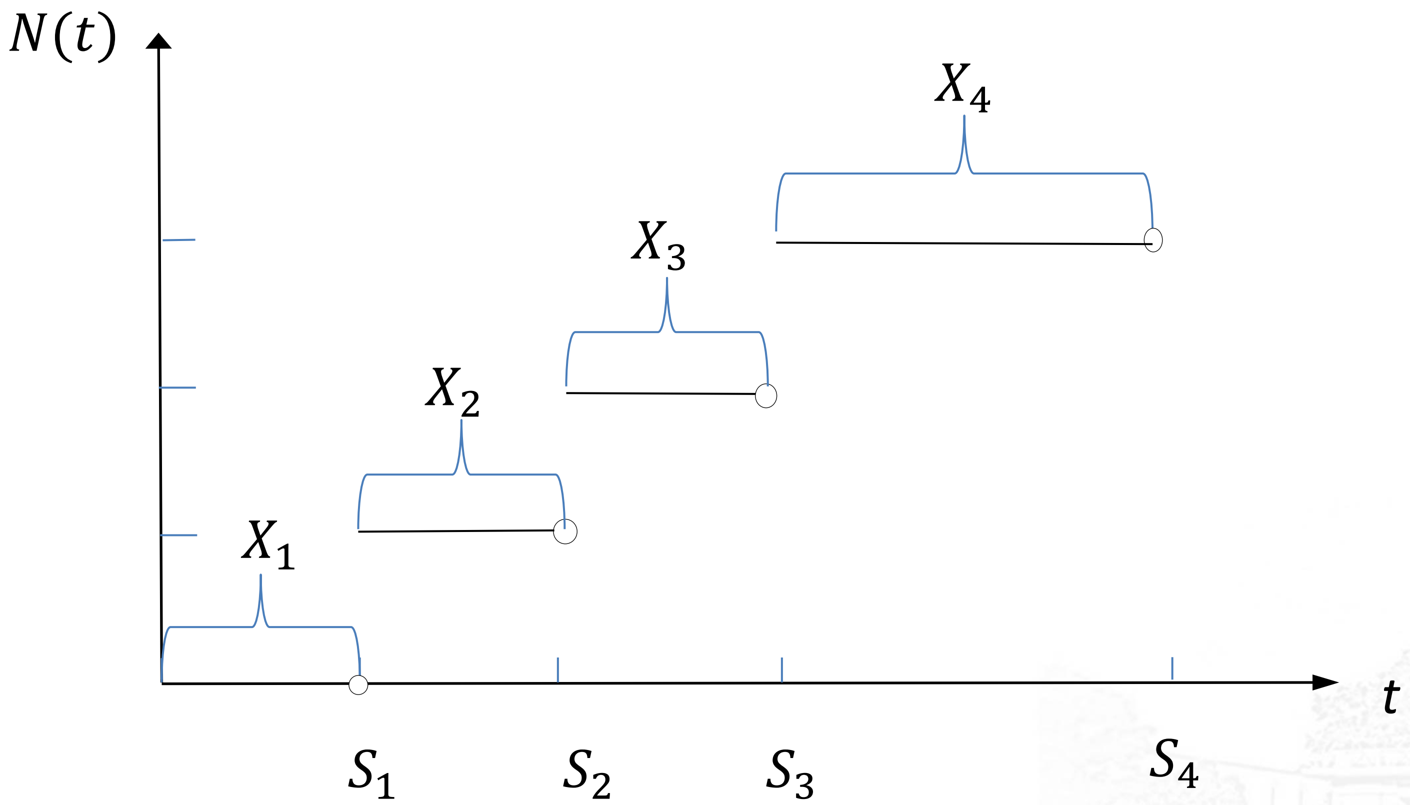
第二节：泊松过程的性质

记第n个事件来到的时间为S_n，也称为第n个事件的等待时间，可得$S_n = \sum_k^n X_k, n \geq 1$。

定理2.2 S_n服从参数n和λ的伽玛分布，记为$S_n \sim Ga(n, \lambda)$。

第二节：泊松过程的性质

下图为泊松过程的一个典型的样本函数，是非降、右连续的跳跃函数。



第二节：泊松过程的性质

例2.1 设从早上8:00开始有无穷多的人排队等候服务，只有一名服务员，且每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为20min的指数分布，则到中午12:00为止平均有多少人已经离去，另外已有9个人接受服务的概率是多少？

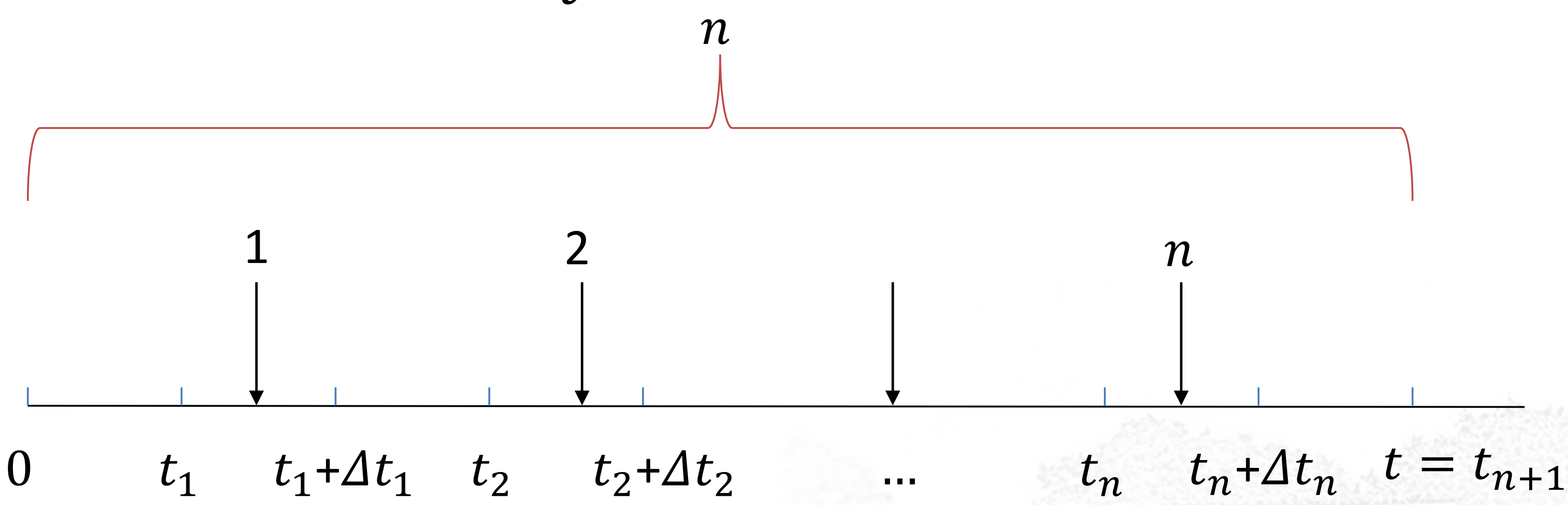
第二节：泊松过程的性质

例2.2 设每天移民某国的人数服从强度$\lambda = 1$的泊松过程，求第10个移民到达的期望时间；第11个移民到达间隔时间超过2天的概率。

第二节：泊松过程的性质

定理2.3 已知在$N(t) = n$的条件下，n个事件发生的时刻$S_1,\cdots,S_n$的联合密度与n个独立的$[0,t]$上均匀分布随机变量的顺序统计量的联合密度相同，即$S_1,\cdots S_n$关于$N(t) = n$的条件联合密度函数为

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < \cdots < t_n < t$$



第二节：泊松过程的性质

例2.2 设乘客按参数为λ的泊松过程来火车站，若火车在t_0时刻启程，计算在时间$(0, t_0)$内到达的乘客的等待时间总和的期望。

第二节：泊松过程的性质

假设泊松过程的各个事件可以分成两种类型，假定在时刻s事件以概率$\mathrm{P}(s)$被归为1型，而以概率$1-\mathrm{P}(s)$被归为2型，而且与其他事件归为什么类型相互独立。用$\{N_i(t), t \geq 0\}, i=1{,}2$表示时刻t时i型事件发生的个数。

定理2.4 $N_1(t)$和$N_2(t)$是相互独立的随机变量，分别服从均值为λtp和$\lambda t(1-p)$的泊松分布，其中

$$p=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds$$

第二节：泊松过程的性质

泊松过程的叠加

定理2.5： 设$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$是相互独立且参数分别为λ_1和λ_2的泊松过程， 则$\{N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$是参数为$\lambda_1 + \lambda_2$的泊松过程。

第二节：泊松过程的性质

例2.3 设某汽车站有A、B两辆公交车停靠，并且到达该站的乘客数是泊松过程，平均每十分钟到达15位乘客，而每位乘客进入A车或B车的概率分别为2/3和1/3。试求进入A车与进入B车的乘客数的概率分布。

第三节：非齐次的泊松过程

定义3.1 若计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$满足

（1） $N(0) = 0$,

（2）$\{N(t), t \geq 0\}$有独立增量，

（3）$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$，

（4）$P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

则称计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$为强度函数$\lambda(t)$ $(\lambda(t) > 0, t \geq 0)$的非齐次泊松过程。

第三节：非齐次的泊松过程

定理3.1 若$\{N(t), t \geq 0\}$是强度函数为$\lambda(t)(\lambda(t) > 0, t \geq 0)$的非齐次泊松过程，令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds ,$$

则

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{-[m(t+s)-m(t)]} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, n = 1,2,\cdots ,$$

即$N(t+s) - N(t)$服从均值为$m(t+s) - m(t)$的泊松分布。

特别的，$N(t)$服从均值为$m(t)$的泊松分布，故$m(t)$也被称为均值函数。

第三节：非齐次的泊松过程

例3.1 设某设备使用期限为10年，在前5年它平均2.5年需要维修一次，后5年平均2年需要维修一次。求它在使用期内只维修一次的概率。

第三节：非齐次的泊松过程

定理3.2 假设$\{N_*(t), t \geq 0\}$是强度参数$\lambda = 1$的泊松过程。$\lambda(t) > 0$为t的函数，并且令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

定义$N(t) = N_*\big(m(t)\big)$。则$\{N(t), t \geq 0\}$是一个具有强度函数$\lambda(t)(t \geq 0)$的非齐次泊松过程。

第三节：非齐次的泊松过程

定理3.3 假设{N(t)，t ≥ 0}是一个强度函数为$\lambda(t)(\lambda(t) > 0, t \geq 0)$的非齐次泊松过程。并且令

$$\mathrm{m}(\mathrm{t}) = \int_0^{\mathrm{t}} \lambda(s)\,\mathrm{ds}$$

对于任意$\mathrm{t} \geq 0$，定义$\mathrm{N}_*(\mathrm{t}) = N(\mathrm{m}^{-1}(\mathrm{t}))$。则{$\mathrm{N}_*(\mathrm{t})$，t ≥ 0}是一个具有强度参数$\lambda = 1$的泊松过程。

第四节：复合泊松过程

定义4.1 设$Y_k, k = 1,2,\ldots$是独立同分布的随机变量序列，$\{N(t), t \geq 0\}$是强度参数为λ的泊松过程，且$\{N(t), t \geq 0\}$与$Y_k, k = 1,2,\ldots$独立，记

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k\,, t \geq 0$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为复合泊松过程(Compound Poisson process)。

第四节：复合泊松过程

复合泊松过程举例：

设每天进入某商店的顾客数为一泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$，进入该商店的第k位客人所花的钱为Y_k。设$\{Y_k, k \geq 1\}$是独立同分布的随机变量序列，且与$\{N(t), t \geq 0\}$独立，则在(0, t]内该商店的营业额$X(t)$可表示为

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0$$

$\{X(t), t \geq 0\}$为复合泊松过程。

第四节：复合泊松过程

定理4.1 设$\{X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k, t\ge 0\}$是一个复合泊松过程，泊松过程$\{N(t),t\ge 0\}$的强度为$\lambda$，且$E(Y_k)=\mu, Var(Y_k)=\sigma^2$，则$\{X(t),t\ge 0\}$:

(1) 是平稳、独立增量随机过程;

(2) 均值函数为$m(t)=\mu\lambda t$;

(3) 方差函数为$Var(t)=(\sigma^2+\mu^2)\lambda t$.

(4) 协方差函数$k(s,t)=(\sigma^2+\mu^2)\lambda\min(s,t)$

第四节：复合泊松过程

例4.1 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场，这一过程可以用泊松过程来描述。又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9，且每位顾客是否买东西互不影响，也与进入该商场的顾客数无关。进一步，进入该商场的顾客在该商场所花费的金额服从二项分布B(200,0.5)。

（1）求一天（12小时）在该商场买东西的顾客数的均值。

（2）求该商场一天（12小时）的平均营业额。

第四节：复合泊松过程

例4.2 设某保险公司人寿保险者在时刻$t_1, t_2, \cdots$时死亡，其中$t_1 < t_2 < \cdots$是随机变量（因为投保者何时死亡是一随机现象），在t_i时刻死亡者的家属持保险单可领取保险金Y_i。设$Y_i, i = 1, \cdots$是一独立同指数分布的随机变量序列，

$$f_{Y_i}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

令$N(t)$表示在$(0, t]$内死亡的人数，$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的泊松过程。用一概率模型描述保险公司在$(0, t]$时间内应准备支付的保险金总金额？求在$(0, t]$时间内保险公司平均支付的赔偿费。求在$(0, t]$时间内保险公司支付赔偿费的偏差。

1917—2017
100th Anniversary
Shanghai University of Finance and Economics
上海财经大学 100周年校庆

谢 谢！

Thank You