第五章 布朗运动作业

11 月 20 号提交

1. $\{X(t), t \geq 0\}$为布朗运动，$X(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \mathrm{t})$。令$Y(t) = tX(1/t)$，
   (1) 求$Y(t)$的分布
   (2) 计算其协方差函数
   (3) 证明Y_t也是 Wiener 过程。

2. 设$W(t) = X(a^2 t)/a, a > 0$,其中$\{X(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，验证$\{W(t), t \geq 0\}$也是布朗运动。

3. 设$B(t)$是始于0的标准布朗运动，对任意常数α，计算$P(B(1) < \alpha, B(2) > 0)$。

4. $\{B(t), t \geq 0\}$是一个标准布朗运动，$B(s) + B(t), s \leq t$的分布是什么？

5. $\{B(t), t \geq 0\}$是一个标准布朗运动，计算$E[B(t_1)B(t_2)B(t_3)]$, $t_1 < t_2 < t_3$。

6. $\{B(t), t \geq 0\}$是一个标准布朗运动，T_a记为标准布朗运动击中a的时刻。计算$P\{T_1 < T_{-1} < T_2\}$。

7. 假设你拥有一份价格根据标准布朗运动变化的股票。假设你曾以价格$b + c$，$c > 0$购买该股票，并且当前的价格为b。你决定或者当股票价格回到$b + c$时或者再等待时间t后卖掉股票。你不会重新获得你的购买价格的概率是多少？

8. $\{B(t), t \geq 0\}$是一个标准布朗运动，计算

$$P\{\max_{t_1 \leq s \leq t_2} B(s) > x\}$$

9. 设$\{B(t), t \geq 0\}$是标准布朗运动，记T_x为它首先击中$x\ (> 0)$的时刻，令

$$Y(t) = \begin{cases} B(t), & \text{若 } t < T_x \\ x, & \text{其他}. \end{cases}$$

试证：当$y \leq x$时，有

$$P\{Y(t) \leq y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-2x}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

10. 设$\{X(t), t \geq 0\}$是参数为σ^2的布朗运动，对常数$h > 0$，令$W(t) = X(t+h) - X(h), t \geq 0$，证明$\{W(t), t \geq 0\}$也是布朗运动。