

## 目录

<b>1 随机过程的基本概念</b>	<b>2</b>
1.1 随机过程的定义与有穷维分布族 . . . . .	2
1.2 随机过程的分类 . . . . .	2
<b>2 泊松过程</b>	<b>4</b>
2.1 泊松过程的定义 . . . . .	4
2.2 泊松过程的性质 . . . . .	4
2.3 非齐次的泊松过程 . . . . .	4
2.4 复合泊松过程 . . . . .	4
<b>3 离散时间的马尔可夫链</b>	<b>5</b>
3.1 马尔可夫链的基本概念 . . . . .	5
3.2 马氏链的状态分类 . . . . .	5
3.3 转移概率的极限状态与平稳分布 . . . . .	5
<b>4 连续时间的马尔可夫链</b>	<b>6</b>
4.1 连续时间马氏链的基本定义 . . . . .	6
4.2 转移率 . . . . .	6
4.3 Kolmogorov 方程 . . . . .	6
4.4 生灭过程 . . . . .	6
<b>5 布朗运动</b>	<b>7</b>
5.1 布朗运动的定义及基本性质 . . . . .	7
5.2 布朗运动的首中时和最大值 . . . . .	7
5.3 布朗运动的推广 . . . . .	7

## 1 随机过程的基本概念

### 1.1 随机过程的定义与有穷维分布族

(空)

### 1.2 随机过程的分类

**定理 1.2.1** (正态过程充要条件). 随机过程  $\{\mathbf{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$  是正态过程当且仅当  $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, \forall a_1, \dots, a_n, \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{X}_{t_k}$  服从一维正态分布。

证明.  $N$  维随机向量  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)^T$  服从多变量正态分布的充要条件是: 任何线性组合  $\mathbf{Y} = a_1 \mathbf{X}_1 + \dots + a_N \mathbf{X}_N$  服从正态分布。  $\square$

**定理 1.2.2.** 二阶矩存在的严平稳过程必为宽平稳的。

证明. 宽平稳需要满足的条件如下:

$$m(t) \equiv C \quad (1)$$

$$k(s, s+t) = B(t) \quad (2)$$

$$E(\mathbf{X}_t^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{T} \quad (3)$$

由条件知, (3)成立。

二阶矩存在, 则一阶矩存在, 且由 *Cauchy-Schwarz* 不等式的积分形式可知  $k(s, s+t)$  存在。

而由严平稳过程的定义知:  $\forall t \in \mathbb{T}, \mathbf{X}_t$  同分布, 于是(1)成立。

对于(2), 考虑:

$$\begin{aligned} k(s, s+t) &= E(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s+t}) - E(\mathbf{X}_s)E(\mathbf{X}_{s+t}) \\ &= \left[ \iint_{\mathbf{X}_s \in \mathbb{E}, \mathbf{X}_{s+t} \in \mathbb{E}} x_s x_{s+t} f(x_s, x_{s+t}) dx_s dx_{s+t} \right] - C^2 \end{aligned}$$

由严平稳过程的定义知,  $\forall s \in \mathbb{T}, f(x_s, x_{s+t}) = f(x_0, x_t)$ , 故(2)成立。  $\square$

**定理 1.2.3.** 正态宽平稳过程必为严平稳过程。

证明.  $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ ,

$$\text{令 } \mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_{t_1}, \dots, \mathbf{X}_{t_n}), \mathbf{X}_h = (\mathbf{X}_{t_1+h}, \dots, \mathbf{X}_{t_n+h})$$

由于  $\{\mathbf{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$  为正态宽平稳过程, 故  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_h$  服从多元正态分布。

由宽平稳过程的定义知, 对于  $\mathbf{X}_0$  和  $\mathbf{X}_h$ , 其均值向量相同, 均为常数向量。其协方差矩阵只与时间差有关, 因此也相同。

由于正态过程的有穷维分布由  $m(t)$  和  $k(s, t)$  完全决定。而  $\mathbf{X}_0$  和  $\mathbf{X}_h$  均值和协方差相同, 故  $\mathbf{X}_0$  和  $\mathbf{X}_h$  同分布对任意的  $h$  成立, 从而有  $\{\mathbf{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$  为严平稳过程。□

## 2 泊松过程

### 2.1 泊松过程的定义

### 2.2 泊松过程的性质

### 2.3 非齐次的泊松过程

### 2.4 复合泊松过程

### 3 离散时间的马尔可夫链

#### 3.1 马尔可夫链的基本概念

#### 3.2 马氏链的状态分类

#### 3.3 转移概率的极限状态与平稳分布

## 4 连续时间的马尔可夫链

### 4.1 连续时间马氏链的基本定义

### 4.2 转移率

### 4.3 *Kolmogorov* 方程

### 4.4 生灭过程

## 5 布朗运动

### 5.1 布朗运动的定义及基本性质

### 5.2 布朗运动的首中时和最大值

### 5.3 布朗运动的推广