随机过程

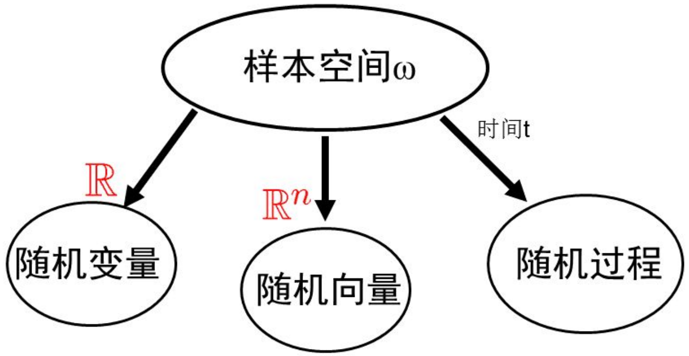
上海财经大学

统计与管理学院

引入

- **随机变量：**在每次试验的结果中，以一定的概率取某个事先未知，但为确定的数值。
- **随机向量**：由多个随机变量组成的向量。
- **随机过程**：随着时间或空间变化的多个随机变量。

随机现象的数学模型



引入

- **随机过程**:
  随着时间或空间变化的多个随机变量。

  - 在一条生产线上，我们对产品逐个检查，以$N(t)$表示以一天从开工$(t=0)$到时刻t累计的次品数。$\{N(t), t \geq 0\}$就是随时间变化的随机变量，它描述了次品数的累积的过程。

  - 在一个电话交换站里，以$N(t)$表示一天从上班$(t=0)$到时刻t为止接到的呼叫次数，那么$\{N(t), t \geq 0\}$就是随时间变化的随机变量，它描述了呼叫数的累积的过程。

引入

相关应用：

- 2020年，“逃废债”一词在时隔多年后再次成为经济金融领域热点，背后是以债券违约为代表的信用风险事件频发，国有企业频频出现密集的信用债券违约，成为金融市场最令人意外的“热点”。如何定量的分析企业的违约时间? → 泊松过程

- 保险公司的破产问题: 2020年，保险资产曾一度达到2万亿的安邦保险集团破产倒闭，保险公司的破产问题引起了人们的关注。如何定量地给出保险公司破产的可能性? → 复合泊松过程

- 谷歌PageRank搜索算法 → 离散时间马尔可夫链

- 现代资本市场理论认为证券期货价格具有随机性特征 → 布朗运动

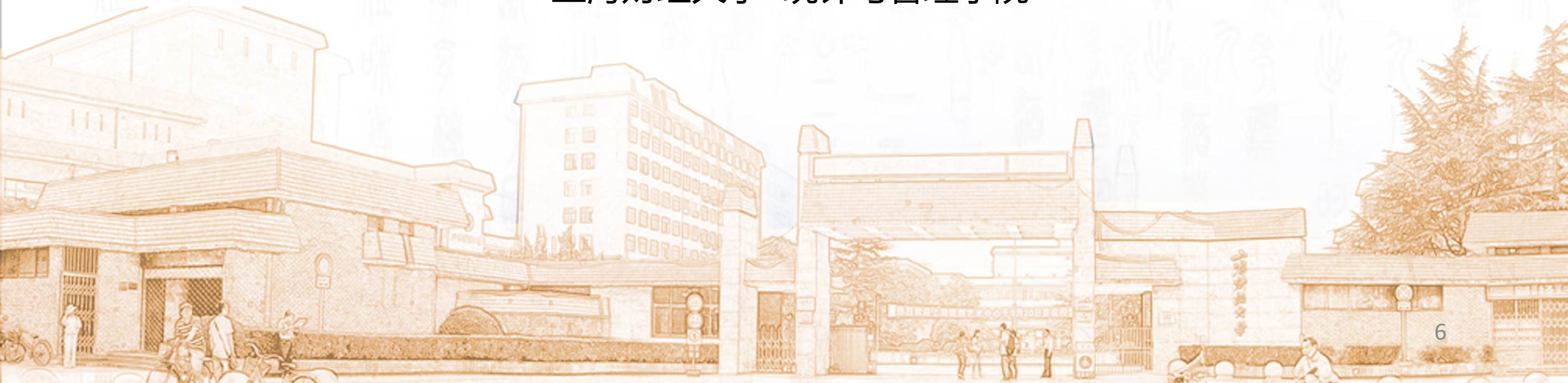
引入

- 第一章 随机过程的基本概念
- 第二章 泊松过程
- 第三章 离散时间的马尔可夫链
- 第四章 连续时间的马尔可夫链
- 第五章 布朗运动
- 第六章 鞅

随机过程

第一章 随机过程的基本概念

上海财经大学 统计与管理学院



第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

定义1.1

- 给定概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$及指标集$T(\neq \phi)$，若每$t \in T$都有$X_t(\omega)$为随机变量，即满足对$\forall c \in \mathcal{R}$都有$\{\omega: X_t(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}$。则称随机变量族$\{X_t(\omega), t \in T\}$为随机过程(Stochastic Process) 。

- T称为指标（参数）集，当$T \subset R$时，可称t为时间，$X_t($或记为$X(t))$为时刻t的状态，在此过程的取值范围即状态空间记为E。

定义1.2 按随机过程的定义，过程是关于$t \in T$与$\omega \in \Omega$的二元函数$X(t, \omega)$，当t固定时，$X(t,\cdot)$为一随机变量，当ω固定时，$X(\cdot, \omega)$为$t \in T$的普通函数，称之为样本函数或轨道或过程的实现。

第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

例1.1

1. 记$T=[0,24]$，每时刻$t\in T$记录气温X_t，则$\{X_t,t\in T\}$为随机过程。

2. （随机游动）一个醉汉在路上行走，以概率p前进一步，以概率$1-p$后退一步（假定其步长相同）。以X_t记他t时刻在路上的位置，则$\{X_t\}$就是直线上的随机游动。

3. 在某海区T内，每$t\in T$，T中每参数$t=(u,v)$记录在每t上的海拔$X_t=X_{(u,v)}$，是一个二参数的随机过程。

第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

定义1.3（有穷维分布族）对以T为参数集的实值随机过程$\{X_t, t\in T\}$，对任$n\geq 1$和$\forall t_1,\cdots,t_n\in T$，可得$(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$的联合分布函数：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)=P\left\{X_{t_1}\leq x_{t_1},\cdots,X_{t_n}\leq x_{t_n}\right\}$$

则称$\left\{F_{t_1,\cdots,t_n}\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right):\forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots t_n\in T\right\}$为随机过程的有穷维分布函数族，记为$\mathcal{D}$。

此外$\left(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\right)$的联合矩母函数定义为

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}\left(u_{t_1},\cdots,u_{t_n}\right)=E\left[e^{\sum_{j=1}^n u_{t_j}X_{t_j}}\right]$$

则称$\{\varphi_{t_1,\cdots,t_n}\left(u_{t_1},\cdots,u_{t_n}\right):\forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots,t_n\in T\}$为随机过程的有穷维矩母函数族，记为$\mathcal{C}$。

$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$的建立是一一对应的，统称为有穷维分布族。

第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

例1.2 【独立随机过程】过程$\{X_t, t\in T\}$的有穷维分布满足

$$F_{t_1,\cdots,t_n}\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)=F_{t_1}\left(x_{t_1}\right)\cdots F_{t_n}\left(x_{t_n}\right),\qquad (\forall n,\forall t_n)$$

则称之为独立随机过程。

或<=>$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}\left(u_{t_1},\cdots,u_{t_n}\right)=\varphi_{t_1}\left(u_{t_1}\right)\cdots\varphi_{t_n}\left(u_{t_n}\right)$;

或<=>$\forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots,t_n\in T, X_{t_1},\cdots,X_{t_n}$为相互独立的随机变量。

例1.3 【广义随机游动】设$\{X_n,n\geq 1\}$为独立随机序列，每X_n有矩母函数$\varphi_n(u)$，每$n\geq 1$，取部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，称$\{S_n,n\geq 1\}$为广义随机游动。它的n维矩母函数为

$$\tilde{\varphi}_{S_1,\cdots,S_n}(u_1,\cdots,u_n)$$
$$=\varphi_1(u_1+\cdots+u_n)\varphi_2(u_2+\cdots+u_n)\cdots\varphi_{n-1}(u_{n-1}+u_n)\varphi_n(u_n)$$

第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

定义1.4 对$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机过程$\{X_t,t\in T\}$，

- 称$m(t)=E(X_t)$为其均值函数;
- 称$D(t)=Var(X_t)=E\big(X_t-m(t)\big)^2$为方差函数;
- 称$k(s,t)=cov(X_s,X_t)=E((X_s-m(s))(X_t-m(t))$为其协方差函数，其中$s,t\in T$，称 $R(s,t)=E(X_sX_t)$为自相关函数。

第一节：随机过程的定义与有穷维分布族

例1.5 考察对称随机游动$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k\,, n\geq 1$，其中$\{X_k\}$独立同分布

$$P(X_k=-1)=\frac{1}{2}, P(X_k=1)=\frac{1}{2}$$

求$\{S_n, n\geq 1\}$的均值函数$m(n)$和协方差函数$k(m,n)$。

例1.6 【随机振幅正弦波的叠加】

考虑频率为$a(>0)$且振幅为随机变量的正弦波之叠加，$t \geq 0$

$$X_t = Acosat + Bsinat$$

其中A, B独立，同$N(0, \sigma^2)$分布。求$\{X_t, t \geq 0\}$的均值函数$m(t)$和协方差函数$k(s, t)$。

例1.7 设随机变量A,B独立，同$U(0,1)$分布，$X_t=A+Bt,t\geq 0$，求$\{X_t,t\geq 0\}$的$m(t)$，$k(s,t)$。

第二节：随机过程的分类

随机过程可以按照参数集T及状态空间E分类。

按照参数集T的类别分类：

- 当参数集是可数的，$\{X_t, t \in T\}$被称为离散时间随机过程，即$T = \{0,1,2,\dots\}$。一般情况下，当T是离散的，我们将X_t表示成X_n。
- 当参数集是实轴上的区间，则$\{X_t, t \in T\}$被称为连续时间随机过程。

按照状态空间E的类别：

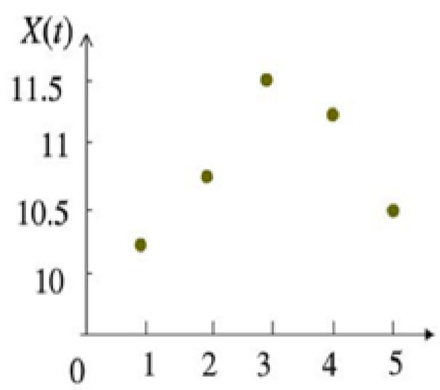
- 当状态空间是可数的，则称$\{X_t, t \in T\}$具有离散的状态空间。
- 当状态空间是实轴上的区间，则称$\{X_t, t \in T\}$具有连续的状态空间。

第二节：随机过程的分类

例2.1

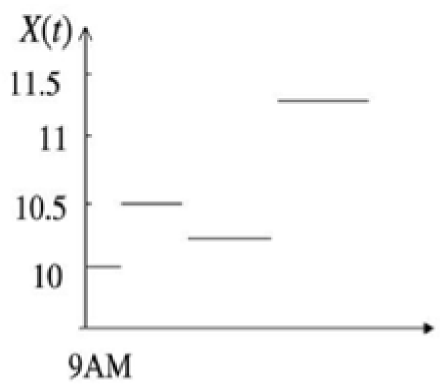
- 随机变量$X(t)$表示IBM股票每天的收盘价格，它的状态空间是以1/8为增量的数，单位为美元，则$\{X(t), t \in T\}$为具有离散状态空间的离散时间随机过程。
- 给定一天，随机变量$X(t)$表示IBM股票在时刻t的价格，它的状态空间是以1/8为增量的数，单位为美元。则$\{X(t), t \in T\}$为具有离散状态空间的连续时间随机过程。

具有离散状态空间的离散时间过程的样本路径



$X(t)$：股票在第t天的收盘价

具有离散状态空间的连续时间过程的样本路径



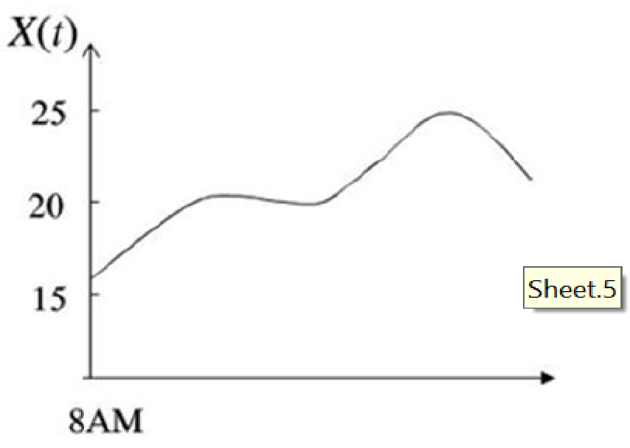
$X(t)$：指定日期下，股票在t时刻的价格

第二节：随机过程的分类

例2.2

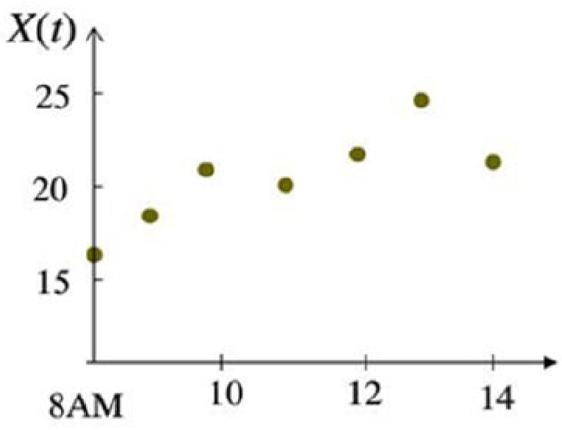
- 给定的时间内，随机变量$X(t)$不间断地记录了机场t时刻的温度，则$\{X(t), t \in T\}$为具有连续状态空间的连续时间随机过程。
- 给定时间内，随机变量$X(t)$记录了机场每隔一小时的温度，则$\{X(t), t \in T\}$为具有连续状态空间的离散时间随机过程。

具有连续状态空间的连续
时间过程的样本路径



X(t):机场在*t*时刻的温度

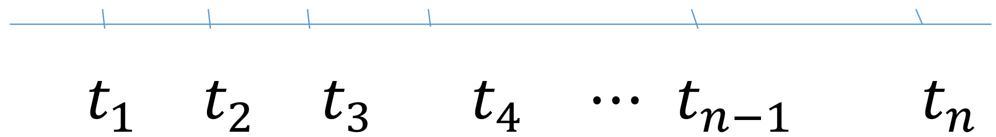
具有连续状态空间的离散
时间过程的样本路径



X(t):机场在*t*时刻的温度

第二节：随机过程的分类

定义2.1 （独立增量过程）如果随机过程$\{X_t, t \in T\}$满足，$\forall\, 0 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \cdots < t_{n-1} < t_n$，



增量$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$相互独立，则称$\{X_t, t \in T\}$为独立增量过程。

进一步，如果增量$X_{t+h} - X_t$的分布与计时t无关，则称$\{X_t, t \in T\}$为平稳增量过程。兼具独立增量和平稳增量的过程称为平稳独立增量过程。

第二节：随机过程的分类

例2.3 广义随机游动$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，其中$\{X_n,n\geq 1\}$为独立随机序列。这里$\forall\, 1\leq n_1<n_2\leq n_3<n_4$，有增量$S_{n_2}-S_{n_1}=\sum_{k=n_1+1}^{n_2}X_k$与$S_{n_4}-S_{n_3}=\sum_{k=n_3+1}^{n_4}X_k$相互独立，所以广义随机游动为独立增量过程。

第二节：随机过程的分类

定义2.2 （计数过程）随机过程$\{N_t, t \geq 0\}$称为一个计数过程，若N_t表示到时刻t为止已发生的事件的总数。则计数过程需满足如下条件：

（1）$N_0 = 0$;

（2）N_t是整数值；

（3）若$s < t$,则$N_s \leq N_t$；

（4）当$s < t$时，$N_t - N_s$等于区间$(s, t]$中发生的事件的个数。

例2.4 在一条生产线上，我们对产品逐个检查，以N_t表示以一天从开工$t = 0$到时刻t累计的次品数，则$\{N_t, t \geq 0\}$为计数过程。

第二节：随机过程的分类

定义2.3 （正态过程）$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机过程$\{X_t, t \in T\}$，如果其所有n维分布均为n维正态分布$(n \geq 1)$，则称为正态过程（或Gauss高斯过程）。

注：正态过程的有穷维分布由$m(t)$和$k(s,t)$完全决定。

如$t_1 = 1, t_2 = 2$时

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m(1) \\ m(2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right).$$

其中$b_{ij} = k(t_i, t_j)$。

定理2.1 随机过程$\{X_t, t \in T\}(T \subset \mathcal{R})$是正态过程当且仅当 $\forall n \geq 1, \forall t_1, \cdots, t_n \in T, \forall a_1, \cdots, a_n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k X_{t_k}$服从一维正态分布。

第二节：随机过程的分类

例2.5 随机正弦波的叠加 $X_t = A\cos at + B\sin at, t \geq 0, a > 0$，其中 A, B 独立同 $N(0, \sigma^2)$ 分布，则 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为正态过程。

第二节：随机过程的分类

定义2.4 （弱（宽、协方差）平稳过程） 随机过程$\{X_t, t \in T\}$，如果满足

(1) 均值函数为常数;

(2) 协方差函数满足 $k(s, s+t) = B(t)$

(3)$\mathrm{E}(X_t^2) < +\infty$

则称它为弱（宽、协方差）平稳过程。

注：$k(s, s+t) = B(t)$表明$k(s,t) = k(s+h, t+h), \forall h$，即对时间推移不变。宽平稳的定义体现在用了一、二阶矩，只是部分概率性质。

第二节：随机过程的分类

例2.6 随机正弦波$X_t = A\cos at + B\sin at, t \geq 0$是宽平稳过程，其中$A, B$独立同$N(0, \sigma^2)$分布。

第二节：随机过程的分类

例2.7【白噪声】考虑序列$\{X_n, n \in \mathcal{N}\}$，如果$E(X_n) \equiv 0$，而

$$E(X_nX_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

该序列是宽平稳的。

第二节：随机过程的分类

定义2.5（强（严，狭义）平稳过程）设概率空间的随机过程$\{X_t, t\in T\}$，如对$\forall n$个参数$t_1<t_2<\cdots<t_n$及任意的h有：

$$P\left(X_{t_1}\le\lambda_1,\cdots,X_{t_n}\le\lambda_n\right)=P(X_{t_1+h}\le\lambda_1,\cdots,X_{t_n+h}\le\lambda_n\}$$

即$(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$与$(X_{t_1+h},\cdots,X_{t_n+h})$同分布，则称$\{X_t,t\in T\}$为强（严，狭义）平稳过程。

注：

1. 严平稳过程是有穷维分布族推移不变的过程。
2. 二阶矩存在的严平稳过程必为宽平稳的。
3. 正态宽平稳过程必为严平稳过程。

第二节：随机过程的分类

例2.8 独立随机过程$\{X_t, t \in T\}$是严平稳当且仅当各X_t同分布。

1917—2017
100th Anniversary
Shanghai University of Finance and Economics
上海财经大学 100周年校庆

谢 谢！

Thank You