随机过程

第五章 布朗运动

上海财经大学 统计与管理学院

第一节：布朗运动的定义及基本性质

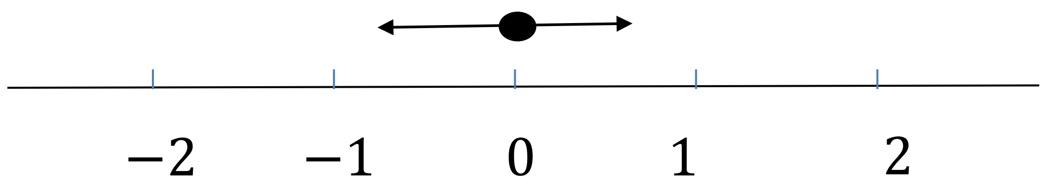
- 1827年，苏格兰科学家罗伯特布朗观察出悬浮在水面上的花粉微粒做不规则运动，看起来连成一片的液体，在高倍显微镜下看其实是由许许多多分子组成的。液体分子不停地做无规则的运动，不断地随机撞击悬浮微粒。当悬浮的微粒足够小的时候，由于受到的来自各个方向的液体分子的撞击作用是不平衡的。在某一瞬间，微粒在另一个方向受到的撞击作用超强的时候，致使微粒又向其它方向运动，这样就引起了微粒的无规则的运动，即布朗运动。
- 1863年，美国数学家诺伯特·维纳提出布朗运动起源于分子的振动，他还公布了首次对微粒速度与粒度关系的观察结果。不过他的分子模型还不是现代的模型，他看到的实际上是微粒的位移，并不是振动。
- 1905年，爱因斯坦根据扩散方程建立了布朗运动的统计理论。

第一节：布朗运动的定义及基本性质

第一节：布朗运动的定义及基本性质

下面我们从讨论简单的随机游动开始。

$$P(X_i=-1)=\frac{1}{2}\qquad P(X_i=1)=\frac{1}{2}$$



设有一个粒子在直线上随机游动，在每个单位时间Δt内等可能地向左或向右移动Δx的距离。假设粒子从位置0出发，以$X(t)$记时刻t粒子的位置，并令X_i为 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如果第}i\text{步向右}\\-1 & \text{如果第}i\text{步向左}\end{cases}$，这里$X_i$相互独立，且有 $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$。则 $X(t)$ 具有平稳增量，且 $X(t)$ 近似服从$N(0,\sigma^2 t)$。

第一节：布朗运动的定义及基本性质

第一节：布朗运动的定义及基本性质

定义1.1 如果随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$满足：

- $X(0) = 0$;
- $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳独立增量；
- 任$t > 0, X(t)$服从正态分布$N(0, \sigma^2 t)$。

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为布朗（Brown）运动或维纳（Wiener）过程。

注：

- 对于布朗运动$\{X(t), t \geq 0\}$，$X(t)$关于t是连续函数，即$\{X(t), t \geq 0\}$的样本路径是t的连续函数。
- 布朗运动$\{X(t), t \geq 0\}$是连续时间的马尔可夫过程。

第一节：布朗运动的定义及基本性质

定理1.1 对任意$0 \le t_1 < \cdots t_n < +\infty$，布朗运动$\{X(t), t \ge 0\}$有

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) \sim N(0, \sigma^2(t_i - t_{i-1}))$$

第一节：布朗运动的定义及基本性质

例1.1 设布朗运动$X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$，求它的均值、方差、协方差及自相关函数。

第一节：布朗运动的定义及基本性质

定理1.2 设$\{X(t), t \geq 0\}$为布朗运动，则此过程的每个n维分布均为n维正态分布。

第一节：布朗运动的定义及基本性质

定理1.3 $\{X(t), t \geq 0\}$是布朗运动的充要条件是$\{X(t), t \geq 0\}$是正态过程，且它的均值函数为0，协方差函数是$k(s,t) = \sigma^2 \min(t,s)$。

例1.2 设$\{X(t), t \geq 0\}$是方差参数为1的布朗运动，求$X(1) + X(2) + X(3) + X(4)$的分布。

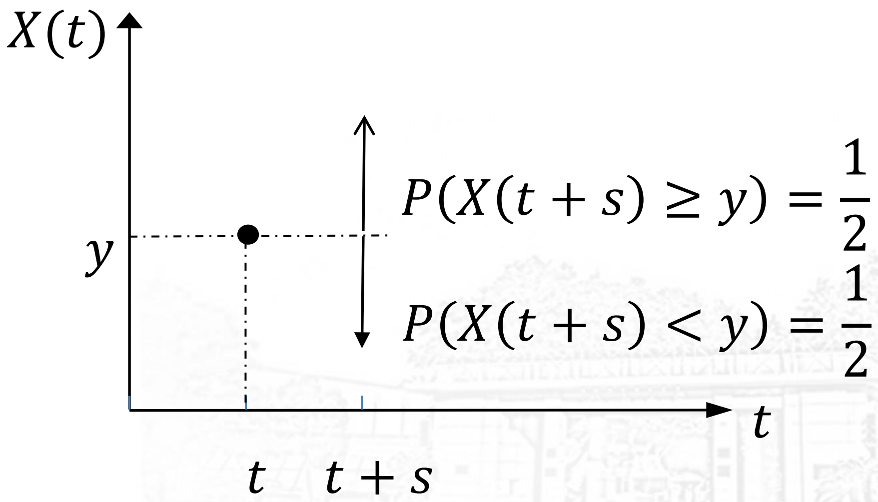
第一节：布朗运动的定义及基本性质

定理1.4 若$\{X(t), t \geq 0\}$为布朗运动，则给定$X(t) = y$时，$X(s)$的条件分布为

$$s < t, X(s)|X(t) = y \sim N\left(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s)\sigma^2\right)$$

$$s > t, X(s)|X(t) = y \sim N(y, (s-t)\sigma^2).$$

由上定理可知，给定初始条件$X(t) = y$，对于任意的$s > 0$，布朗运动在$t + s$时刻的位置高于或低于初始位置的概率相等，均为$\frac{1}{2}$。这称为布朗运动的对称性。



第一节：布朗运动的定义及基本性质

例1.3 对于一个有两位参赛选手的自行车比赛，用$Y(t)$表示当比赛完成了$100t\%$时，内道选手领先的秒数。进一步假设$\{Y(t), t \geq 0\}$是一个方差参数为σ^2的布朗运动。

（1）如果内道选手在比赛的中间时刻领先了σ秒，那么他最终能胜利的概率为多少？

（2）如果内道的选手以σ秒的优势赢得了比赛，那么他在比赛中间领先的概率为多少？

第二节：布朗运动的首中时和最大值

以T_x记布朗运动$\{X(t), t \geq 0\}$首次击中x的时刻，称为首中时，即

$$T_x = \inf\{t \geq 0, X(t) = x\}$$

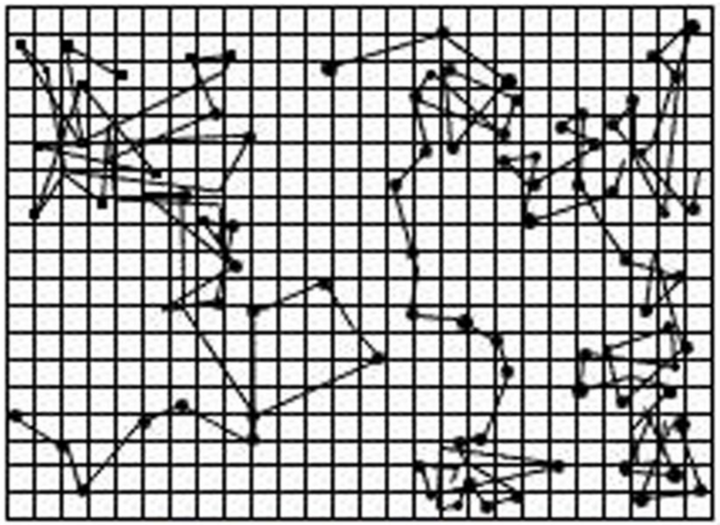
定理2.1 布朗运动$\{X(t), t \geq 0\}$的首中时T_x的分布函数为

$$P(T_x \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y$$

第二节：布朗运动的首中时和最大值

- $P(T_x < \infty) = 1$
- $E(T_x) = \infty$

因此，T_x虽然几乎必然是有限的，但有无穷的期望。直观来看，就是布朗运动以概率为1会击中x，但平均时间是无穷的。



第二节：布朗运动的首中时和最大值

下面我们考虑另一个随机变量，布朗运动在[0, t]时间中达到的最大值$M(t)$，即

$$M(t) = \max_{0 \le s \le t} X(s)$$

当$x \ge 0$时有，

$$P(M(t) \ge x) = P(T_x \le t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y$$

又由于$X(0) = 0$，所以$M(t) \ge X(0) = 0$。因此，对于$x < 0$，$M(t)$的密度函数为0，所以

$$f_{M(t)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2t\sigma^2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

第三节：布朗运动的推广

定义3.1 若随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$满足

- $X(0) = 0$;
- $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳独立增量;
- 对于每一个$t \geq 0$，有$X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$，其中$\mu, \sigma > 0$为常数。

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为带有（线性）漂移的布朗运动，μ称为均值参数（漂移系数），σ^2称为方差参数。

第三节：布朗运动的推广

带有漂移的布朗运动描述的是一个粒子在直线上作非对称的随机游动。

在一直线上，设粒子在每个单位时间Δt内随机地向左或向右移动Δx的距离，每次向右移动的概率$p = \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t})$，向左移动的概率为$1 - p$。以$X(t)$记时刻$t$粒子的位置，并令$X_i$为

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{如果第}i\text{步向右} \\ -1 & \text{如果第}i\text{步向左} \end{cases},$$

这里X_i相互独立，且有$P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = 1 - p.$

第三节：布朗运动的推广

定理3.1 $\{X(t),t \geq 0\}$为带有（线性）漂移的布朗运动，其中均值参数和方差参数分别为μ和σ^2。对于$a,b > 0$，$-b < x < a$，过程自x出发，在击中$-b$之前击中a的概率

$$P(T_a < T_{-b} < \infty|X(0) = x) = \frac{e^{2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu x/\sigma^2}}{e^{2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}$$

其中，T_a表示布朗运动首次击中a的时间，即

$$T_a = inf\{t : t > 0, X(t) = a\}$$

(1) 对于上面的情况，若过程自$x = 0$出发，则在击中$-b$之前击中a的概率为

$$P(T_a < T_{-b} < \infty|X(0) = 0) = \frac{e^{2\mu b/\sigma^2} - 1}{e^{2\mu b/\sigma^2} - e^{-2\mu a/\sigma^2}}$$

(2) 对于过程自$x = 0$出发，若$\mu \to 0$，则

$$P(T_a < T_{-b} < \infty|X(0) = 0) = \frac{b}{a+b}.$$

(3) 对于过程自$x = 0$出发，若均值参数$\mu < 0$，令$b \to +\infty$，则有

$$P(X(t)\text{迟早击中}a\big|X(0) = 0) = e^{2\mu a/\sigma^2}$$

第三节：布朗运动的推广

例3.1（股票期权的实施）假设某投资者持有某股票敲定价格为K的美式期权，且设此时股票价格的变化遵循带有负漂移系数μ、且方差参数为1的布朗运动，且初始价格为$S(0)=0$。讨论投资者何时将实施自己的期权。

第三节：布朗运动的推广

定义3.2 设$\{W(t), t \geq 0\}$是均值参数为μ，方差参数为σ^2的布朗运动，若

$$X(t) = e^{W(t)},$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为几何布朗运动。

几何布朗运动经常用于描述商品或股票的价格，此时假设价格的变化率是独立同分布的随机变量。

例3.2（商品、股票价格模型）设$X(t)$表示某商品（股票）在t时刻的价格，而且价格比$\frac{\mathrm{X(t)}}{\mathrm{X(t-1)}}$是独立同分布的随机序列，则商品（股票）的价格$X(t)$近似于几何布朗运动。

第三节：布朗运动的推广

定理3.2 若$\{X(t), t \geq 0\}$为几何布朗运动，则

$$E[X(t)] = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t}, k_x(t,s) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t+s)}(e^{\sigma^2 \min(s,t)} - 1),$$

$$Var[X(t)] = e^{(2\mu+\sigma^2)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

第三节：布朗运动的推广

例3.3 设$X(t)$的分布为$N\left(\mu t,\sigma^2 t\right)$，某股票现时刻（$t=0$）的价格为$S$，一个周期后（$t=T$）股票的价格为$Se^{X(T)}$，计算单周期股票的期望收益率和收益率的标准差。

第三节：布朗运动的推广

例3.4（股票期权的价值）假设某投资者持有敲定价格为K的欧式买入期权，其满期为T。设当前此股票的价格为$S(0) = S$，且股票的价格服从几何布朗运动，计算期权的期望价值。

谢 谢！

Thank You