随机过程

第四章 连续时间的马尔可夫链

上海财经大学 统计与管理学院

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定义1.1 设随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间$E = \{0,1,2,..\}$是离散的且参数集合是连续的，如果对于任意整数$n > 0$，任意实数$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$和任意$i_k \in E, 0 \leq k \leq n+1$，有

$$P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_0) = i_0, \cdots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_n) = i_n\}$$
$$= P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n\}$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间的马尔可夫链（或连续时间的马氏链）。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

例1.1 $\{N(t), t \geq 0\}$是一个泊松过程，其是连续时间的马氏链。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定义1.2 $\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间的马尔可夫链，对于任意$s, t \geq 0, i, j \in E$，

$$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}=P_{ij}(t;s)$$

称为$\{X(t), t \geq 0\}$的转移概率。

定义1.3 $\{X(t), t \geq 0\}$为连续时间的马尔可夫链，若对于任意$s, t \geq 0, i, j \in E$，有

$$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}=P\{X(t)=j|X(0)=i\}=P_{ij}(t)$$

即其转移概率不依赖于 s 时，$\{X(t), t \geq 0\}$ 称为齐次连续时间马氏链。

接下来我们只考虑齐次的马氏链。

定义1.4 对任意 $t \geq 0$，称 $P(t)=(P_{ij}(t)), i, j \in E$ 为转移概率矩阵。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定理1.1 对于连续时间的马氏链，对所有的$i,j \in E, t,s \geq 0$，有

$$P_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1, P_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

其中$\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0, i \neq j$。矩阵的形式为$\boldsymbol{P}(0) = I$，$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)$。

定理1.2 对于连续时间的马氏链，若$s_i(t) = P(X(t) = i)$表示$X(t) = i$的概率，$s(t) = \{s_i(t), i \in E\}$表示$X(t)$的概率分布，则对于连续时间的马氏链的任意$n$个时刻的联合分布律，可由初始分布$s(0)$和$P(t)$唯一确定；另外，$\forall t \geq 0$，$s(t) = s(0)P(t)$。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定义1.5 若转移概率$P_{ij}(t)$在$t=0$连续，即对任意$i,j \in E$有

$$\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则称$P_{ij}(t)$为标准转移概率。

接下来我们只考虑标准转移概率。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定理1.3 对于连续时间马氏链，若$P_{ij}(t)$为标准转移概率，则有

（1）对任意给定的$i \in E$，$P_{ij}(t)$在$(0,\infty)$上是一致连续函数。

（2）$P_{ii}(t) > 0, \forall t \geq 0, i \in E$。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

对于连续时间的马氏链$\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ 是否存在？该如何求？

回忆：对于离散时间的马氏链，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j\text{是非常返状态或零常返状态} \\ \text{不存在}, & j\text{是正常返，周期} \\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, & j\text{是正常返，非周期} \\ \dfrac{1}{\mu_{jj}}, & j\text{是正常返，非周期，且马氏链不可约} \end{cases}$$

第一节：连续时间马氏链的基本定义

（1）连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，转移概率为$P_{ij}(t)$。对任意$h > 0$，取离散的时间点，得到离散时间的马氏链$\{X(nh), n = 0,1,2,..\}$，其n步转移概率$p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(nh)$。

（2）由定理1.3，$P_{ii}(t) > \ 0, \forall t \ \geq \ 0, i \in E$。则对于$\{X(nh), n = 0,1,2,..\}$来说，任意状态$i$，集合$\left\{n: p_{ii}^{(n)} > 0\right\} = \{1,2, \dots\}$， i一定非周期。

（3）对于$\{X(nh), n = 0,1,2,..\}$来说，$\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$一定存在。

（4）对任意给定的$i \in \ E$，$P_{ij}(t)$在$(0, \infty)$上是一致连续函数，所以$P_{ij}(t), t \geq 0$可与$P_{ij}(nh), n = 0,1,2,..$的收敛性一致，即$\lim\limits_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ 一定存在。

定理1.5 设$P_{ij}(t)$是不可约连续时间马氏链的转移概率，则对任意$i,j \in E$，存在与i无关的极限π_j，使得

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

成立，其中π_j可恒为0。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定义1.6 连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，转移概率为$P_{ij}(t)$。

(1) 称状态i可达j，如果存在$t > 0$，使得

$$P_{ij}(t) > 0$$

成立，记为$i \to j$。

(2) 称状态i, j是相通的（或互达的），如果存在$t_1 > 0$和$t_2 > 0$，使得

$$P_{ij}(t_1) > 0, P_{ij}(t_2) > 0$$

成立，记为$i \leftrightarrow j$，即$i \to j, j \to i$。

(3)若连续时间马氏链中所有状态都是连通的，则该连续时间马氏链马氏链称为不可约的。

第一节：连续时间马氏链的基本定义

定理1.5 设$P_{ij}(t)$是不可约连续时间马氏链的转移概率，则对任意$i,j \in E$，存在与i无关的极限π_j，使得

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

成立，其中π_j可恒为0。

第二节：转移率

1. 离散时间马氏链，容易分析得到一步转移概率矩阵P, 进一步通过$P^{(n)} = P^n$获得n步转移概率矩阵；

2. 连续时间马氏链，转移概率矩阵$P(t) = (P_{ij}(t))$是函数？该如何求？是否有别的非函数型变量可以刻画连续时间马氏链的转移过程？

第二节：转移率

例2.1 假设连续时间马氏链在初始时刻位于状态i，并且假设该链在接下来的s分钟都没有离开状态i，那么它在以后的t分钟内并不会离开状态i的概率为多少？

注：以τ_i记过程在离开i之前在i停留的时间, 则其为指数分布，参数记为q_i。

第二节：转移率

定义2.1

（1） $q_i=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h}$， q_i称为状态i的通过率，为过程离开i的速率。

（2） $q_{ij}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h}$， q_{ij}称为过程从状态i转移到状态j的转移率（转移速率）。

注：q_i和q_{ij}刻画了连续时间马氏链的转移过程，且为数值型变量。

第二节：转移率

定义2.2 定义$q_{ii} = -q_i$，则矩阵$\mathbf{Q} = (q_{ij})$,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

称为连续时间马氏链的转移强度（转移率）矩阵。

定理2.1 转移率矩阵的性质：

（1） $q_{ii} \leq 0, q_{ij} \geq 0$。

（2） $q_{ij} = P'_{ij}(0), \forall i,j \in E$，$\mathbf{P}'(0) = \mathbf{Q}$。

（3） $\forall i \in E$，$0 \leq \sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$.

（4） 若E是有限的，则$\forall i \in E, 0 \leq \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$.

第三节：Kolmogorov方程

定理3.1 设连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间E有限，$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = (P_{ij}(t))$，$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \mathbf{P}'(0)$，则有

（1） $P'_{ij}(t) = -P_{ij}(t)q_j + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj}$， $\mathbf{P}'(\mathrm{t}) = \mathbf{P}(\mathrm{t})\mathbf{Q}$,

称作Kolmogorov向前方程。

（2） $P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{ik}P_{kj}(t)$， $\mathbf{P}'(\mathrm{t}) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(\mathrm{t})$,

称作Kolmogorov向后方程。

注：可通过Kolmogorov方程和**Q**计算出**P**(t)。

第三节：Kolmogorov方程

定理3.2 设连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间E有限，$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = (P_{ij}(t))$，$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \mathbf{P}'(0)$，则有

$$s_j'(t) = -s_j(t)q_j + \sum_{k \neq j} s_k(t)q_{kj}.$$

第三节：Kolmogorov方程

定理3.3 对于不可约连续马氏链，在状态E为有限时，下面的极限概率π_j存在

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

而且$\{\pi_j, j \in E\}$必满足平衡方程

$$\pi_j q_j = \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj}\,,\ \pi_j > 0,\ \sum_j \pi_j = 1,$$

且和极限分布$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = j)$相等。

例3.1 （两状态的Markov链）:设连续时间齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间为$E = \{0,1\}$且

$$P_{01}(h) = \lambda h + o(h), \qquad P_{10}(h) = \mu h + o(h)$$

求转移概率$P_{ij}(t)$以及马氏链的极限分布。

第四节：生灭过程

例4.1 假设有一个群体，它由同类型的个体组成，每个个体在任意长为h的时间内，繁殖一个新的个体的概率为$\lambda h+o(h)$，$\lambda>0$，繁殖两个以上个体的概率为$o(h)$。假设每个个体的寿命服从参数为μ的指数分布，并假设个体间的繁殖和死亡是独立的。考虑$\{X(t),t\geq 0\}$为群体在t时刻的个体数，讨论其变化情况。

第四节：生灭过程

定义4.1 若连续时间齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间为$\{0,1,\cdots\}$，且转移概率函数$P(t) = (P_{ij}(t))$满足

$$\begin{cases} P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h) & i \geq 0 \\ P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h) & i \geq 1 \\ P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & i \geq 0 \\ \sum\limits_{|j-i|\geq 2} P_{ij}(h) = o(h) & i \geq 0 \\ \lambda_0 \geq 0, \mu_0 = 0, \mu_i \geq 0, \lambda_i \geq 0 & i > 0 \end{cases}$$

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为生灭过程，其中λ_i和μ_i分别称为生率和灭率。

第四节：生灭过程

生灭过程$\{X(t), t \geq 0\}$转移率$Q = (q_{ij})$满足

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

例4.2 泊松过程是生灭过程。

第四节：生灭过程

定理4.1　$\{X(t), t \geq 0\}$为一生灭过程，且转移概率函数为$\mathrm{P(t)} = (P_{ij}(t))$，转移率矩阵为$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \mathbf{P}'(0)$，则$\mathbf{P}(\mathrm{t})$和$\mathbf{Q}$满足Kolmogorov向前和向后方程

- $P'_{ij}(t) = -P_{ij}(t)\left(\lambda_j + \mu_j\right) + P_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + P_{i,j+1}(t)\mu_{j+1},$
- $P'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t)$

第四节：生灭过程

定理4.2 $\{X(t), t \geq 0\}$为一生灭过程，且转移概率函数为$\mathrm{P(t)} = (P_{ij}(t))$，转移率矩阵为$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \mathbf{P}'(0)$，则$s_j(t)$和$\mathbf{Q}$满足方程

$$s_j'(t) = -s_j(t)\left(\lambda_j + \mu_j\right) + s_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + s_{j+1}(t)\mu_{j+1}.$$

第四节：生灭过程

定理4.3　若$\{X(t), t \geq 0\}$是生率和灭率分别为$\lambda_i > 0, i \geq 0, \mu_i > 0, i \geq 1$的生灭过程，则极限分布$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = j) = \pi_j$存在的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$$

且满足

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \pi_0$$

例4.3（M/M/1排队系统）顾客到达流是参数为λ的泊松过程，每个顾客的服务时间独立同分布，服从参数为μ的指数分布且与顾客到达时间相互独立，另外只有一个服务员。

- 构造一模型来描述系统中的顾客数。
- 给出系统能够稳定的条件。

谢 谢！

Thank You