目录

1 随机过程的基本概念

1.1 随机过程的定义与有穷维分布族

（空）

1.2 随机过程的分类

定理 1.2.1 (正态过程充要条件)**.** 随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 是正态过程当且仅当 $\forall n \geq 1, \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, \forall a_1, \ldots, a_n, \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{X}_{t_k}$ 服从一维正态分布。

证明. N 维随机向量 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)^T$ 服从多变量正态分布的充要条件是：任何线性组合 $\mathbf{Y} = a_1\mathbf{X}_1 + \ldots + a_N\mathbf{X}_N$ 服从正态分布。 □

定理 1.2.2. 二阶矩存在的严平稳过程必为宽平稳的。

证明. 宽平稳需要满足的条件如下：

$$m(t) \equiv C \tag{1}$$

$$k(s, s+t) = B(t) \tag{2}$$

$$E({\mathbf{X}_t}^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{T} \tag{3}$$

由条件知，(3)成立。

二阶矩存在，则一阶矩存在，且由 $Cauchy - Schwarz$ 不等式的积分形式可知 $k(s, s+t)$ 存在。

而由严平稳过程的定义知：$\forall t \in \mathbb{T}, \mathbf{X}_t$ 同分布，于是(1)成立。

对于(2)，考虑：

$$\begin{aligned} k(s, s+t) &= E(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s+t}) - E(\mathbf{X}_s)E(\mathbf{X}_{s+t}) \\ &= \left[\iint\limits_{\mathbf{X}_s \in \mathbb{E}, \mathbf{X}_{s+t} \in \mathbb{E}} x_s x_{s+t} f(x_s, x_{s+t}) \mathrm{d}x_s \mathrm{d}x_{s+t} \right] - C^2 \end{aligned}$$

由严平稳过程的定义知, $\forall s \in \mathbb{T}, f(x_s, x_{s+t}) = f(x_0, x_t)$, 故(2)成立。 □

定理 1.2.3. 正态宽平稳过程必为严平稳过程。

证明. $\forall n \geq 1, \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$,

令 $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_{t_1}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n}), \mathbf{X}_h = (\mathbf{X}_{t_1+h}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n+h})$

由于 $\{\mathbf{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为正态宽平稳过程，故 $\mathbf{X}_0$，$\mathbf{X}_h$ 服从多元正态分布。

由宽平稳过程的定义知，对于 $\mathbf{X}_0$ 和 $\mathbf{X}_h$，其均值向量相同，均为常数向量。其协方差矩阵只与时间差有关，因此也相同。

由于正态过程的有穷维分布由 $m(t)$ 和 $k(s,t)$ 完全决定。而 $\mathbf{X}_0$ 和 $\mathbf{X}_h$ 均值和协方差相同, 故 $\mathbf{X}_0$ 和 $\mathbf{X}_h$ 同分布对任意的 h 成立，从而有 $\{\mathbf{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为严平稳过程。 $\square$

2 泊松过程

2.1 泊松过程的定义

2.2 泊松过程的性质

2.3 非齐次的泊松过程

2.4 复合泊松过程

3 离散时间的马尔可夫链

3.1 马尔可夫链的基本概念

3.2 马氏链的状态分类

3.3 转移概率的极限状态与平稳分布

4 连续时间的马尔可夫链

4.1 连续时间马氏链的基本定义

4.2 转移率

4.3 $Kolmogorov$ 方程

4.4 生灭过程

5 布朗运动

5.1 布朗运动的定义及基本性质

5.2 布朗运动的首中时和最大值

5.3 布朗运动的推广