

目录	1
----	---

目录

1 随机过程的基本概念	2
1.1 随机过程的定义与有穷维分布族	2
1.2 随机过程的分类	2
2 泊松过程	3
2.1 泊松过程的定义	3
2.2 泊松过程的性质	3
2.3 非齐次的泊松过程	3
2.4 复合泊松过程	3
3 离散时间的马尔可夫链	4
3.1 马尔可夫链的基本概念	4
3.2 马氏链的状态分类	4
3.3 转移概率的极限状态与平稳分布	4
4 连续时间的马尔可夫链	5
4.1 连续时间马氏链的基本定义	5
4.2 转移率	5
4.3 <i>Kolmogorov</i> 方程	5
4.4 生灭过程	5
5 布朗运动	6
5.1 布朗运动的定义及基本性质	6
5.2 布朗运动的首中时和最大值	6
5.3 布朗运动的推广	6

1 随机过程的基本概念

1.1 随机过程的定义与有穷维分布族

定义 1.1.1 (随机过程). 给定概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 及指标集 $\mathbb{T} \neq \emptyset$, 若 $\forall t, \forall c \in \mathbb{R}, \{\omega | X_t(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}$, 则称 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为随机过程 (Stochastic Process)。

定义 1.1.2 (样本轨道). 随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 是关于 $t \in \mathbb{T}$ 和 $\omega \in \Omega$ 的二元函数, 当 ω 固定, $X(\cdot, \omega)$ 是 $t \in \mathbb{T}$ 的函数, 称为样本轨道 (Sample Path)。

定义 1.1.3 (有穷维分布族). 给定实值随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$, 对于 $\forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}$, 可得 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 的联合分布函数为:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P\{X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n}\}$$

有穷维分布函数族 $\mathcal{D} \triangleq \{F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) | \forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}\}$

定义 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 的联合矩母函数为:

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_{t_1}, \dots, u_{t_n}) = E\left[e^{\sum_{j=1}^n u_{t_j} X_{t_j}}\right]$$

有穷维矩母函数族 $\mathcal{C} \triangleq \{\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_{t_1}, \dots, u_{t_n}) | \forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}\}$

定义 1.1.4 (独立随机过程). 随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \prod_{k=1}^n F_{t_k}(x_{t_k}) \quad (\forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n)$$

则称 $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ 为独立随机过程。

定义 1.1.5 (均值函数). 给定随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$, 定义均值函数为:

$$m(t) = E(X_t)$$

定义 1.1.6 (方差函数). 给定随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$, 定义方差函数为:

$$D(t) = \text{Var}(X_t) = E(X_t - m(t))^2$$

定义 1.1.7 (自相关函数). 给定随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$, 定义自相关函数为:

$$R(s, t) = E(X_s X_t)$$

定义 1.1.8 (协方差函数). 给定随机过程 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$, 定义协方差函数为:

$$k(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = E((X_s - m(s))(X_t - m(t))) = R(s, t) - m(s)m(t)$$

1.2 随机过程的分类

定义 1.2.1.

2 泊松过程

2.1 泊松过程的定义

2.2 泊松过程的性质

2.3 非齐次的泊松过程

2.4 复合泊松过程

3 离散时间的马尔可夫链

3.1 马尔可夫链的基本概念

3.2 马氏链的状态分类

3.3 转移概率的极限状态与平稳分布

4 连续时间的马尔可夫链

4.1 连续时间马氏链的基本定义

4.2 转移率

4.3 *Kolmogorov* 方程

4.4 生灭过程

5 布朗运动

5.1 布朗运动的定义及基本性质

5.2 布朗运动的首中时和最大值

5.3 布朗运动的推广