

第三章 离散时间马氏链作业

11月1号(周三)课堂上交

1. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马尔科夫链, 试证:

$$\begin{aligned} &P\{X_{n+1} = i_{n+1}, X_{n+2} = i_{n+2}, \dots, X_{n+m} = i_{n+m} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = i_{n+1}, X_{n+2} = i_{n+2}, \dots, X_{n+m} = i_{n+m} | X_n = i_n\} \end{aligned}$$

2. 从1,2,3,4,5,6中等可能取出1个数, 取后放回, 连续取下去, 考虑前 n 次所取得的最大数为 j , 就说质点在第 n 步处于状态 j , 试证该质点运动构成一个Markov链, 并求一步转移概率矩阵。

3. 设 M 链 $X_n (n \geq 0)$ 有状态1,2,3和转移阵 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$, 已知 $X_0 = 3$, 初始分布

为 $q_1 = P(X_0 = 1) = 0$, $q_2 = P(X_0 = 2) = 0$, $q_3 = P(X_0 = 3) = 1$, 求

(1) 三步转移阵;

(2) 三步转移后处于状态2的概率。

4. 设 j 为非常返状态, 证明对任意 $i \in S$ 有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty$$

5. 设马尔科夫链的转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

计算 $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, n = 1, 2, 3$

6. M 链的状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, 分解此链, 指出非常返集

和基本常返集, 并说明常返闭集中状态是否为正常返态;

7. 设 M 链 $X_n (n \geq 0)$ 有状态1,2和一步转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 初始分布为 $q_1 =$

$P(X_0 = 1) = p, q_2 = P(X_0 = 2) = 1 - p, (0 < p < 1)$, 对 $\forall n \geq 1$, 求:

(1) $P(X_{n+2} = 2 | X_n = 1)$;

(2) 用 $P(X_{n-1} = 1)$ 表示 $P(X_n = 1)$

(3) 该链是否遍历, 为什么?

(4) 极限分布。

8. 设甲乙两个容器共有 $2N$ 个球, 每隔单位时间从这 $2N$ 个球中任取一球放入另一容器中, 记 X_n 为在时刻 n 甲容器中球的个数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是齐次马尔科夫链, 称为艾伦菲斯特链。求该链的平稳分布。

9. 设河流每天的BOD(生物耗氧量)浓度为齐次马尔科夫链, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$ 是按BOD浓度为极低, 低、中、高分别表示的, 其一步转移概率矩阵(以一天为单位)为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

若 BOD 浓度为高，则称河流处于污染状态。

- (1) 证明该链是遍历链；
- (2) 求该链的平稳分布；
- (3) 河流再次达到污染的平均时间 μ_3

10. 一个国家在稳定经济条件下它的出口商品能够用三状态的马尔可夫链描述如下：状态空间 $S = \{+1, 0, -1\}$ 。+1：今年比去年增长 $\geq 5\%$ ；0：波动低于 5% ；-1：今年比去年减少 $\geq 5\%$ 。由以往的统计数据求得转移矩阵为：

$$\begin{matrix} & +1 & 0 & -1 \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求每个状态的平均返回时间，并比较在稳定经济条件下增长状态与减少状态的稳定概率。