

## 第一章随机过程作业

9月13号 课堂上交

1. 设 $\{X_t, t \geq a\}$ 是独立增量过程, 且 $X_a = 0$ , 方差函数为 $\sigma_{X_t}^2$ 。记随机过程 $Y_t = kX_t + c$ ,  $k, c$ 为常数,  $c \neq 0$ 。

- (1) 证明 $Y_t$ 是独立增量随机过程;  
(2) 求 $Y_t$ 的方差函数和协方差函数。

2. 设 $X(t) = a \sin(\omega t + Y)$ , 其中 $a, \omega$ 均为正常数, 随机变量 $Y \sim N(0, 1)$ , 试求 $E(X(t))$ 、 $D(X(t))$ 。

3. 设有随机过程 $X(t)$ , 并设 $x$ 是一实数, 定义另一个随机过程 $Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x \\ 0, & X(t) > x \end{cases}$   
试证 $Y(t)$ 的均值和自相关函数分别为随机过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数。

4. 设 $U$ 是随机变量, 随机过程 $X_t = U, -\infty < t < \infty$ 。

- (1)  $X_t$ 是严平稳过程吗? 为什么?  
(2) 如果 $E(U) = \mu, \text{Var}(U) = \sigma^2$ , 证明:  $X_t$ 的自相关函数是常数。

5. 设有随机过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}, X(t) = Y \cos t$ , 其中 $Y$ 为均匀分布于 $(0, 1)$ 间的随机变量, 即 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  试证:

(1) 自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = \frac{1}{3} \cos t_1 \cos t_2$

(2) 协相关函数 $k_X(t_1, t_2) = \frac{1}{12} \cos t_1 \cos t_2$

6. 设 $\{X(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是均值为零的平稳随机过程。试证:

$$Y(n) = AX(n) + BX(n - m)$$

仍是一平稳随机过程, 其中 $A, B$ 为复常数,  $m$ 为整数。