目录

1 随机过程的基本概念

1.1 随机过程的定义与有穷维分布族

定义 1.1.1 (随机过程). 给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及指标集 $\mathbb{T}\neq\emptyset$，若 $\forall t,\forall c\in\mathbb{R},\{\omega|\boldsymbol{X}_t(\omega)\leq c\}\in\mathscr{F}$，则称 $\{X_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$ 为随机过程 (*Stochastic Process*)。

定义 1.1.2 (样本轨道). 随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$ 是关于 $t\in\mathbb{T}$ 和 $\omega\in\Omega$ 的二元函数，当 ω 固定，$X(\cdot,\omega)$ 是 $t\in\mathbb{T}$ 的函数，称为样本轨道 (*Sample Path*)。

定义 1.1.3 (有穷维分布族). 给定实值随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$，对于 $\forall n\geq 1,\forall\{t_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{T}$，可得 $(\boldsymbol{X}_{t_1},\cdots,\boldsymbol{X}_{t_n})$ 的联合分布函数为：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=P\{\boldsymbol{X}_{t_1}\leq x_{t_1},\cdots,\boldsymbol{X}_{t_n}\leq x_{t_n}\}$$

有穷维分布函数族 $\mathscr{D}\triangleq\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})|\forall n\geq 1,\forall\{t_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{T}\}$
定义 $(\boldsymbol{X}_{t_1},\cdots,\boldsymbol{X}_{t_n})$ 的联合矩母函数为：

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u_{t_1},\cdots,u_{t_n})=E\left[e^{\sum_{j=1}^n u_{t_j}\boldsymbol{X}_{t_j}}\right]$$

有穷维矩母函数族 $\mathscr{C}\triangleq\{\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u_{t_1},\cdots,u_{t_n})|\forall n\geq 1,\forall\{t_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{T}\}$

定义 1.1.4 (独立随机过程). 随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$ 满足：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_{t_1},\cdots,x_{t_n})=\prod_{k=1}^n F_{t_k}(x_{t_k})\qquad(\forall n\geq 1,\forall\{t_i\}_{i=1}^n)$$

则称 $\{\boldsymbol{X}_t,t\in\mathbb{T}\}$ 为独立随机过程。

定义 1.1.5 (均值函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$，定义均值函数为：

$$m(t)=E(\boldsymbol{X}_t)$$

定义 1.1.6 (方差函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$，定义方差函数为：

$$D(t)=Var(\boldsymbol{X}_t)=E(\boldsymbol{X}_t-m(t))^2$$

定义 1.1.7 (自相关函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$，定义自相关函数为：

$$R(s,t)=E(\boldsymbol{X}_s\boldsymbol{X}_t)$$

定义 1.1.8 (协方差函数). 给定随机过程 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega),t\in\mathbb{T}\}$，定义协方差函数为：

$$k(s,t)=cov(\boldsymbol{X}_s\boldsymbol{X}_t)=E((\boldsymbol{X}_s-m(s))(\boldsymbol{X}_t-m(t)))=R(s,t)-m(s)m(t)$$

1.2 随机过程的分类

定义 1.2.1 (独立增量过程)**.** 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：对于 $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ ，有 $\boldsymbol{X}_{t_2} - \boldsymbol{X}_{t_1}, \boldsymbol{X}_{t_3} - \boldsymbol{X}_{t_2}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n} - \boldsymbol{X}_{t_{n-1}}$ 相互独立，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为独立增量过程。

定义 1.2.2 (平稳增量过程)**.** 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：对于 $\forall t, h \geq 0$ $(t, t+h \in \mathbb{T})$ ，有 $\boldsymbol{X}_{t+h} - \boldsymbol{X}_t$ 的分布与 t 无关，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为平稳增量过程。

定义 1.2.3 (平稳独立增量过程)**.** 若 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 既是独立增量过程，又是平稳增量过程，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 是平稳独立增量过程。

定义 1.2.4 (计数过程)**.** $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 称为一个计数过程，若：

(1). $\boldsymbol{N}(0) = 0$

(2). $\boldsymbol{N}(t) \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0$

(3). $\boldsymbol{N}(s) \leq \boldsymbol{N}(t), \forall s < t$

(4). 当 $s < t$ ，$\boldsymbol{N}(t) - \boldsymbol{N}(s)$ 等于 $(s, t]$ 中发生的事件的个数。

定义 1.2.5 (正态过程)**.** 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 对于 $\forall n \geq 1, \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{T}$ 有 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n}) \sim N(\mu, \Sigma)$，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为正态过程。

定义 1.2.6 (弱平稳过程/宽平稳过程/协方差平稳过程)**.** 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 满足：

(1) $m(t) \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$

(2) $k(s, s+t) = B(t)$

(3) $E\left(\boldsymbol{X}_t^2\right) < +\infty$

则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为弱平稳过程/宽平稳过程/协方差平稳过程。

定义 1.2.7 (强平稳过程/严平稳过程/狭义平稳过程)**.** 如果 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall h$，有：

$$P\left(\boldsymbol{X}_{t_1} \leq \lambda_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n} \leq \lambda_n\right) = P\left(\boldsymbol{X}_{t_1+h} \leq \lambda_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n+h} \leq \lambda_n\right)$$

即 $(\boldsymbol{X}_{t_1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n})$ 与 $(\boldsymbol{X}_{t_1+h}, \cdots, \boldsymbol{X}_{t_n+h})$ 同分布，则称 $\{\boldsymbol{X}_t(\omega), t \in \mathbb{T}\}$ 为强平稳过程/严平稳过程/狭义平稳过程。

2 泊松过程

2.1 泊松过程的定义

定义 2.1.1 (泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程，若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $\forall s, t \geq 0$，有

$$P\{\boldsymbol{N}(s+t) - \boldsymbol{N}(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

定义 2.1.2 (泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 称为参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程，若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是平稳增量过程

(3). 对于 $\forall t > 0$ 和足够小的 $h > 0$，有：

$$P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$$
$$P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) \geq 2\} = o(h)$$

2.2 泊松过程的性质

定义 2.2.1 (分类泊松过程). 假定在 s 时刻发生的事件以概率 $P(s)$ 被归为 *1* 型，以概率 $1 - P(s)$ 被归为 *2* 型，且各个事件的归类相互独立。记 $\{\boldsymbol{N}_i(t), t \geq 0\}, i = 1, 2$ 为 t 时 i 型事件发生的个数。

2.3 非齐次的泊松过程

定义 2.3.1 (非齐次泊松过程). 计数过程 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 若满足：

(1). $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程

(2). $P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

(3). $P\{\boldsymbol{N}(t+h) - \boldsymbol{N}(t) \geq 2\} = o(h)$

则称 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ $(\lambda(t) > 0, t \geq 0)$ 的非齐次泊松过程。

2.4 复合泊松过程

定义 2.4.1 (复合泊松过程)**.** $\{\boldsymbol{Y}_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ 独立同分布，$\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，且 $\{\boldsymbol{N}(t), t \geq 0\}$ 与 $\{\boldsymbol{Y}_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ 独立，记：

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{N}(t)} \boldsymbol{Y}_k \ (t \geq 0)$$

则称 $\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$ 为复合泊松过程。

3 离散时间的马尔可夫链

3.1 马尔可夫链的基本概念

定义 3.1.1 (马尔可夫链). 若 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的状态空间和参数空间都是离散的，且具有马氏性：

$$\begin{aligned} &P\{\boldsymbol{X}_{n+1} = j | \boldsymbol{X}_0 = i_0, \boldsymbol{X}_1 = i_1, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-1} = i_{n-1}, \boldsymbol{X}_n = i\} \\ =&P\{\boldsymbol{X}_{n+1} = j | \boldsymbol{X}_n = i\} \end{aligned}$$

则称 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 为马氏链。

定义 3.1.2 (一步转移概率). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 为马氏链，若 $P\{\boldsymbol{X}_{n+1} = j | \boldsymbol{X}_n = i\}$ 与 n 无关，则：

$$p_{ij} \triangleq P\{\boldsymbol{X}_{n+1} = j | \boldsymbol{X}_n = i\}$$

称 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 为（时间）齐次的，称 p_{ij} 为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率，称 $P = [p_{ij}]$ 为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵。

定义 3.1.3 (多步转移概率). 称条件概率

$$p_{ij}^{(m)} \triangleq P\{\boldsymbol{X}_{n+m} = j | \boldsymbol{X}_n = i\}$$

为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的 m 步转移概率，记 $P^{(m)} = \left[p_{ij}^{(m)}\right]$ 为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的 m 步转移概率矩阵。

定义 3.1.4 (概率分布行向量). 对于 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$，记 n 时刻的分布行向量为：

$$s(n) = \{s_i(n), i \in \mathbb{E}\}$$

其中：

$$s_i(n) = P(\boldsymbol{X}_n = i)$$

3.2 马氏链的状态分类

定义 3.2.1 (可达). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，若：

$$\{n | p_{ij}^{(n)} > 0\} \neq \emptyset$$

则称 i 可达 j，记作 $i \to j$。

定义 3.2.2 (互通). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，若：

$$i \to j \text{ 且 } j \to i$$

则称 i, j 互通，记作 $i \leftrightarrow j$

定义 3.2.3 (状态分类)**.** $\forall i, j \in \mathbb{E}$，若 $i \leftrightarrow j$，则称 i, j 属于同一类状态。

定义 3.2.4 (可约与不可约)**.** 若 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 只存在一个类，则称其是不可约的，否则称为可约的。

定义 3.2.5 (可回态与不可回态)**.** $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若：

$$P\{\boldsymbol{X}_n = i | \boldsymbol{X}_0 = i\} \equiv 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

则称 i 是不可回态，否则称为可回态。

定义 3.2.6 (周期与非周期)**.** $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，记：

$$d_i \triangleq \gcd\left(\{n | n \in \mathbb{N}^*, p_{ii}^{(n)} > 0\}\right)$$

当 $d_i > 1$，称状态 i 为周期的；当 $d_i = 1$，称状态 i 为非周期的。

定义 3.2.7 (首达时间)**.** $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，首达时间定义为：

$$\boldsymbol{T}_{ij} = \inf\{n \geq 1 | \boldsymbol{X}_n = j, \boldsymbol{X}_0 = i\}$$

若 $\{n \geq 1 | \boldsymbol{X}_n = j, \boldsymbol{X}_0 = i\} = \emptyset$，则令 $\boldsymbol{T}_{ij} = \infty$。首达时间是一个随机变量。

定义 3.2.8 (首达概率)**.** $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，首达概率定义为：

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P\{\boldsymbol{T}_{ij} = n | \boldsymbol{X}_0 = i\} \\ &= P\{\boldsymbol{X}_n = j, \boldsymbol{X}_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1 | \boldsymbol{X}_0 = i\} \end{aligned}$$

定义：

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(0)} &= 0 \ (i \neq j, i, j \in \mathbb{E}) \\ f_{ii}^{(0)} &= 1 \ (i \in \mathbb{E}) \end{aligned}$$

定义 3.2.9 (可达概率)**.** $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，可达概率定义为：

$$\begin{aligned} f_{ij} &= P\{T_{ij} < +\infty | \boldsymbol{X}_0 = i\} \\ &= P\{\exists n, s.t.\ \boldsymbol{X}_n = j, \boldsymbol{X}_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1 | \boldsymbol{X}_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

定义 3.2.10 (平均可达时间). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i, j \in \mathbb{E}$，平均可达时间定义为：

$$\mu_{ij} = \begin{cases} E\left[T_{ij}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} \quad (f_{ij} = 1) \\ \infty \quad (f_{ij} < 1) \end{cases}$$

定义 3.2.11 (常返). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若 $f_{ii} = 1$，则称状态 i 是常返的。

定义 3.2.12 (正常返). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若 $f_{ii} = 1$，且 $\mu_{ii} < \infty$，则称状态 i 是正常返的。

定义 3.2.13 (遍历). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若 $f_{ii} = 1$，且 $\mu_{ii} < \infty$，且 $d_i = 1$，则称状态 i 是遍历的。

定义 3.2.14 (零常返). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若 $f_{ii} = 1$，且 $\mu_{ii} = \infty$，则称状态 i 是零常反的。

定义 3.2.15 (非常返). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，给定任意的 $i \in \mathbb{E}$，若 $f_{ii} < 1$，则称状态 i 是非常返的。

3.3 转移概率的极限状态与平稳分布

定义 3.3.1 (极限分布). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，记：

$$\pi_j^* \triangleq \lim_{n \to \infty} s_j(n) = \lim_{n \to \infty} P(\boldsymbol{X}_n = j)$$

若 $\forall j \in \mathbb{E}, \pi_j^*$ 存在，且 $\sum_{j \in \mathbb{E}} \pi_j^* = 1$，则称 $\pi = (\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots)$ 为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的极限分布。

定义 3.3.2 (平稳分布). $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链，若：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \boldsymbol{\pi} \cdot P = \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{\pi} \triangleq \{\pi_j, j \in \mathbb{E}\}$ 为 $\{\boldsymbol{X}_n, n \geq 0\}$ 的平稳分布。其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 列向量，P 为概率转移矩阵。

4 连续时间的马尔可夫链

4.1 连续时间马氏链的基本定义

4.2 转移率

4.3 $Kolmogorov$ 方程

4.4 生灭过程

5 布朗运动

5.1 布朗运动的定义及基本性质

5.2 布朗运动的首中时和最大值

5.3 布朗运动的推广