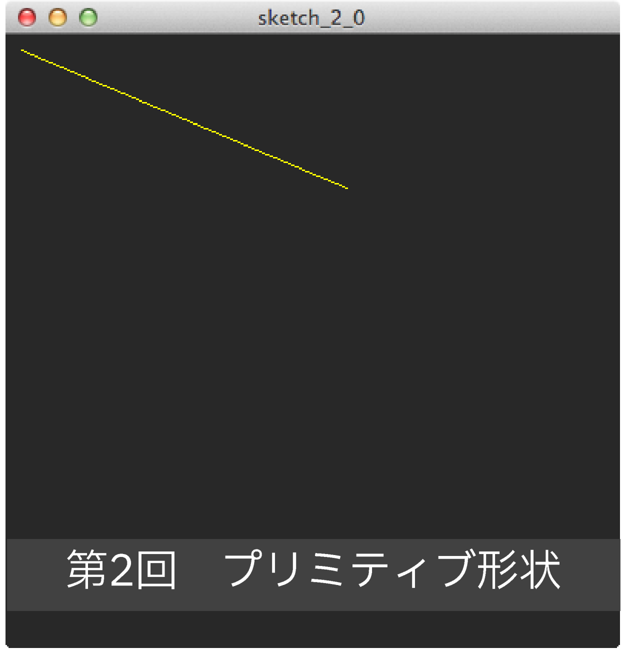
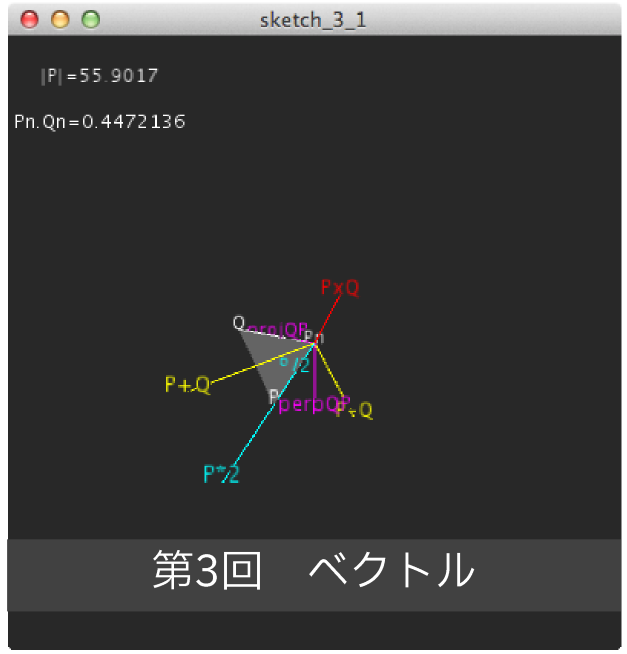
CGとCADの数理

GEOMETRIC MODELING AND COMPUTER GRAPHICS

第09回 パラメトリックな曲面

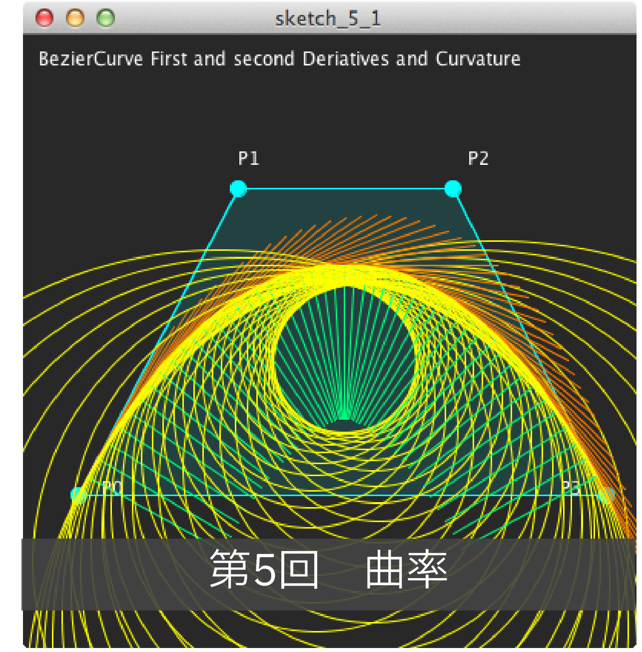


第2回　プリミティブ形状

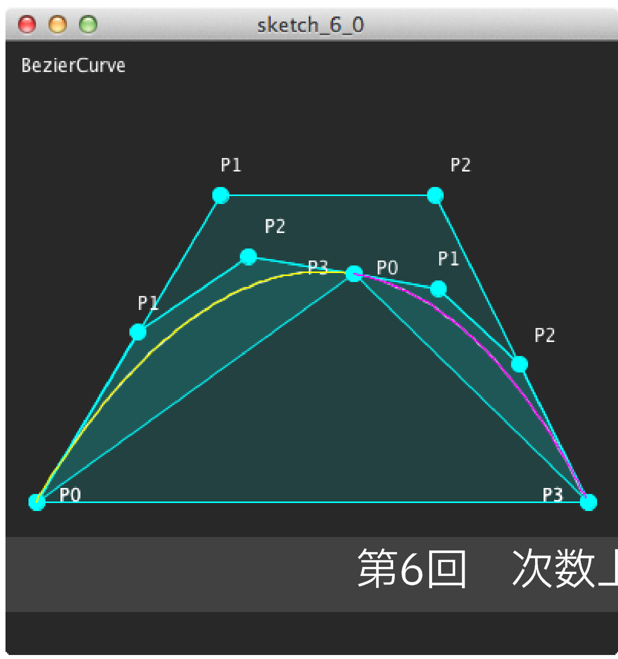


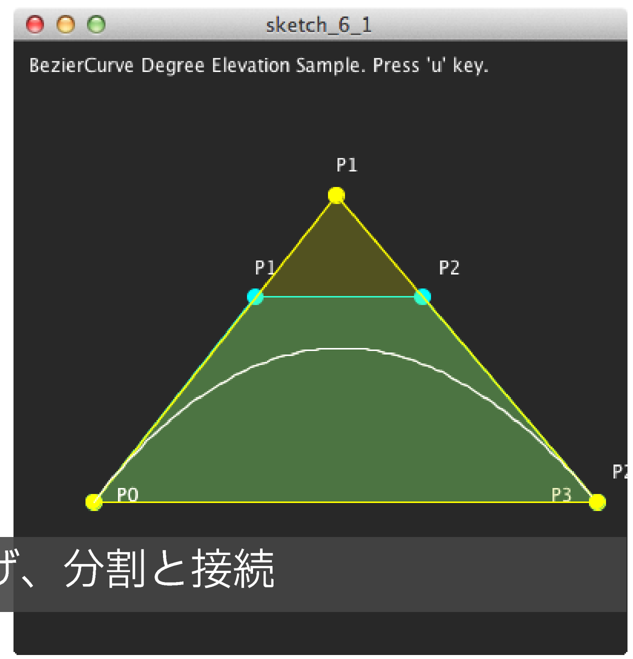
第3回　ベクトル

第4回　ベジエ曲線

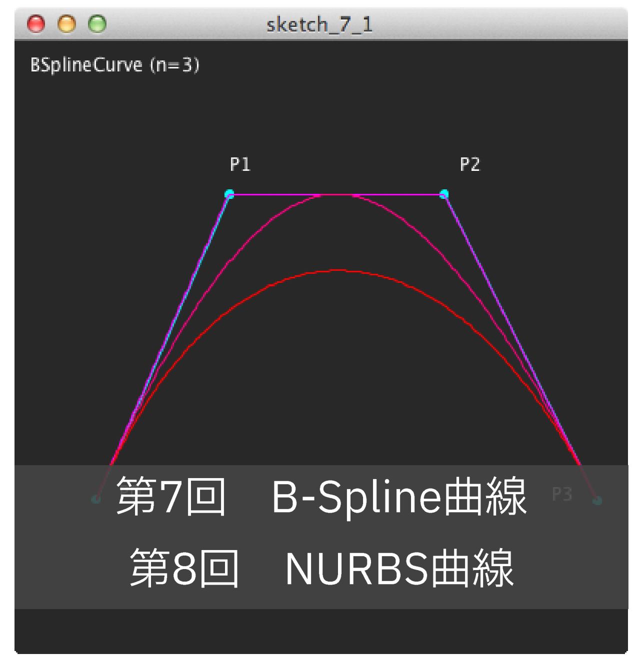


第5回　曲率



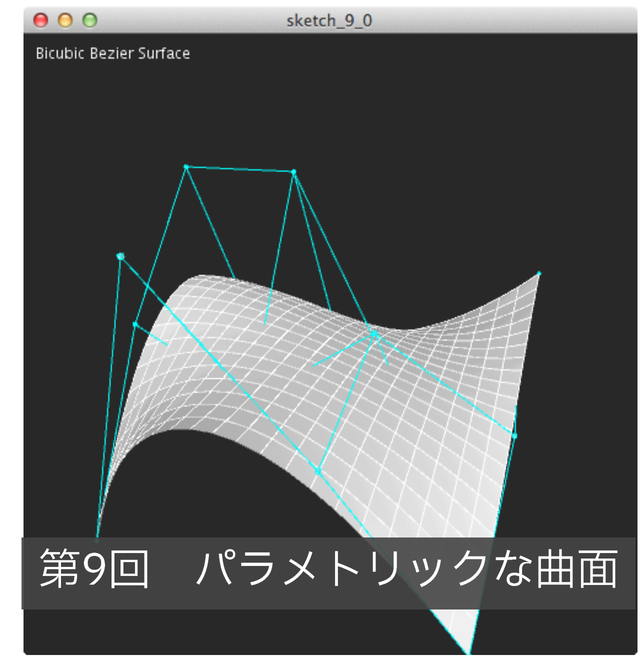


第6回　次数上げ、分割と接続



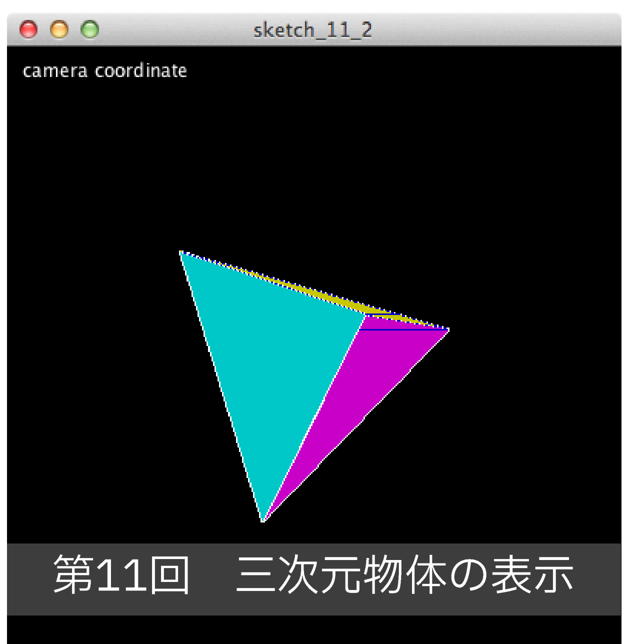
第7回　B-Spline曲線

第8回　NURBS曲線



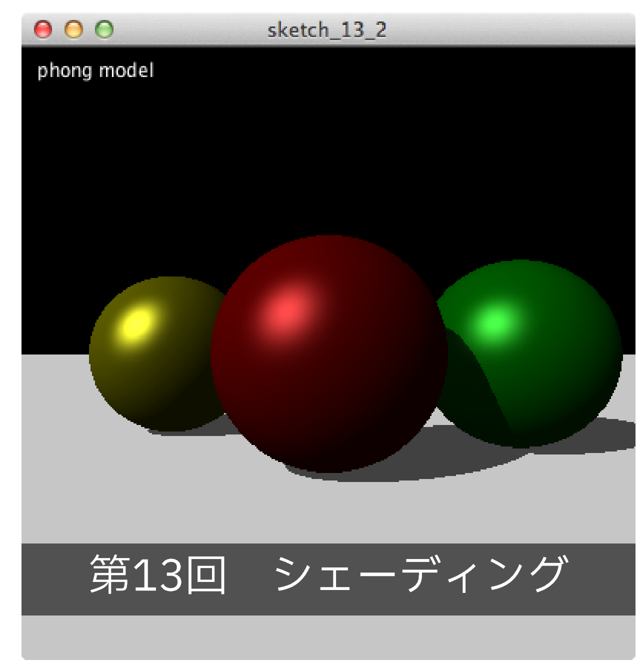
第9回　パラメトリックな曲面

第10回　行列



第11回　三次元物体の表示

第12回　レイトレーシング



第13回　シェーディング

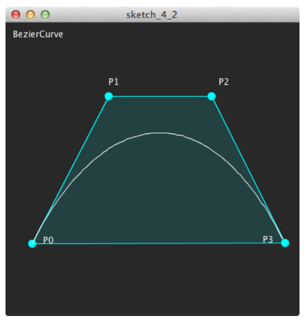
3次ベジエ曲線（*Cubic Bezier Curve*）

有理3次Bezier曲線（***Rational*** *Cubic Bezier Curve*）

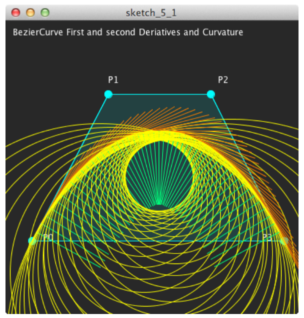
ベルンシュタイン基底関数（Bernstein Basis Function）

$$R(t) = \sum_{i=0}^{3} \boxed{B_i^3(t)}\, \boxed{P_i} \longrightarrow R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i B_i^3(t) P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i B_i^3(t)}$$

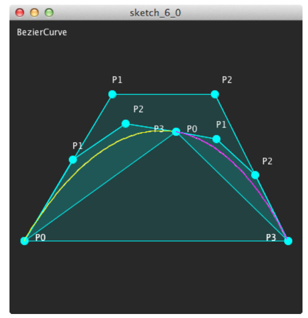
Bernstein 基底関数



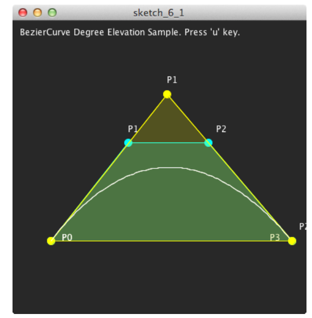
1階、2階微分、曲率



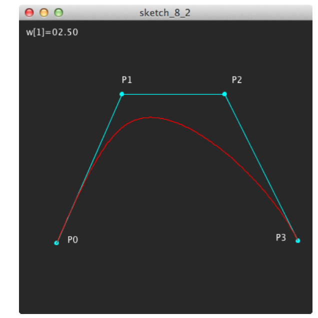
分割



次数上げ



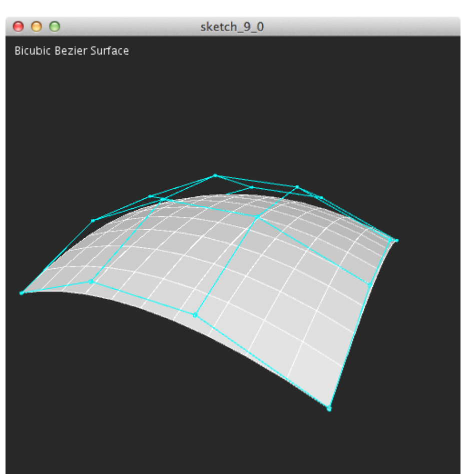
有理化



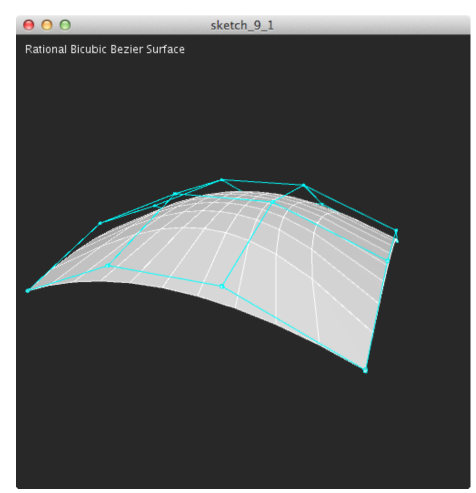
3 x 3次ベジエ曲面（*Bicubic Bezier Surface*）

有理 3 x 3次ベジエ曲面（***Rational*** *Bicubic Bezier Surface*）

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, P_{ij} \longrightarrow S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, w_{ij}\, P_{ij}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, w_{ij}}$$

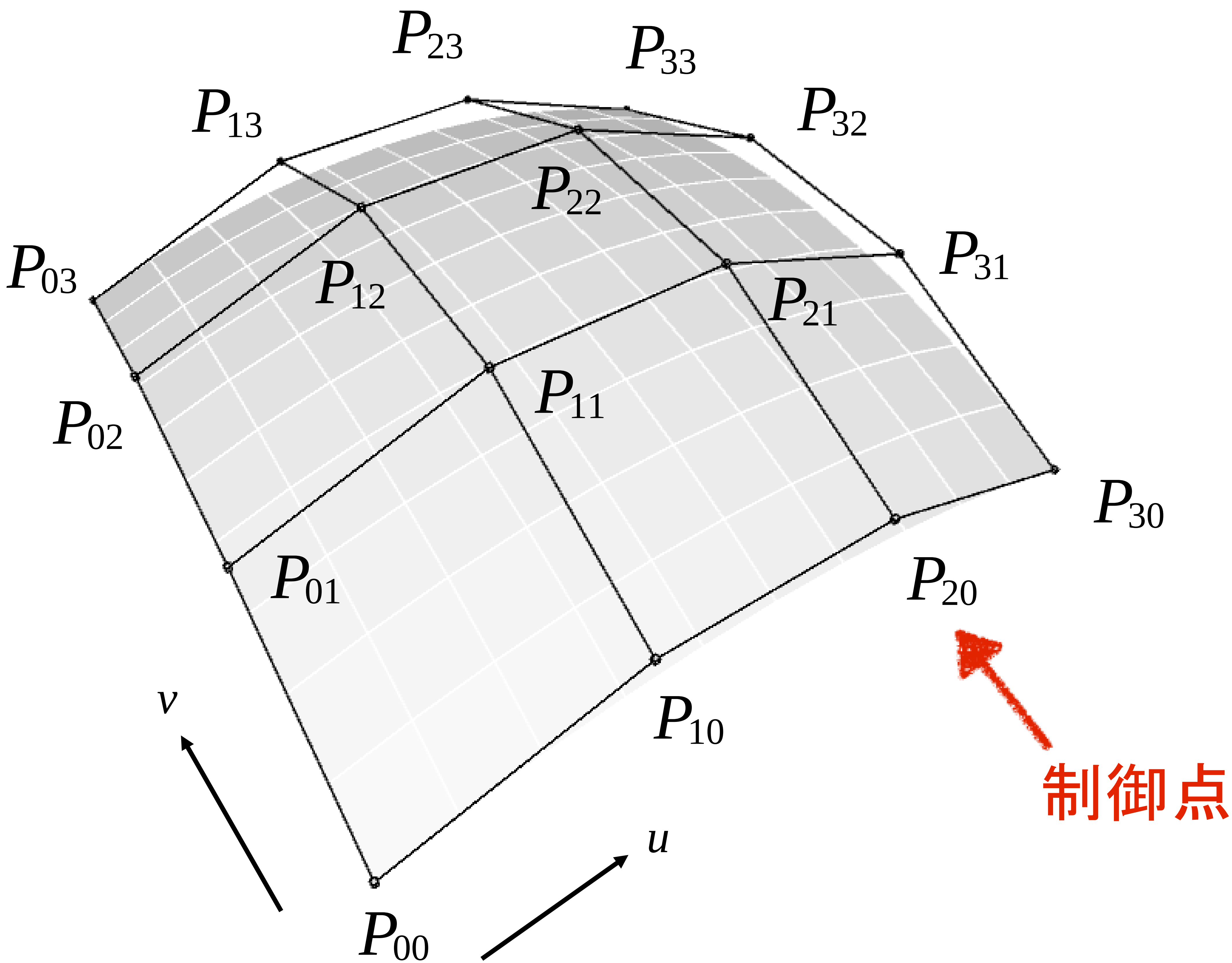


講義では、3 x 3次のベジェ曲面を紹介します。3 x 3次ベジエ曲面は、**双3次ベジエ曲面（*Bicubic Bezier Surface*）**とも呼ばれます。



曲線のときと同様に、ベジエ曲面も**有理化することが出来ます。**

双3次ベジエ曲面（ *Bicubic Bezier Surface* ）



双3次ベジエ曲面では、制御点が u 方向に 4 個、v 方向に 4 個の、合計 16 個あります。
また、パラメータ u と v は、 $0 \le u \le 1$、 $0 \le v \le 1$になります。

3次ベジエ曲線（ *Cubic Bezier Curve* ）

$$R(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\, P_i$$

ベルンシュタイン基底関数（ *Bernstein Basis Function* ）

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} (1 - t)^{n-i}\, t^i$$

i = 0, 1, 2, 3 の時について

i=0 のとき $B_0^3(t) = \binom{3}{0}(1 - t)^3\, t^0 = (1 - t)^3$

```
float B30(float t){return ((1-t)*(1-t)*(1-t));}
```

i=1 のとき $B_1^3(t) = \binom{3}{1}(1 - t)^2\, t^1 = 3(1 - t)^2\, t$

```
float B31(float t){return (3*(1-t)*(1-t)*t);}
```

i=2 のとき $B_2^3(t) = \binom{3}{2}(1 - t)^1\, t^2 = 3(1 - t)\, t^2$

```
float B32(float t){return (3*(1-t)*t*t);}
```

i=3 のとき $B_3^3(t) = \binom{3}{3}(1 - t)^0\, t^3 = t^3$

```
float B33(float t){return (t*t*t);}
```

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}B_i^3(u)\,B_j^3(v)\,P_{ij}$$

$$B_2^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{20}+B_1^3(v)\,P_{21}+B_2^3(v)\,P_{22}+B_3^3(v)\,P_{23}\right)$$

```
B32(u)*(B30(v)*P20.x + B31(v)*P21.x + B32(v)*P22.x + B33(v)*P23.x)
```

$i=0,\ j=0$ のとき $B_0^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{00}$

$i=0,\ j=1$ のとき $B_0^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{01}$

$i=0,\ j=2$ のとき $B_0^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{02}$

$i=0,\ j=3$ のとき $B_0^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{03}$

$i=2,\ j=0$ のとき $B_2^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{20}$

$i=2,\ j=1$ のとき $B_2^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{21}$

$i=2,\ j=2$ のとき $B_2^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{22}$

$i=2,\ j=3$ のとき $B_2^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{23}$

$$B_0^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{00}+B_1^3(v)\,P_{01}+B_2^3(v)\,P_{02}+B_3^3(v)\,P_{03}\right)$$

```
B30(u)*(B30(v)*P00.x + B31(v)*P01.x + B32(v)*P02.x + B33(v)*P03.x)
```

$$B_3^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{30}+B_1^3(v)\,P_{31}+B_2^3(v)\,P_{32}+B_3^3(v)\,P_{33}\right)$$

```
B33(u)*(B30(v)*P30.x + B31(v)*P31.x + B32(v)*P32.x + B33(v)*P33.x)
```

$i=1,\ j=0$ のとき $B_1^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{10}$

$i=1,\ j=1$ のとき $B_1^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{11}$

$i=1,\ j=2$ のとき $B_1^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{12}$

$i=1,\ j=3$ のとき $B_1^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{13}$

$i=3,\ j=0$ のとき $B_3^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{30}$

$i=3,\ j=1$ のとき $B_3^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{31}$

$i=3,\ j=2$ のとき $B_3^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{32}$

$i=3,\ j=3$ のとき $B_3^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{33}$

$$B_1^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{10}+B_1^3(v)\,P_{11}+B_2^3(v)\,P_{12}+B_3^3(v)\,P_{13}\right)$$

```
B31(u)*(B30(v)*P10.x + B31(v)*P11.x + B32(v)*P12.x + B33(v)*P13.x)
```

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3 \ (u)\ B_j^3(v)\ P_{ij}$$

```
S[uu][vv].x =  B30(u)*(  B30(v)*P00.x
                        + B31(v)*P01.x
                        + B32(v)*P02.x
                        + B33(v)*P03.x )

              +B31(u)*(  B30(v)*P10.x
                        + B31(v)*P11.x
                        + B32(v)*P12.x
                        + B33(v)*P13.x )

              +B32(u)*(  B30(v)*P20.x
                        + B31(v)*P21.x
                        + B32(v)*P22.x
                        + B33(v)*P23.x )

              +B33(u)*(  B30(v)*P30.x
                        + B31(v)*P31.x
                        + B32(v)*P32.x
                        + B33(v)*P33.x );
```

$S(u,v)$ $u = 0.5$ のとき $v = 0.14$ のとき

```
S[uu][vv].x
```

v 方向
u 方向

$$= B^3_0(u)\left(B^3_0(v)\,P_{00} + B^3_1(v)\,P_{01} + B^3_2(v)\,P_{02} + B^3_3(v)\,P_{03}\right)$$

```
B30(u)*(B30(v)*P00.x + B31(v)*P01.x + B32(v)*P02.x + B33(v)*P03.x)
```

0.125 $0.64 \times P_{00}$ $0.31 \times P_{01}$ $0.05 \times P_{02}$ $0.00 \times P_{03}$

の12.5% P_{00} の64% P_{01} の31% P_{02} の 5% P_{03} の 0%

$$+ B^3_1(u)\left(B^3_0(v)\,P_{10} + B^3_1(v)\,P_{11} + B^3_2(v)\,P_{12} + B^3_3(v)\,P_{13}\right)$$

```
B31(u)*(B30(v)*P10.x + B31(v)*P11.x + B32(v)*P12.x + B33(v)*P13.x)
```

0.375 $0.64 \times P_{10}$ $0.31 \times P_{11}$ $0.05 \times P_{12}$ $0.00 \times P_{13}$

の37.5% P_{00} の64% P_{01} の31% P_{02} の 5% P_{03} の 0%

$$+ B^3_2(u)\left(B^3_0(v)\,P_{20} + B^3_1(v)\,P_{21} + B^3_2(v)\,P_{22} + B^3_3(v)\,P_{23}\right)$$

```
B32(u)*(B30(v)*P20.x + B31(v)*P21.x + B32(v)*P22.x + B33(v)*P23.x)
```

0.375 $0.64 \times P_{20}$ $0.31 \times P_{21}$ $0.05 \times P_{22}$ $0.00 \times P_{23}$

の37.5% P_{00} の64% P_{01} の31% P_{02} の 5% P_{03} の 0%

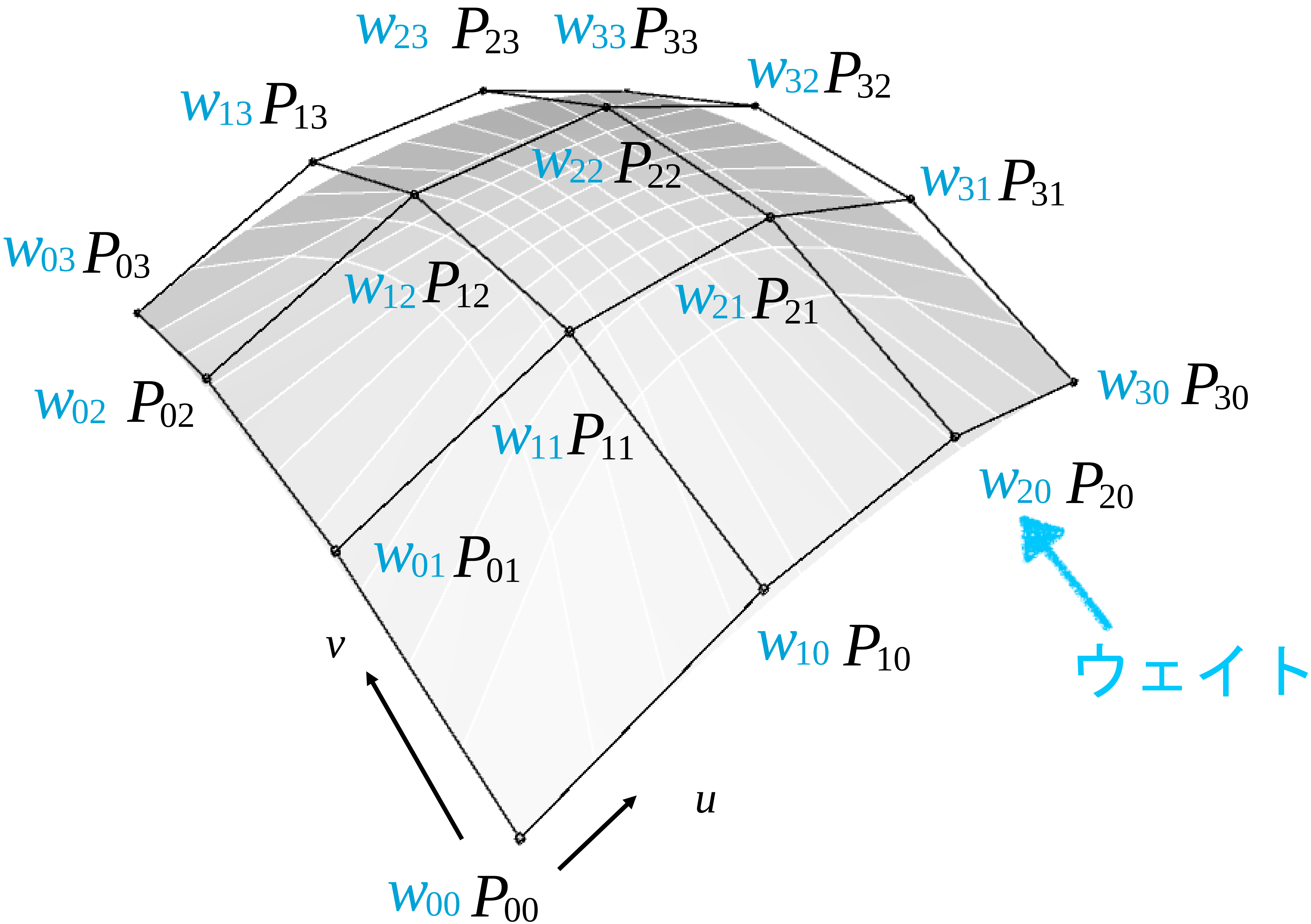
$$+ B^3_3(u)\left(B^3_0(v)\,P_{30} + B^3_1(v)\,P_{31} + B^3_2(v)\,P_{32} + B^3_3(v)\,P_{33}\right)$$

```
B33(u)*(B30(v)*P30.x + B31(v)*P31.x + B32(v)*P32.x + B33(v)*P33.x)
```

0.125 $0.64 \times P_{30}$ $0.31 \times P_{31}$ $0.05 \times P_{32}$ $0.00 \times P_{33}$

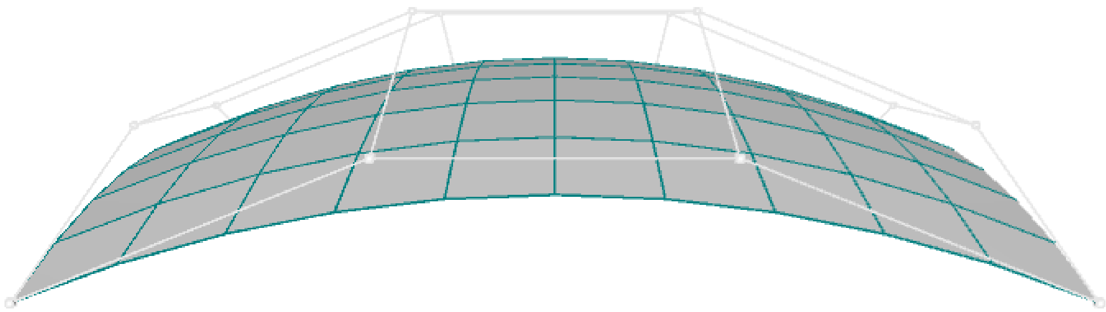
の12.5% P_{00} の64% P_{01} の31% P_{02} の 5% P_{03} の 0%

双3次有理ベジエ曲面（ *Bicubic Rational Bezier Surface* ）



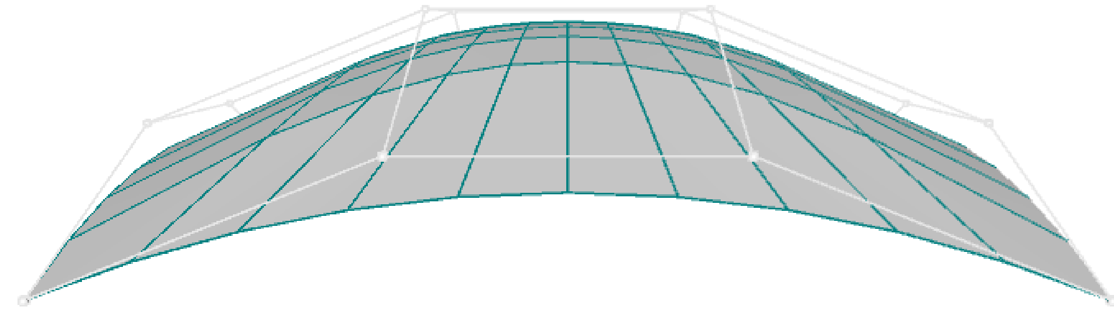
前回に紹介した有理化は、曲面にも応用することができます。上図は、P_{11}、P_{12}、P_{21}、P_{22} のウェイトを上げています。中央に曲面が引っ張られているのが分かりますね。

双3次ベジエ曲面（*Bicubic Bezier Surface*）



$$S(u,v)=\boxed{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}B_i^3(u)\,B_j^3(v)\,P_{ij}}$$

双3次有理ベジエ曲面（*Bicubic **Rational** Bezier Surface*）



$$S(u,v)=\frac{\boxed{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}B_i^3(u)\,B_j^3(v)\,w_{ij}\,P_{ij}}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}B_i^3(u)\,B_j^3(v)\,w_{ij}}$$

$i=0,\ j=0$ $B_0^3(u)\,B_0^3(v)\,w_{00}$

$i=0,\ j=1$ $B_0^3(u)\,B_1^3(v)\,w_{01}$

$i=0,\ j=2$ $B_0^3(u)\,B_2^3(v)\,w_{02}$

$i=0,\ j=3$ $B_0^3(u)\,B_3^3(v)\,w_{03}$

```
B30(u)*(
   w00*B30(v)
 + w01*B31(v)
 + w02*B32(v)
 + w03*B33(v) )
```

$i=1,\ j=0$ $B_1^3(u)\,B_0^3(v)\,w_{10}$

$i=1,\ j=1$ $B_1^3(u)\,B_1^3(v)\,w_{11}$

$i=1,\ j=2$ $B_1^3(u)\,B_2^3(v)\,w_{12}$

$i=1,\ j=3$ $B_1^3(u)\,B_3^3(v)\,w_{13}$

```
B31(u)*(
   w10*B30(v)
 + w11*B31(v)
 + w12*B32(v)
 + w13*B33(v) )
```

$i=2,\ j=0$ $B_2^3(u)\,B_0^3(v)\,w_{20}$

$i=2,\ j=1$ $B_2^3(u)\,B_1^3(v)\,w_{21}$

$i=2,\ j=2$ $B_2^3(u)\,B_2^3(v)\,w_{22}$

$i=2,\ j=3$ $B_2^3(u)\,B_3^3(v)\,w_{23}$

```
B32(u)*(
   w20*B30(v)
 + w21*B31(v)
 + w22*B32(v)
 + w23*B33(v) )
```

$i=3,\ j=0$ $B_3^3(u)\,B_0^3(v)\,w_{30}$

$i=3,\ j=1$ $B_3^3(u)\,B_1^3(v)\,w_{31}$

$i=3,\ j=2$ $B_3^3(u)\,B_2^3(v)\,w_{32}$

$i=3,\ j=3$ $B_3^3(u)\,B_3^3(v)\,w_{33}$

```
B33(u)*(
   w30*B30(v)
 + w31*B31(v)
 + w32*B32(v)
 + w33*B33(v) )
```

$$\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, w_{ij}$$

```
float sum =  B30(u)*(w00*B30(v)+w01*B31(v)+w02*B32(v)+w03*B33(v))
            +B31(u)*(w10*B30(v)+w11*B31(v)+w12*B32(v)+w13*B33(v))
            +B32(u)*(w20*B30(v)+w21*B31(v)+w22*B32(v)+w23*B33(v))
            +B33(u)*(w30*B30(v)+w31*B31(v)+w32*B32(v)+w33*B33(v));
```

$$B_2^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{20}\,w_{20}+B_1^3(v)\,P_{21}\,w_{21}+B_2^3(v)\,P_{22}\,w_{22}+B_3^3(v)\,P_{23}\,w_{23}\right)$$

```
B32(u)*(w20*B30(v)*P20.x + w21*B31(v)*P21.x + w22*B32(v)*P22.x + w23*B33(v)*P23.x)
```

$i=0, j=0$ のとき $B_0^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{00}\,w_{00}$

$i=0, j=1$ のとき $B_0^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{01}\,w_{01}$

$i=0, j=2$ のとき $B_0^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{02}\,w_{02}$

$i=0, j=3$ のとき $B_0^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{03}\,w_{03}$

$i=2, j=0$ のとき $B_2^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{20}\,w_{20}$

$i=2, j=1$ のとき $B_2^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{21}\,w_{21}$

$i=2, j=2$ のとき $B_2^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{22}\,w_{22}$

$i=2, j=3$ のとき $B_2^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{23}\,w_{23}$

$$B_0^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{00}\,w_{00}+B_1^3(v)\,P_{01}\,w_{01}+B_2^3(v)\,P_{02}\,w_{02}+B_3^3(v)\,P_{03}\,w_{03}\right)$$

```
(B30(u)*(w00*B30(v)*P00.x + w01*B31(v)*P01.x + w02*B32(v)*P02.x + w03*B33(v)*P03.x)
```

$$B_3^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{30}\,w_{30}+B_1^3(v)\,P_{31}\,w_{31}+B_2^3(v)\,P_{32}\,w_{32}+B_3^3(v)\,P_{33}\,w_{33}\right)$$

```
B33(u)*(w30*B30(v)*P30.x + w31*B31(v)*P31.x + w32*B32(v)*P32.x + w33*B33(v)*P33.x)
```

$i=1, j=0$ のとき $B_1^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{10}\,w_{10}$

$i=1, j=1$ のとき $B_1^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{11}\,w_{11}$

$i=1, j=2$ のとき $B_1^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{12}\,w_{12}$

$i=1, j=3$ のとき $B_1^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{13}\,w_{13}$

$i=3, j=0$ のとき $B_3^3(u)\,B_0^3(v)\,P_{30}\,w_{30}$

$i=3, j=1$ のとき $B_3^3(u)\,B_1^3(v)\,P_{31}\,w_{31}$

$i=3, j=2$ のとき $B_3^3(u)\,B_2^3(v)\,P_{32}\,w_{32}$

$i=3, j=3$ のとき $B_3^3(u)\,B_3^3(v)\,P_{33}\,w_{33}$

$$B_1^3(u)\left(B_0^3(v)\,P_{10}\,w_{10}+B_1^3(v)\,P_{11}\,w_{11}+B_2^3(v)\,P_{12}\,w_{12}+B_3^3(v)\,P_{13}\,w_{13}\right)$$

```
B31(u)*(w10*B30(v)*P10.x + w11*B31(v)*P11.x + w12*B32(v)*P12.x + w13*B33(v)*P13.x)
```

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, w_{ij}\, P_{ij}}{\boxed{\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\, B_j^3(v)\, w_{ij}}}$$

```
S[uu][vv].x = ( B30(u)*(   w00*B30(v)*P00.x
                         + w01*B31(v)*P01.x
                         + w02*B32(v)*P02.x
                         + w03*B33(v)*P03.x )

               +B31(u)*(   w10*B30(v)*P10.x
                         + w11*B31(v)*P11.x
                         + w12*B32(v)*P12.x
                         + w13*B33(v)*P13.x )

               +B32(u)*(   w20*B30(v)*P20.x
                         + w21*B31(v)*P21.x
                         + w22*B32(v)*P22.x
                         + w23*B33(v)*P23.x )

               +B33(u)*(   w30*B30(v)*P30.x
                         + w31*B31(v)*P31.x
                         + w32*B32(v)*P32.x
                         + w33*B33(v)*P33.x) ) /sum;
```