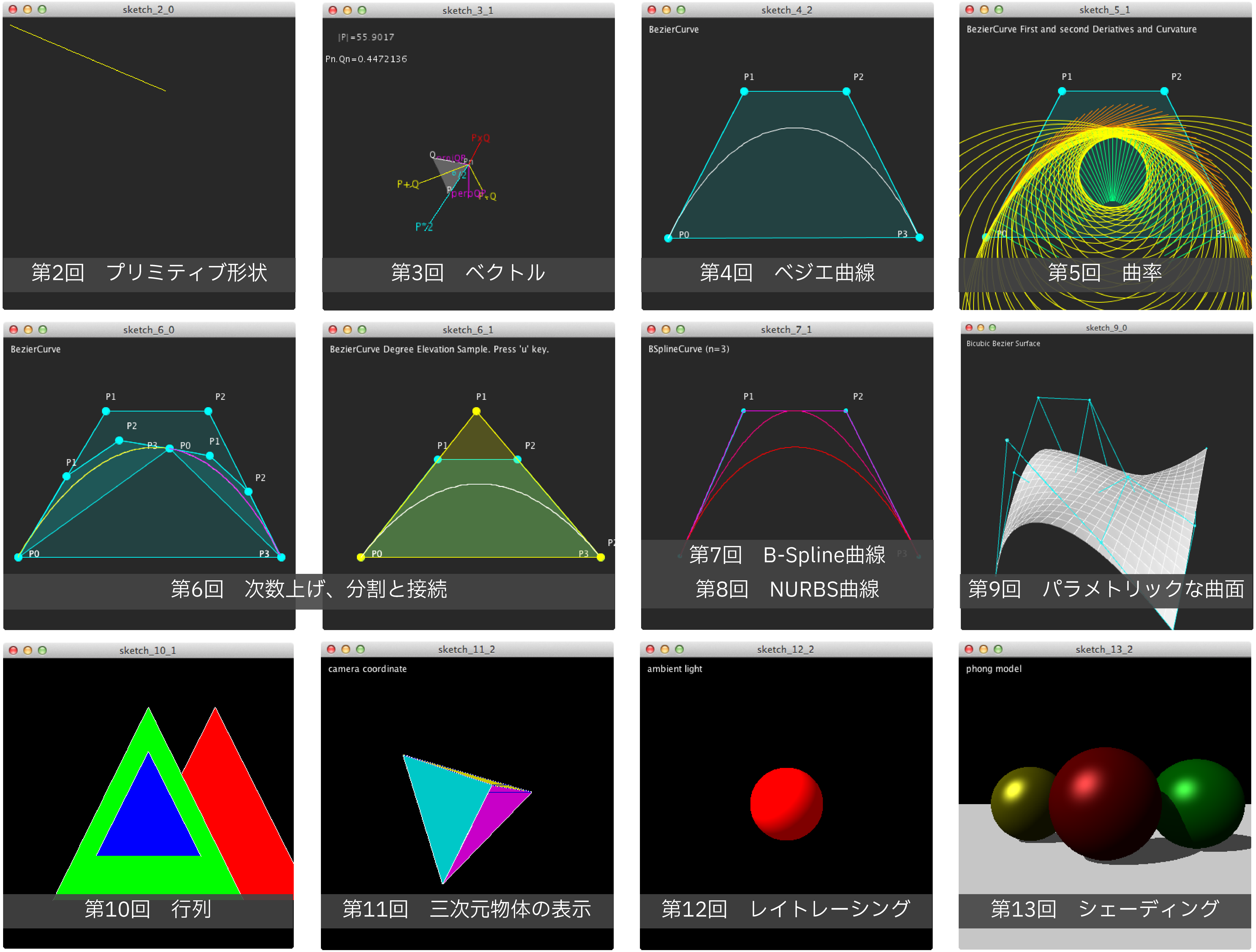
CGとCADの数理

GEOMETRIC MODELING AND COMPUTER GRAPHICS

第08回 NURBS曲線


sketch_2_0
第2回　プリミティブ形状
sketch_3_1
|P|=55.9017
Pn.Qn=0.4472136
P+Q
P*2
第3回　ベクトル
sketch_4_2
BezierCurve
P1
P2
P0
P3
第4回　ベジエ曲線
sketch_5_1
BezierCurve First and second Deriatives and Curvature
P1
P2
第5回　曲率
sketch_6_0
BezierCurve
第6回　次数上げ、分割と接続
sketch_6_1
BezierCurve Degree Elevation Sample. Press 'u' key.
sketch_7_1
BSplineCurve (n=3)
第7回　B-Spline曲線
第8回　NURBS曲線
sketch_9_0
Bicubic Bezier Surface
第9回　パラメトリックな曲面
sketch_10_1
第10回　行列
sketch_11_2
camera coordinate
第11回　三次元物体の表示
sketch_12_2
ambient light
第12回　レイトレーシング
sketch_13_2
phong model
第13回　シェーディング

sketch_8_0.pde をダウンロードして下さい

有理関数（１変数の場合）とは、 $R(t)=\dfrac{A(t)\ \text{分子}}{B(t)\ \text{分母}}$ が多項式（*Polynomial*）の関数

B-Spline曲線

$$R(t)=\sum_{i=0}^{3} N_i^k(t)\,P_i \longrightarrow$$

非一様有理B-Spline曲線(*Non-Uniform* ***Rational*** *B-Spline Curve*)

$$R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^k(t)\,P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^k(t)}$$

3次ベジエ曲線

$$R(t)=\sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\,P_i \longrightarrow$$

有理3次Bezier曲線(***Rational*** *Cubic Bezier Curve*)

$$R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{3} w_i B_i^3(t)\,P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i B_i^3(t)}$$

B-Spline曲線 → 非一様**有理**B-Spline曲線(Non-Uniform **Rational** B-Spline Curve)

$$R(t)=\sum_{i=0}^{3} N_i^k(t)\,P_i \;\longrightarrow\; R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{3} w_i\,N_i^k(t)\,P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i\,N_i^k(t)}$$

ウェイト w_i

重み（weight）

$n=3$ 、$k=4$ で書き下してみます。

$$R(t)=\frac{\sum_{i=0}^{3} w_i\,N_i^4(t)\,P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i\,N_i^4(t)}=\frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t)+w_1 N_1^4(t)+w_2 N_2^4(t)+w_3 N_3^4(t)}P_0+\frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t)+w_1 N_1^4(t)+w_2 N_2^4(t)+w_3 N_3^4(t)}P_1+\frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t)+w_1 N_1^4(t)+w_2 N_2^4(t)+w_3 N_3^4(t)}P_2+\frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t)+w_1 N_1^4(t)+w_2 N_2^4(t)+w_3 N_3^4(t)}P_3$$

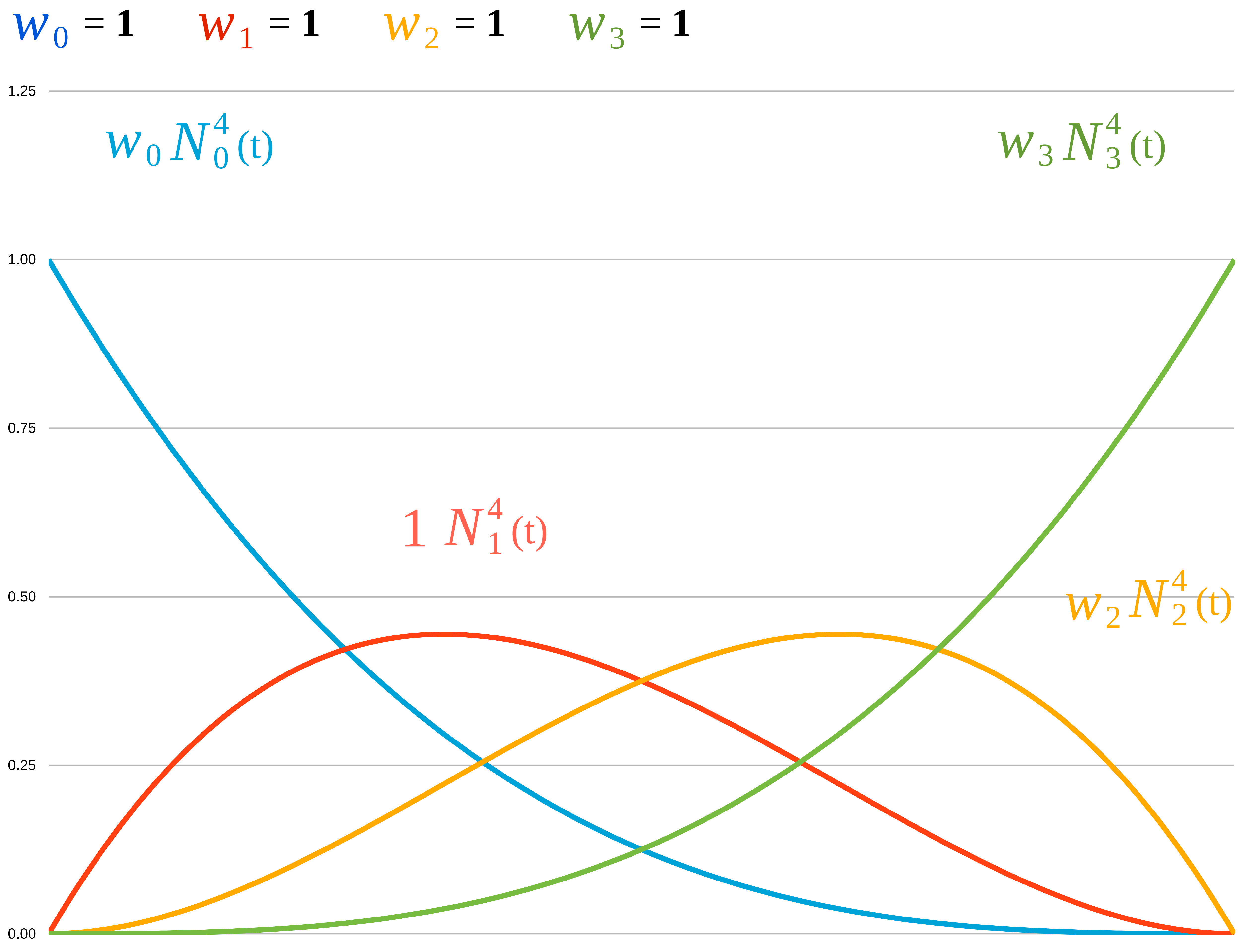
$w_0 = 1$ $w_1 = 1$ $w_2 = 1$ $w_3 = 1$ のとき、通常のB-Spline 曲線になります。

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t) P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t)} = \frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_3$$

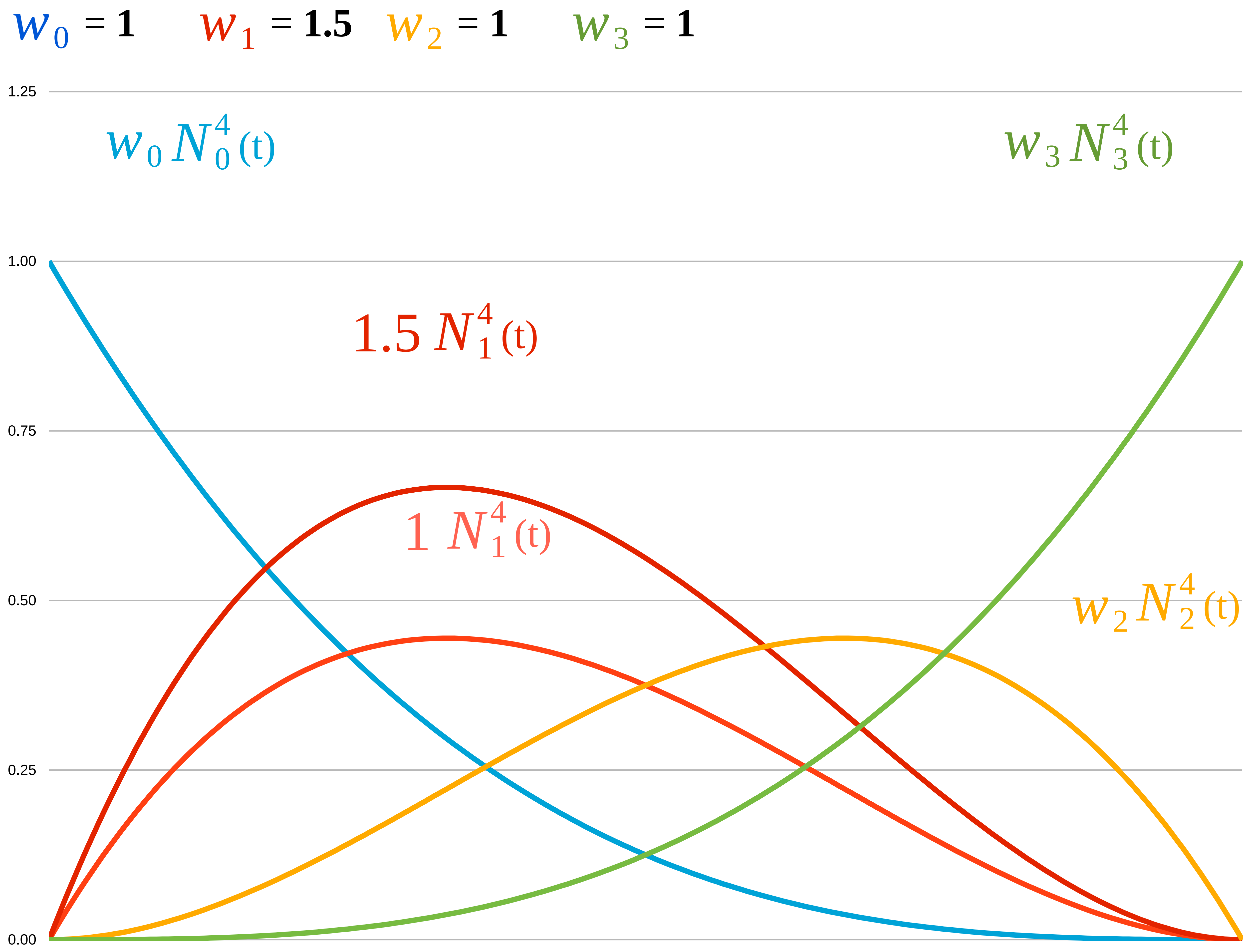
$$= \frac{N_0^4(t)}{\underbrace{N_0^4(t) + N_1^4(t) + N_2^4(t) + N_3^4(t)}_{=1}} P_0 + \frac{N_1^4(t)}{\underbrace{N_0^4(t) + N_1^4(t) + N_2^4(t) + N_3^4(t)}_{=1}} P_1 + \frac{N_2^4(t)}{\underbrace{N_0^4(t) + N_1^4(t) + N_2^4(t) + N_3^4(t)}_{=1}} P_2 + \frac{N_3^4(t)}{\underbrace{N_0^4(t) + N_1^4(t) + N_2^4(t) + N_3^4(t)}_{=1}} P_3$$

$$= N_0^4(t) P_0 + N_1^4(t) P_1 + N_2^4(t) P_2 + N_3^4(t) P_3$$

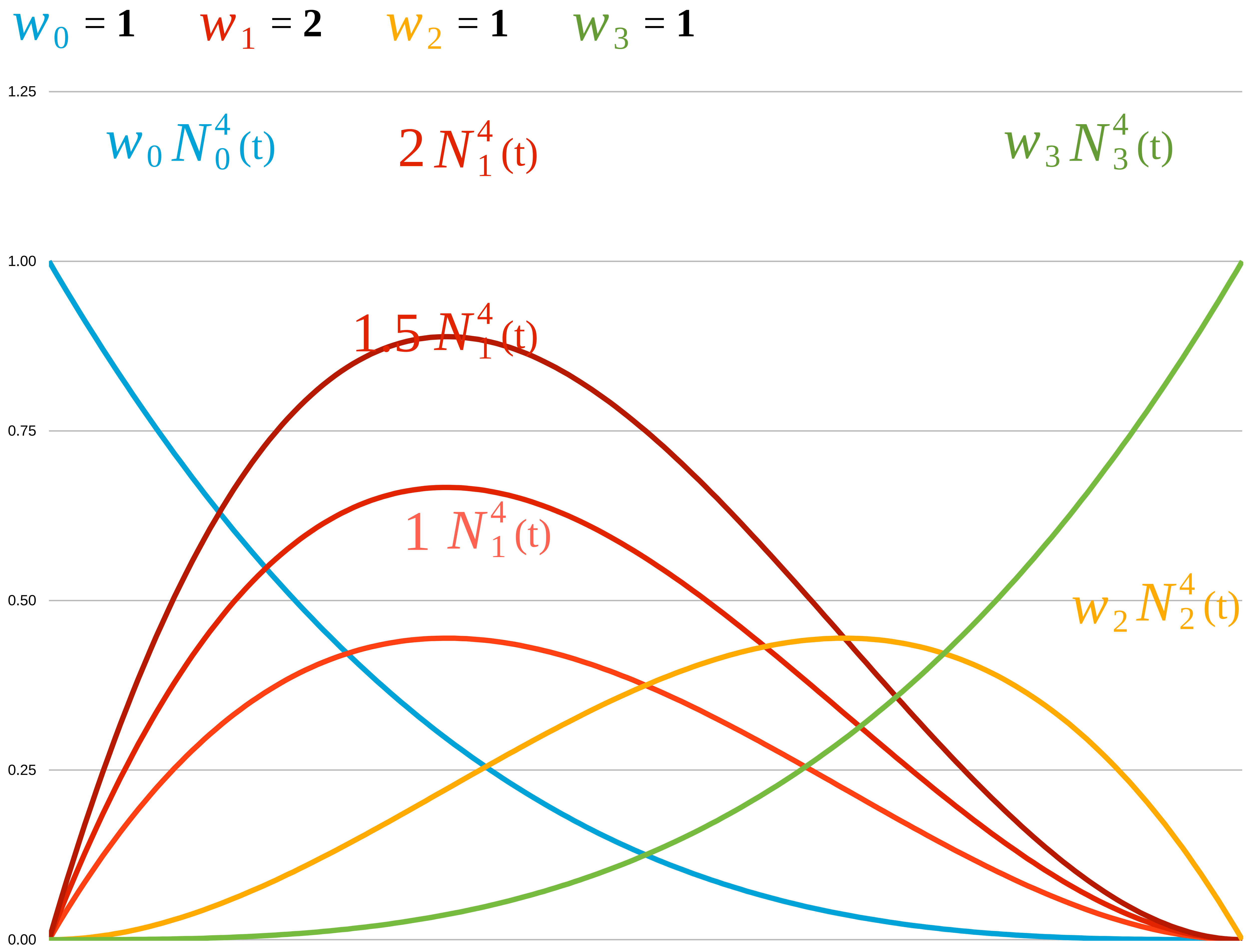
では、分子の $w_0 N_0^4(t)$ $w_1 N_1^4(t)$ $w_2 N_2^4(t)$ $w_3 N_3^4(t)$ についてグラフ化してみましょう。



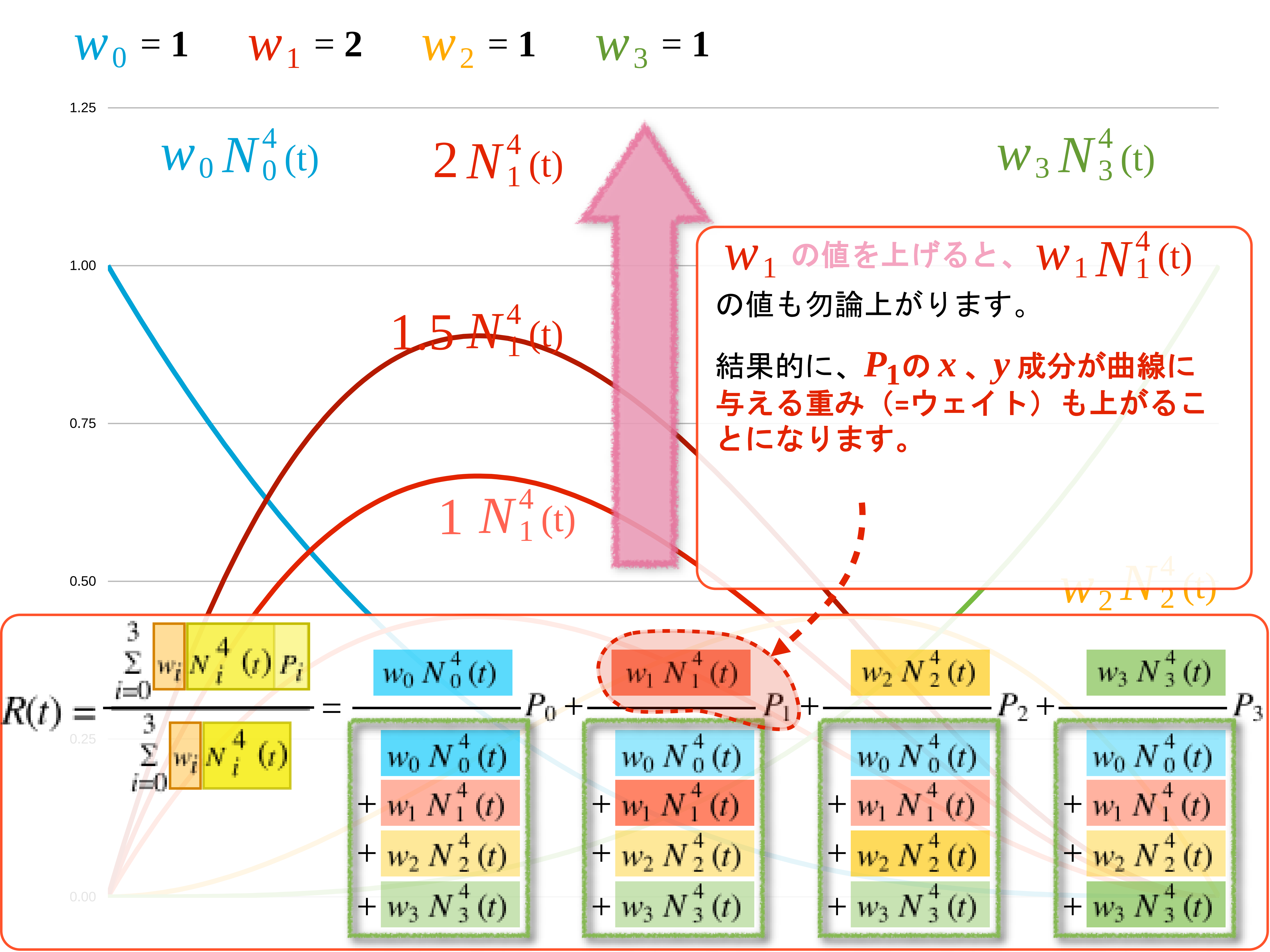
$w_0 = 1$ $w_1 = 1$ $w_2 = 1$ $w_3 = 1$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$w_0 N_0^4(t)$
$w_3 N_3^4(t)$
$1\ N_1^4(t)$
$w_2 N_2^4(t)$



$w_0 = 1$
$w_1 = 1.5$
$w_2 = 1$
$w_3 = 1$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$w_0 N_0^4(t)$
$w_3 N_3^4(t)$
$1.5\, N_1^4(t)$
$1\, N_1^4(t)$
$w_2 N_2^4(t)$

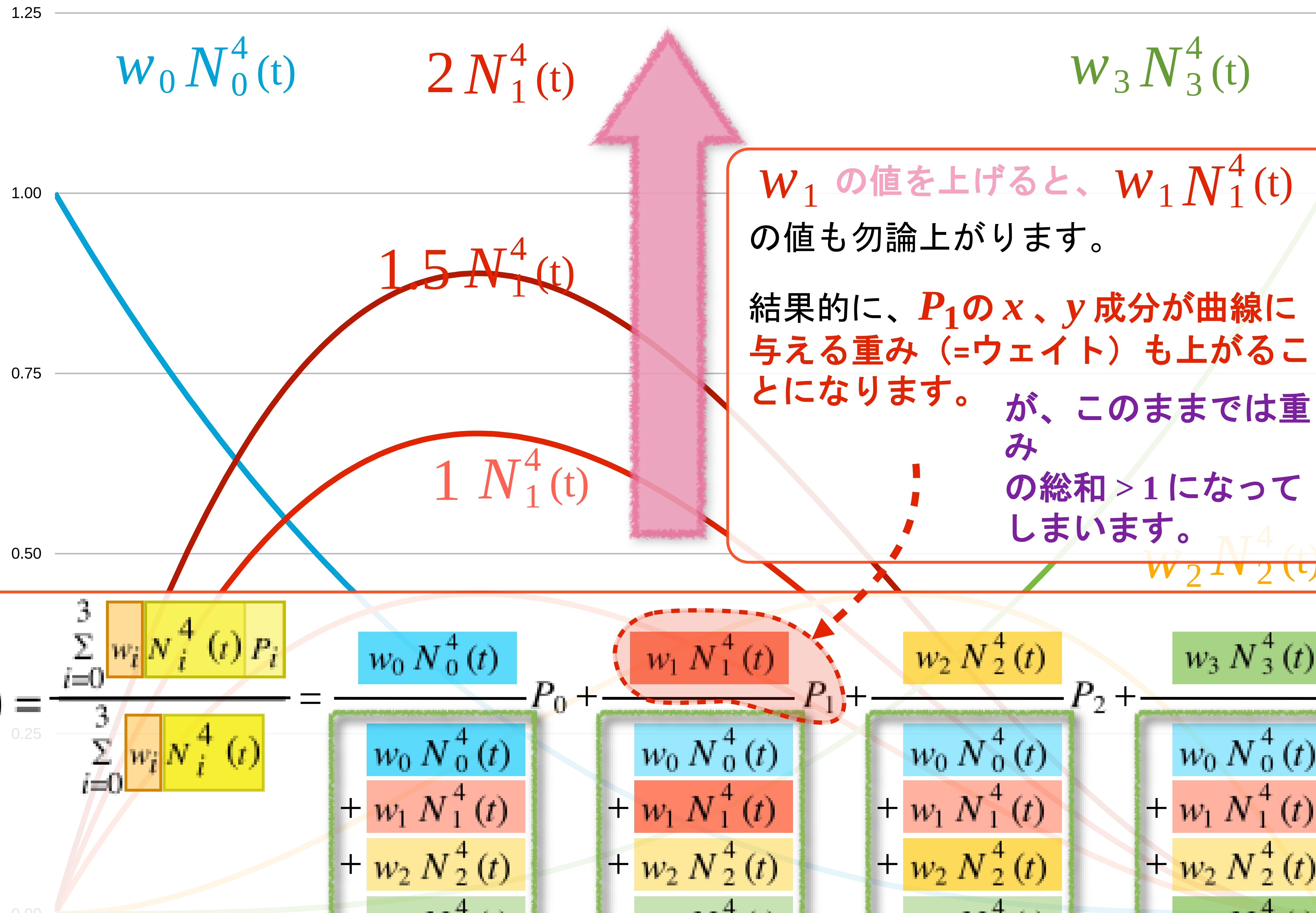


$w_0 = 1$
$w_1 = 2$
$w_2 = 1$
$w_3 = 1$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$w_0 N_0^4(t)$
$2 N_1^4(t)$
$w_3 N_3^4(t)$
$1.5 N_1^4(t)$
$1 N_1^4(t)$
$w_2 N_2^4(t)$



$w_0 = 1$　$w_1 = 2$　$w_2 = 1$　$w_3 = 1$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$w_0 N_0^4$(t)
$2 N_1^4$(t)
$w_3 N_3^4$(t)
$1.5 N_1^4$(t)
$1 N_1^4$(t)
$w_2 N_2^4$(t)
w_1 の値を上げると、$w_1 N_1^4$(t)
の値も勿論上がります。
結果的に、P_1の x 、y 成分が曲線に
与える重み（=ウェイト）も上がるこ
とになります。
$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t) P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t)} = \frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_3$$

$w_0 = 1$ $w_1 = 2$ $w_2 = 1$ $w_3 = 1$



w_1 の値を上げると、$w_1 N_1^4(t)$ の値も勿論上がります。

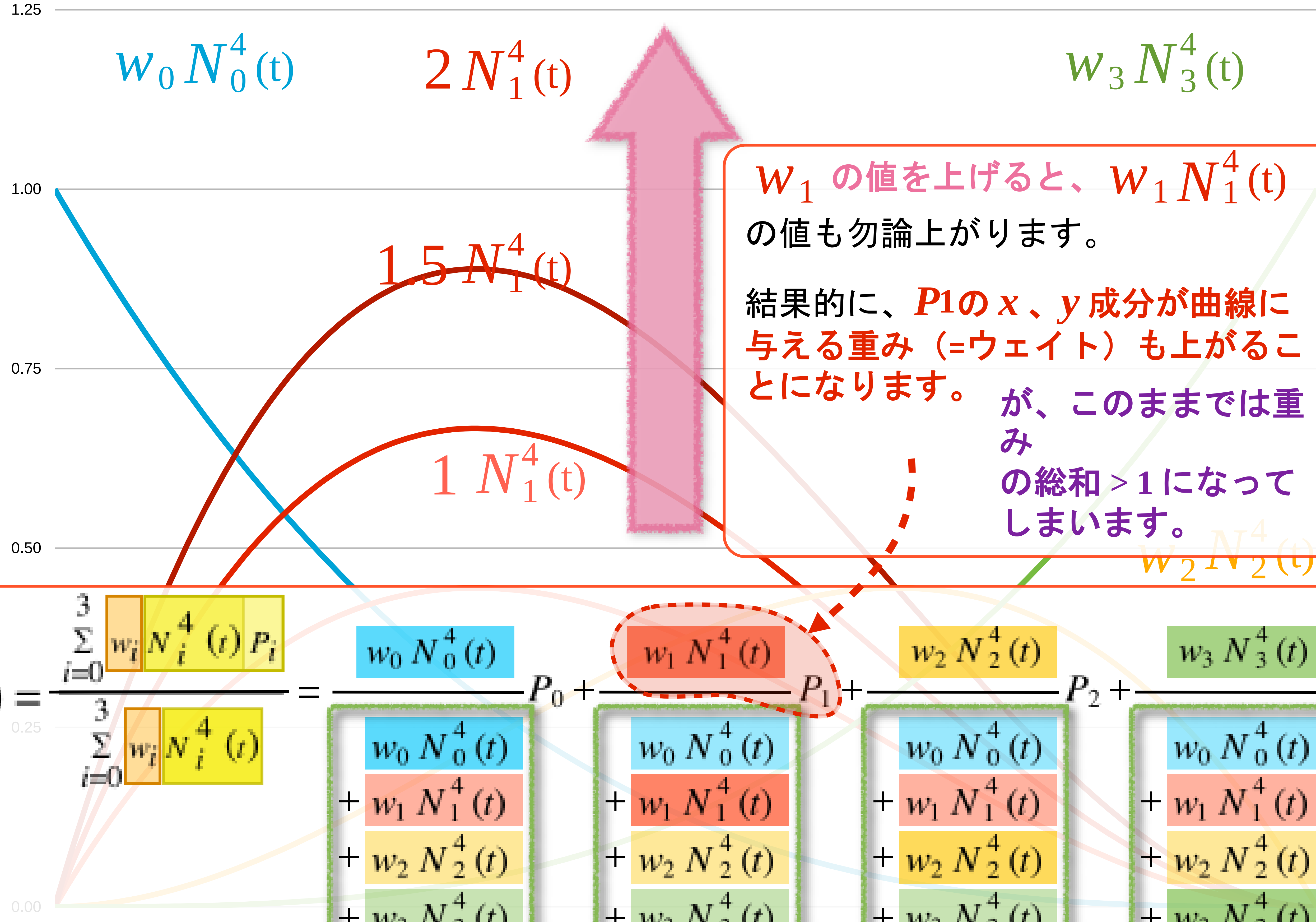
結果的に、P_1 の x、y 成分が曲線に与える重み（=ウェイト）も上がることになります。

が、このままでは重みの総和 > 1 になってしまいます。

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t) P_i}{\sum_{i=0}^{3} w_i N_i^4(t)} = \frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_3$$

試しに、重みの総和を計算してみよう。（例：$t = 0.14$, $n = 3$, $k = 4$, $W_1 = 2$ のとき）

$$w_0 N_0^4(\mathrm{t}) + w_1 N_1^4(\mathrm{t}) + w_2 N_2^4(\mathrm{t}) + w_3 N_3^4(\mathrm{t}) = 0.64 + 0.62 + 0.05 + 0.00 = \mathbf{1.31 > 1}$$



w_1 の値を上げると、$w_1 N_1^4(\mathrm{t})$ の値も勿論上がります。

結果的に、**$P1$ の x 、y 成分が曲線に与える重み（=ウェイト）も上がることになります。**

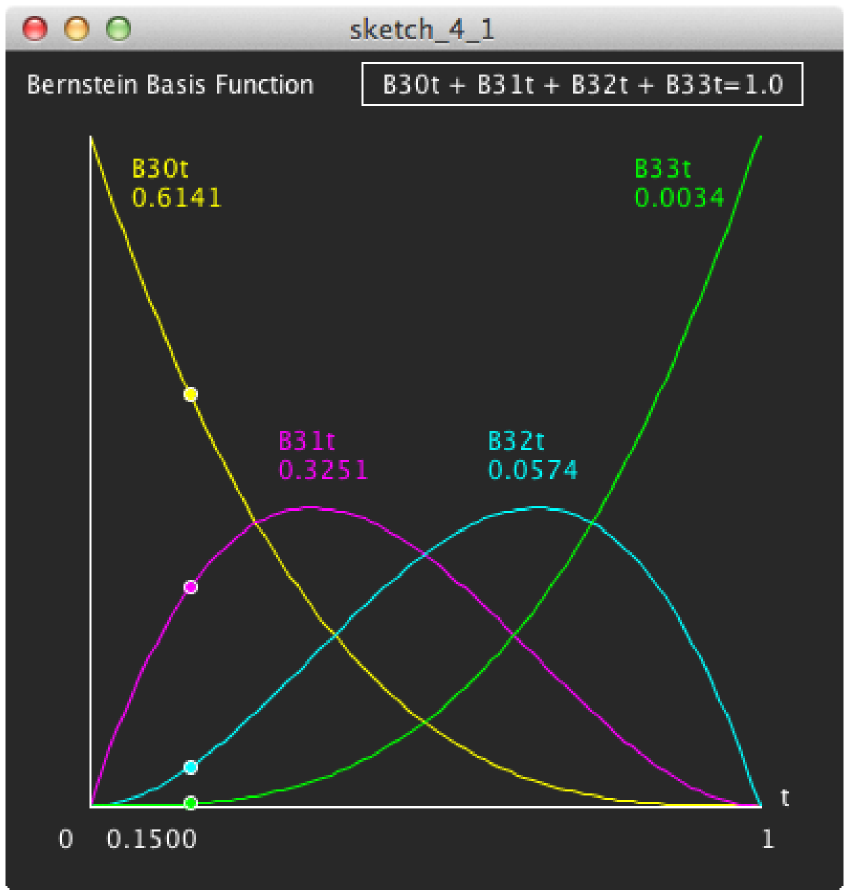
が、このままでは重み の総和 > 1 になってしまいます。

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} \boxed{w_i} N_i^4(t) P_i}{\sum_{i=0}^{3} \boxed{w_i} N_i^4(t)} = \frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_3$$

試しに、重みの総和を計算してみよう。（例：$t = 0.14$, $n = 3$, $k = 4$, $w_1 = 2$ のとき）

$$w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t) = 0.64 + 0.62 + 0.05 + 0.00 = 1.31 > 1$$

数学的な理由は置いておいて、こう考えると分かりやすいかと思います。3次ベジェ曲線を例にします。



$$R(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\, P_i$$

$$= \boxed{B_0^3(t)}\, P_0 + \boxed{B_1^3(t)}\, P_1 + \boxed{B_2^3(t)}\, P_2 + \boxed{B_3^3(t)}\, P_3$$

$t = 0.15$ のとき、

$$= \boxed{0.61\ P_0} + \boxed{0.33\ P_1} + \boxed{0.06\ P_2} + \boxed{0.00\ P_3}$$

$t = 0.15$ の時、Bezier曲線上の点 $\boldsymbol{R}(\mathbf{t})$ は、$\boldsymbol{P}_0$ の 61%、$\boldsymbol{P}_1$ の 33%、$\boldsymbol{P}_2$ の 6%、$\boldsymbol{P}_3$ の 0% 分の位置成分を混ぜ合わせた位置にありますよ、ということです（混ぜ合わせ関数）

重みの総和 = 1 にしなくては、例えば0.5が50%の意味にならなくなってしまいます。

試しに、重みの総和を計算してみよう。（例：$t = 0.14$, $n = 3$, $k = 4$, $w_1 = 2$ のとき）

$$w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t) = 0.64 + 0.62 + 0.05 + 0.00 = 1.31 > 1$$

重みの総和 = 1 に戻したい。 ⟶ $\boxed{\text{重みの総和で、それぞれの重みを割る（重みの正規化）}}$

$$\frac{w_0 N_0^4(t)}{\underbrace{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}_{=1.31}} + \frac{w_1 N_1^4(t)}{\underbrace{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}_{=1.31}} + \frac{w_2 N_2^4(t)}{\underbrace{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}_{=1.31}} + \frac{w_3 N_3^4(t)}{\underbrace{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}_{=1.31}} = \underbrace{\frac{0.64}{1.31}}_{=0.49} + \underbrace{\frac{0.62}{1.31}}_{=0.47} + \underbrace{\frac{0.05}{1.31}}_{=0.04} + \underbrace{\frac{0.00}{1.31}}_{=0} = 1$$

$$R(t) = \underbrace{\frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}}_{=0.49} P_0 + \underbrace{\frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}}_{=0.47} P_1 + \underbrace{\frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}}_{=0.04} P_2 + \underbrace{\frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)}}_{=0} P_3$$

$t = 0.14$ の時、B-Spline曲線上の点 $R(t)$ は、P_0 の49%、 P_1 の47%、 P_2 の4%、 P_3 の0%分の位置成分を混ぜ合わせた位置にありますよ、ということです（混ぜ合わせ関数）

では、これをプログラムに直していきましょう。まず、分母に着目します。

$$R(t) = \frac{w_0 N_0^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{w_0 N_0^4(t) + w_1 N_1^4(t) + w_2 N_2^4(t) + w_3 N_3^4(t)} P_3$$

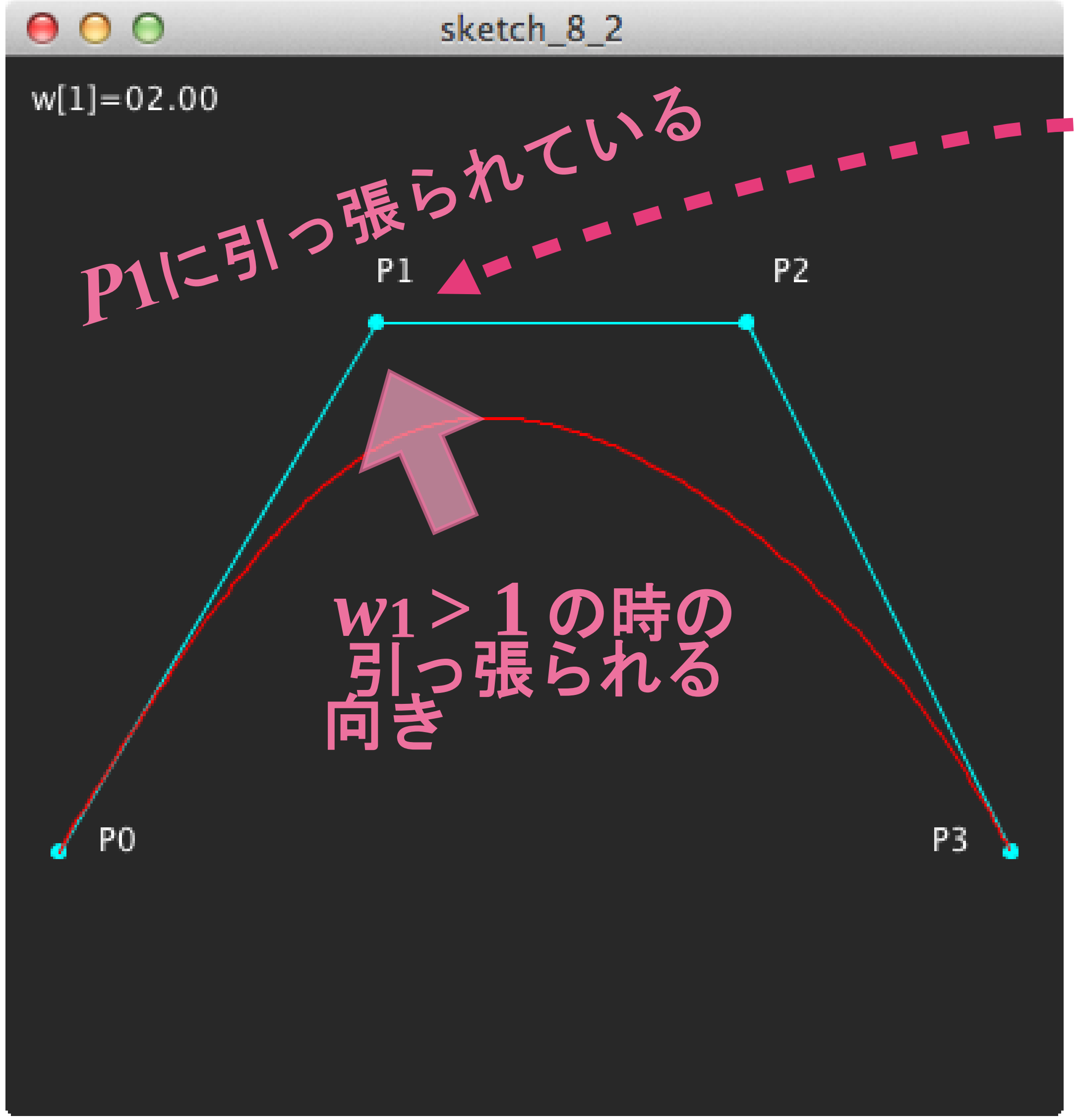
```
float sum = w[0]*N[0][4] + w[1]*N[1][4] + w[2]*N[2][4] + w[3]*N[3][4];
```

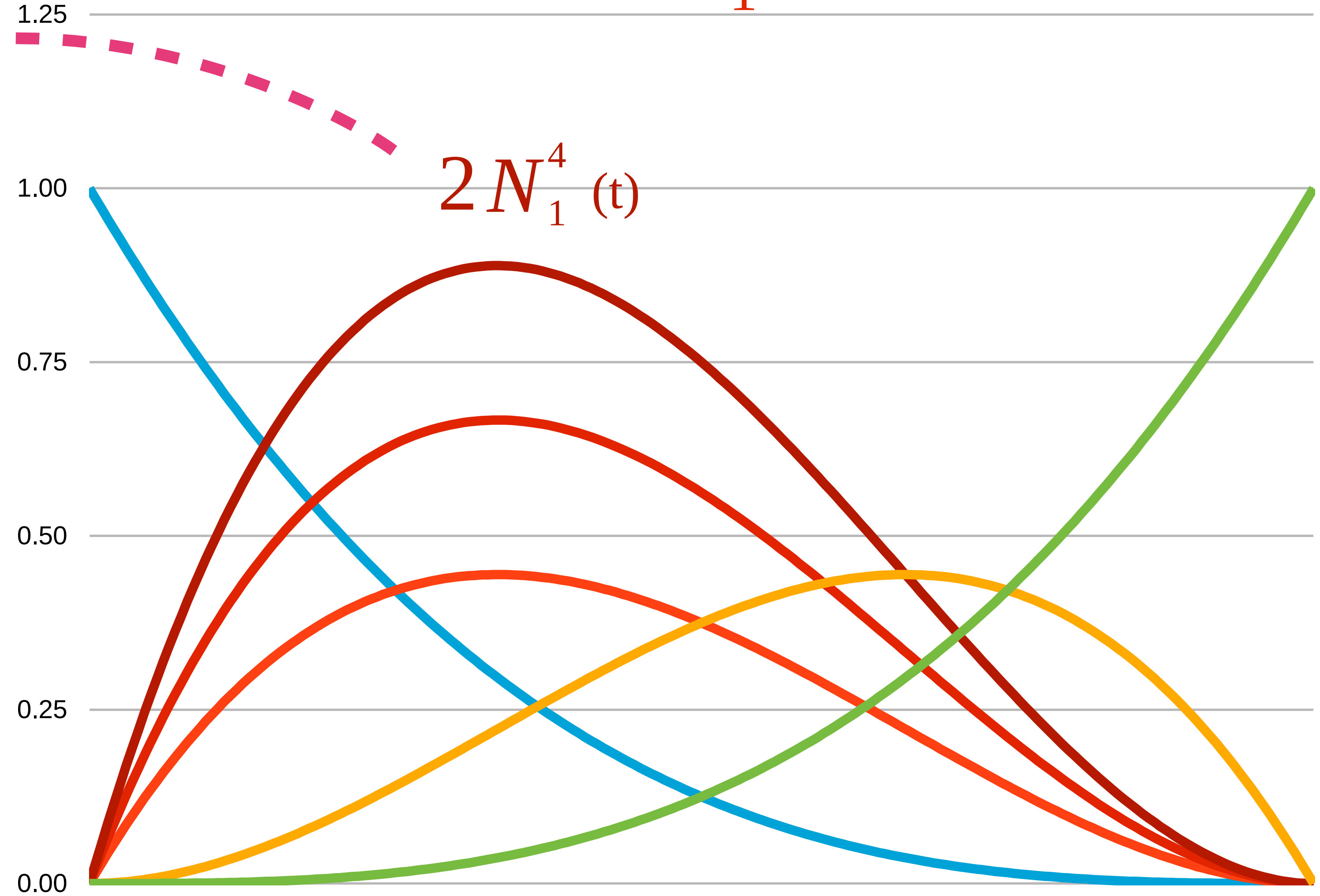
$$R(t) = \frac{w_0 N_0^4(t)}{\mathtt{sum}} P_0 + \frac{w_1 N_1^4(t)}{\mathtt{sum}} P_1 + \frac{w_2 N_2^4(t)}{\mathtt{sum}} P_2 + \frac{w_3 N_3^4(t)}{\mathtt{sum}} P_3$$

$$= \frac{w_0 N_0^4(t) P_0 + w_1 N_1^4(t) P_1 + w_2 N_2^4(t) P_2 + w_3 N_3^4(t) P_3}{\mathtt{sum}}$$

```
R[tt].x=(w[0]*N[0][4]*P0.x+w[1]*N[1][4]*P1.x+w[2]*N[2][4]*P2.x+w[3]*N[3][4]*P3.x)/sum;
R[tt].y=(w[0]*N[0][4]*P0.y+w[1]*N[1][4]*P1.y+w[2]*N[2][4]*P2.y+w[3]*N[3][4]*P3.y)/sum;
```

初期時は、w[1] = 2 つまり、w_1 = 2 になっています。





では、$w_1 = 0$ や $w_1 < 1$ のとき、曲線はどのような形になるのでしょうか。
以下をソースコードの最後に書いて、確かめてみましょう。

```
void keyPressed() {
      if (key == 'w') {
        b0.w[1]+=0.1;
      } else if (key == 'W') {
        b0.w[1]-=0.1;
      }
}
```