数值计算

误差

误差指一个量的计算值与真实值的之差，记真值x^*,测量值x

绝对误差

$$e = x^* - x$$

相对误差

$$e^r = \frac{e}{x^*}$$

绝对误差限

$\qquad |e|=|x^{}-x|\leq \epsilon \Rightarrow x^{}=x\pm \epsilon$

误差的转移

误差的转移

截断误差

方程的解(一元)

求解方法

> 解析 图解 数值

数值方法

交叉求根法

> 逐步搜索法

> 二分法

> 比例求根法

出现重根，不可求偶数根，可求奇数根

迭代求根法

> 由$f(x) = 0$,找到$x = g(x)$,给出x_0,用$x_{n+1} = f(x_n)$迭代求根

> 牛顿法

> > $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(xk)}$ 出现重根计算公式：f

> 弦截法
>
> > $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{i-1}) - f(x_k)}$

线性方程组

直接法

> 高斯消去法
>
> > 主元素消去法(避免除以0的情况，减少舍入误差)
> >
> > > 消去每列的时候，将列最大的一个元素所在行换到当时的第一行

> > 放缩法
> >
> > > 放缩为每行最大元素为1，然后再利用主元素消去法，可以减少误差

方程组称为三对角方程组，如果形如

图片》

迭代法

对于线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$可以写为$\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + f$

雅可比迭代法

> $x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum$

高斯-赛德尔迭代法

非线性方程组

带入消元

> 反解带入，转化为一元情况

转化为线性方程组

> 都进行泰勒展开，只保留一阶项，形式就转化为线性方程组了

多项式插值

利用$f(x)$在某区间已知的若干点作出特定的函数来拟合$f(x)$这种方法称为插值法，如果这个特定的函数为多项式，就称为多项式插值。

对于多项式插值，有如下定理

> 对于$n+1$个样本点，其对应的插值多项式是存在唯一的。

拉格朗日插值法

> $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}L_k(x)f(x_k)$ 其中 L_{k}=\

> 缺点：每增加一个采样点，所有的$L_k(x)$都需要重新计算

牛顿插值法

> d

有时候无法也没必要n次插值(n过大)，可以为分段插值，新问题是不光滑解决方法是

> 分段三次插值
>
> > 每次用四个点(2阶光滑)

最佳平方逼近

在区间$[a,b]$上用n次多项式来代替$f(x)$,产生误差为

$$d^2(f,P_n)=\int_a^b[f(x)-P_n(x)]^2dx$$

勒让德正交多项式

切比雪夫正交多项式

加权最佳平方逼近

> 离散情况

> 数值积分

> 数值微分(差商)
>
> > 向前 向后 向中间