差分方程与虫口模型

$\mathcal{Defination}, 1.1$ ***差分***

$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，称$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$ 为$f(x)$在x的**差分**，$\triangle$为**差分算子**，$Ef(x)=f(x+1)$ 为$f(x)$在x处的**位移**，E为**位移算子。**I表示**恒等算子**,即$If(x)=f(x)$。

$\mathcal{Defination}, 1.2$ ***差分方程***

递推关系，在数学上称为**差分方程**，是一种递推地定义一个序列的方程式：序列的每一项是定义为前若干项的函数。

$\mathfrak{Remark}$

$(i)Fibonacci$数列：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(a_1=0,a_1=1$)为差分方程。

(ii)解线性递推关系式(递推式为线性函数，系数和常数可能视n而定，可以为非线性的)以一个例子来说明。

$a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}$

设解为 r^n ,有

$r^2-Ar-b=0$

解出 r 的根λ_1,λ_2,如果不是重根，解为

$a_n=C\lambda_1^n+D\lambda_2^n$

如果是重根，解为

$a_n=C\lambda_1^n+nD\lambda_2^n$

带入值可以解出C,D.

$\mathcal{Defination}, 1.3$ ***差分方程的平衡解及其稳定性***

$$ \exists x^{},s.t. x^{}=f(x^{*}),x_{n+1}=f(x_{n}) $$

$ \exists x^* , s.t. , x^ =*f(x^*) , x^* , x_{n+1} = f(x_{n}) $

$ \exists x^,*n \in \mathbb{N},s.t.,x_{n}=x^{}*，但 x_{n-1}\ne x^* 称 x^* 为方程 x_{n+1} = f(x_{n}) $ 的最终平衡解；

$3.\exists T\in\mathbb{Z}^+,s.t.,x_{n+T}=x_n$ 称 x_n 为方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的周期解；

4. 设 $x^为差分方程*x_{n+1}=f(x_{n})*的平衡解，*x_{n}(x_{0}^{})*是满足该差分方程x_{0}=x_{0}^{}
的解。称*x_{n+1}=f(x_{n})*的解*x^{}*是稳定的，如果\forall \epsilon >0,\exist \delta >0,s.t.,\forall |x_{0}-x^{}|
<\delta,|x_{n}-x^{}|<\epsilon$,否则称为不稳定的。

5.$\exists\eta>0$,使得满足$|x_{0}^{}-x^{}|<\eta的解x_{n}(x_{0}^{}),有*\lim_{n\rightarrow\infty}x_{n}(x_{0}^{})=x^{}*
,称*x^{}*是吸引的；当\eta=+\infty时称x^{}是全局吸引的；称*x^{}*是全局渐进稳定的如果x^{}

既是稳定的又是吸引的；称x^{}是渐进稳定的如果x^{*}$既是稳定的，又是全局吸引的。

$\mathfrak{Remark}😒

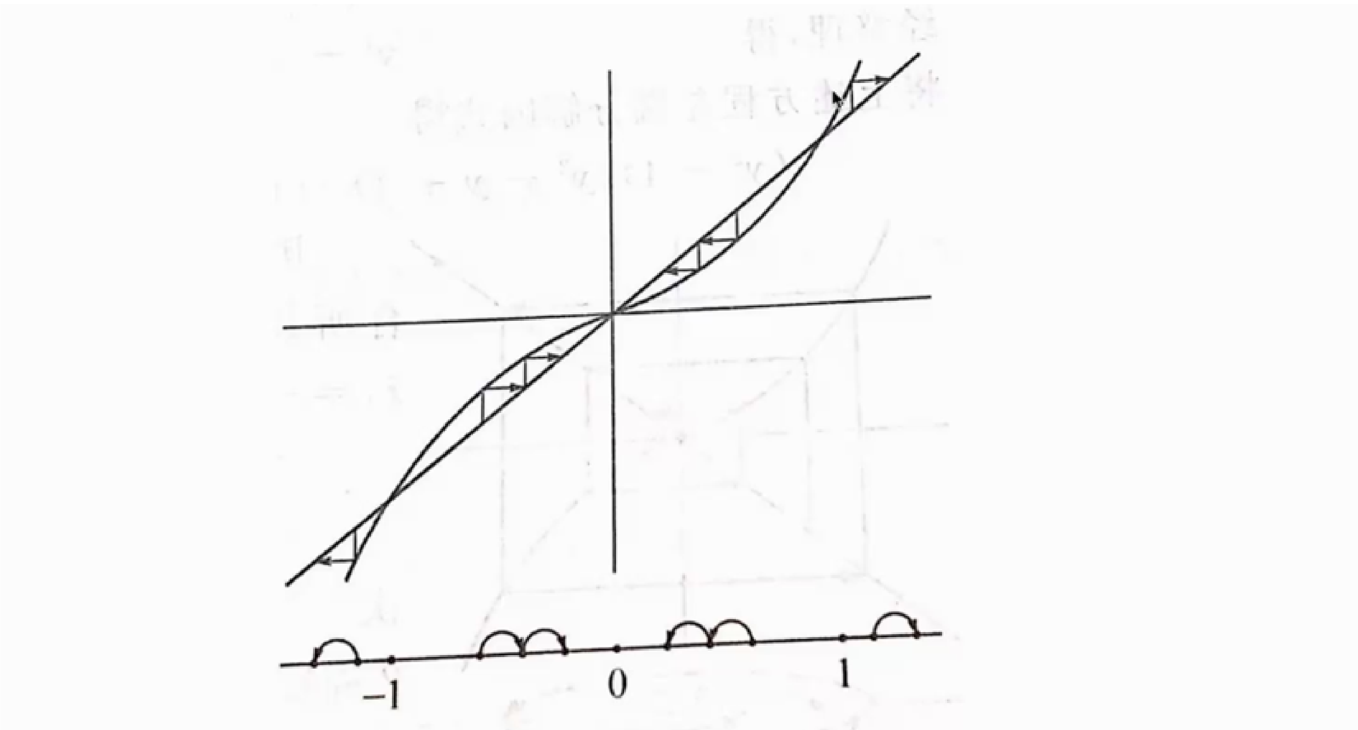
一个例子

用相图法来判断差分方程平衡点的吸引和排斥性

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n^3+x_n)$$

相图如下

$y=x$与$y=f(x)$图像，交点为差分方程$x_{n+1}=f(x_n)$平衡点



得到0是一个吸引点，且可以取$\eta=1$,也说系统的稳定集为$(-1,1)$。

$\mathcal{T}heorem, 1.1$

设 $f(x)$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ 且 $f(x)$ 有三阶连续导数， $x^{}是x_{n+1}=f(x_{n})的平衡解。\mid f'(x^{})\mid <1时，x^{}渐进稳定，\mid f'(x^{})\mid >1时，x^{*}$ 不稳定。

$\mathfrak{Remark}$:

首先考虑 $x_{n+1}=ax_n$ ，只有当 $|a|<1$ 时， x_n 才会收敛，那么也有

只有当 $|a|<1$ 时 $x_{n+1}=ax_n+b$ 收敛

将 $f(x),Taylor$ 展开一阶

$ \qquad x_{n+1}=f(x_{n})= f(x^{})+f^{'}(x^{})(x_{n}-x^{*}) $

与上面的讨论就类似了。

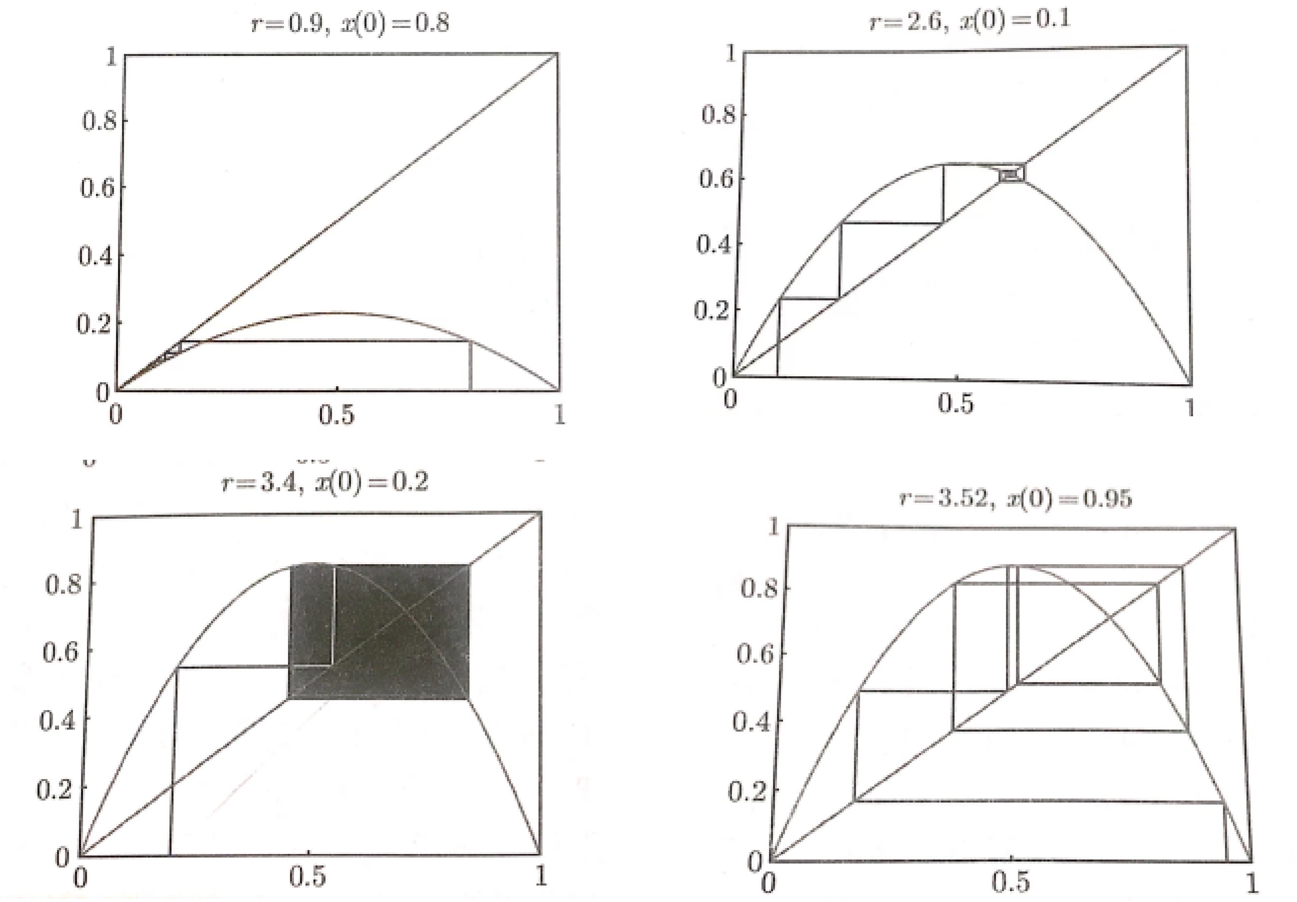
$\mathfrak{MODEL}$

生物种群的数量满足下面差分方程：

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

x_n为生物数量，，$x_n \in [0,1], r \in [0,4]$,r称为内禀增长率。

调节r, x_0得到以下相图



得出系统对初始值和参数依赖性很强的结论，可以通过研究相图与平衡点，定性的判断系统的发展。

上面右下图是以2为周期的。r增加后还会出现一些周期解，在某个范围是稳定的，随r变化变得不稳定的，到后面，出现了任意周期的周期解(混沌)。

$3<r<1+\sqrt{6}$ 2周期解稳定。

$r>1+\sqrt{6}$ 2周期解不稳定。

$1+\sqrt{6}<r<3.54409$ 4周期解稳定。

$r>3.54409$ 4周期解不稳定。

$3.54409<r<3.564407$ 8周期解稳定。

$r>3.564407$ 8周期解不稳定。

当$r=3.83$时，系统趋向于一个3周期解。

当$r=3.845$时，系统趋向于一个6周期解。

…… …… ……

系统出现了任意周期的周期解。 混沌！