差分方程与虫口模型

$\mathcal{Defination},1.1$ ***差分***

$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，称$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$ 为$f(x)$在x的**差分**，$\triangle$为**差分算子**，$Ef(x)=f(x+1)$ 为$f(x)$在x处的**位移**，E为**位移算子**。I表示**恒等算子**,即$If(x)=f(x)$。

$\mathcal{Defination},1.2$ ***差分方程***

递推关系，在数学上称为**差分方程**，是一种递推地定义一个序列的方程式：序列的每一项是定义为前若干项的函数。

$\mathfrak{Remark}$

- 一些例子

> i 数列：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(a_1=0,a_1=1$)为差分方程。

> ii 解线性递推关系式(递推式为线性函数，系数和常数可能视n而定，可以为非线性的)以一个例子来说明。

$a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}$

设解为 r^n ,有

$r^2-Ar-b=0$

解出 r 的根λ_1,λ_2,如果不是重根，解为

$a_n=C\lambda_1^n+D\lambda_2^n$

如果是重根，解为

$a_n=C\lambda_1^n+nD\lambda_2^n$

带入值可以解出C,D.

> iii
>
> 有一位幼儿园老师给小朋友分糖果。她把其中的一半分给第一个小朋友，接着从另一个糖盒中抓了4个补充进来，再将三分之一分给第二个小朋友，以后她都是先从其他糖盒中抓4个糖果补充进来，再将$\frac{1}{n+1}$分给第n个小朋友。当第20个小朋友分过后，盒内剩40个糖果，问每个小朋友分得的糖果数是多少？这种分法公平吗？
>
> 解：设第n个小朋友分了糖果后剩x_n块糖，则第$n+1$个小朋友分得$\frac{1}{n+2}(x_n+4)$，剩 $\frac{n+1}{n+2}(x_n+4)$,
>
> $$x_n-\frac{1}{n+2}(x_n+4)+4=\frac{n+1}{n+2}x_n-\frac{4}{n+2}+4$$
>
> $$=\frac{n+1}{n+2}x_n+4\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n+1}{n+2}(x_n+4)\text{，故 }x_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}(x_n+4),x(20)=40.$$

令 $y_n=(n+1)x_n$， $y_{n+1}=y_n+4(n+1)$， $y(20)=840.$

$y_{n+1}-y_n=4n+4;\quad y_{n+2}-y_{n+1}=4n+8;$

$y_{n+3}-y_{n+2}=4n+12;$ 消去$4n$, 有

$$y_{n+3}-3y_{n+2}+3y_{n+1}-y_n=0;$$

猜想$y_n=\lambda^n$是解，代入上式有：

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0，则\lambda=1,$$

另外， n,n^2也是上式的解，故通解为

$$y_n=C_1+C_2n+C_3n^2$$

又 $y(20)=840, y(21)=924, y(22)=1012$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

代入可得$C_1=0$，$C_2=2, C_3=2$，从而

$y_n=2n+2n^2=2n(1+n)$, 则$x_n=2n$,

第一个小朋友分走$x_1=2$个，其余小朋友分走$\frac{x_n+4}{n+2}$，都是2个，所以分法是公平的。

$Defination, 1.3$ ***差分方程的平衡解及其稳定性***

> 差分方程的平衡解及其稳定性
>
> 定义 1、若有x^*，使得$x^* = f(x^*)$，则称x^*为方程$x(t+1) = f(x(t))$的平衡解；
>
> 2、若有x^*和正整数r，使得$x(r) = x^*$，但是$x(r-1) \neq x^*$，则称x^*为方程 $x(t+1) = f(x(t))$的最终平衡解；
>
> 3、若有正整数T，使得$x(t+T) = x(t)$，则称$x(t)$为方程$x(t+1) = f(x(t))$的周期解；
>
> 西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY
>
> 4、设x^*为差分方程$x(t+1) = f(x(t))$的平衡解，$x(t, x_0)$是该差分方程满足$x(0) = x_0$的解. 如果对给定的正数ε，有$\delta > 0$，使得当$|x_0 - x^*| < \delta$时，$|x(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$对所有的$t \in N$都成立，则称$x(t+1) = f(x(t))$的平衡解$x^*$是稳定的，否则称为不稳定的；
>
> 5、如果有正数η，使得满足$|x_0 - x^*| < \eta$的解$x(t, x_0)$，有$\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = x^*$，则称$x^*$是吸引的；当$\eta$为无穷大时，称$x^*$是全局吸引的；如果$x^*$既是稳定的，又是吸引的，称$x^*$是渐进稳定的；如果$x^*$既是稳定的，又是全局吸引的，称$x^*$是全局渐进稳定的。

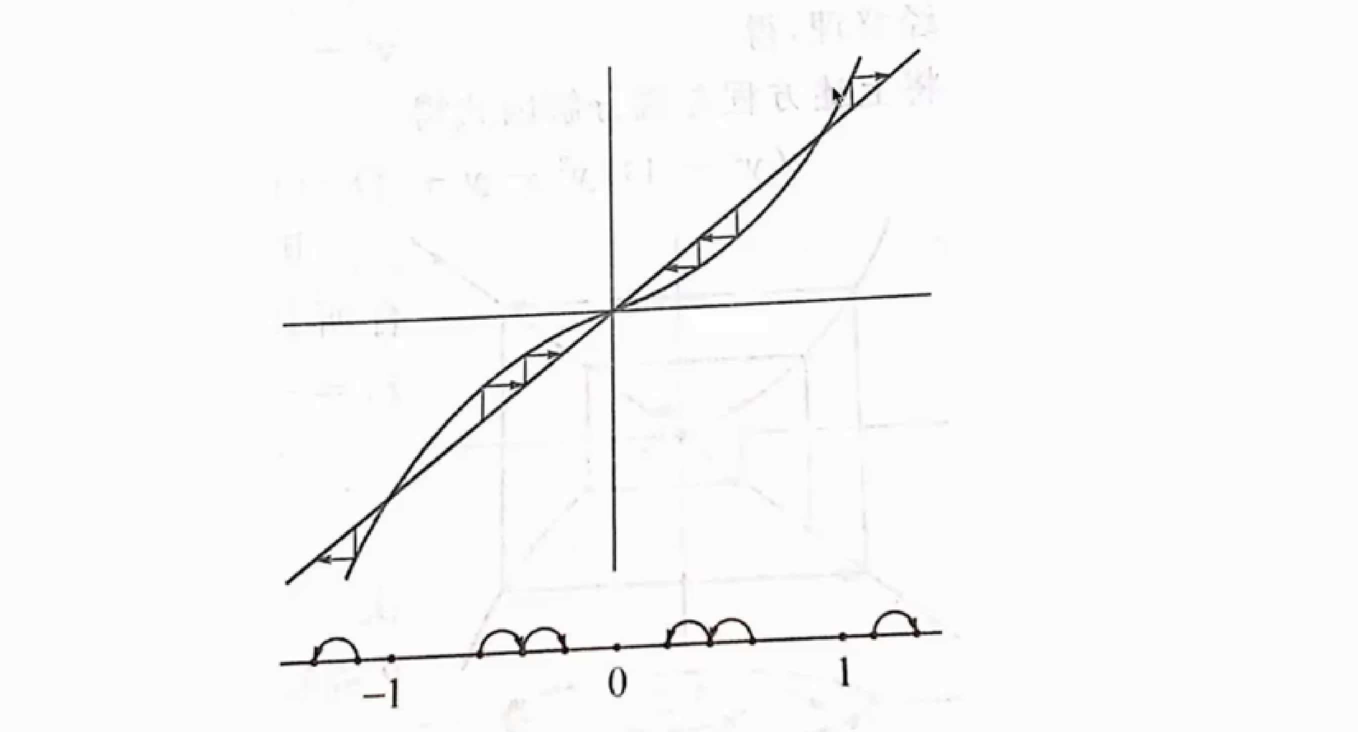
- 一个例子

用相图法来判断差分方程平衡点的吸引和排斥性

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^3 + x_n)$$

相图如下

$y = x$与$y = f(x)$图像，交点为差分方程$x_{n+1} = f(x_n)$平衡点



得到0是一个吸引点，且可以取$\eta = 1$,也说系统的稳定集为$(-1,1)$。

$\mathcal{T}heorem, 1.1$

$\mathcal{T}heorem\ 1.1$

设 $f(x)$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n)$ 且 $f(x)$ 有三阶连续导数， x^* 是 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的平衡解。 $|\ f'(x^*)\ | < 1$ 时， x^* 渐进稳定， $|\ f'(x^*)\ | > 1$ 时， x^* 不稳定。

$\mathfrak{Remark}$:

首先考虑 $x_{n+1} = ax_n$ ，只有当 $|\ a\ | < 1$ 时， x_n 才会收敛，那么也有

只有当 $|\ a\ | < 1$ 时 $x_{n+1} = ax_n + b$ 收敛

将 $f(x)\ Taylor$ 展开一阶

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) + f^{'}(x^*)(x_n - x^*)$$

与上面的讨论就类似了。

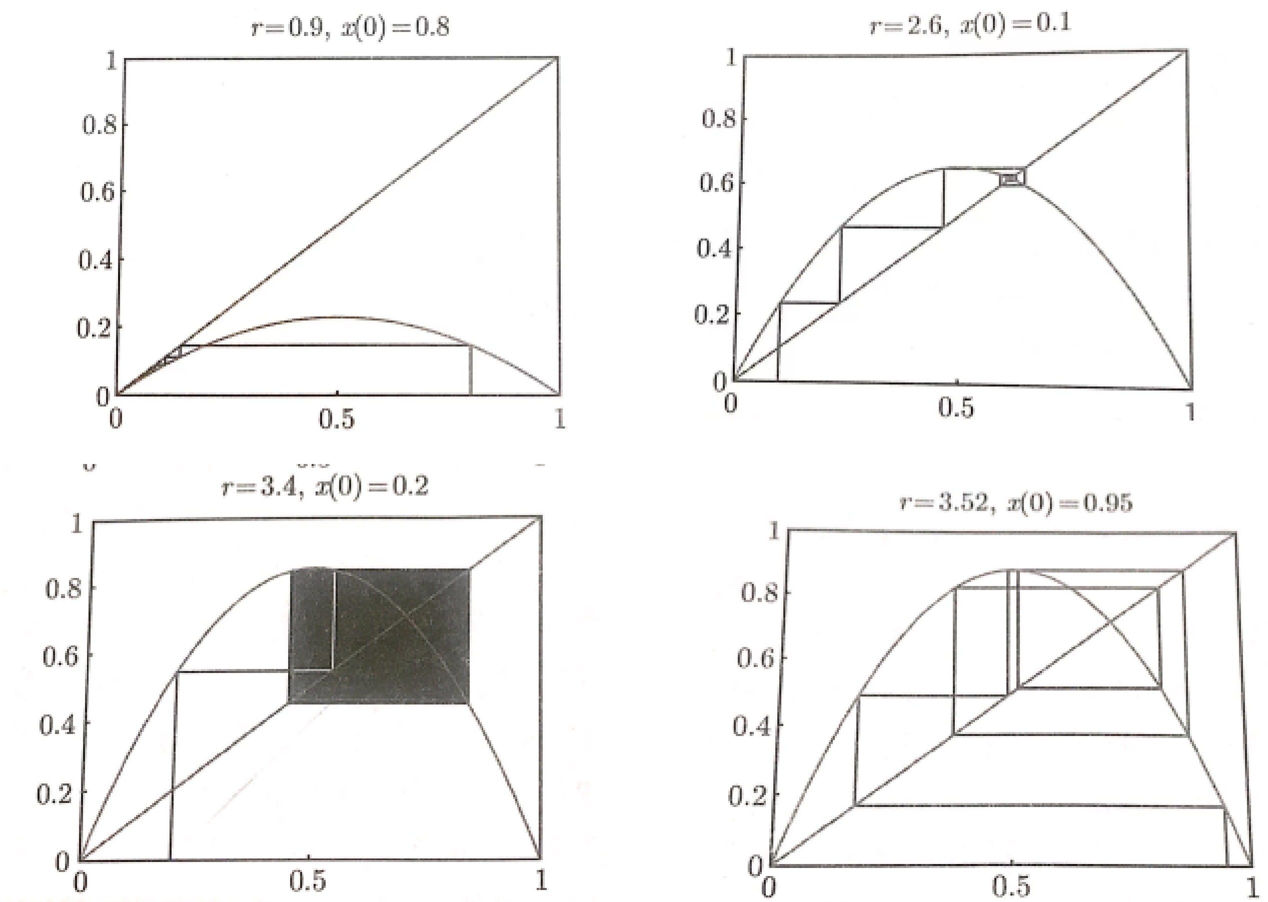
$\mathfrak{MODEL}$ ***虫口模型***

生物种群的数量满足下面差分方程：

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

x_n为生物数量，，$x_n \in [0,1], r \in [0,4]$,r称为内禀增长率。

调节r, x_0得到以下相图

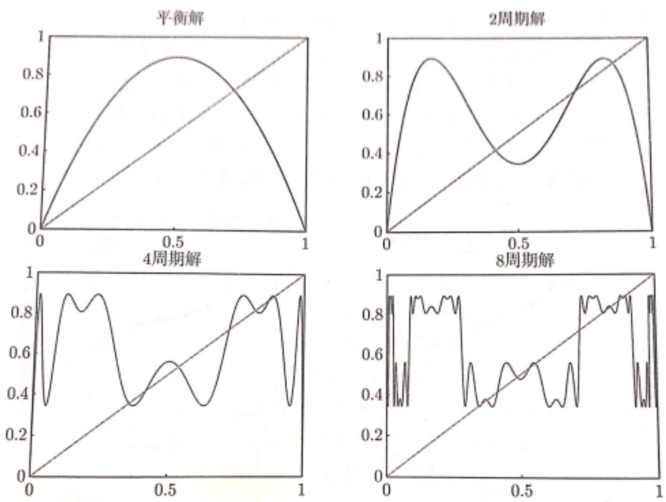


得出系统对初始值和参数依赖性很强的结论，可以通过研究相图与平衡点，定性的判断系统的发展。

上面右下图是以2为周期的。

当 $r = 3.52$ 系统出现了一个周期为2的周期解，为了更好的研究它，考虑

$$x(t+2) = rx(t+1)(1-x(t+1))$$



> 横坐标应该还是 x_n 纵坐标变为 x_{n+2}

r增加后还会出现一些周期解，在某个范围是稳定的，随r变化变得不稳定的,到后面，出现了任意周期的周期解(混沌)。

$3<r<1+\sqrt{6}$ 2周期解稳定。

$r>1+\sqrt{6}$ 2周期解不稳定。

$1+\sqrt{6}<r<3.54409$ 4周期解稳定。

$r>3.54409$ 4周期解不稳定。

$3.54409<r<3.564407$ 8周期解稳定。

$r>3.564407$ 8周期解不稳定。

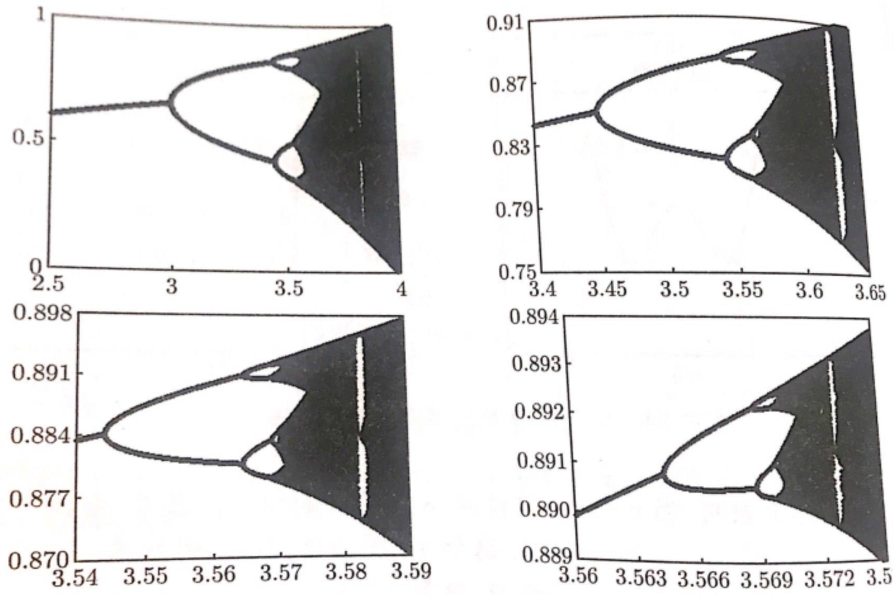
当$r=3.83$时，系统趋向于一个3周期解。

当$r=3.845$时，系统趋向于一个6周期解。

…… …… ……

系统出现了任意周期的周期解。 混沌！

对于 r (横轴)有下图


1
0.5
0
2.5
3
3.5
4
0.91
0.87
0.83
0.79
0.75
3.4
3.45
3.5
3.55
3.6
3.65
0.898
0.891
0.884
0.877
0.870
3.54
3.55
3.56
3.57
3.58
3.59
0.894
0.893
0.892
0.891
0.890
0.889
3.56
3.563
3.566
3.569
3.572
3.5

拓展——莱斯利种群模型