差分方程与虫口模型

$\mathcal{Defination}, 1.1$ ***差分***

$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，称$\triangle f(x) = f(x+1) - f(x)$ 为$f(x)$在x的**差分**，$\triangle$为**差分算子**，$Ef(x) = f(x+1)$ 为$f(x)$在x处的**位移**，E为**位移算子**。I表示**恒等算子**,即$If(x) = f(x)$。

$\mathcal{Defination}, 1.2$ ***差分方程***

递推关系，在数学上称为**差分方程**，是一种递推地定义一个序列的方程式：序列的每一项是定义为前若干项的函数。

$\mathfrak{Remark}$

$(i)Fibonacci$数列：$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n(a_1 = 0, a_1 = 1$)为差分方程。

(ii)解线性递推关系式(递推式为线性函数，系数和常数可能视n而定，可以为非线性的)以一个例子来说明。

$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$

设解为 r^n ,有

$r^2 - Ar - b = 0$

解出 r 的根λ_1, λ_2,如果不是重根，解为

$a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$

如果是重根，解为

$a_n = C\lambda_1^n + nD\lambda_2^n$

带入值可以解出C, D.

$\mathcal{Defination}, 1.3$ ***差分方程的平衡解及其稳定性***

$\mathcal{Defination}\ 1.3$ ***差分方程的平衡解及其稳定性***

$$\exists x^*, s.t. x^* = f(x^*), x_{n+1} = f(x_n)$$

$\exists x^*, s.t.\ x^* = f(x^*), x^*, x_{n+1} = f(x_n)$

$\exists x^*, n \in \mathbb{N}, s.t.\ x_n = x^*$，但 $x_{n-1} \neq x^*$ 称 x^* 为方程 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的最终平衡解；

$3. \exists T \in \mathbb{Z}^+, s.t.\ x_{n+T} = x_n$ 称 x_n 为方程 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的周期解；

4. 设 x^* 为差分方程$x_{n+1} = f(x_n)$的平衡解，$x_n(x_0^*)$是满足该差分方程$x_0 = x_0^*$的解。称$x_{n+1} = f(x_n)$的解x^*是稳定的，如果$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall |x_0 - x^*| < \delta, |x_n - x^*| < \epsilon$,否则称为不稳定的。

$5. \exists \eta > 0$,使得满足$|x_0^* - x^*| < \eta$的解$x_n(x_0^*)$,有$\lim_{n\to\infty} x_n(x_0^*) = x^*$,称$x^*$是吸引的；当$\eta = +\infty$时称$x^*$是全局吸引的；称$x^*$是全局渐进稳定的如果$x^*$既是稳定的又是吸引的；称$x^*$是渐进稳定的如果$x^*$既是稳定的，又是全局吸引的。

$\mathfrak{Remark}😒

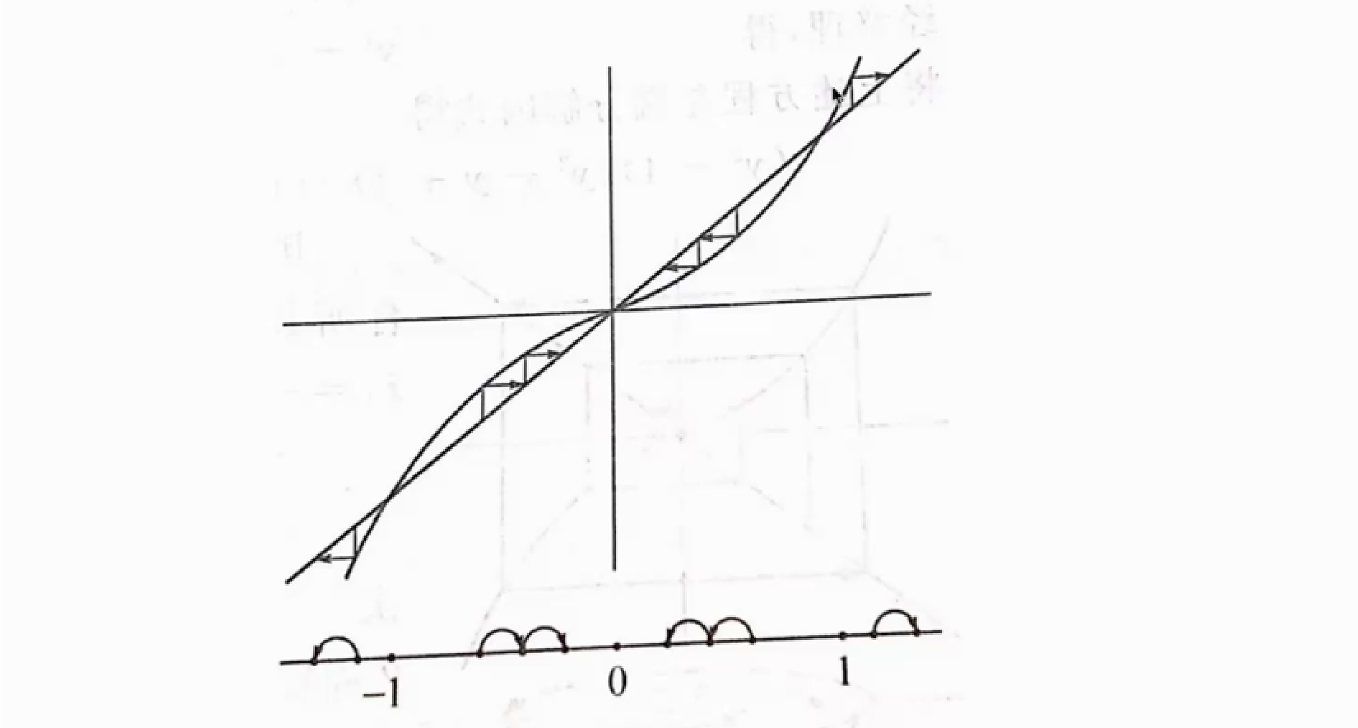
一个例子

用相图法来判断差分方程平衡点的吸引和排斥性

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^3 + x_n)$$

相图如下

$y = x$与$y = f(x)$图像，交点为差分方程$x_{n+1} = f(x_n)$平衡点



得到0是一个吸引点，且可以取$\eta=1$,也说系统的稳定集为$(-1,1)$。

$\mathcal{Theorem},1.1$

设 $f(x)$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ 且 $f(x)$ 有三阶连续导数， $x^{}是*x_{n+1}=f(x_{n})*的平衡解。\mid *f'(x^{})*\mid <1时，x^{}渐进稳定，*\mid f'(x^{})*\mid >1时，x^{*}$ 不稳定。

$\mathfrak{Remark}$:

首先考虑 $x_{n+1}=ax_n$ ，只有当 $|a|<1$ 时， x_n 才会收敛，那么也有

只有当 $|a|<1$ 时 $x_{n+1}=ax_n+b$ 收敛

将 $f(x),Taylor$ 展开一阶

$ \qquad x_{n+1}=f(x_{n})= f(x^{*}*)+f^{'}*(x^{*})(x_{n}-x^{*}) $

与上面的讨论就类似了。

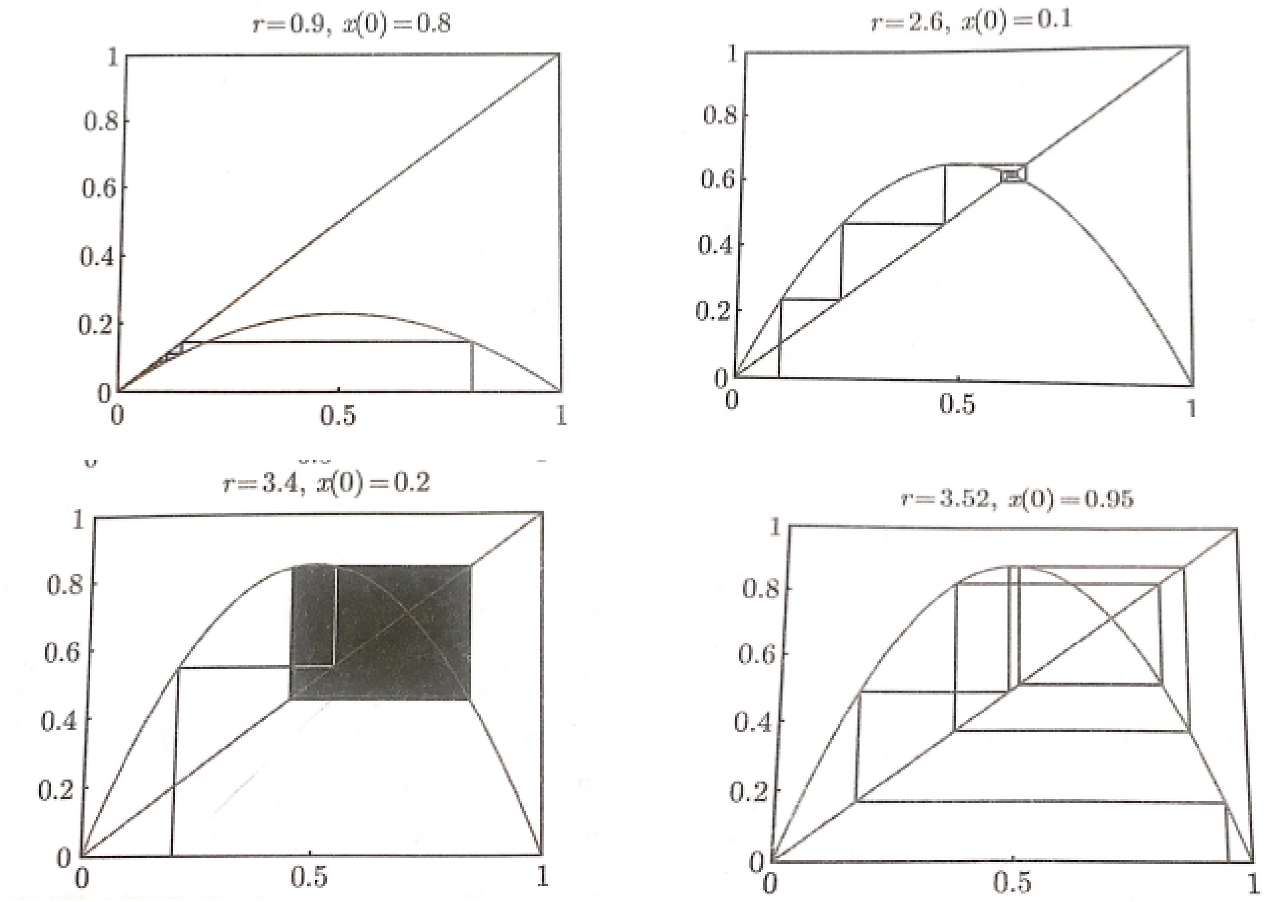
$\mathfrak{MODEL}$

生物种群的数量满足下面差分方程：

$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$$

x_n为生物数量，,$x_n\in[0,1],r\in[0,4]$,r称为内禀增长率。

调节r,x_0得到以下相图



得出系统对初始值和参数依赖性很强的结论，可以通过研究相图与平衡点，定性的判断系统的发展。

上面右下图是以2为周期的。r增加后还会出现一些周期解，在某个范围是稳定的，随r变化变得不稳定的，到后面，出现了任意周期的周期解(混沌)。

$3 < r < 1+\sqrt{6}$	2周期解稳定。
$r > 1+\sqrt{6}$	2周期解不稳定。
$1+\sqrt{6} < r < 3.54409$	4周期解稳定。
$r > 3.54409$	4周期解不稳定。
$3.54409 < r < 3.564407$	8周期解稳定。
$r > 3.564407$	8周期解不稳定。

当$r = 3.83$时，系统趋向于一个3周期解。

当$r = 3.845$时，系统趋向于一个6周期解。

…… …… ……

系统出现了任意周期的周期解。 混沌！