FZOJ4668 解题报告

by Kostlin

2022.1.4

FZOJ4668

题意简述：

- 对于 x ，定义合法的路径集合 T ，需要满足以下条件：
  1. 集合内任意两路径不交；
  2. 集合内任意一路径两端点的度数 $\geq x$；
- 求对于 $1 \leq x \leq n-1$ 的每个 x ， T 的个数。
- 答案对 998244353 取模。

FZOJ4668

算法：虚树，树形dp

FZOJ4668

算法：虚树，树形dp

分析：

- 首先，我们注意到树中所有点数的度数之和为 $2 \times n - 2$，那么若设 $f(x) = \sum_{i=1}^{n}[deg(i) \geq x]$，$\sum_{i=1}^{n-1} f(x) = 2 \times n - 2$。

FZOJ4668

算法：虚树，树形dp

分析：

- 首先，我们注意到树中所有点数的度数之和为 $2\times n-2$，那么若设 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}[deg(i)\geq x]$，$\sum_{i=1}^{n-1}f(x)=2\times n-2$。
- 也就是说，如果我们从小到大枚举 x，每次以度数 $\geq x$ 的点为特殊点建虚树，总点数是 $O(n)$，复杂度也就是 $O(nlogn)$ 的。

FZOJ4668

- 现在问题转化为在这棵虚树上统计有多少种路径覆盖方案，使得每个点至多只会被覆盖一次。

FZOJ4668

- 现在问题转化为在这棵虚树上统计有多少种路径覆盖方案，使得每个点至多只会被覆盖一次。
- 考虑我们已经很熟悉了的一类树形dp：设 $f[now][0/1]$ 表示当前 x 子树内已经覆盖完毕，并且是否有一条路径跨过 x 与其父亲这条边。

FZOJ4668

- 现在问题转化为在这棵虚树上统计有多少种路径覆盖方案，使得每个点至多只会被覆盖一次。
- 考虑我们已经很熟悉了的一类树形dp：设 $f[now][0/1]$ 表示当前 x 子树内已经覆盖完毕，并且是否有一条路径跨过 x 与其父亲这条边。
- 那么边界条件是叶子节点（其实必定 $deg(now) \geq x$）$f[now][0] = 2, f[now][1] = 1$。（0的情况就是不选和选）

FZOJ4668

- 中途转移时先设三个变量 sum_0, sum_1, sum_2 ，分别表示在当前子树中， now 与每个儿子的连边有 $0, 1, 2$ 条边被路径覆盖的方案数。

FZOJ4668

- 中途转移时先设三个变量 sum_0, sum_1, sum_2 ，分别表示在当前子树中， now 与每个儿子的连边有 $0, 1, 2$ 条边被路径覆盖的方案数。
- 分类讨论：
  1. 若 $deg(now) \geq x$ ，有
     $f[x][0] = sum_1 + (2 \times sum_0 + sum_2)$
     $f[x][1] = sum_1 + (sum_0 + sum_2)$
  2. 反之，有
     $f[x][0] = sum_2 + sum_0$
     $f[x][1] = sum_1$

FZOJ4668

- 最后输出 $f[1][0]$ 即可。

FZOJ4668

- 最后输出 $f[1][0]$ 即可。
- 另外判断一个点度数是否符合要求不能太暴力，我使用了一个链表来维护，同时多次建虚树也要记得小心翼翼地清空。
- 综上，我们在 $O(nlogn)$ 的时间复杂度内解决了这个问题（瓶颈似乎只在建虚树时求 LCA，~~所以可以做到 O(n)~~）

感谢聆听

欢迎讨论或提出改进建议

by Kostlin

2022.1.4

Goodbye!