

# 网络流建图

叶博文

北京大学

February 4, 2022

# 前置知识

- ▶ 求最大流 + 最小费用最大流

# 经典例题

- ▶ 二分图最大匹配，二分图多重匹配

# 经典例题

- ▶ **最小路径覆盖**：在一个有向无环图中，找出最少的路径，使得这些路径经过了所有的点。最小路径覆盖分为最小不相交路径覆盖和最小可相交路径覆盖，区别是这些路径是否可以相交

# 经典例题

- ▶ 已知一些路径，每个节点只能属于一条路径，求能选择多少条路径使它们不相交（对起点或终点有限制）。

# 经典例题

## ► 最大权闭合子图

有一个有向图，每一个点都有一个权值，选择一个权值和最大的子图，使得每个点的后继都在子图里面，这个子图就叫最大权闭合子图。

# 经典例题

- ▶ 二分图最大独立集 = 点数-二分图最大匹配

# 经典例题

- ▶ 最大密度子图：密度是图上的边的数量除以点数。



# 经典例题

## ► 二元关系最小割模型

# 经典例题

- ▶ 平面图最小割 = 对偶图最短路

# 经典例题

## ▶ 最小割相关边的方案

# 经典例题

## ► 相关线性规划

# 经典例题

- ▶ 有无源汇上下界可行，最大，最小流
- ▶ 有源汇有上下界最小费用流

相信大家已经熟练掌握以上内容，下面给出一些签到题，快来签到吧

- ▶ 有  $n$  个工作,  $m$  个机器, 每个机器可以买也可以租, 租只能用一次。每个工作需要一些指定的机器, 完成后可以获得一定的收益。求最大收益。
- ▶  $n, m \leq 1200$

- ▶ 对于一条边，可以用  $a_i$  的代价给边权  $+1$ ，或者用  $b_i$  的代价 $-1$ 。要求修改边权使得制定的生成树变成最小生成树，求最小代价。
- ▶  $n \leq 300$



# POJ chessboard

- ▶  $n * n$  的棋盘上放  $n$  个车，让它们两两不攻击。每一个车必须放在一个特定的矩形里。求哪些车的位置是唯一确定的。
- ▶  $n \leq 10^5$

- ▶ Nick 最近在玩一款很好玩的游戏，游戏规则是这样的：有一个  $n*m$  的地图，地图上的每一个位置要么是空地，要么是炮塔，要么是一些 BETA 狗，Nick 需要操纵炮塔攻击 BETA 狗们。攻击方法是：对于每个炮塔，游戏系统已经给出它可以瞄准的方向（上下左右其中一个），Nick 需要选择它的攻击位置，每一个炮塔只能够攻击一个位置，炮塔只能够向着它的瞄准方向上的某个位置发动攻击，当然炮塔也可以不进行攻击。炮塔威力强大，它可以且仅可以消灭目标位置上所有的 BETA 狗。出于安全考虑，游戏系统已经保证不存在一个炮塔能够瞄准另外一个炮塔，即对于任意一个炮塔，它所有可能的攻击位置上不存在另外一个炮塔。而且，如果把炮塔的起点和终点称为炮弹的运行轨迹，那么系统不允许两条轨迹相交（包括起点和终点）。现在，选定目标位置以后，每一个炮塔同时开炮，你要告诉 Nick，他最多可以干掉多少 BETA 狗。

- ▶  $n \leq 50$

- ▶ 给出两个排列  $P, Q$ . 要求构造两个排列  $A, B$ .
- ▶ 要求:  $A_i$  要么等于  $i$ , 要么等于  $P_i$ ;  $B_i$  要么等于  $i$ , 要么等于  $Q_i$
- ▶  $s$  最大化  $A_i \neq B_i$  的下标  $i$  数量
- ▶  $n \leq 10^5$

- ▶ 有一个大小为  $n$  的全集，每个元素是一个数，有  $n$  个子集，每个子集有个权值，题目保证任意  $K$  个子集的并的大小  $\geq K$ 。你需要选出一些子集使得这些子集的并大小等于子集个数，且其子集权值和最小，可以为空集。
- ▶  $n \leq 300$

# SRM577 BoardPainting

- ▶ 有一个  $n * n$  的网格，有些位子不能染色，其他位子必须染色。每次能给横着的一段或者竖着的一段染色，每个格子只能被染色一次。求最少染色次数。
- ▶  $n \leq 50$

- ▶ 给定  $n$  个点的无向图，边权均为 1，每个点有一个属性  $w_i$ ，现在可以在图中任意加边，记加边后每个点到 1 号点的距离为  $d_i$ ，最小化  $\sum (w_i - d_i)^2$ .
- ▶  $n \leq 40$

Thank you !