第十四讲 幻方



--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

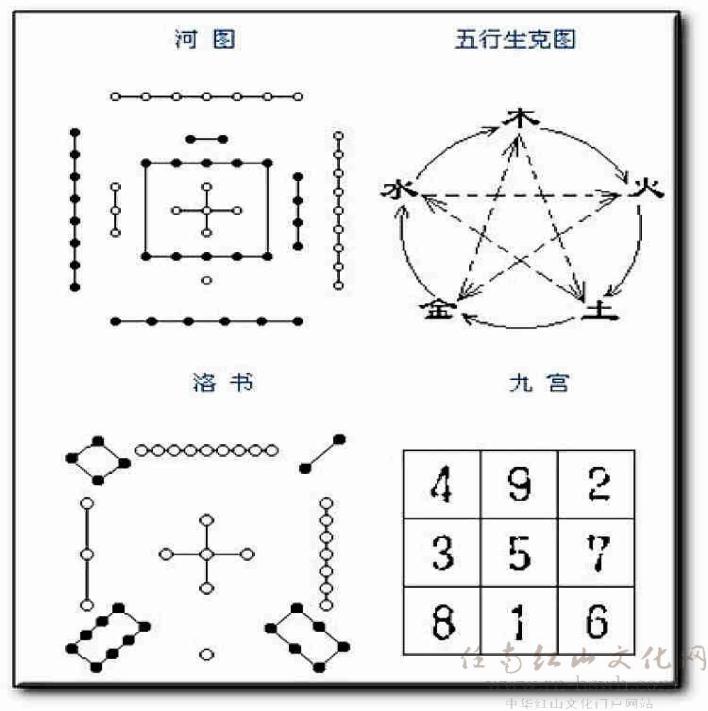


**【知识点解析】**

**一、幻方的概念：**

所谓幻方是指在正方形方格表的每个方格内填入数，使得每行、每列和两条对角线上的各数之和相等；而阶数是指每行、每列所包含的方格数。

幻方题可以粗略的分为两种，一种是限制了所填入的数字，或者给出了需要填入的各个数字，或者已经填入一个或几个数字；另一种是对填入的数字没有任何限制，填对即可。

幻方又称为魔方，方阵等，它最早起源于我国。宋代数学家杨辉称之为纵横图。关于幻方的起源，我国有“河图”和“洛书”之说。相传在远古时期，伏羲氏取得天下，把国家治理得井井有条，感动了上苍，于是黄河中跃出一匹龙马，背上驮着一张图，作为礼物献给他，这就是“河图”了，是最早的幻方。伏羲氏凭借着“河图”而演绎出了八卦。后来大禹治洪水时，洛水中浮出一只大乌龟，它的背上有图有字，人们称之为“洛书”。“洛书”所画的图中共有黑、白圆圈45个。把这些连在一起的小圆和数目表示出来，得到1至9这九个数，恰组成一个三阶幻方。

**二、幻方问题主要方法**

1、累加法

利用累加的方法可以求出“幻和”和关键位置上的数字。通常将若干个“幻和”累加在一起，再计算每一个位置上的重数，从而求出“幻和”和关键位置上的数字。

2、求出“幻和”和关键位置上的数字后，结合枚举法完成数阵图的填写，在填写数阵图的过程中注意从特殊的数字和位置入手。

3、比较法

利用比较的方法可以直接填出某些位置的数字。注意观察数阵图中相关联的“幻和”之间的关系，注意它们之间共同的部分，去比较不同的部分。

4、掌握好3阶幻方中的规律。



三阶幻方的性质：1.中心位置上的数等于幻和除以3；

2.角上得数等于和它不相邻的两条边上的数的平均数；

3.中心数两头的数等于中心数的2倍。



**例1：**我们先来一起解决三道难度相差很大的题目，目的在于总结出三阶幻方的若干重要性质。

如下图，将1—9填入3×3的方格表中，使得每行每列以及两条对角线上的三个数字之和都相等，你一共可以得到多少种填法？

第1题

**解析：**首先，我们思考要填出一个三阶幻方，什么量的求出是最重要的？立刻我们就知道，那个所谓的“幻和”，即每行、每列、每条对角线三个数的和是最重要的量。它是多少呢？哦，如果我们按照行（按照列也一样）把幻方中的九个数加起来，那么它们的总和不就是3倍的“幻和”吗？而另一方面，我们也知道，由于1到9这九个数字都只各用了一次，所以3倍的的“幻和”就等于1+2+3+4+5+6+7+8+9=45（请复习学过的等差数列知识）。于是最后，我们终于得到这个至关重要的“幻和”就是45÷3=15。

接下来第二步，我们来关心一下中间一格应该填哪个数字。

同学们可能会说，中间一定填5，因为1到9的中间数字就是5，而幻方又是上下左右对称的。没错，同学们有这样的数学直观很好，但是为了确定我们的判断，还是需要严格地说明一下。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *A* | *B* | *C* |
| *D* | *E* | *F* |
| *G* | *H* | *I* |

看上面的表格，由于我们还没有填入任何一个数字，所以就用了九个大写字母来表示。

下面就需要技巧了，我们现在只考虑包含*E*的四条直线：因为*A*+*E*+*I*=15, *B*+*E*+*H*=15, *C*+*E*+*G*=15, *D*+*E*+*F*=15, 所以如果我们把这四个式子的左右两边分别相加，就可以得到（*A+B+C+D+E+F+G+H+I*）*+3×E=*60,

而*A+B+C+D+E+F+G+H+I*不就是所填数的总和吗？不论填法如何，这个数是不变的，它就是45，于是那么我们就得到*E=5*了。

**答案：** 根据上面的分析，我们知道“幻和”=15，而E=5。

从而我们知道*A+I=B+H=C+G=D+F*=10，也意味着在所有经过中心的直线上，两端的数字奇偶性相同。然后我们可以通过枚举的方法确定每个位置上数字的奇偶性：（大家自己完成）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 偶 | 奇 | 偶 |
| 奇 | 5 | 奇 |
| 偶 | 奇 | 偶 |

我们可以看到，如果4个角上的偶数被确定下来，那么其余4个奇数也就被确定了，所以我们可以只考虑这4个偶数的填法。利用一点简单的乘法原理，大家就可以知道本题共有8种填法。具体填法如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 9 | 4 |  | 2 | 7 | 6 |  | 8 | 3 | 4 |  | 8 | 1 | 6 |
| 7 | 5 | 3 | 9 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 3 | 5 | 7 |
| 6 | 1 | 8 | 4 | 3 | 8 | 6 | 7 | 2 | 4 | 9 | 2 |

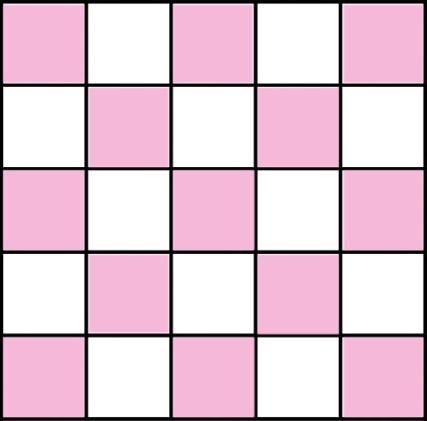
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 9 | 2 |  | 4 | 3 | 8 |  | 6 | 7 | 2 |  | 6 | 1 | 8 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 8 | 1 | 6 | 2 | 7 | 6 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 | 4 |

**总结：**这里要强调一点：奇偶性分析并不是解决幻方题的典型方法，只在某些特殊的题目中会被用到。

在上面这个解题过程中，我们用到了一点技巧，希望同学们加以领会。

本题中，我们看到所有经过中心的直线上，两端数字的平均数就等于中间这个*E*。那么我们来问一个深入一点的问题：你认为这是在这道题中才产生的特殊性质，还是所有的三阶幻方都应该具有类似的性质？

还有，就是上面我们曾经得出的那个“幻和”的3倍就等于这九个数之和的这条性质，它能不能推广到所有的三阶幻方？

**【巩固】.**请你将3~11这9个数字填入下面的方格中，使横、竖、斜行三个数的和相等。

**解析：**首先将这列数中的中间数放在中间的格子里

可知幻和是7×3=21；

其次；将最小的数和最大的数分别放在这个数的横

向或竖向的两边；第三，中间数前面的第2和第4个数分

别填在最大数的两侧，这时就可以轻松的确定剩下的几个

空了。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 | 9 | 4 |
| 3 | 7 | 11 |
| 10 | 5 | 6 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 4 |
| 3 | 7 | 11 |
|  |  | 6 |

**例2：**下图是一个三阶幻方，请说明幻和等于3倍的E 且D+F=2×E。

**解析：**有了第1题的基础，大家应该对本题感到不是那么陌生了，只要把第1题的一部分解题过程搬过来就行。这道题也是让大家看一看如何把一个特殊的解题过程变成一条普遍的规律或性质。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| D | E | F |
|  |  |  |

第2题

**答案：**首先把题目中的空白格子标上不同的字母，以便表述。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

首先，只考虑包含E的四条直线，得到A+E+I=“幻和”，B+E+H=“幻和”， C+E+G=“幻和”， D+E+F=“幻和”。

然后，把这四个式子的左右两边分别相加，得到（A+B+C+D+E+F+G+H+I）+3×E=4倍的“幻和”, 而另一方面，如果我们只考虑幻方的三行，则有A+B+C=D+E+F=G+H+I=“幻和”，因此A+B+C+D+E+F+G+H+I=3倍的“幻和”。

所以，3×E=“幻和”，而“幻和”=D+E+F，于是D+F=2×E。

**总结：**同样的分析办法，还可以得到A+I=B+H=C+G=D+F=2×E(请大家自己说明)。

本题回答了例1评议中提出的两个问题，从而我们得到三阶幻方的两条重要性质。

**性质1：“幻和”的3倍等于这九个数之和；**

**性质2：所有经过中心的直线上，两端数字的平均数就等于正中间的数字。**

**例3：上**图是一个三阶幻方，请说明A+B=2×C。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | B |  |
| A |  |  |
|  |  | C |

第3题

**解析：**这是一道难题，它之所以难，就在于条件太少，只有三阶幻方的概念可以用。于是我们就想到利用性质1和2，看看能不能解决问题。

当然，只利用题目中的A、B、C三个位置上的数字是不可能做出来的，至少还要利用一个其它位置上的数字作为过渡，比如我们可以选择左上角的数字，并用x来表示它：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | B |  |
| A |  | \* |
|  |  | C |

下面我们要用到比较法，其实也就是性质1。

**答案：**现在考虑\*处的数字。如果我们只看上面第一行和右边第一列，可以知道\*+C=B+x，也就是\*=B+x-C；而如果我们只看中间第二行和左上到右下的对角线，可以知道x+C=A+\*，也就是\*=x+C-A。

所以B+x-C=x+C-A，两边可以都去掉x，就得到A+B=2×C。

**总结：**这就是幻方的性质3，也被形象的称为“T”字型性质。当然，类似本题中这样A+B=2×C的性质还有另外3种不同方向的表达形式，大家应该自己可以总结出来。“T”字型性质是非常重要，而且神奇的性质，它神奇就神奇在三阶幻方有无穷多个，看起来好像数字怎么填都可以。但是这条性质却告诉我们在离得这么远的三个位置上的数字之间却有着这样简单的关系，三阶幻方中的数字不是随便怎么填都可以的，中间还潜藏着一些更深层次的特殊性质。这正是数学的魅力所在。

**例4：**那么究竟我们总结出来的3条性质有什么用呢，

请完成下面的三阶幻方：

**解析：**本题需要综合利用上面的3条性质以及比较法来解决，目的主要是求出“幻和”，一旦“幻和”求出来了，一切就都没问题了。但是不同人的解题顺序和利用性质的方式可能很不一样，所以下面我只是提供一种可行的解题顺序和方法，大家应该有自己的解题顺序和方法。这类题是简单的。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 |  |
| 29 |  |  |
| 19 |  |  |

第4题（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 100 | 19 |
| 95 |  |  |

第4题（1）

**答案：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | B |
| A | 100 | 19 |
| 95 |  |  |

（1）

根据性质2，A=100×2-19=181，B=100×2-95=105；“幻和”=100×3=300。下面就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 24 | 171 | 105 |
| 181 | 100 | 19 |
| 95 | 29 | 176 |

（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 | A |
| 29 | C |  |
| 19 |  | B |

根据比较法，A=19+29-17=31；根据性质3，B=(17+29)÷2=23；根据性质2，C=(19+31) ÷2=25，“幻和”=25×3=75。下面也就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 27 | 17 | 31 |
| 29 | 25 | 21 |
| 19 | 33 | 23 |

**总结：** 最后重申几点注意事项：

1. 这些性质只适用于三阶幻方，对于四阶和四阶以上的幻方，有些性质可能就不成立了，而有些需要修改，请同学们慎重，具体问题具体处理。
2. 这几条性质适合于所有的三阶幻方，并没有局限性。

**例5：**下图是一个三阶幻方，请说明幻和等于3倍的E 且D+F=2×E。

**「解析」**有了第1题的基础，大家应该对本题感到不是那么陌生了，只要把第1题的一部分解题过程搬过来就行。这道题也是让大家看一看如何把一个特殊的解题过程变成一条普遍的规律或性质。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| D | E | F |
|  |  |  |

第2题

**「答案」**首先把题目中的空白格子标上不同的字母，以便表述。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

首先，只考虑包含E的四条直线，得到A+E+I=“幻和”，B+E+H=“幻和”， C+E+G=“幻和”， D+E+F=“幻和”。

然后，把这四个式子的左右两边分别相加，得到（A+B+C+D+E+F+G+H+I）+3×E=4倍的“幻和”, 而另一方面，如果我们只考虑幻方的三行，则有A+B+C=D+E+F=G+H+I=“幻和”，因此A+B+C+D+E+F+G+H+I=3倍的“幻和”。

所以，3×E=“幻和”，而“幻和”=D+E+F，于是D+F=2×E。

说明完毕。

**「总结」**同样的分析办法，还可以得到A+I=B+H=C+G=D+F=2×E(请大家自己说明)。

本题回答了第1题评议中提出的两个问题，从而我们得到三阶幻方的两条重要性质。

性质1：“幻和”的3倍等于这九个数之和；

性质2：所有经过中心的直线上，两端数字的平均数就等于正中间的数字。

请大家牢记。

那么，三阶幻方还有什么别的更奇妙更有趣的性质吗？

**例6：**下图是一个三阶幻方，请说明A+B=2×C。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | B |  |
| A |  |  |
|  |  | C |

第3题

**「解析」**这是一道难题，它之所以难，就在于条件太少，只有三阶幻方的概念可以 用。 于是我们就想到利用性质1和2，看看能不能解决问题。

当然，只利用题目中的A、B、C三个位置上的数字是不可能做出来的，至少还要利用一 个其它位置上的数字作为过渡，比如我们可以选择左上角的数字，并用x来表示它：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | B |  |
| A |  | \* |
|  |  | C |

下面我们要用到比较法，其实也就是性质1。

**「答案」**现在考虑\*处的数字。如果我们只看上面第一行和右边第一列，可以知道\*+C=B+x，也就是\*=B+x-C；而如果我们只看中间第二行和左上到右下的对角线，可以知道x+C=A+\*，也就是\*=x+C-A。

所以B+x-C=x+C-A，两边可以都去掉x，就得到A+B=2×C。

说明完毕。

**「总结」**这就是幻方的性质3，也被形象的称为“T”字型性质。当然，类似本题中这样A+B=2×C的性质还有另外3种不同方向的表达形式，大家应该自己可以总结出来。“T”字型性质是非常重要，而且神奇的性质，它神奇就神奇在三阶幻方有无穷多个，看起来好像数字怎么填都可以。但是这条性质却告诉我们在离得这么远的三个位置上的数字之间却有着这样简单的关系，三阶幻方中的数字不是随便怎么填都可以的，中间还潜藏着一些更深层次的特殊性质。这正是数学的魅力所在。



**A档**

1、请完成下面的三阶幻方：

**「分析」**本题需要综合利用上面的3条性质以及比较法来解决，目的主要是求出“幻和”，一旦“幻和”求出来了，一切就都没问题了。但是不同人的解题顺序和利用性质的方式可能很不一样，所以下面我只是提供一种可行的解题顺序和方法，大家应该有自己的解题顺序和方法。这类题是简单的。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 |  |
| 29 |  |  |
| 19 |  |  |

第4题（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 100 | 19 |
| 95 |  |  |

第4题（1）

**「详解」**（1）根据性质2，A=100×2-19=181，B=100×2-95=105；“幻和”=100×3=300。下面就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 24 | 171 | 105 |
| 181 | 100 | 19 |
| 95 | 29 | 176 |

（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 | A |
| 29 | C |  |
| 19 |  | B |

根据比较法，A=19+29-17=31；根据性质3，B=(17+29)÷2=23；根据性质2，C=(19+31) ÷2=25，“幻和”=25×3=75。下面也就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 27 | 17 | 31 |
| 29 | 25 | 21 |
| 19 | 33 | 23 |

**「评议」**至此，本讲对于三阶幻方的深入研究告一段落，最后重申几点**注意事项**：

1. 这些性质只适用于三阶幻方，对于四阶和四阶以上的幻方，有些性质可能就不成立了，而有些需要修改，请同学们慎重，具体问题具体处理。
2. 这几条性质适合于所有的三阶幻方，并没有局限性。

2、求任一列、任一行以及两条对角线上的三个数之和都等于267的三阶质数幻方。

**「详解」**：由例4知中间方格中的数为267÷3＝89。由于在两条对角线、中间一行及中间一列这四组数中，每组的三个数中都有89，所以每组的其余两数之和必为267-89＝178。两个质数之和为178的共有六组：

　　5+173＝11＋167＝29＋149＝41＋137＝47+131＝71+107。

　　经试验，可得右图所示的三阶质数幻方。



10

2

5

4

7

8

3、将1—12填入图中的12个区域内，使得每个圆圈内的4个数字之和都相等。

**「分析」**原则上我们是可以通过分析每个数所属于的圆圈个数（“重数”）来分析每个圆圈内4个数字之和的范围，确定其最小值和最大值，再一一筛选。具体方法大家可以参考三年级下学期的内容。

但是这种方法在一些特殊的数阵图题目中显得非常不实用。当然，由于同学们做题时只需要找出一种可能的填法，所以上面说的这种方法在很多情况下也是可行的，只是繁琐些。

**「详解」**如右图，首先，我们把注意力放在下面的和右面的圆圈中，可以得到：

10

2

5

4

7

8

A

B

C

D

E

A+B+2+5=B+C+7+8，则A-C=8。

因此要么A=9，C=1或者A=11，C=3（因为12和10已经有了）。

如果A=11，C=3，那么仿照以上的步骤，就可以知道D=E-10（为什么？大家自己思考），所以不可能。

因此A=9，C=1，那还剩下4个数字需要填：3，6，11，12。

由于10+D+A(9)=E+4+7，于是D+8=E。所以就有D=3而E=11。剩下的数就很简单了。

答案如下：

10

2

5

4

7

8

9

1

3

11

6

12

**「评议」**还是那句话，特殊而巧妙的方法是因题而异的，这需要经验和积累。也就是说，大家不能做完题就算了，而是需要牢牢记住这些好方法，久而久之才能融会贯通。

4、将1、2、3、4、5、6、7、8、9分别填入图中的9个圆圈内，使图中每条直线上圆圈内所填数之和都相等，那么这个相等的和为\_\_\_\_\_\_\_；（图中有7条直线，请填出）

**「分析」**我们仔细看看上面这张图，就会发现有些圆圈处于三条直线上，而另一些圆圈处于两条直线上，还有一个圆圈只处于一条直线上。要想利用所谓“重数”的分析方法，有很大的困难。当然也不是说这种方法就失灵了，我们综合分析一下，就不难发现某些位置上的数字应该偏大，而另一些数字显然偏小。如果去猜一猜的话，也不难填出一种来。

那么我们就可以去考虑一下是否有更好或更直接的方法来做本题。我们发现有一个圆圈很特殊，从它出发，就很容易找到答案。

**A**

**「详解」**除去位置A处的数字，剩下的8个数字恰好组成三行，也就是说1+2+3+4+5+6+7+8+9-A=3×“每条直线上圆圈内所填数之和”。

因此，A一定是3的倍数，也就是说A=3，6或9，而相应的“每条直线上圆圈内所填数之和”就等于14，13或12。

**6**

**D**

**B**

**C**

但是，如果A=9的话，那么右下角的圆圈内只能填1或者2了，此时就要求左下角的数字至少为10，显然不可能。

如果A=6，则每条直线上圆圈内所填数之和等于13，而在下图中我们知道B=C+6（比较法），因此就要D+6+B=C+D+12=13，是不可能的。

所以 A=3，而相应的“每条直线上圆圈内所填数之和”就等于14，且有C+D=8。（为什么？请大家自己思考）

**3**

**2**

**9**

**5**

**6**

**1**

**8**

**4**

**7**

然后我们就可以找到一种填数的方法，使得每条直线上圆圈内所填数之和就等于14。答案如下图：

**「评议」**大家可以去思考一下，虽然每条直线上圆圈内所填数之和只可能等于14，但是除了上面给出的填法，是否还有其它的填数方式？如果有，请找出来；如果没有，说明理由。

5、如下图，将1—9填入3×3的方格表中，使得每行每列以及两条对角线上的三个数字之和都相等，你一共可以得到多少种填法？

第1题

**「分析」**首先，我们思考要填出一个三阶幻方，什么量的求出是最重要的？立刻我们就知道，那个所谓的“幻和”，即每行、每列、每条对角线三个数的和是最重要的量。它是多少呢？哦，如果我们按照行（按照列也一样）把幻方中的九个数加起来，那么它们的总和不就是3倍的“幻和”吗？而另一方面，我们也知道，由于1到9 这九个数字都只各用了一次，所以3倍的的“幻和”就等于1+2+3+4+5+6+7+8+9=45（请复习学过的等差数列知识）。于是最后，我们终于得到这个至关重要的“幻和”就是45÷3=15。

接下来第二步，我们来关心一下中间一格应该填哪个数字。

同学们可能会说，中间一定填5，因为1到9的中间数字就是5，而幻方又是上下左右对称的。没错，同学们有这样的数学直观很好，但是为了确定我们的判断，还是需要严格地说明一下。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *A* | *B* | *C* |
| *D* | *E* | *F* |
| *G* | *H* | *I* |

看上面的表格，由于我们还没有填入任何一个数字，所以就用了九个大写字母来表示。

下面就需要技巧了，我们现在只考虑包含*E*的四条直线：因为*A*+*E*+*I*=15, *B*+*E*+*H*=15, *C*+*E*+*G*=15, *D*+*E*+*F*=15, 所以如果我们把这四个式子的左右两边分别相加，就可以得到（*A+B+C+D+E+F+G+H+I*）*+3×E=*60, 而*A+B+C+D+E+F+G+H+I*不就是所填数的总和吗？不论填法如何，这个数是不变的，它就是45，于是那么我们就得到*E=5*了。

**「详解」**

根据上面的分析，我们知道“幻和”=15，而E=5。

从而我们知道*A+I=B+H=C+G=D+F*=10，也意味着在所有经过中心的直线上，两端的数字奇偶性相同。然后我们可以通过枚举的方法确定每个位置上数字的奇偶性：（大家自己完成）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 偶 | 奇 | 偶 |
| 奇 | 5 | 奇 |
| 偶 | 奇 | 偶 |

我们可以看到，如果4个角上的偶数被确定下来，那么其余4个奇数也就被确定了，所以我们可以只考虑这4个偶数的填法。利用一点简单的乘法原理，大家就可以知道本题共有8种填法。

具体填法如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 9 | 4 |  | 2 | 7 | 6 |  | 8 | 3 | 4 |  | 8 | 1 | 6 |
| 7 | 5 | 3 | 9 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 3 | 5 | 7 |
| 6 | 1 | 8 | 4 | 3 | 8 | 6 | 7 | 2 | 4 | 9 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 9 | 2 |  | 4 | 3 | 8 |  | 6 | 7 | 2 |  | 6 | 1 | 8 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 8 | 1 | 6 | 2 | 7 | 6 | 8 | 3 | 4 | 2 | 9 | 4 |

**「评议」**这里要强调一点：奇偶性分析并不是解决幻方题的典型方法，只在某些特殊的题目中会被用到。

在上面这个解题过程中，我们用到了一点技巧，希望同学们加以领会。

本题中，我们看到所有经过中心的直线上，两端数字的平均数就等于中间这个*E*。那么我们来问一个深入一点的问题：你认为这是在这道题中才产生的特殊性质，还是所有的三阶幻方都应该具有类似的性质？

还有，就是上面我们曾经得出的那个“幻和”的3倍就等于这九个数之和的这条性质，它能不能推广到所有的三阶幻方？

6、请完成下面的三阶幻方：

**「分析」**本题需要综合利用上面的3条性质以及比较法来解决，目的主要是求出“幻和”，一旦“幻和”求出来了，一切就都没问题了。但是不同人的解题顺序和利用性质的方式可能很不一样，所以下面我只是提供一种可行的解题顺序和方法，大家应该有自己的解题顺序和方法。这类题是简单的。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 |  |
| 29 |  |  |
| 19 |  |  |

第4题（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 100 | 19 |
| 95 |  |  |

第4题（1）

**「详解」**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | B |
| A | 100 | 19 |
| 95 |  |  |

（1）

根据性质2，A=100×2-19=181，B=100×2-95=105；“幻和”=100×3=300。下面就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 24 | 171 | 105 |
| 181 | 100 | 19 |
| 95 | 29 | 176 |

（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 17 | A |
| 29 | C |  |
| 19 |  | B |

根据比较法，A=19+29-17=31；根据性质3，B=(17+29)÷2=23；根据性质2，C=(19+31) ÷2=25，“幻和”=25×3=75。下面也就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 27 | 17 | 31 |
| 29 | 25 | 21 |
| 19 | 33 | 23 |

**B档**

1. 将1—12填入图中的12个区域内，使得每个圆圈内的4个数字之和都相等。

10

2

5

4

7

8

**「分析」**原则上我们是可以通过分析每个数所属于的圆圈个数（“重数”）来分析每个圆圈内4个数字之和的范围，确定其最小值和最大值，再一一筛选。具体方法大家可以参考三年级下学期的内容。

但是这种方法在一些特殊的数阵图题目中显得非常不实用。当然，由于同学们做题时只需要找出一种可能的填法，所以上面说的这种方法在很多情况下也是可行的，只是繁琐些。

不过，如果我们可以找到一种好的方法快速的解决问题，何乐而不为呢？

**「详解」**如右图，首先，我们把注意力放在下面的和右面的圆圈中，可以得到：

10

2

5

4

7

8

A

B

C

D

E

A+B+2+5=B+C+7+8，则A-C=8。

因此要么A=9，C=1或者A=11，C=3（因为12和10已经有了）。

如果A=11，C=3，那么仿照以上的步骤，就可以知道D=E-10（为什么？大家自己思考），所以不可能。

因此A=9，C=1，那还剩下4个数字需要填：3，6，11，12。

由于10+D+A(9)=E+4+7，于是D+8=E。所以就有D=3而E=11。剩下的数就很简单了。

答案如下：

10

2

5

4

7

8

9

1

3

11

6

12

**「评议」**还是那句话，特殊而巧妙的方法是因题而异的，这需要经验和积累。也就是说，大家不能做完题就算了，而是需要牢牢记住这些好方法，久而久之才能融会贯通。

1. 将1、2、3、4、5、6、7、8、9分别填入图中的9个圆圈内，使图中每条直线上圆圈内所填数之和都相等，那么这个相等的和为\_\_\_\_\_\_\_；（图中有7条直线，请填出）

**「分析」**我们仔细看看上面这张图，就会发现有些圆圈处于三条直线上，而另一些圆圈处于两条直线上，还有一个圆圈只处于一条直线上。要想利用所谓“重数”的分析方法，有很大的困难。当然也不是说这种方法就失灵了，我们综合分析一下，就不难发现某些位置上的数字应该偏大，而另一些数字显然偏小。如果去猜一猜的话，也不难填出一种来。

那么我们就可以去考虑一下是否有更好或更直接的方法来做本题。我们发现有一个圆圈很特殊，从它出发，就很容易找到答案。

**A**

**「详解」**除去位置A处的数字，剩下的8个数字恰好组成三行，也就是说1+2+3+4+5+6+7+8+9-A=3×“每条直线上圆圈内所填数之和”。

因此，A一定是3的倍数，也就是说A=3，6或9，而相应的“每条直线上圆圈内所填数之和”就等于14，13或12。

但是，如果A=9的话，那么右下角的圆圈内只能填1或者2了，此时就要求左下角的数字至少为10，显然不可能。

如果A=6，则每条直线上圆圈内所填数之和等于13，而在下图中我们知道B=C+6（比较法），因此就要D+6+B=C+D+12=13，是不可能的。

**6**

**D**

**B**

**C**

所以 A=3，而相应的“每条直线上圆圈内所填数之和”就等于14，且有C+D=8。（为什么？请大家自己思考）

然后我们就可以找到一种填数的方法，使得每条直线上圆圈内所填数之和就等于14。答案如下图：

**3**

**2**

**9**

**5**

**6**

**1**

**8**

**4**

**7**

**「评议」**大家可以去思考一下，虽然每条直线上圆圈内所填数之和只可能等于14，但是除了上面给出的填法，是否还有其它的填数方式？如果有，请找出来；如果没有，说明理由。

3. 用1～9这九个数编排一个三阶幻方。



**解析：**我们先用a、b、c、d、e、f、g、h、i分别填入九个空格内以代表应填的数。看图（2）：

（1）通过审题，我们知道幻和是多少才好进行填数。同时可以看到图（2）中，e是一个中间数，也是关键数。因为它分别要与第二行、第二列以及两条对角线上的另外两个数进行求和运算，结果都等于幻和；其次是三阶幻方中四个角上的数：a、c、g、i它们各自都要参加一行，一列及一条对角线的求和运算。如果e以及四个角上的数被确定之后，其它的数字便可以根据幻和是多少填写出来了。

（2）求幻和：

幻和



（3）选择突破口，显然是e，看图2。

因为：

所以：



也就是：

又因为：

所以





也就是说，图1中的中心方格中应填5，请注意，这个数正好是1～9这九个数中正中间的数。

（4）四个角上的数，a、c、g、i的特点。

我们先从a开始：想：a是奇数还是偶数。如果a为奇数，因为，所以也是奇数。因为奇＋奇＝偶。又因为，所以d与g同是奇数或同是偶数。分两种情况：

<1>当d、g都是奇数时，因为，，其中e，i都是奇数，所以f、h也只能是奇数。这样在图1中应填的数有a、d、e、f、g、h、i这七个奇数，而1～9中九个数只有五个奇数，所以矛盾，说明d、g不可能为奇数。

<2>当d、g为偶数时，因为，，因为i为奇数，所以f、h、c只能是偶数，这样就有c、d、f、g、h五个偶数，而1～9这九个数中只有四个偶数，矛盾。说明d、g都是偶数也不行。

所以a不能是奇数，那么只能是偶数，于是由知i也是偶数。

用同样的方法可以得到c、g也只能是偶数。也就是说图1中四个角上的数都应填偶数。

（5）试验填数排出幻方。

因为是偶数，所以a的范围有2、4、6、8四个数，根据幻和等于15进行试验。

当时，或6，若，则有

，若，则有

，这样可填出两个幻方。

当时，请同学们自己练习填写。

用1～9这九个数编排的三阶幻方有八个：

**答案：**



说明：在上面图形中给出的用1～9这九个数字编排的八个三阶幻方中的任何一个，都可以对它上面的数字进行适当的对调与旋转。从而得到其它七个图形。

4. 请编出一个三阶幻方，使其幻和为24。



**分析：**根据题意，要使三阶幻方的幻和为24，所以中心数必为，那么与8在一条直线上的各个组的其余两个数的和为16。

因为：



**答案;**



5. 在下面图中的A、B、C、D处填上适当的数，使其成为一个三阶幻方。



**分析：**从第一行和对角线可得：







这样幻和

从第一行中可求出：



从第二行中可求出：



从第三行中可求出：



6. 在下面各图形的○里填上适当的数，使每条线上三个数的和都等于21。



**分析：**这道题只要我们求出一个顶点上的数，其它数就容易求出来了。我们先想右下角的数。

（1）

想：“13”左右两个数的填法，“11”上下两个数的填法。

当8右边的数和10下面的数出现同一个数时，就是右下角要填的数，即右下角要填6。

（2）填写左下角○内的数：，左下角为7。

（3）填写下面○内的数：，上面数应填5。

（4）左边线上三个数相加：，说明符合条件。

**答案：**



**C档**

1. 用1～9这九个数补全图1中的幻方，并求幻和。



**答案：**



2. 用3～11这九个数补全图2中的幻方，并求幻和。



**答案：**

3. 在图3的空格中填入不大于15且互不相同的自然数使每一横行、竖行和对角线上的三个数之和都等于30。





**答案：**

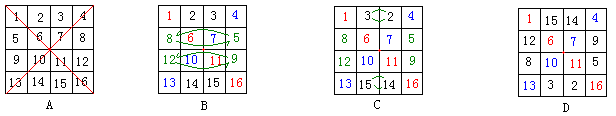
**4、用1～16这十六个数编排一个四阶幻方（四行四列）。**

**【解析**】用1至16编排一个四阶幻方，就是把1～16这十六个数填入四行四列的方格内，使每行、每列、两条对角线上的四个数的和都相等。

先计算这个相等的和是多少？也就是前面学过的幻和：（1＋2＋3＋…＋15＋16）÷4＝34。

再想办法将这十六个数排列成幻和是34的四阶幻方。

① 先把1～16按顺序填入4×4的方格中（如下图A）；我们把图A称为四阶自然方阵。



这时可以发现，两条对角线上的四个数的和都恰好是34，其它每行、每列上四个数的和都不是34，因此，这两条对角线上的八个数都不动，作为四阶幻方两条对角线上的数。

② 观察自然方阵（图A）中的第一列和第四列。

第一列上四个数的和是1＋5＋9＋13＝28，比34少6；第四列上四个数的和是4＋8＋12＋16＝40，比34多6。为了使第一列和第四列上四个数的和分别是34，只要把这两列中对角线以外的相应的数（即5和8，9与12）相互交换就可以了（图B）。

同样地，为使第二、三列上的四个数的和也是34，只要把这两列中对角线以外的相应的数（即2与3，14与15）相互交换就可以了（图C）。

③ 再观察上图C的第一、第四行。

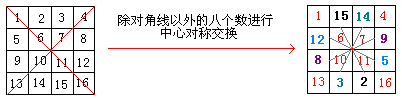
第一行上四个数的和是1＋3＋2＋4＝10，比34少24；第四行上四个数的和是13＋15＋14＋16＝58，比34多24。为了使第一行和第四行上四个数的和分别是34，只要把这两行中对角线以外的相应的数（即2和14，3与15）相互交换就可以了。

同样地，为使第二、三行上的四个数的和也是34，只要把这两行中对角线以外的相应的数（即8与12，5与9）相互交换就可以了。交换后的结果见图D，这就是一个四阶幻方。

这样编排太复杂了！能不能由四阶自然方阵直接得到四阶幻方？

对比图A与图D可以发现：只要把图A中的**2**与**15**，3与14，5与12，8与9互相交换，就可以直接得到图D（见下图）。

**答案：**



那么，2与15，3与14，5与12，8与9是什么关系呢？不难看出，它们的位置是“对称”的。例如2在从上往下、从左往右数的第一行第二列，而15在从下往上、从右往左数的第一行第二列。又如，9在从上往下、从左往右数的第三行第一列，而8在从下往上、从右往左数的第三行第一列。我们把这样的两个数叫“中心对称数”，也就是说只要把四阶自然方阵中对角线以外的数作中心对称交换就可以直接得到四阶幻方，把这种编排双偶数阶幻方的办法叫“**中心对称交换法**”。

由例1可以看到，用“中心对称交换法”编排四阶幻方的主要步骤归纳如下：

① 把1～16按顺序排成四阶自然方阵；

② 四阶自然方阵中对角线上的八个数不动，作为四阶幻方两条对角线上的数；

③ 把四阶自然方阵中对角线以外的数作中心对称交换。

运用“中心对称交换法”不仅可以编排四阶幻方，而且可以编排任意的双偶数阶幻方。

**5、用1～64这六十四个数编排一个八阶幻方（八行八列）。**

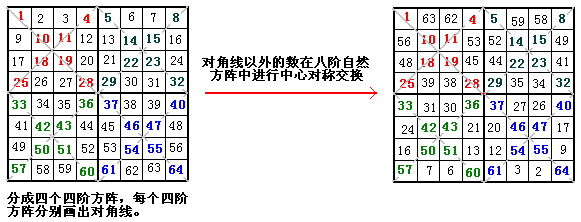
【分析与解答】编排步骤如下:

① 把1至64按顺序填入8×8的方格子中,排成八阶自然方阵；（见左下图）

② 把八阶自然方阵分成四个四阶自然方阵（左下图粗线条），每个四阶自然方阵分别画出对角线（图中有颜色的数字）；

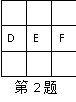
③ 每个四阶自然方阵中对角线的数字都不动，把对角线以外的数字在**八阶自然方阵中**进行中心对称交换。这样就得到一个八阶幻方（见右下图）。

**答案**





1、下图是一个三阶幻方，请说明幻和等于3倍的E 且D+F=2×E。



**「分析」**首先，我们思考要填出一个三阶幻方，什么量的求出是最重要的？立刻我们就知道，是“幻和”，即每行、每列、每条对角线三个数的和是最重要的量。它是多少呢？如果我们按照行（按照列也一样）把幻方中的九个数加起来，那么它们的总和就是3倍的“幻和”。

**「详解」**首先把题目中的空白格子标上不同的字母，以便表述。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

首先，只考虑包含E的四条直线，得到A+E+I=“幻和”，B+E+H=“幻和”， C+E+G=“幻和”， D+E+F=“幻和”。

然后，把这四个式子的左右两边分别相加，得到（A+B+C+D+E+F+G+H+I）+3×E=4倍的“幻和”, 而另一方面，如果我们只考虑幻方的三行，则有A+B+C=D+E+F=G+H+I=“幻和”，因此A+B+C+D+E+F+G+H+I=3倍的“幻和”。

所以，3×E=“幻和”，而“幻和”=D+E+F，于是D+F=2×E。

2、请完成下面的三阶幻方：

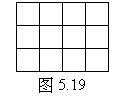


**「分析」**本题需要综合利用上面的性质以及比较法来解决，目的主要是求出“幻和”，一旦“幻和”求出来了，一切就都没问题了。

**「详解」**（1）根据性质，A=100×2-19=181，B=100×2-95=105；“幻和”=100×3=300。下面就只要根据幻方的概念填就可以了。答案如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 24 | 171 | 105 |
| 181 | 100 | 19 |
| 95 | 29 | 176 |

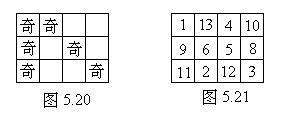
3、从1至13这十三个数中挑出十二个数，填到图3的小方格中，使每一横行四个数之和相等，使每一竖列三个数之和又相等。



**「分析」**据题意，所选的十二个数之和必须既能被 3整除，又能被 4整除，（三行四列）。所以，能被12整除。十三个数之和为91，91除以12，商7余7，因此，应去掉7。每列为（91—7）÷4=21

而1至13中，除7之外，共有六个奇数，它们的分布如图4所示。

三个奇数和为21的有两种：21=1＋9+11=3＋5+13。经检验，三个奇数为3、5、13的不合要求，故不难得出答案，如图5所示。



4、 把1，2，3，4，5，6，7，8，9这九个数填入九个方格中，使每行、每列、每条对角线上三个数的和相等。

**答案：**幻和的3倍正好等于这九个数的和，所以幻和为

 （1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9）÷3＝45÷3＝15

九个数在这八条线上反复出现构成幻和时，每个数用到的次数不全相同，最中心的那个数要用到四次（即出现在中行、中列、和两条对角线这四条线上），四角的四个数各用到三次，其余的四个数各用到两次。看来，用到四次的“中心数”地位重要，宜优先考虑。

设“中心数”为Χ，因为Χ出现在四条线上，而每条线上三个数之和等于15，所以  （1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9）＋（4－1）Χ＝15×4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

即   45＋3Χ＝60    所以     Χ＝5

接着用奇偶分析法寻找其余四个偶数的位置，它们分别在四个角，再确定其余四个奇数的位置，它们分别在中行、中列，进一步尝试，容易得到正确的结果。

 5、 把2，3，4，5，6，7，8，9，10这九个数填到九个方格中， 使每行、每列、以及对角线上的各数之和都相等。

**解析：**只有三行，三行用完了所给的9个数，所以每行三数之和为

    （2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＋10）÷3＝18

   假设符合要求的数都已经填好，那么三行、三列、两条对角线共8行上的三个数之和都等于18，我们看18能写成哪三个数之和：

  最大数是10：18＝10＋6＋2＝10＋5＋3

   最大数是9： 18＝9＋7＋2＝9＋6＋3＝9＋5＋

  最大数是8： 18＝8＋7＋3＝8＋6＋4

最大数是7： 18＝7＋6＋5     刚好写成8个算式。

首先确定正中间方格的数。第二横行、第二竖行、两个斜行都用到正中间方格的数，共用了四次。观察上述8个算式，只有6被用了4次，所以正中间方格中应填6。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9 | 2 | 7 |
| 4 | 6 | 8 |
| 5 | 10 | 3 |

然后确定四个角的数。四个角的数都用了三次，而上述8个算式中只有9、7、5、3被用了三次，所以9、7、5、3应填在四个角上。但还应兼顾两条对角线上三个数的和都为18。

最后确定其它方格中的数。如图。

6、下图中，每个字母代表一个数。已知每行、每列、每条对角线上的三个数和都相等，若。求与为多少？

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**分析：** 根据幻和相等：，这4个算式中都有中间数，所以有：。再代入即可。

7、下图中，7个字母，各代表7个数字，要使三阶幻方成立，“”所代表的数字是多少？

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | 18 |
|  | 12 |  |

**答案：** 根据幻方的概念：每一行、每一列以及每条对角线上3个自然数的和均相等。可以得到：，可求得：。

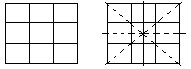


----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



1.将九个数填入左下图的九个空格中，使得任一行、任一列以及两条





**答案：**因为每行的三数之和都等于k，共有三行，所以九个数之和等于3k。如右上图所示，经过中心方格的有四条虚线，每条虚线上的三个数之和都等于k，四条虚线上的所有数之和等于4k，其中只有中心方格中的数是“重叠数”，九个数各被计算一次后，它又被重复计算了三次。所以有

　　九数之和+中心方格中的数×3=4k，

　　3k+中心方格中的数×3=4k，



　　注意：例4中对九个数及定数k都没有特殊要求。这个结论对求解3×3方格中的数阵问题很实用。

　　在3×3的方格中，如果要求填入九个互不相同的质数，要求任一行、任一列以及两条对角线上的三个数之和都相等，那么这样填好的图称为三阶质数幻方。

2.把1～9这九个数字填写在右图正方形的九个方格中，使得每一横行、每一竖列和每条对角线上的三个数之和都相等。



**答案：**我们首先要弄清每行、每列以及每条对角线上三个数字之和是几。我们可以这样去想：因为1～9这九个数字之和是45，正好是三个横行数字之和，所以每一横行的数字之和等于45÷3=15。也就是说，每一横行、每一竖列以及每条对角线上三个数字之和都等于15。

　　在1～9这九个数字中，三个不同的数相加等于15的有：

　　9＋5＋1，9＋4＋2，8＋6＋1，8＋5＋2，

　　8＋4＋3，7＋6＋2，7＋5＋3，6＋5＋4。

　　因此每行、每列以及每条对角线上的三个数字可以是其中任一个算式中的三个数字。

　　因为中心方格中的数既在一个横行中，又在一个竖列中，还在两对角线上，所以它应同时出现在上述的四个算式中，只有5符合条件，因此应将5填在中心方格中。同理，四个角上的数既在一个横行中，又在一个竖列中，还在一条对角线上，所以它应同时出现在上述的三个算式中，符合条件的有2，4，6，8，因此应将2，4，6，8填在四个角的方格中，同时应保证对角线两数的和相等。

3.用11，13，15，17，19，21，23，25，27编制成一个三阶幻方。

**答案：**给出的九个数形成一个等差数列，对照例1，1～9也是一个等差数列。不难发现：中间方格里的数字应填等差数列的第五个数，即应填19；填在四个角上方格中的数是位于偶数项的数，即13，17，21，25，而且对角两数的和相等，即13＋25=17＋21；余下各数就不难填写了（见图）。



　　与幻方相反的问题是反幻方。将九个数填入3×3（三行三列）的九个方格中，使得任一行、任一列以及两条对角线上的三个数之和互不相同，这样填好后的图称为三阶反幻方。

4.求任一列、任一行以及两条对角线上的三个数之和都等于267的三阶质数幻方。

**答案：**由例4知中间方格中的数为267÷3＝89。由于在两条对角线、中间一行及中间一列这四组数中，每组的三个数中都有89，所以每组的其余两数之和必为267-89＝178。两个质数之和为178的共有六组：

　　5+173＝11＋167

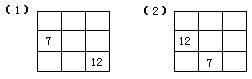
　　＝29＋149＝41＋137

　　＝47+131＝71+107。

　　经试验，可得右图所示的三阶质数幻方。



5.在下列各图空着的方格内填上合适的数，使每行、每列及每条对角线上的三数之和都等于27。



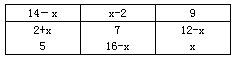
6. 求任一列、任一行以及两条对角线上的三个数之和都等于267的三阶质数幻方。　　**答案：**由例4知中间方格中的数为267÷3＝89。由于在两条对角线、中间一行及中间一列这四组数中，每组的三个数中都有89，所以每组的其余两数之和必为267-89＝178。两个质数之和为178的共有六组：  
  
　　5+173＝11＋167  
  
　　＝29＋149＝41＋137  
  
　　＝47+131＝71+107。  
  
　　经试验，可得右图所示的三阶质数幻方。



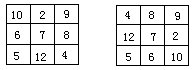
7.在右图的九个方格中填入不大于12且互不相同的九个自然数（其中已填好一个数），使得任一行、任一列及两条对角线上的三个数之和都等于21。



**答案：**由上一讲例4知中间方格中的数为7。再设右下角的数为x，然后根据任一行、任一列及每条对角线上的三个数之和都等于21，如下图所示填上各数（含x）。



因为九个数都不大于12，由16－x≤12知4≤x，由x+2≤12知x≤10，即4≤x≤10。考虑到5，7，9已填好，所以x只能取4，6，8或10。经验证，当x＝6或8时，九个数中均有两个数相同，不合题意；当x＝4或10时可得两个解（见下图）。这两个解实际上一样，只是方向不同而已。



8.在下页右上图的空格中填入七个自然数，使得每一行、每一列及每一条对角线上的三个数之和都等于90。



**答案：**由上一讲例4知，中心数为90÷3＝30；由本讲例2知，右上角的数为（23＋57）÷2＝40（见左下图）。其它数依次可填（见右下图）。



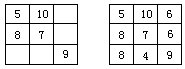
**Eg1**.将1，3，5，7，9，11，13，15，17填入3×3的方格内，使其构成一个幻方。

**Eg2.**用2，4，6，12，14，16，22，24，26九个偶数编制一个幻方

**Eg3**.在右图的每个空格中填入个自然数，使得每一行、每一列及每条对角线上的三个数之和都相等。



**答案：**由例2知，右下角的数为



（8＋10）÷2=9；由上一讲例4知，中心数为（5＋9）÷2=7（见左下图），且每行、每列、每条对角线上的三数之和都等于7×3=21。由此可得右下图的填法。

**Eg4.**在左下图的每个空格中填入一个数字，使得每行、每列及每条对角线上的三个数之和都相等。

