**第一讲 加乘原理**



**加法原理**：完成一件工作共有N类方法。在第一类方法中有m1种不同的方法，在第二类方法中有m2种不同的方法，……，在第N类方法中有mn种不同的方法，那么完成这件工作共有N＝m1＋m2＋m3＋…＋mn种不同方法。

运用加法原理计数，关键在于合理分类，不重不漏。要求每一类中的每一种方法都可以独立地完成此任务；两类不同办法中的具体方法，互不相同(即分类不重)；完成此任务的任何一种方法，都属于某一类(即分类不漏)。合理分类也是运用加法原理解决问题的难点，不同的问题，分类的标准往往不同，需要积累一定的解题经验。

**乘法原理**：完成一件工作共需N个步骤：完成第一个步骤有m1种方法，完成第二个步骤有m2种方法，…，完成第N个步骤有mn种方法，那么，完成这件工作共有m1×m2×…×mn种方法。

运用乘法原理计数，关键在于合理分步。完成这件工作的N个步骤，各个步骤之间是相互联系的，任何一步的一种方法都不能完成此工作，必须连续完成这N步才能完成此工作；各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此工作的方法也不同。

这两个基本原理是**排列和组合**的基础，教学时要先通过生活中浅显的实例，如购物问题、行程问题、搭配问题等，帮助孩子理解两个原理，再让孩子学习运用原理解决问题。

运用两个原理解决的都是比较复杂的计数问题，在解题时要细心、耐心、有条理地分析问题。计数时要注意区分是分类问题还是分步问题，正确运用两个原理。灵活机动地分层重复使用或综合运用两个原理，可以巧妙解决很多复杂的计数问题。小学阶段只学习两个原理的简单应用。



**一：两种原理的基础内容的记忆和计算的方法。**

**二：两种计数原理的区分和综合应用。**



**【题目】：1**

用1角、2角和5角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成1元钱，有多少种方法？

**【解析】：**

运用加法原理，把组成方法分成三大类：

①只取一种人民币组成1元，有3种方法：10张1角；5张2角；2张5角。

②取两种人民币组成1元，有5种方法：1张5角和5张1角；一张2角和8张1角；2张2角和6张1角；3张2角和4张1角；4张2角和2张1角。

③取三种人民币组成1元，有2种方法：1张5角、1张2角和3张1角的；1张5角、2张2角和1张1角的。

**【题目】：2**

各数位的数字之和是24的三位数共有多少个？

**【解析】：**

一个数各个数位上的数字，最大只能是9，24可分拆为：24=9+9+7； 24=9+8+7；24=8+8+8。运用加法原理，把组成的三位数分为三大类：

①由9、9、8三个数字可组成3个三位数：998、989、899；

②由9、8、7三个数字可组成6个三位数：987、978、897、879、798、789；

③由8、8、8三个数字可组成1个三位数：888。

所以组成三位数共有：3+6+1=10（个）。

所以共有组成方法：3+5+2=10（种）。

**【题目】：3**

有一批长度分别为1，2，3，4，5，6，7和8厘米的细木条若干，从中选取适当的3根木条作为三条边可以围成多少个不同的三角形？

**【解析】：**

围三角形的依据：三根木条能围成三角形，必须满足任意两边之和大于第三边。要满足这个条件，需要且只需要两条较短边的和大于最长边就可以了。

这道题的计数比较复杂，需要分层重复运用加法原理。

根据三角形三边长度情况，我们先把围成的三角形分为两大类：

**第一大类：围成三角形的三根木条，至少有两根木条等长（包括三根等长的）。**

由题目条件，围成的等腰三角形腰长可以为1、2、3、4、5、6、7、8厘米，根据三角形腰长，第一大类又可以分为8小类，三边长依次是：

①腰长为1的三角形1个：1、1、1。

②腰长为2的三角形3个：2、2、1；2、2、2；2、2、3。

③腰长为3的三角形5个：3、3、1；3、3、2；3、3、3；3、3、4；3、3、5。

④腰长为4的三角形7个：4、4、1；4、4、2；……4、4、7。

⑤腰长为5的三角形8个：5、5、1；5、5、2；……5、5、8。

同理，腰长为6、7、8厘米的三角形都是8个。

第一大类可围成的不同的三角形：1+3+5+7+8×4=48（个）。

**第二大类：围成三角形的三根木条，任意两根木条的长度都不同。**

根据最长边的长度，我们再把第二大类围成的三角形分为五小类（最长边不可能为是3厘米、2厘米、1厘米）：

①最长边为8厘米的三角形有9个，三边长分别为：8、7、6；8、7、5；8、7、4；8、7、3；8、7、2；8、6、5；8、6、4；8、6、3；8、5、4。

②最长边为7厘米的三角形有6个，三边长分别为：7、6、5；7、6、4；7、6、3；7、6、2；7、5、4；7、5、3。

③最长边为6厘米的三角形有4个，三边长分别为：6、5、4；6、5、3；6、5、2；6、4、3。

④最长边为5厘米的三角形有2个，三边长分别为：5、4、3；5、4、2。

⑤最长边为4厘米的三角形有1个，三边长为：4、3、2。

第二大类可围成的不同的三角形：9+6+4+2+1=22（个）。

**所以，这一题共可以围成不同的三角形：**48+22=70（个）。

**【题目】：4**

一把钥匙只能开一把锁，现在有10把钥匙和10把锁全部都搞乱了，最多要试验多少次才能全部配好锁和相应的钥匙？

**【解析】：**

要求“最多”多少次配好锁和钥匙，就要从最糟糕的情况开始考虑：第1把钥匙要配到锁，最多要试9次（如果9次配对失败，第10把锁就一定是这把钥匙，不用再试）；同理，第2把钥匙最多要试8次；……第9把锁最多试1次，最好一把锁不用试。

所以，最多试验次数为：9+8+7……+2+1=45（次）。

**【题目】：5**

某人到食堂去买饭菜，食堂里有4种荤菜，3种蔬菜，2种汤。他要各买一样，共有多少种不同的买法？

**【解析】：**

运用乘法原理，把买饭菜分为三步走：

第一步：选汤有2种方法。

第二步：选荤菜有4种方法。

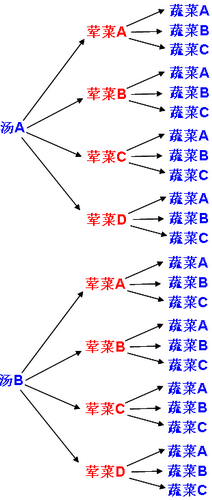
每种选汤方法对应的都有4种选荤菜的方法，汤和荤菜共有2个4种，即8种不同的搭配方法。

第三步：选蔬菜有3种方法。

荤菜和汤有8种不同的搭配方法，每种搭配方法，对应的都有3种选蔬菜的方法与其二次搭配，共有8个3种，即24种不同搭配方法。

如下图所示：

    所以，共有不同的买法：2×4×3=24（种）。



**【题目】：6**

用数字0，3，8，9能组成多少个数字不重复的三位数？

**【解析】：**

运用乘法原理，把组数过程分为三个步骤：

第一步：确定三位数百位上数字，有3种选法（最高位不能为0）。

第二步：确定十位上数字，有3种选法。

从上面四个数字中确定任意一个不为0的数字放在百位上，十位上都会剩下三个数字供选择。因此，对应百位上数字的每种选法，十位上数字都有3种不同的选择方法，两个数字共有3个3种，即9种不同的组成方法。

第三步：确定个位上数字，有2种选法。

从上面四个数字中去掉百位和十位上数字任意一种组成，个位上都会剩下2个不同的数字供选择。因此，对应百位和十位上数字的任意一种组成方法，个位上都有2种不同的选择方法，三个数字共有9个2种，即18中不同的组成方法。

所以，能组成的不重复的三位数的个数为:3×3×2=18(个)。



**A**

**1.**从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船。一天中火车有4班，汽车有3班，轮船有2班。问：一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同走法？

**答案:**一天中乘坐火车有4种走法，乘坐汽车有3种走法，乘坐轮船有2种走法，所以一天中从甲地到乙地共有：4＋3＋2=9（种）不同走法。

**2.**旗杆上最多可以挂两面信号旗，现有红色、蓝色和黄色的信号旗各一面，如果用挂信号旗表示信号，最多能表示出多少种不同的信号？

**答案:**根据挂信号旗的面数可以将信号分为两类。第一类是只挂一面信号旗，有红、黄、蓝3种；第二类是挂两面信号旗，有红黄、红蓝、黄蓝、黄红、蓝红、蓝黄6种。所以一共可以表示出不同的信号

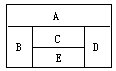
　　3＋6=9（种）。

**3.**两次掷一枚骰子，两次出现的数字之和为偶数的情况有多少种？

**答案:**两次的数字之和是偶数可以分为两类，即两数都是奇数，或者两数都是偶数。

　　因为骰子上有三个奇数，所以两数都是奇数的有3×3=9（种）情况；同理，两数都是偶数的也有9种情况。根据加法原理，两次出现的数字之和为偶数的情况有9＋9＝18（种）。

**4.**用五种颜色给右图的五个区域染色，每个区域染一种颜色，相邻的区域染不同的颜色。问：共有多少种不同的染色方法？



**答案:**本题与上一讲的例4表面上十分相似，但解法上却不相同。因为上一讲例4中，区域A与其它区域都相邻，所以区域A与其它区域的颜色都不相同。本例中没有一个区域与其它所有区域都相邻，如果从区域A开始讨论，那么就要分区域A与区域E的颜色相同与不同两种情况。

当区域A与区域E颜色相同时，A有5种颜色可选；B有4种颜色可选；C有3种颜色可选；D也有3种颜色可选。根据乘法原理，此时不同的染色方法有

　　5×4×3×3＝180（种）。

　　当区域A与区域E颜色不同时，A有5种颜色可选；E有4种颜色可选；B有3种颜色可选；C有2种颜色可选；D有2种颜色可选。根据乘法原理，此时不同的染色方法有

　　5×4×3×2×2＝240（种）。

　　再根据加法原理，不同的染色方法共有

　　180＋240=420（种）。

**5.**用1，2，3，4这四种数码组成五位数，数字可以重复，至少有连续三位是1的五位数有多少个？

**答案:**将至少有连续三位数是1的五位数分成三类：连续五位是1、恰有连续四位是1、恰有连续三位是1。

　　连续五位是1，只有11111一种；



中任一个，所以有3＋3＝6（种）；



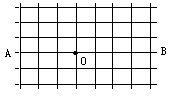
　　3×4＋4×3＋3×3＝33（种）。

　　由加法原理，这样的五位数共有

　　1＋6＋33＝40（种）。

　　在例5中，我们先将这种五位数分为三类，以后在某些类中又分了若干种情况，其中使用的都是加法原理。

**6.**右图中每个小方格的边长都是1。一只小虫从直线AB上的O点出发，沿着横线与竖线爬行，可上可下，可左可右，但最后仍要回到AB上（不一定回到O点）。如果小虫爬行的总长是3，那么小虫有多少条不同的爬行路线？



**答案:**如果小虫爬行的总长是2，那么小虫从AB上出发，回到AB上，其不同路线有6条（见左下图）；小虫从与AB相邻的直线上出发，回到AB上，其不同路线有4条（见右下图）。



　　实际上，小虫爬行的总长是3。小虫爬行的第一步有四种情况：

　　向左，此时小虫还在AB上，由上面的分析，后两步有6条路线；

　　同理，向右也有6条路线；

　　向上，此时小虫在与AB相邻的直线上，由上面的分析，后两步有4条路线；

　　同理，向下也有4条路线。

　　根据加法原理，共有不同的爬行路线

　　6＋6＋4＋4＝20（条）

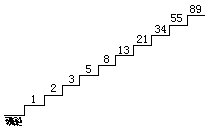
**B**

**1.**小明要登上10级台阶，他每一步只能登1级或2级台阶，他登上10级台阶共有多少种不同的登法？

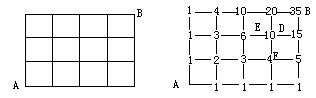
**答案:**登上第1级台阶只有1种登法。登上第2级台阶可由第1级台阶上去，或者从平地跨2级上去，故有2种登法。登上第3级台阶可从第1级台阶跨2级上去，或者从第2级台阶上去，所以登上第3级台阶的方法数是登上第1级台阶的方法数与登上第2级台阶的方法数之和，共有1+2＝3（种）……一般地，登上第n级台阶，或者从第（n—1）级台阶跨一级上去，或者从第（n—2）级台阶跨两级上去。根据加法原理，如果登上第（n—1）级和第（n—2）级分别有a种和b种方法，则登上第n级有（a＋b）种方法。因此只要知道登上第1级和第2级台阶各有几种方法，就可以依次推算出登上以后各级的方法数。由登上第1级有1种方法，登上第2级有2种方法，可得出下面一串数：

　　1，2，3，5，8，13，21，34，55，89。

　　其中从第三个数起，每个数都是它前面两个数之和。登上第10级台阶的方法数对应这串数的第10个，即89。也可以在图上直接写出计算得出的登上各级台阶的方法数（见下图）。

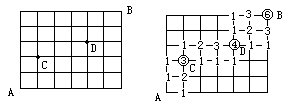


**2.**在左下图中，从A点沿实线走最短路径到B点，共有多少条不同路线？



**答案:**题目要求从左下向右上走，所以走到任一点，例如右上图中的D点，不是经过左边的E点，就是经过下边的F点。如果到E点有a种走法（此处a＝6），到F点有b种走法（此处b＝4），根据加法原理，到D点就有（a＋b）种走法（此处为6＋4=10）。我们可以从左下角A点开始，按加法原理，依次向上、向右填上到各点的走法数（见右上图），最后得到共有35条不同路线。

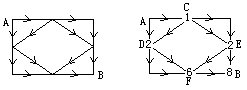
**3.**左下图是某街区的道路图。从A点沿最短路线到B点，其中经过C点和D点的不同路线共有多少条？



**答案:**本题可以同例2一样从A标到B，也可以将从A到B分为三段，先是从A到C，再从C到D，最后从D到B。如右上图所示，从A到C有3种走法，从C到D有4种走法，从D到B有6种走法。因为从A到B是分几步走的，所以应该用乘法原理，不同的路线共有

　　3×4×6＝72（条）。

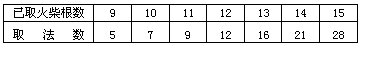
**4.**沿左下图中箭头所指的方向从A到B共有多少种不同的走法？



**答案:**如右上图所示，先标出到C点的走法数，再标出到D点和E点的走法数，然后标出到F点的走法数，最后标出到B点的走法数。共有8种不同的走法。

**5.**有15根火柴，如果规定每次取2根或3根，那么取完这堆火柴共有多少种不同取法？

**答案:**为了便于理解，可以将本题转变为“上15级台阶，每次上2级或3级，共有多少种上法？”所以本题的解题方法与例1类似（见下表）。



　　注意，因为每次取2或3根，所以取1根的方法数是0，取2根和取3根的方法数都是1。取4根的方法数是取1根与取2根的方法数之和，即0＋1＝1。依此类推，取n根火柴的方法数是取（n-3）根与取（n-2）根的方法数之和。所以，这串数（取法数）中，从第4个数起，每个数都是它前面第3个数与前面第2个数之和。取完15根火柴共有28种不同取法。

**C**

1.小明要登15级台阶，每步登1级或2级台阶，共有多少种不同登法？

**答案:**　987种。

2.小明要登20级台阶，每步登2级或3级台阶，共有多少种不同登法？

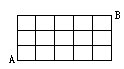
**答案:**　114种

3.有一堆火柴共10根，每次取走1～3根，把这堆火柴全部取完有多少种不同取法，

**答案:**274种。提示：取走1根有1种方法，取走2根有2种方法，取走3根有4种方法。将1，2，4作为数列的前三项，从第4项起每项都是它前三项的和，得到

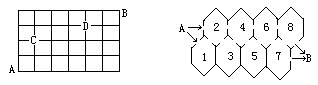
　　1，2，4，7，13，24，44，81，149，274。

　4.在下图中，从A点沿最短路径到B点，共有多少条不同的路线？

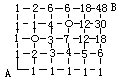


**答案:**56条。

　　5.左下图是某街区的道路图，C点和D点正在修路不能通过，那么从A点到B点的最短路线有多少条？



**答案:**48条（见下图）。



6.右上图是八间房子的示意图，相邻两间房子都有门相通。从A点穿过房间到达B处，如果只能从小号码房间走向大号码房间，那么共有多少种不同的走法？

**答案:**55种。



1、如果两个四位数的差等于8921，那么就说这两个四位数组成一个数对，问这样的数对共有多少个？

**答案:**从两个极端来考虑这个问题：最大为9999-1078=8921，最小为9921-1000=8921，所以共有9999-9921+1=79个，或1078-1000+1=79个

2、一本书从第1页开始编排页码，共用数字2355个，那么这本书共有多少页？

**答案:**按数位分类：一位数：1～9共用数字1\*9=9个；二位数：10～99共用数字2\*90=180个；

　　三位数：100～999共用数字3\*900=2700个，所以所求页数不超过999页，三位数共有：2355-9-180=2166，2166÷3=722个，所以本书有722+99=821页。

　　3、上、下两册书的页码共有687个数字，且上册比下册多5页，问上册有多少页？

**答案:**一位数有9个数字，二位数有180个数字，所以上、下均过三位数，利用和差问题解决：和为687，差为3\*5=15，大数为：（687+15）÷2=351个（351-189）÷3=54，54+99=153页。

　　4、从1、2、3、4、5、6、7、8、9、10这10个数中，任取5个数相加的和与其余5个数相加的和相乘，能得到多少个不同的乘积。

**答案:**从整体考虑分两组和不变：1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55从极端考虑分成最小和最大的两组为（1+2+3+4+5）+（6+7+8+9+10）=15+40=55最接近的两组为27+28所以共有27-15+1=13个不同的积。

　　另从15到27的任意一数是可以组合的。

　　5、将所有自然数，自1开始依次写下去得到：12345678910111213……，试确定第206788个位置上出现的数字。

**答案:**与前面的题目相似，同一个知识点：一位数9个位置，二位数180个位置，三位数2700个位置，四位数36000个位置，还剩：206788-9-180-2700-36000=167899，167899÷5=33579……4所以答案为33579+100=33679的第4个数字7.

　　6、用1分、2分、5分的硬币凑成1元，共有多少种不同的凑法？

**答案:**分类再相加：只有一种硬币的组合有3种方法；1分和2分的组合：其中2分的从1枚到49枚均可，有49种方法；1分和5分的组合：其中5分的从1枚到19枚均可，有19种方法；2分和5分的组合：其中5分的有2、4、6、……、18共9种方法；1、2、5分的组合：因为5=1+2\*2，10=2\*5，15=1+2\*7，20=2\*10，……，95=1+2\*47，共有2+4+7+9+12+14+17+19+22+24+27+29+32+34+37+39+42+44+47=461种方法，共有3+49+19+9+461=541种方法。



1.南京去上海可以乘火车、乘飞机、乘汽车和乘轮船。如果每天有20班火车、6班飞机、8班汽车和4班轮船，那么共有多少种不同的走法？

**答案:**38种。

2.光明小学四、五、六年级共订300份报纸，每个年级至少订99份报纸。问：共有多少种不同的订法？

**答案:**10种。提示：没有年级订99份时，只有三个年级各订100份一种订法；只有一个年级订99份时，另外两个年级分别订100份和101份，有6种订法；有两个年级订99份时，另外一个年级订102份，有3种订法。

3.将10颗相同的珠子分成三份，共有多少种不同的分法？

**答案:**8种。

4.在所有的两位数中，两位数码之和是偶数的共有多少个？

**答案:**45个。提示：两个数码都是奇数的有5×5（个），两个数码都是偶数的有4×5（个）。

　　5.用五种颜色给右图的五个区域染色，每个区域染一种颜色，相邻的区域染不同的颜色。问：共有多少种不同的染色方法？



**答案:**420种。



　　解：如右图所示，按A，B，C，D，E顺序染色。若B，D颜色相同，则有

　　5×4×3×1×3=180（种）；

　　若B，D颜色不同，则有

　　5×4×3×2×2=240（种）。

　　共有不同的染色方法180+240=420（种）。

6.用1，2，3这三种数码组成四位数，在可能组成的四位数中，至少有连续两位是2的有多少个？

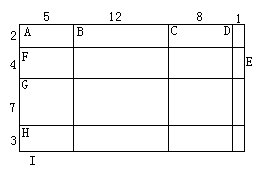
**答案:**21个。提示：与例5类似，连续四位都是2的只有1种，恰有连续三位是2的有4种，恰有连续两位是2的有16种。

　　7.下图中每个小方格的边长都是1。有一只小虫从O点出发，沿图中格线爬行，如果它爬行的总长度是3，那么它最终停在直线AB上的不同爬行路线有多少条？



**答案:**10条。提示：第一步向下有5条，第一步向上有1条，第一步向左或向右各有2条。

8.在下面的图中（单位：厘米）



　　求：（1）一共有几个长方形？

（2）所有这些长方形面积的和是多少？

**解**（1）AE这条线段上有多少条线段就是长有多少种取法，很明显得出长有10种取法；同理，宽也有10种取法。

　　一共有（10×10=）100（个）长方形。

**解**（2）长的长度有10种：5、12、8、1、17、20、9、25、21、26，宽的长度也有10种：2、4、7、3、6、11、10、13、14、16。所有这些长方形的面积和=（5+12+8+1+17+20+9+25+21+26）×（2+4+7+3+6+11+10+13+14+16）=144×86=12384（平方厘米）