**第十三讲 质数和合数**



**1、自然数按因数的个数来分：质数、合数、1、0四类.**

（1）质数（或素数）：只有1和它本身两个因数。

（2）合数：除了1和它本身还有别的因数（至少有三个因数：1、它本身、别的因数）。

（3）1： 只有1个因数。“1”既不是质数，也不是合数。

注： ① 最小的质数是2，最小的合数是4，连续的两个质数是2、3。

② 每个合数都可以由几个质数相乘得到，质数相乘一定得合数。

③ 20以内的质数：有8个（2、3、5、7、11、13、17、19）

④ 100以内的质数有25个：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、

43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97

**2、100以内找质数、合数的技巧：**

看是否是2、3、5、7、11、13…的倍数，是的就是合数，不是的就是质数。

关系： 奇数×奇数=奇数 质数×质数=合数

**3、常见最大、最小**

A的最小因数是：1； 最小的奇数是：1；

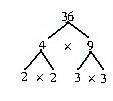
A的最大因数是：本身； 最小的偶数是：0；

A的最小倍数是：本身； 最小的质数是：2；

最小的自然数是：0； 最小的合数是：4；

**4、分解质因数：**把一个合数分解成多个质数相乘的形式。树状图

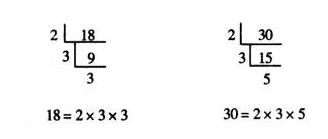
例：



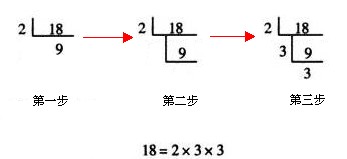
分析：先把36写成两个因数相乘的形式，如果两个因数都是质数就不再进行分解了；如果两个因数中海油合数，那我们继续分解，一直分解到全部因数都是质数为止。把36分解质因数是：36=2×2×3×3

**5、用短除法分解质因数 （一个合数写成几个质数相乘的形式）。**

例：



分析：看上面两个例子，分别是用短除法对18,30分解质因数，左边的数字表示“商”，竖折下面的表示余数，要注意步骤。具体步骤是：



**6、互质数：公因数只有1的两个数，叫做互质数。**

两个质数的互质数：5和7

两个合数的互质数：8和9

一质一合的互质数：7和8

**7、两数互质的特殊情况：**

⑴1和任何自然数互质；⑵相邻两个自然数互质； ⑶两个质数一定互质；

⑷2和所有奇数互质； ⑸质数与比它小的合数互质；



**教学重点：**质数和合数的概念。

**教学难点：**正确判断一个常见数是质数还是合数。



1.两个自然数的和与差的积是41，那么这两个自然数的积是\_\_\_\_\_.

**答案**：420

**解析**：首先注意到41是质数,两个自然数的和与差的积是41,可见它们的差是1,这是两个连续的自然数,大数是21,小数是20,所以这两个自然数的积是2021=420.



2. 在下式样□中分别填入三个质数,使等式成立.

□+□+□=50

**答案**：2、5、43

**解析**：接近50的质数有43,再将7分拆成质数2与质数5的和.即

2+5+43=50

另外,还有

2+19+29=50

2+11+37=50

**[注]**填法不是唯一的.如也可以写成

41+2+7=50

1. 三个连续自然数的积是1716,这三个自然数是\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_.

**答案**：11,12,13

**解析**：将1716分解质因数得

1716=2231113



=11(223)13

由此可以看出这三个数是11,12,13.

4. 找出1992所有的不同质因数,它们的和是\_\_\_\_\_.

**答案**：88

**解析**：先把1992分解质因数,然后把不同质数相加,求出它们的和.

1992=222383

所以1992所有不同的质因数有:2,3,83.它们的和是

2+3+83=88.

1. 把7、14、20、21、28、30分成两组，每三个数相乘，使两组数的乘积相等.

**解析**：先把14,20,21,28,30分解质因数,看这六个数中共有哪几个质因数,再分摊在两组中,使两组数乘积相等.

14=72 20=225

21=37 28=227

30=235 7

从上面五个数分解质因数来看,连7在内共有质因数四个7,六个2,二个3,二个5,因此每组数中一定要含三个2,一个3,一个5,二个7.

六个数可分成如下两组(分法是唯一的):

第一组: 7、28、和30

第二组：14、21和20

且72830=142120=5880满足要求.

**[注]**解答此题的关键是审题,抓住题目中的关键性词语：“使两组数的乘积相等”.实质上是要求两组里所含质因数相同,相同的质因数出现的次数也相同.

先把14,20,21,28,30分解质因数,看这六个数中共有哪几个质因数,再分摊在两组中,使两组数乘积相等.

14=72 20=225



21=37 28=227



30=235 7



从上面五个数分解质因数来看,连7在内共有质因数四个7,六个2,二个3,二个5,因此每组数中一定要含三个2,一个3,一个5,二个7.

六个数可分成如下两组(分法是唯一的):

第一组: 7、28、和30

第二组：14、21和20

且72830=142120=5880满足要求.



**[注]**解答此题的关键是审题,抓住题目中的关键性词语：“使两组数的乘积相等”.实质上是要求两组里所含质因数相同,相同的质因数出现的次数也相同.

6. 学生1430人参加团体操,分成人数相等的若干队,每队人数在100至200之间,问哪几种分法?

**解析**：把1430分解质因数得

1430=251113

根据题目的要求,应在2、5、11及13中选用若干个数，使它们的乘积在100到200之间，于是得三种答案：

（1）2511=110；

（2）2513=130；

（3）1113=143.

所以,有三种分法:一种是分为13队,每队110人；二是分为11队，每队130人；三是分为10队，每队143人.



**A**

1. 在1~100里最小的质数与最大的质数的和是\_\_\_\_\_.

**答案：** 99

**解析：**100,98是偶数,99是3倍数,从而知97是1~100中最大的质数,又最小的质数是2,所以最小的质数与最大的质数的和是99.

1. 小明写了四个小于10的自然数,它们的积是360.已知这四个数中只有一个是合数.这四个数是\_\_\_\_、\_\_\_\_、\_\_\_\_和\_\_\_\_.

**答案：**3,3,5,8

**解析：**根据这四个数中只有一个是合数,可知其他三个数是质数,将360分解质因数得:360=222533



所以,这四个数是3,3,5和8.

1. 把232323的全部质因数的和表示为,那么*ABAB*=\_\_\_\_\_.



**答案：**1992

**解析：**依题意,将232323分解质因数得

232323=2310101



=23371337



从而,全部不同质因数之和

=23+3+7+13+37=83



所以,*A**B*=8383=1992.

1. 有三个学生,他们的年龄一个比一个大3岁,他们三个人年龄数的乘积是1620,这三个学生年龄的和是\_\_\_\_\_.

**答案：**36岁

**解析：**根据三个学生的年龄乘积是1620的条件，先把1620分解质因数，然后再根据他们的年龄一个比一个大3岁的条件进行组合.

1620=2233335

=91215

所以,他们年龄的和是9+12+15=36(岁)

5. 两个数的和是107,它们的乘积是1992,这两个数分别是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_.

**答案：**83,24

**解析：**先把1992分解质因数,再根据两个数的和是107进行组合

1992=222383

=2483

24+83=107

所以,这两个数分别是83和24.

**B**

6.如果两个数之和是64,两数的积可以整除4875,那么这两数之差是\_\_\_\_\_.

**答案：**14

**解析：**根据两数之积能整除4875,把4875分解质因数,再根据两数之和为64进行组合.

4875=355513



=(313)(55)5



=(3925)5



由此推得这两数为39和25.它们的差是39-25=14.

1. 某一个数,与它自己相加、相减、相乘、相除，得到的和、差、积、商之和为256.这个数是\_\_\_\_\_.

**答案：**15

**解析：**解法一

因为相同两数相加之和为原数的2倍,相减之差为零,相乘之积为原数乘以原数,相除之商为1.所以原数的2倍加上原数乘以原数应是256-1=255.把255分解质因数得:

255=3517



=35(15+2)



=152+1515



所以,这个数是15.

**解法二**

依题意,原数的2倍+0+原数原数+1=256,即



原数的2倍+原数原数=256-1



原数的2倍+原数原数=255



把255分解质因数得

255=3517



=15(15+2)

=152+1515

所以,这个数是15.

1. 有10个数:21、22、34、39、44、45、65、76、133和153.把它们编成两组,每组5个数,要求这组5个数的乘积等于那组5个数的乘积.第一组数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；第二组数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**答案：**21、22、65、76、153；34、39、44、45、133.

**解析：**先把10个数分别分解质因数,然后根据两组中所包含质因数必须相等把这10个数分成两组:

21=37 22=211

34=217 39=313

44=2211 45=335

65=513 76=2219

133=719 153=3317

由此可见,这10个数中质因数共有6个2,6个3,2个5,2个7,2个11,2个13,2个17,2个19.所以,每组数中应包含3个2,3个3,5、7、11、13、17和19各一个.于是,可以这样分组:

第一组数是:21、22、65、76、153；

第二组数是:34、39、44、45、133.

[注]若将分为两组拓广分为三组,则得到一个类似的问题(1990年宁波市江北区小学五年级数学竞赛试题):

把20,26,33,35,39,42,44,55,91等九个数分成三组,使每组的数的乘积相等.

答案是如下分法即可:

第一组：20，33，91；

第二组：44，35，39；

第三组：26，42，55.

1. 有\_\_\_\_\_个两位数,在它的十位数字与个位数字之间写一个零,得到的三位数能被原两位数整除.

**答案：**12

**解析：**设这样的两位数的十位数字为*A*，个位数字为*B*，由题意依据数的组成知识，可知100*A*+*B*能被10*A*+*B*整除.

因为100*A*+*B*=90*A*+(10*A*+*B*),由数的整除性质可知90*A*能被10*A*+*B*整除.这样只要把90*A*分解组合,就可以推出符合条件的两位数.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | 1 | *2* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 90*A* | 109  156  185 | 209 | 309 | 409  458 | 509 | 609 | 709 | 809 | 909 |
|  | 10,15  18 | 20 | 30 | 40,45 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |

90*A*=2325*A*

所以,符合条件的两位数共12个.

10. 主人对客人说：“院子里有三个小孩，他们的年龄之积等于72，年龄之和恰好是我家的楼号，楼号你是知道的，你能求出这些孩子的年龄吗？”客人想了一下说：“我还不能确定答案。”他站起来，走到窗前，看了看楼下的孩子说：“有两个很小的孩子，我知道他们的年龄了。”主人家的楼号是\_\_\_\_\_ ,孩子的年龄是\_\_\_\_\_.

**答案：**14；3岁，3岁，8岁

**解析：**因为三个孩子年龄的积是72，所以，我们把72分解为三个因数（不一定是质因数）的积，因为小孩的年龄一般是指不超过15岁，所以所有不同的乘积式是

72=1612=189

=2312=249

=266=338

=346

三个因数的和分别为：19、18、17、15、14、14、13.其中只有两个和是相等的,都等于14.14就是主人家的楼号.如果楼号不是14,客人马上可以作出判断.反之客人无法作出判断,说明楼号正是14.亦即三个孩子年龄的和为14.此时三个孩子的年龄有两种可能:2岁、6岁、6岁；或3岁、3岁、8岁.当他看到有两个孩子很小时,就可以断定这三个孩子的年龄分别是3岁、3岁、8岁.主人家的楼号是14号.

**C**

1. 甲、乙、丙三位同学讨论关于两个质数之和的问题。甲说：“两个质数之和一定是质数”.乙说：“两个质数之和一定不是质数”.丙说：“两个质数之和不一定是质数”.他们当中,谁说得对?

**解析：**因为两个质数之和可能是质数如2+3=5,也可能是合数如3+5=8,因此甲和乙的说法是错误的,只有丙说得对.

12. 下面有3张卡片 3 2 1 ，从中抽出一张、二张、三张，按任意次序排起来，得到不同的一位数、两位数、三位数.  把所得数中的质数写出来.

**解析：**从三张卡片中任抽一张,有三种可能,即一位数有三个,分别为1、2、3，其中只有2、3是质数.

从三张卡片中任抽二张,组成的两位数共六个.但个位数字是2的两位数和个位与十位上数字之和是3的倍数的两位数,都不是质数.所以,两位数的质数只有13,23,31.

因为1+2+3=6,6能被3整除,所以由1、2、3按任意次序排起来所得的三位数，都不是质数.

故满足要求的质数有2、3、13、23、31这五个.

**[注]**这里采用边列举、边排除的策略求解.在抽二张卡片时,也可将得到六个两位数全部列举出来:12,13,21,23,31,32.再将三个合数12,21,32排除即可.

1. 在100以内与77互质的所有奇数之和是多少?

**解析：**100以内所有奇数之和是

1+3+5+…+99=2500，

从中减去100以内奇数中7的倍数与11的倍数之和

7(1+3+…+13)+11(1+3+…+9)

=618，

最后再加上一个711=77（因为上面减去了两次77），所以最终答数为

2500-618+77=1959.

**[注]**上面解题过程中100以内奇数里减去两个不同质数7与11的倍数,再加上一个公倍数711,这里限定在100以内,如果不是100以内,而是1000以内或更大的数时,减去的倍数就更多些而返回加上的公倍数有711的1倍,3倍,…也更多些，这实质上是“包含与排除”的思路.

14. 在射箭运动中,每射一箭得到的环数或者是“0”（脱靶），或者是不超过10的自然数.甲、乙两名运动员各射了5箭，每人5箭得到环数的积都是1764，但是甲的总环数比乙少4环.求甲、乙的总环数.

**解析：**依题意知,每射一箭的环数,只能是下列11个数中的一个

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

而甲、乙5箭总环数的积17640,这说明在甲、乙5箭得到的环数里没有0和10.

而1764=1223377是由5箭的环数乘出来的，于是推知每人有两箭中的环数都是7，从而可知另外3箭的环数是5个数

1，2，2，3，3

经过适当的分组之后相乘而得到的,可能的情形有5种：

（1）1，4，9；

（2）1，6，6；

（3）2，2，9；

（4）2，3，6；

（5）3，3，4．

因此，两人5箭的环数有5种可能：

* + - * 1. 和是28；
        2. 和是27；
        3. 和是27；
        4. 和是25；
        5. 和是24。

∵甲、乙的总环数相差4,甲的总环数少.

∴甲的总环数是24,乙的总环数是28.

15. 四只同样的瓶子内分别装有一定数量的油,每瓶和其他各瓶分别合称一次,记录千克数如下:8、9、10、11、12、13.已知四只空瓶的重量之和以及油的重量之和均为质数,求最重的两瓶内有多少油?

**解析：**由于每只瓶都称了三次,因此记录数之和是4瓶油(连瓶)重量之和的3倍,即4瓶油(加瓶)共重

(8+9+10+11+12+13)3=21(千克)



而油重之和及瓶重之和均为质数,所以它们必为一奇一偶,而质数中是偶数的质数只有2,故有

(1)油重之和为19千克,瓶重之和为2千克,每只瓶重千克,最重的两瓶内的油为13-2=12(千克).



(2)油重之和为2千克,瓶重之和为19千克,每只瓶重千克,最重的两瓶内的油为13-2=(千克),这与油重之和为2千克矛盾,不合要求,删去.



1. 在一位的自然数中，既是奇数又是合数的有\_\_\_\_\_；既不是合数又不是质数的有\_\_\_\_\_；既是偶数又是质数的有\_\_\_\_\_.

**答案：** 9，1，2

**解析：** 在一位自然数中,奇数有:1,3,5,7,9,其中仅有9为合数,故第一个空填9.

在一位自然数中,质数有2、3、5、7，合数有4、6、8、9，所以既不是合数又不是质数的为1.

又在一位自然数中,偶数有2、4、6、8，所以既是偶数又是质数的数为2.

2. 最小的质数与最接近100的质数的乘积是\_\_\_\_\_.

**答案：** 202

**解析：** 最小的质数是2,最接近100的质数是101,它们的乘积是2101=202.



3. 如果自然数有四个不同的质因数, 那么这样的自然数中最小的是\_\_\_\_\_.

**答案：**210

**解析：**最小的四个质数是2,3,5,7,所以有四个不同质因数的最小自然数是

2357=210



4. 9216可写成两个自然数的积，这两个自然数的和最小可以达到\_\_\_\_\_.

**答案：**192

**解析：**先把9216分解质因数,然后再用“试验法”解答

9216=22…233



10个

=9696



欲使这两个自然数的和最小,可使两数相等,所以这两个质因数的和最小为96+96=192.

5. 从一块正方形的木板上锯下宽为3分米的一个木条以后,剩下的面积是108平方分米.木条的面积是\_\_\_\_\_平方分米.

**答案：**36

**解析：**如下图所示,要求木条的面积,必须知道正方形木板的边长.把108分解质因数.

|  |  |
| --- | --- |
| 108(*cm*2)  平方分米 |  |

3分米

108=22333



=129



由此可见,9加3正好等于12,所以正方形木板边长是12分米.所以,木条面积是

123=36(平方分米)



一、填空

　　1．最小的质数是（　　　　），最小的合数是（　　　　），最小的奇数是（　　　　）。

**答案：**2，4，1。

2．20以内的质数有（　　　　）。

**答案：**2、3、5、7、11、13。

　二、判断

3．48的全部因数是2、3、4、6、8、12、16、24和48，共有9个，所以是合数。(　　　)

**答案：**错误

4．任何一个自然数最少有两个因数。(　　)

**答案：**错误

5．一个数如果能被11整除，则这个数一定合数。(　　)

**答案：**错误

　　6．一个自然数越大，它的因数个数就越多。(　　　　)

**答案：**错误

　 三、解析题

7. 今有10个质数:17,23,31,41,53,67,79,83,101,103.如果将它们分成两组,每组五个数,并且每组的五个数之和相等,那么把含有101的这组数从小到大排列,第二个数应是\_\_\_\_\_.

**答案：**31

**解析：**这10个质数之和是598,分成两组后,每组五个数之和是5982=299.



在有79这组数中,其他四个质数之和是299-79=220,个位数是0,因此这四个质数的个位数可能有三种情形:

(1)三个1和一个7；

(2)二个3和二个7；

(3)三个3和一个1.

31+41+101=173,220-173=47,可这十个数中没有47,情形(1)被否定.

17+67=84,220-84=136,个位数为3有23,53,83,只有53+83=136,因此从情形(2)得到一种分组:17,53,67,79,83和23,31,41,101,103.

所以,含有101这组数中,从小到大排列第二个数是31.

**[注]**从题目本身的要求来说,只要找出一种分组就可以了,但从情形(3)还可以得出另一种分组.23+53+83+103=262,262-220=42, 我们能否从53,83,103中找出一个数,用比它少42的数来代替呢?

53-42=11,83-42=41,103-42=61.这十个数中没有11和61,只有41.又得到另一种分组:

23,41,53,79,103和17,31,67,83,101.

由此可见,不论哪一种分组,含101这组数中,从小到大排列,第二个数都是31.

8．2，3，5，7，11，…都是质数，也就是说每个数只以1和它本身为约数.已知一个长方形的长和宽都是质数个单位,并且周长是36个单位.问这个长方形的面积至多是多少个平方单位?

**答案：** 77

**解析：** 由于长+宽是 362=18



将18表示为两个质数和 18=5+13=7+11

所以长方形的面积是 513=65或711=77



故长方形的面积至多是77平方单位.