**第七讲 容斥定理**



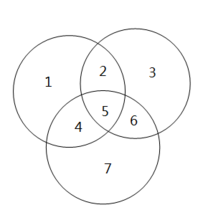
**1两集合容斥定理**

如果被计数的事物有A、B两类，那么，A类B类元素个数总和= 属于A类元素个数+ 属于B类元素个数—既是A类又是B类的元素个数。（A∪B = A+B - A∩B)

**2三集合容斥定理**

如果被计数的事物有A、B、C三类，那么，A类和B类和C类元素个数总和= A类元素个数+ B类元素个数+C类元素个数—既是A类又是B类的元素个数—既是A类又是C类的元素个数—既是B类又是C类的元素个数+既是A类又是B类而且是C类的元素个数。

三个集合的容斥关系公式：A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C



**教学重点：两集合容斥定理找对A BA∪B A∩B**

**教学难点：三集合容斥定理**



例1.某区100个外语教师懂英语或俄语,其中懂英语的75人,既懂英语又懂俄语的20人,那么懂俄语的教师为人.

**答案**45

**解析：**依题意，被计数的事物懂英语的教师和懂俄语的教师有两类，懂英语的教师称为“A类元素”，懂俄语的教师称为“B类元素”， 设懂俄语的教师为x人

A∪B = A+B - A∩B=75+x-20=100

X=45

例2.有长8厘米,宽6厘米的长方形与边长为5厘米的正方形,如图,放在桌面上(阴影是图形的重叠部分),那么这两个图形盖住桌面的面积是平方厘米.

8

6

5

4

3

**答案** 67

**解析:**依题意，被计数的事物长方形的面积与正方形的面积有两类，长方形的面积称为“A类元素”，正方形的面积称为“B类元素”，

A∪B = A+B - A∩B=6×8+5×5-4×3×1/2=67

例3. 求不超过20的正整数中是2的倍数或3的倍数的数共有多少个。

**答案** 13

**解析：**依题意，被计数的事物不超过20的正整数中是2的倍数与不超过20的正整数中是3的倍数有两类，不超过20的正整数中是2的倍数称为“A类元素”，不超过20的正整数中是3的倍数称为“B类元素”，

A=20÷2=10 B=20÷3=6……2 A∩B=20÷6=3……2

A∪B = A+B - A∩B=10+6-3=13

例4. 一个班有42人，参加合唱队的有30人，参加美术组的有25人，有5人什么都没有参加，求两种都参加的有多少人？

**答案** 8

**解析：**依题意，被计数的事物有参加合唱队，美术组两类，参加合唱队”称为“A类元素”，“参加美术组”称为“B类元素”，

A∪B = A+B - A∩B=30+25-x=42-5

X=8

例5. 某个班的全体学生在进行了[短跑](http://baike.baidu.com/view/5271.htm" \t "http://baike.baidu.com/_blank)、游泳、投掷三个项目的测试后，每人至少有一项达到了优秀，达到了优秀的这部分学生情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 短跑 | 游泳 | 投掷 | 短跑、游泳 | 短跑、投掷 | 游泳、投掷 | 短跑、游泳、投掷 |
| 1 7 | 1 8 | 1 5 | 6 | 6 | 5 | 2 |

求这个班的学生共有多少人？

**答案** 35

**解析：**依题意，记A类元素为：[短跑](http://baike.baidu.com/view/5271.htm" \t "http://baike.baidu.com/_blank)达优秀。B类元素为：游泳达优秀。C类元素为：投掷达优秀。

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=17+18+15-6-6-5+2=35

例6 某校六⑴班有学生45人，每人在暑假里都参加[体育训练](http://baike.baidu.com/view/1381859.htm" \t "http://baike.baidu.com/_blank)队，其中参加足球队的有25人，参加排球队的有22人，参加游泳队的有24人，足球、排球都参加的有12人，足球、游泳都参加的有9人，排球、游泳都参加的有8人，问：三项都参加的有多少人？

**答案**3

**解析** 记A类元素为：参加足球队的人数；记B类元素为：参加排球队的人数； 记C类元素为：参加游泳队的人数。设三项都参加的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=25+22+24-12-9-8+X=45

X=3

例7对某单位的100名员工进行调查，结果发现他们喜欢看球赛和电影、戏剧。其中58人喜欢看球赛，38人喜欢看戏剧，52人喜欢看电影，既喜欢看球赛又喜欢看戏剧的有18人，既喜欢看电影又喜欢看戏剧的有16人，三种都喜欢看的有12人，则有既喜欢看球赛又喜欢看电影的有多少人?

**答案**3

**解析** 记A类元素为：喜欢看球赛的人；记B类元素为：喜欢看戏剧的人； 记C类元素为：喜欢看电影的人。设既喜欢看球赛又喜欢看电影的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=58+38+52-18-16-x+12=100

X=26



**A**

1. 某单位有青年员工85人，其中68人会骑自行车，62人会游泳，既不会骑车又不会游泳的有12人，则既会骑车又会游泳的有( )人

　　A.57 B.73 C.130 D.69

**答案**A

**解析**  记A类元素为：会骑自行车；记B类元素为：会游泳。设既会骑车又会游泳的有x人。A∪B = A+B - A∩B=68+62-A∩B=85-12

2.在1至10000中不能被5或7整除的数共有个.

**答案** 6857

**解析**  记A类元素为：在1至10000中能被5整除的数A=10000÷5＝2000

记B类元素为：在1至10000中能被7整除的数B=10000÷7≈1428.6 B取整数B=1428

A∩B=10000÷35≈285.7 B取整数B=285

设在1至10000中不能被5或7整除的数共有x个。

A∪B = A+B - A∩B=68+62-A∩B=2000+1428 - 285=10000-x x =6857

3.在100个学生要么对音乐有兴趣要么对体育有兴趣,音乐爱好者有56人,体育爱好者有75人,那么既爱好音乐,又爱好体育的人有人

**答案** 31

**解析**  记A类元素为：音乐爱好者；记B类元素为：体育爱好者。

A∪B = A+B - A∩B=56+75-A∩B=100 A∩B=31

4. 电视台向100人调查前一天收看电视的情况，有62人看过2频道，34人看过8频道，其中11人两个频道都看过。两个频道都没看过的有多少人？

**答案**15

**解析**  记A类元素为：看过2频道的人数；记B类元素为：看过8频道的人数。设两个频道都没看过的有x人

A∪B = A+B - A∩B=62+34-11=100-x x=15

5 某班统计考试成绩，数学得90分上的有25人;语文得90分以上的有21人;两科中至少有一科在90分以上的有38人。问两科都在90分以上的有多少人?

**答案** 8

**解析** 记A类元素为：数学得90分上的人数；记B类元素为：语文得90分以上的人数。

A∪B = A+B - A∩B=25+21-38=8

6 某班同学中有39人打篮球，37人跑步，25人既打篮球又跑步，问全班参加篮球、跑步这两项体育活动的总人数是多少?

**答案** 51

**解析** 记A类元素为：打篮球的人数；记B类元素为：跑步的人数。

A∪B = A+B - A∩B=39+37-25=51

**B**

7、某车间有工人100人，其中有5个人只能干电工工作，有77人能干车工工作，86人能干焊工工作，既能干车工工作又能干焊工工作的有多少人?

**答案**68

**解析** 记A类元素为：能干车工工作的人数；记B类元素为：能干焊工工作的人数。设既能干车工工作又能干焊工工作的有x人.

A∪B = A+B - A∩B=77+86-x=100-5 x=68

8、 某年级的课外学科小组分为数学、语文、外语三个小组，参加数学小组的有23人，参加语文小组的有27人，参加外语小组的有18人;同时参加数学、语文两个小组的有4人，同时参加数学、外语小组的有7人，同时参加语文、外语小组的有5人;三个小组都参加的有2人。问：这个年级参加课外学科小组共有多少人?

**答案**54

**解析** 记A类元素为：数学小组的人数；记B类元素为：语文小组的人数；记C类元素为：参加外语小组的人数。

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=23+27+18-4-5-7+2=54

9、某大学有外语教师120名，其中教英语的有50名，教日语的有45名，教法语的有40名，有15名既教英语又教日语，有10名既教英语又教法语，有8名既教日语又教法语，有4名教英语、日语和法语三门课，这三科都不教的有多少名？

**答案** 14

**解析** 记A类元素为：教英语的人数；记B类元素为：教日语的人数；记C类元素为：教法语的人数。设这三科都不教的有x名.

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=50+45+40-15-8-10+4=120-x

X=14

10、某班有35个学生，每个学生至少参加英语小组、语文小组、数学小组中的—个课外活动小组。现已知参加英语小组的有17人。参加语文小组的有30人，参加数学小组的有13人。如果有5个学生三个小组全参加了，问有多少个学生只参加两个小组?

**答案**30

**解析** 记A类元素为：参加英语小组的人数；记B类元素为：参加语文小组的人数；记C类元素为：参加数学小组的人数。

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=17+30+13-（ A∩B + B∩C +C∩A )+5=35 A∩B + B∩C +C∩A =30

**C**

11. 36名女生结伴购物，21人买了长裙，24人买了短裙，24人买了超短裙;14人买了长裙和短裙，15人买了短裙和超短裙，13人买了长裙和超短裙;只有一位羞涩的小姑娘一条裙子都没买。请问，共有几名女生三种裙子都购买?

**答案**7

**解析** 记A类元素为：买了长裙的人数；记B类元素为：买了短裙的人数；记C类元素为：买了超短裙的人数。

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=21+24+24-14-15-13+A∩B∩C=36-1

A∩B∩C=7

12.某进修班有50人,开甲、乙、丙三门进修课、选修甲这门课的有38人,选修乙这门课有的35人,选修丙这门课的有31人,兼选甲、乙两门课的有29人,兼选甲、丙两门课的有28人,兼选乙、丙两门课的有26人,甲、乙、丙三科均选的有24人.问三科均未选的人数?

**答案** 5

**解析** 记A类元素为：选修甲这门课的人数；记B类元素为：选修乙这门课的人数；记C类元素为：选修丙这门课的人数。设三科均未选的人数为x

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=38+35+31-29-26-28+24=50-x

X=5

13.某高校对一些学生进行问卷调查。在接受调查的学生中，准备参加注册会计师考试的有63人，准备参加英语六级考试的有89人，准备参加计算机考试的有47人，三种考试都准备参加的有24人，准备只选择两种考试都参加的有46人，不参加其中任何一种考试的有15人。问接受调查的学生共有多少人？  
**答案** 192

**解析** 记A类元素为：参加注册会计师考试的人数；记B类元素为：参加英语六级考试的人数；记C类元素为：参加计算机考试的人数。设接受调查的学生共有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=63+89+47-46+24=x-x-15

X=192

14.如图所示,A、B、C分别代表面积为8、9、11的三张不同形状的纸片,它们重叠放在一起盖住的面积是18,且A与B,B与C,C与A公共部分的面积分别是5、3、4,求A、B、C三个图形公共部分(阴影部分)的面积.

*A*

*B*

*C*

**答案**2

**解析** 设A、B、C三个图形公共部分(阴影部分)的面积为x

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=8+9+11-5-3-4+x=18

X=2

1. 某工作组有12名外国人,其中6人会说英语,5人会说法语,5人会说西班牙语;有3人即会说英又会说法,有2人既会说法又会说西;有2人既会说西又会说英;有1人这三种语言都会说.则会说英语的人比一种语言都不会说的人多多少？

**答案**4

**解析** 记A类元素为：会说英语的人数；记B类元素为：会说法语的人数；记C类元素为：会说西班牙语的人数。设一种语言都不会说的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=6+5+5-3-2-2+1=12-x X=2

6-2=4



1在1~100的自然数中,是5的倍数或是7的倍数的数有个.

**答案** 32

**解析**  记A类元素为：在1至100中是5的倍数个数A=100÷5＝20

记B类元素为：在1至100中能被7整除的数B=100÷7≈14.3 B取整数B=14

A∩B=100÷35≈2.8 B取整数B=2

A∪B = A+B - A∩B=20+14-2=32

2六一班有学生46人,其中会骑自行车的17人,会游泳的14人,既会骑车又会游泳的4人,问两样都不会的有人.

**答案** 19

**解析**  记A类元素为：会骑自行车的人数；记B类元素为：会游泳的人数；设两样都不会的有x人.

A∪B = A+B - A∩B=17+14-4=32-x x=19

3某单位有青年员工85人，其中68人会骑自行车，62人会游泳，既不会骑车又不会游泳的有12人，则既会骑车又会游泳的有( )人

A.57 B.73 C.130 D.69

**答案**A

**解析**  记A类元素为：会骑自行车的人数；记B类元素为：会游泳的人数。

A∪B = A+B - A∩B=68+62-A∩B=85-12 A∩B=57

4.一个班有45个小学生,统计借课外书的情况是:全班学生都借有语文或数学课外书.借语文课外书的有39人,借数学课外书的有32人.语文、数学两种课外书都借的有多少人？

**答案** 26

**解析**  记A类元素为：借语文课外书的人数；记B类元素为：借数学课外书的人数。

A∪B = A+B - A∩B=38+32-A∩B=45A∩B=26

5　一次期末考试，某班有15人数学得满分，有12人语文得满分，并且有4人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？

**答案**  23

**解析**  记A类元素为：数学得满分的人数；记B类元素为：语文得满分的人数。

A∪B = A+B - A∩B=15+12-4=23

6某班共有30名男生,其中20人参加足球队,12人参加蓝球队,10人参加排球队.已知没一个人同时参加3个队,且每人至少参加一个队,有6人既参加足球队又参加蓝球队,有2人既参加蓝球队又参加排球队,那么既参加足球队又参加排球队的有人.

**答案**4

**解析** 记A类元素为：参加足球队的人数；记B类元素为：参加蓝球队的人数；记C类元素为：参加排球队的人数。设既参加足球队又参加排球队的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=20+12+10-6-2-x+0=30 X=4



1.四年级一班有54人，定阅《小学生优秀作文》和《数学大世界》两种读物的有13人，订阅《小学生优秀作文》的有45人每人至少订阅一种读物，订阅《数学大世界》的有多少人？（ ）

A．13 B．22 C．33 D．41

**答案**B

**解析**  记A类元素为：定阅《小学生优秀作文》的人数；记B类元素为：定阅《数学大世界》的人数。设订阅《数学大世界》的有x人

A∪B = A+B - A∩B=45+x-13=54 x=22

2. 五年级有122名同学参加语文、数学考试，每个至少有一门功课取得优秀成绩，其中语文成绩优秀的有65人，数学成绩优秀的有87人。语文、数学都优秀的有多少人？ （ ）

A． 30 B．35 C．57 D．65

**答案**A

**解析**  记A类元素为：语文成绩优秀的人数；记B类元素为：数学成绩优秀的人数。设语文、数学都优秀的有x人A∪B = A+B - A∩B=65+87-x=122 x=30

3. 学校文艺组每人至少会演奏一种乐器，已知会拉手提琴的有24人，会弹电子琴的有17人，其中两样都会的有8人。这个文艺组共有 ＿ 人。

**答案**33

**解析**  记A类元素为：会拉手提琴的人数；记B类元素为：会弹电子琴的人数。

A∪B = A+B - A∩B=24+17-8=33

4. 某班有36个同学在一项测试中，答对第一题的有25人，答对第二题的人有23人，两题都答对的有15人，＿个同学两道题都没有答对

**答案**3

**解析**  记A类元素为：答对第一题的人数；记B类元素为：答对第二题的人数。

A∪B = A+B - A∩B=25+23-15=33 36-33=3

5.现有 50 名学生都做物理、化学实验，如果物理实验做正确的有 40 人，化学实验做正确的有 31 人，两种实验都做错的有 4 人，则两种实验都做对的有＿人。

**答案**25

**解析**  记A类元素为：物理实验做正确的人数；记B类元素为：化学实验做正确的人数。

A∪B = A+B - A∩B=40+31-A∩B=50-4 A∩B=25

6. 某大学有外语教师120名，其中教英语的有50名，教日语的有45名，教法语的有40名，有15名既教英语又教日语，有10名既教英语又教法语，有8名既日语又教法语，有4名教英语、日语和法语三门课，则不交三门课的外语教师有多少名？

**答案**14

**解析** 记A类元素为：会说英语的人数；记B类元素为：会说日语的人数；记C类元素为：会说法语的人数。设一种语言都不会说的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=50+45+40-15-10-8+4=120-x X=14

7. A、B、C三本书，至少读过其中一本的有20人，读过A书的有10人，读过B书的有12人，读过C书的有15人，读过A、B两书的有8人，读过B、C两书的有9人，读过A、C两书的有7人。三本书全读过的有多少人？  
**答案**7

**解析** 记A类元素为：读过A书的人数；记B类元素为：读过B书的人数；记C类元素为：读过C书的人数。设三本书全读过的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=10+12+15-8-9-7+x=20 X=7

8. 对厦门大学计算机系100名学生进行调查，结果发现他们喜欢看NBA和足球、赛车。其中58人喜欢看NBA；38人喜欢看赛车，52人喜欢看足球，既喜欢看NBA又喜欢看赛车的有18人，既喜欢看足球又喜欢看赛车的有16人，三种都喜欢看的有12人，则既喜欢看足球又喜欢看NBA的有多少人？

**答案**26

**解析** 记A类元素为：喜欢看NBA的人数；记B类元素为：喜欢看赛车的人数；记C类元素为：喜欢看足球的人数。设既喜欢看足球又喜欢看NBA的有x人

A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A +A∩B∩C=58+38+52-18-16-x+12=20 X=26