第十讲 进制与进位





我们常用的进制为十进制，特点是“逢十进一”。在实际生活中，除了十进制计数法外，还有其他的大于1的自然数进位制。比如二进制，八进制，十六进制等。

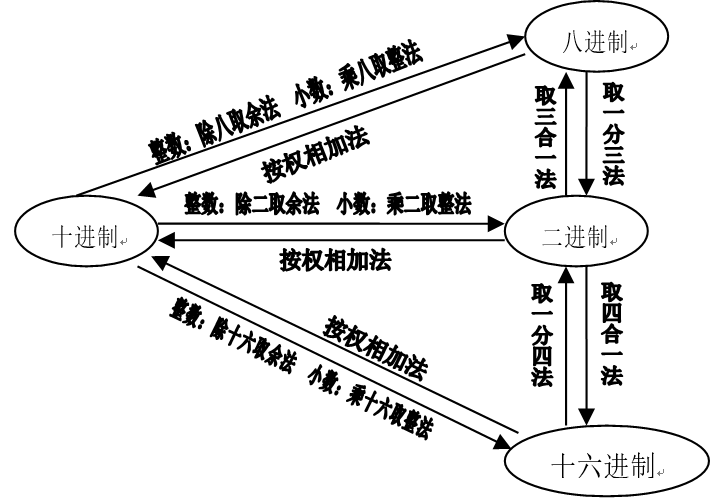
**二进制：**在计算机中，所采用的计数法是二进制，即“逢二进一”。因此，二进制中只用两个数字0和1。二进制的计数单位分别是1、21、22、23、……，二进制数也可以写做展开式的形式，例如100110在二进制中表示为：(100110)2=1×25+0×24+0×23+1×22+1×21+0×20。

**二进制的运算法则：**“满二进一”、“借一当二”，乘法口诀是：零零得零，一零得零，零一得零，一一得一。

**注意：**对于任意自然数n,我们有n0=1。

**n进制：**n进制的运算法则是“逢n进一，借一当n”，n进制的四则混合运算和十进制一样，先乘除，后加减；同级运算，先左后右；有括号时先计算括号内的。

**进制间的转换：**如右图所示。





1.掌握进制之间的转换方法。

2.能用进制互化的方法解题。



**例1:①\_\_\_\_\_\_\_\_；**

**②；**

**③；**

**④\_\_\_\_\_\_\_\_；**

**⑤若，则\_\_\_\_\_\_\_\_．**

**分析与解：**①对于这种进位制计算，一般先将其转化成我们熟悉的十进制，再将结果转化成相应的进制：；

②可转化成十进制来计算：

；

如果对进制的知识较熟悉，可直接在二进制下对进行除法计算，只是每次借位都是2，可得；

③本题涉及到3个不同的进位制，应统一到一个进制下．统一到十进制比较适宜：

；

④十进制中，两个数的和是整十整百整千的话，我们称为“互补数”，凑出“互补数”的这种方

法叫“凑整法”，在进制中也有“凑整法”，要凑的就是整．

原式

；

⑤若，则，经试验可得．

**例2:在几进制中有？**

**分析与解：**利用尾数分析来解决这个问题：

由于，由于式中为100，尾数为0，也就是说已经将12全部进到上一位．

所以说进位制为12的约数，也就是12，6，4，3，2中的一个．

但是式子中出现了4，所以要比4大，不可能是4，3，2进制．

另外，由于，因为，也就是说不到10就已经进位，才能是100，于是知道，那么不能是12．

所以，只能是6．

**例3:将二进制数(11010.11)2 化为十进制数为多少？**

**分析与解：**根据二进制与十进制之间的转化方法，(11010.11)2 =1×24+1×23+0×22+1×21+0×20+1×2-1+1×2-2=16+8+0+2+0+0.5+0.25=26.75。

**例4:现有1克，2克，4克，8克，16克的砝码各1枚，在天平上能称多少种不同重量的物体？**

**分析与解：**因为砝码的克数恰好是1，2，4，8，16，而二进位制数从右往左数各位数字分别表示：1，2，22=4，23=8，24=16，在砝码盘上放1克砝码认为是二进位制数第一位(从右数)是1，放2克砝码认为是二进位制数第二位是1，……，放16克砝码认为是二进位制数第五位是1，不放砝码就认为相应位数是零，这样所表示的数中最小的是1，最大的是(11111)2=24+23＋22＋21＋20=(31)10，这就是说1至31的每个整数(克)均能称出。所以共可以称出31种不同重量的物体。

**例5:在6进制中有三位数，化为9进制为，求这个三位数在十进制中为多少?**

**分析与解：** (abc)6 =a×62＋b×6+c=36a+6b+c；(cba)9=c×92+b×9+a=81c+9b+a；所以36a+6b+c=81c+9b+a；于是35a=3b+80c；因为35a是5的倍数，80c也是5的倍数．所以3b也必须是5的倍数，又(3，5)=1．所以，b=0或5．

①当b=0，则35a=80c；则7a=16c；(7，16)=1，并且a、c≠0，所以a=16，c=7。但是在6,9进制，不可以有一个数字为16．

②当b=5，则35a=3×5+80c；则7a=3+16c；mod 7后，3+2c≡0。所以c=2或者2+7k(k为整数)．因为有6进制，所以不可能有9或者9以上的数，于是c=2；35a=15+80×2，a=5。所以(abc)6 =(552)6 =5×62+5×6+2=212。这个三位数在十进制中为212。

**例6:试求(2-1)除以992的余数是多少?**

**分析与解：**我们通过左式的短除法，或者直接运用通过2次幂来表达为2进制：

(992)=(1111100000)2，(2-1)2=我们知道在2进制中一定能整除 (1111100000)2，于是我们注意到，

所以=因为能整除(1111100000)2，所以余数为(111111)2=2+24+23+22+21+1=63，所以原式的余数为63。

**例7:已知正整数的八进制表示为，那么在十进制下，除以7的余数与除以9的余数之和是多少？**

**分析与解：**与十进制相类似，有：．

根据8进制的弃7法，被7除的余数等于其各位数字之和，为6，而除以7的余数为1，所以的平方被7除余1，即除以7的余数为1；

另外，，显然能被整除，所以其平方也能被整除，即除以9的余数为0．

因此两个余数之和为．



**A**

**1.①；**

**②在八进制中，\_\_\_\_\_\_\_\_；**

**③在九进制中，\_\_\_\_\_\_\_\_．**

分析与解：①本题是进制的直接转化：；

②原式；

③原式．

**2.在几进制中有？**

分析与解：注意，因为，所以一定是不到10就已经进位，才能得到16324，所以．

再注意尾数分析，，而16324的末位为4，于是进到上一位．

所以说进位制为21的约数，又小于10，也就是可能为7或3．

因为出现了6，所以只能是7．

**3.二进制数10101011110011010101101转化为8进制数是多少？**

分析与解：根据二进制与八进制之间的转化方法推导出二八对照表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 八进制数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 二进制数 | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |

从后往前取三合一进行求解，可以得知(10101011110011010101101)2=(25363255)8。

**4.算式是几进制数的乘法？**

分析与解：注意到尾数，在足够大的进位制中有乘积的个位数字为，但是现在为4，说明进走，所以进位制为16的约数，可能为16、8、4或2．

因为原式中有数字5，所以不可能为4、2进位，而在十进制中有，所以在原式中不到10就有进位，即进位制小于10，于是原式为8进制．

**5.将二进制数11101001.1011转换为十六进制数。**

分析与解：在转换为高于9进制的数时，遇到大于9的数用字母代替，如：A代表10、B代表11、C代表12、D代表13……。根据取四合一法，二进制11101001.1011转换为十六进制为E9.B。

**B**

**6.某数在三进制中为12120120110110121121，则将其改写为九进制，其从左向右数第l位数字是几?**

分析与解：由于32=9，所以由三进制化为9进制需要取二合一。从后两个两个的取，取至最前边为12，用位值原理将其化为1×31+2×30=5，所以化为9进制数后第一位为5.

**7.在7进制中有三位数，化为9进制为，求这个三位数在十进制中为多少？**

分析与解：首先还原为十进制：

；．

于是；得到，即．

因为是8的倍数，也是8的倍数，所以也应该是8的倍数，于是或8．

但是在7进制下，不可能有8这个数字．于是，，则．

所以为5的倍数，为3的倍数．

所以，或5，但是，首位不可以是0，于是，；

所以．

于是，这个三位数在十进制中为248．

**8.一个人的年龄用十进制数和三进制数表示，若在十进制数末尾添个“0”就是三进制数，求此人的年龄．**

分析与解：①设这个人为岁，得，又，解得，不合题意，所以这个人的年龄不可能是一位数．

②设这个人是岁，由题意得：．

因为，所以即．又因为是三进制数，，都小于3，所以，．所以，这个人为21岁．

③设这个人为岁，由题意有，，因为，，所以．即．又、、都小于3，所以上述等式不成立．所以这个人的年龄不可能是三位数．

综上可知这个人的年龄是21岁．

**9.N是整数，它的b进制表示是777，求最小的正整数b，使得N是十进制整数的四次方．**

分析与解：设b是所求的最小正整数，，因为质数7能整除，所以也能整除x，不妨设，m是大于0的自然数。则：，化简得：，易知，b的值随m的增大而增大，当m=1时，b=18。

**10.计算除以26的余数．**

分析与解：题中有3的次幂，令人联想到将题中的数转化成3进制下的数再进行计算．

，而，

所以，．

由于整除，，所以余．

所以除以26的余数为8．

**C**

**11.计算除以7的余数．**

分析与解：由于除以7余1，而，所以除以7的余数为．

本题也可以转化为2进制进行计算：，，

所以．

而，所以余．

所以除以7的余数为3．

**12.在8进制中，一个多位数的数字和为十进制中的68，求除以7的余数为多少？**

分析与解：类似于十进制中的“弃九法”，8进制中也有“弃7法”，也就是说8进制中一个数除以7的余数等于这个数的各位数字之和除以7的余数．

本题中，这个数的各位数字之和在十进制中为68，而68除以7的余数为5，所以这个数除以7的余数也为5．

**13.现有1斤、2斤、4斤、8斤、16斤的白糖各一袋，白糖整袋地卖，问顾客可买的斤数有多少种？**

分析与解：



很显然的这些数组合可以构成到之间的任何一个数，化为十进制即1到31之间的数都可以构成。所以顾客可以买的斤数有31种。

**14.求证：能被7整除.**

分析与解：因为  
 而  
很容易看出来：  
所以能被7整除

**15.一个自然数的六进制与九进制均为三位数, 并且它们各位数字的排列顺序恰好相反, 请问这个自然数是几?**

分析与解：设这个数的六进制为, 则这个数的九进制为。  
那么有  
即  
只能取0, 1, 2, 3, 4, 5. 等式左边能被5整除.  
经过试验，只可能是,  
所以这个数六进制是552,九进制是552，化成十进制是212





1.计算下列结果（仍用二进制表示）：

（1）（2）

分析与解：二进制中1×1=1，1×0=0，0×0=0  
（1）  
  
因此  
（2）  
  
因此

2.把下列十进制的数写成数码与计数单位乘积的和的形式:  
(1) (2) (3)

分析与解：变换形式如下：  
（1）  
（2）  
（3）

3.请你制造一个7进制的乘法表。

分析:大家都能熟练地背诵十进制的乘法表，那么尝试构造形式相同的7进制乘法表。

答案:7进制乘法表：  


4.求证能被5整除。

分析与解：我们适当变换原式的形式：  
  
  
而，很显然能被整除，  
所以能被5整除。

5.如果能被15整除，自然数n取那些值？

分析:这与上一题很类似，用同样的方法分析

答案:因为  
而，如果要能被15整除，即能被整除  
所以n应该是4的倍数，n=4,8,12,……





1.计算下列结果（仍然用2进制表示）：  
（1）  
（2）  
（3）

答案：

和十进制一样列竖式计算，但注意要“逢二进一”、“借一当二”  
（1）  
  
 因此  
（2）  
  
 因此  
（3）  
  
 因此

2.计算下列结果（仍用二进制表示）：  
（1）  
（2）

答案：

（1）  
  
因此

（2）  
  
因此

3.计算（结果仍用二进制）：  
（1）  
（2）  
（3）

答案：

按照混合运算顺序，并用上述三题的竖式计算方式求解：  
（1）  
  
（2）  
  
（3）  


4.把下列二进制数写成数码与计数单位乘积的和的形式，并且在十进制下算出这些数的大小：  
(1)  
(2)  
(3)  
(4)

答案：

变换形式求解如下：  
（1）  
（2）  
（3）  
（4）

5.将下列十进制数化为二进制数：  
（1）  
（2）

答案：

用十进制整数不断除以2，并记下余数，直到商为0，最后把余数反向读出即可。  
（1）  
  
因此  
（2）  
  
因此

6.将下列各数化为十进制的数：  
（1）  
（2）  
（3）

答案：

（1）

（2）

（3）

7.将分别化成5进制和12进制数

答案：

（1）化为5进制数时，和十进制化二进制类似，用十进制整数不断除以5，并记下余数，直到商为0，最后把余数反向读出即可：  
  
因此

（2）化为12进制数时， 用十进制整数不断除以12，并记下余数，直到商为0，最后把余数反向读出即可：  
  
这里注意到，12进制的数码可以有对应于十进制数值的10，11，我们分别记为A,B，那么最终结果可以表示为：  


8.计算：  
（1）  
 (2)

答案：

这里涉及到几种进位制的转化，我们可以先把左式用10进制算出结果，然后再转化为右边的进位制。  
[答案]依据分析，并按照上面几题所介绍的进位制转化方法：  
（1）  
（2）