第十三讲 分数裂项与分拆





**1. “裂差”型运算**

将算式中的项进行拆分，使拆分后的项可前后抵消，这种拆项计算称为裂项法.裂项分为分数裂项和整数裂项，常见的裂项方法是将数字分拆成两个或多个数字单位的和或差。遇到裂项的计算题时，要仔细的观察每项的分子和分母，找出每项分子分母之间具有的相同的关系，找出共有部分，裂项的题目无需复杂的计算，一般都是中间部分消去的过程，这样的话，找到相邻两项的相似部分，让它们消去才是最根本的。

①对于分母可以写作两个因数乘积的分数，即形式的，这里我们把较小的数写在前面，即，那么有

②对于分母上为3个或4个自然数乘积形式的分数，我们有：





③对于分子不是1的情况我们有：













**2. 裂差型裂项的三大关键特征：**

①分子全部相同，最简单形式为都是1的，复杂形式可为都是x(x为任意自然数)的，但是只要将x提取出来即可转化为分子都是1的运算。

②分母上均为几个自然数的乘积形式，并且满足相邻2个分母上的因数“首尾相接”

③分母上几个因数间的差是一个定值。

**3.复杂整数裂项型运算**

复杂整数裂项特点：从公差一定的数列中依次取出若干个数相乘，再把所有的乘积相加。其巧解方法是：先把算式中最后一项向后延续一个数，再把算式中最前面一项向前伸展一个数，用它们的差除以公差与因数个数加1的乘积。

整数裂项口诀：等差数列数，依次取几个。所有积之和，裂项来求作。后延减前伸，差数除以N。N取什么值，两数相乘积。公差要乘以，因个加上一。

需要注意的是：按照公差向前伸展时，当伸展数小于0时，可以取负数，当然是积为负数，减负要加正。对于小学生，这时候通常是把第一项甩出来，按照口诀先算出后面的结果再加上第一项的结果。

此外，有些算式可以先通过变形，使之符合要求，再利用裂项求解。

**4. “裂和”型运算**

常见的裂和型运算主要有以下两种形式：

①②

裂和型运算与裂差型运算的对比：

裂差型运算的核心环节是“两两抵消达到简化的目的”，裂和型运算的题目不仅有“两两抵消”型的，同时还有转化为“分数凑整”型的，以达到简化目的。



1.复杂整数裂项的特点及灵活运用

2.分子隐蔽的裂和型运算。



**例1：**

1. 原式



**例2：计算：．**

1. 如果式子中每一项的分子都相同，那么就是一道很常见的分数裂项的题目．但是本题中分子不相同，而是成等差数列，且等差数列的公差为2．相比较于2，4，6，……这一公差为2的等差数列(该数列的第个数恰好为的2倍)，原式中分子所成的等差数列每一项都比其大3，所以可以先把原式中每一项的分子都分成3与另一个的和再进行计算．

原式









也可以直接进行通项归纳．根据等差数列的性质，可知分子的通项公式为，所以，再将每一项的与分别加在一起进行裂项．后面的过程与前面的方法相同．

**例3：**

1. 原式







**例4：**

1. 本题为典型的“隐藏在等差数列求和公式背后的分数裂差型裂项”问题。此类问题需要从最简单的项开始入手，通过公式的运算寻找规律。从第一项开始，对分母进行等差数列求和运算公式的代入有，，……，

原式

**例5：****.**

1. 这题是利用平方差公式进行裂项：，

原式





**例6：**

1. 

原式＝＝****



**A**

1.

1. 原式



**2.计算：**

1. 本题的重点在于计算括号内的算式：．这个算式不同于我们常见的分数裂项的地方在于每一项的分子依次成等差数列，而非常见的分子相同、或分子是分母的差或和的情况．所以应当对分子进行适当的变形，使之转化成我们熟悉的形式．

观察可知，，……即每一项的分子都等于分母中前两个乘数的和，所以













所以原式．

**3.计算：**

1. 观察可知原式每一项的分母中如果补上分子中的数，就会是5个连续自然数的乘积，所以可以先将每一项的分子、分母都乘以分子中的数．即：

原式

现在进行裂项的话无法全部相消，需要对分子进行分拆，考虑到每一项中分子、分母的对称性，可以用平方差公式：，，……

1. 原式











4.

1. 原式＝＋＋＋＋…＋

＝（）＋（）＋（）＋（）＝

5.

1. ，，……，

，所以

原式



6.

1. 原式







**B**

**7.计算：**

1. 原式





**8.计算： ．**

1. 原式





**9.计算：．**

1. 式子中每一项的分子与分母初看起来关系不大，但是如果将其中的分母根据平方差公式分别变为，，，……，，可以发现如果分母都加上1，那么恰好都是分子的4倍，所以可以先将原式乘以4后进行计算，得出结果后除以4就得到原式的值了．

原式









10.

1. （法1）：可先找通项

原式



（法2）：原式



**11.计算：**

1. 先找通项公式

原式



12.

1. 先找通项：，

原式





**C**

13.

1. 找通项

原式，

通过试写我们又发现数列存在以上规律，这样我们就可以轻松写出全部的项，所以有

原式

**14.**

1. 

原式==

15.

1. 

原式



**16.计算：**

1. 通项公式：，

原式





**17.计算：**

1. 本题的通项公式为，没办法进行裂项之类的处理．注意到分母，可以看出如果把换成的话分母的值不变，所以可以把原式子中的分数两两组合起来，最后单独剩下一个．将项数和为100的两项相加，得

，

所以原式．（或者，可得原式中99项的平均数为1，所以原式）



1.



1. 虽然很容易看出**＝，＝…**…可是再仔细一看，并没有什么效果，因为这不象分数裂项那样能消去很多项．我们再来看后面的式子，每一项的分母容易让我们想到公式 ，于是我们又有**．**．减号前面括号里的式子有10项，减号后面括号里的式子也恰好有10项，是不是“一个对一个”呢？



＝

＝

＝

＝＝＝＝．

2.**计算：**

* 1. 原式







3.

* 1. 原式



**4.计算：**

* 1. 原式







**5.计算：**

* 1. 法一：利用等比数列求和公式。

原式



法二：错位相减法．

设

则，，整理可得．

法三：本题与例3相比，式子中各项都是成等比数列，但是例3中的分子为3，与公比4差1， 所以可以采用“借来还去”的方法，本题如果也要采用“借来还去”的方法，需要将每一项的分子变得也都与公比差1．由于公比为3，要把分子变为2，可以先将每一项都乘以2进行算，最后再将所得的结果除以2即得到原式的值．由题设，，则运用“借来还去”的方法可得到，整理得到．





**1.计算：**

* 1. 原式





**2.⑴\_\_\_\_\_\_\_\_；**

**⑵\_\_\_\_\_\_\_\_．**

* 1. ⑴ 观察可知31415925和31415927都与31415926相差1，设，

原式

⑵ 原式



**3.计算：**

* 1. 原式







**4.计算：**

* 1. 原式

 



5，**．**

* 1. 原式



6.**计算：．**

* 1. 本题可以直接将两个乘积计算出来再求它们的差，但灵活采用平方差公式能收到更好的效果．

原式



7.**计算：．**

* 1. 本题可以直接计算出各项乘积再求和，也可以采用平方差公式．

原式





其中可以直接计算，但如果项数较多，应采用公式

进行计算．

**8.计算：．**

* 1. 观察发现式子中每相乘的两个数的和都是相等的，可以采用平方差公式．

原式

















9.**看规律，，……，试求**

原式



**10.计算：**

* 1. 令，，则：

原式





11.

* 1. 设，则原式化简为：

12.

* 1. 设，，

原式







**13.**

* 1. 设，，

原式







**14.计算**

* 1. 设，

原式()

**15.**

* 1. 设，则有

16.

* 1. 设，则有