第十四讲 公式与通项归纳





通项简单的说就是一个数列的规律，通过题目中的数据与等差数列，等比数列的通项公式之间的联系，推导出新数列的规律。

通项归纳法需要借助于代数，将算式化简，将“形似”的复杂算式及数列，用字母表示后化简为常见的一般形式。



1.能用数列的通项公式解题。

2.用代数的形式表示数，并通过化简代数式来化简算式。



**例1：**\_\_\_\_\_\_\_\_ 。

分析：方法一：令，则，两式相减，得。

方法二：找规律计算得到

答案：

**例2：在一列数：中，从哪一个数开始，1与每个数之差都小于？**

分析：这列数的特点是每个数的分母比分子大2，分子为奇数列，要1－＜，解出*n*＞999.5，从*n*＝1000开始，即从开始，满足条件

答案：

**例3：计算：**

分析：先找通项公式

原式



答案：

**例4：**

分析：（法1）：可先找通项

原式



（法2）：原式



答案：

**例5：计算：．**

分析：本题的通项公式为，没办法进行裂项之类的处理．注意到分母，可以看出如果把换成的话分母的值不变，所以可以把原式子中的分数两两组合起来，最后单独剩下一个．

将项数和为100的两项相加，得

，所以原式．（或者，可得原式中99项的平均数为1，所以原式）

答案：

**例6：计算：**

分析：通项归纳，  
 原式

答案：



**A**

1. 计算：

分析：先找通项：

原式





答案：

**2.计算：**

分析：先通项归纳：，

原式



答案：

3.

分析：

原式＝＝****

答案：

4.

分析：

原式



答案：

**5.计算：**

分析：通项公式：，

原式





答案：

**B**

6. 

分析：找通项

原式，

通过试写我们又发现数列存在以上规律，这样我们就可以轻松写出全部的项，所以有

原式

答案：

**7.计算：**

分析：由于，则，

原式





答案：

**8.计算：**

分析：（法1）：可先来分析一下它的通项情况，



原式=



（法2）：

答案：

9. 

分析：通项为：，

原式

答案：

**10.**

分析：

原式==

答案：

**C**

11.

分析：虽然很容易看出**＝，＝…**…可是再仔细一看，并没有什么效果，因为这不象分数裂项那样能消去很多项．我们再来看后面的式子，每一项的分母容易让我们想到公式，  
于是我们又有**．**．

减号前面括号里的式子有10项，减号后面括号里的式子也恰好有10项，是不是“一个对一个”呢？



＝

＝

＝

＝＝

＝＝．

答案：

**12.计算：**

分析：通项归纳：  
 原式=

答案：

**13.计算：**

分析：原式  
通项归纳，

原式

答案：

14.计算：（共条分数线）

分析：  
  
  
 ………………  
，所以条分数线的话，答案应该为

答案：



1.下面的算式是按一定规律排列的,那么第100个算式的得数是多少?

4+3,5+6,6+9,7+12,…

解答：

仔细观察可知:

每个算式的第一个加数组成一个公差为1的等差数列:4,5,6,7,…;

每个算式的第二个加数组成一个公差为3的等差数列:3,6,9,12,…;

若要求第100个算式的得数,只要分别算出每个等差数列的第100项即可.

根据通项: .

第一个加数为:4+(100-1)×1=4+99=103;

第二个加数为:3+(100-1)×3=3+99×3=3×100=300.

所以第100个算式的得数为:103+300=403.

2. 若干人围成8圈,一圈套一圈,从外向内各圈人数依次少4人.如果共有304人,最外圈有几人?

解答：

最外圈人数有:+(8-1)×4=(+28)人.

所以共有人数可表示为:

(+28)×8÷2=304

+28=76

=48

=24

最外圈有: 24+28=52(人).

3. 在1~100这一百个自然数中所有不能被11整除的奇数的和是多少?

解答：

(1+3+5+7+…+97+99)-(11+22+33+44+55+66+77+88+99)

=(1+99)×50÷2-[(11+99)×4+55]

=2500-495

=2005.

4. 在2949,2950,2951,…2997,2998这五十个自然数中,所有偶数之和比所有奇数之和多多少?

解答：

根据题意可列出算式:

(2950+2952+…+2998)-(2949+2951+…+2997)

注意到这两个等差数列的项数相等,公差相同,且对应项差为1,所以25项就差25个1,即

原式=(2950-2949)+(2952-2951)+…+(2998-2997)

=1+1+1+…+1

25个

=25.

5. 求一切除以4后余1的两位数的和?

解答：

除以4后余1的最小两位数是多少? 12+1=13.

除以4后余1的最大两位数是多少? 96+1=97.

除以4后余1的两位数一共有多少个? 96÷4-2=22(个).

它们的和是: 13+17+21+…+97

=(13+97)×22÷2

=1210.





1.在1000到2000之间，所有个位数字是7的自然数之和是多少？

解答：

首先写出符合条件数列，在求值。

数列为：1007,1017,1027….1997

和为 (1007+1997)×100÷2=150200

2.在1～100这一百个自然数中，所有不能被9整除的数的和是多少？

解答：

我们先计算1～100得自然数和，再减去能被9整除的自然数和，就是所有不能被9整除的自然数和了

1+2+……+100＝(1+100)×100÷2=5050

9+18+27+……+99＝(9+99)×11÷2=594

所有不能被9整除的自然数和：5050-594=4456

3.在1～100这一百个自然数中，所有不能被9整除的奇数的和是多少？

解答：

先计算1～100的奇数和，再减去能被9整除的奇数和。

1+3+……+99-(9+27+45+……+99)＝(1+99)×50÷2－(9+99)×6÷2=2176

4.在1～200这二百个自然数中，所有能被4整除或能被11整除的数的和是多少？

解答：

先求出能被4整除的自然数和，再求出能被11整除的自然数和，将二者相加，但是此时得到的不是题目需要的和，因为44、88等数在两个数列中都存在，也就是说能被44整除的数列被计算了两次，所以我们还应改减去能被44整除的数列和。

(4+8+12+……+200)+(11+22+33+……+198)-(44+88+132+176)=(4+200)×50÷2+(11+198)×18÷2-(44+176)×4÷2＝6541

5.有一列数：1，1993，1992，1，1991，1990，1，……，从第三个数起，每一个数都是它前面两个数中大数减小数的差。求从第一个数起到第1993个数这1993个数之和。

解答：

经过观察可以发现，这是由两个数列组成的数列，一个是全1，另一个是公差为1，首项为1993的等差数列，把1,1993,1992这样三个数算为一组，整个数列到第1993个的时候应该有1993÷3＝664组，最后一个数是1，所以总共有665个1，等差数列有664×2项，最后四个数是1,667,666,1

分为两个数列求和：

(1993+666)×1328÷2+1×665＝1766241

6.求所有加6以后能被11整除的三位数的和。

解答：

我们可以先求能被11整除的三位数和，然后再减去 项数×6，同时还要求这些三位数减去6后仍然是三位数。

110-6+121-6+……+990-6+1001-6=(110+1001)×92÷2-6×92＝50554

7.利用公式，计算：



解答：

公式是一个从1到n2的和，而要求计算的是152到212的和，我们可以通过适当的变换，将要求的算式变成能套用公式的形式。



=

=

=2296

8.求和

解答：

这类题我们可以用裂项的办法来求解。我们知道：



将题目中每项都按照上面的公式拆分，就可以很方便的计算出结果。



＝

＝

＝

＝330

9.计算：



解答：

上面序列的通项公式为，我们可以这样来裂项：



＝

＝

＝362879