第十五讲 比例模型





**一、比和比例的性质**

性质1：若*a*: *b*=*c*：*d*，则(*a* + *c*)：(*b* + *d*)= *a*：*b*=*c*：*d*；

性质2：若*a*: *b*=*c*：*d*，则(*a* - *c*)：(*b* - *d*)= *a*：*b*=*c*：*d*；

性质3：若*a*: *b*=*c*：*d*，则(*a* +*xc*)：(*b* +*xd*)=*a*：*b*=*c*：*d*；(*x*为常数)

性质4：若*a*: *b*=*c*：*d*，则*a*×*d* = *b*×*c*；(即外项积等于内项积)

正比例：如果*a*÷*b*=*k*(*k*为常数)，则称*a*、*b*成正比；

反比例：如果*a*×*b*=*k*(*k*为常数)，则称*a*、*b*成反比．

**二、主要比例转化实例**

　　①　　；；；

②　　；(其中)；

③　；　；；

④，；；

⑤的等于的，则是的，是的．

**三、按比例分配与和差关系**

⑴按比例分配

例如：将个物体按照的比例分配给甲、乙两个人，那么实际上甲、乙两个人各自分配到的物体数量与的比分别为和，所以甲分配到个，乙分配到个.

⑵已知两组物体的数量比和数量差，求各个类别数量的问题

例如：两个类别、，元素的数量比为(这里)，数量差为，那么的元素数量为，的元素数量为，所以解题的关键是求出与或的比值．

**四、比例题目常用解题方式和思路**

解答分数应用题关键是正确理解、运用单位“*l*”。题中如果有几个不同的单位“1”，必须根据具体情况，将不同的单位“1”，转化成统一的单位“1”，使数量关系简单化，达到解决问题的效果。在解答分数应用题时，要注意以下几点：

1. 题中有几种数量相比较时，要选择与各个已知条件关系密切、便于直接解答的数量为单位“1”。
2. 若题中数量发生变化的，一般要选择不变量为单位“1”。
3. 应用正、反比例性质解答应用题时要注意题中某一数量是否一定，然后再确定是成正比例，还是成反比例。找出这些具体数量相对应的分率与其他具体数量之间的正、反比例关系，就能找到更好、更巧的解法。
4. 题中有明显的等量关系，也可以用方程的方法去解。
5. 赋值解比例问题



1.掌握比例的性质，学会比例间的互化。

2.掌握比例题目中常见的解题方法和思路。



**例1:已知甲、乙、丙三个数，甲等于乙、丙两数和的，乙等于甲、丙两数和的，丙等于甲、乙两数和的，求.**

* 1. 由甲等于乙、丙两数和的，得到甲等于三个数和的，同样的乙等于甲、丙两数和的，同样的丙等于甲、乙两个数和的，所以．

**例2:已知甲、乙、丙三个数，甲的一半等于乙的倍也等于丙的，那么甲的、乙的倍、丙的一半这三个数的比为多少？**

* 1. 甲的一半、乙的倍、丙的这三个数的比为，所以甲、乙、丙这三个数的比为即，化简为，那么甲的、乙的倍、丙的一半这三个数的比为即，化简为.

**例3:如下图所示，圆与圆的面积之和等于圆面积的，且圆中的阴影部分面积占圆面积的，圆的阴影部分面积占圆面积的，圆的阴影部分面积占圆面积的．求圆、圆、圆的面积之比．**

****

* 1. 设与的共同部分的面积为，与的共同部分的面积为，则根据题意有，，，于是得到，这条式子可化简为，所以.最后得到.

**例4:某俱乐部男、女会员的人数之比是，分为甲、乙、丙三组．已知甲、乙、丙三组的人数比是，甲组中男、女会员的人数之比是，乙组中男、女会员的人数之比是．求丙组中男、女会员人数之比．**

以总人数为1，则甲组男会员人数为，女会员为，乙组男会员为，女会员为；丙组男会员为，女会员为；所以，丙组中男、女会员人数之比为．

**例5:一些苹果平均分给甲、乙两班的学生，甲班比乙班多分到个，而甲、乙两班的人数比为，求一共有多少个苹果？**

* 1. 一共有个苹果.

**例6:一班和二班的人数之比是，如果将一班的名同学调到二班去，则一班和二班的人数比变为．求原来两班的人数．**

* 1. 原来一班的人数为两班总人数的，调班后一班的人数是两班人数的，调班前后一班人数的比值为，所以一班原来的人数为人，二班原来的人数为人.

**例7:幼儿园大班和中班共有**32**名男生，**18**名女生**．**已知大班男生数与女生数的比为，中班男生数与女生数的比为，那么大班有女生多少名？**

由于男、女生人数有比例关系，而且知道总数，所以可以用鸡兔同笼的方法．假设18名女生全部是大班，则大班男生数：女生数，即男生应有30人，实际上男生有32人，相差2个人；又中班男生数：女生数，以3个中班女生换3个大班女生，每换一组可增加1个男生，所以需要换2组；所以，大班女生有(名)．

**例8:有一个长方体，长和宽的比是，宽与高的比是．表面积为，求这个长方体的体积.**

* 1. 由条件长方体的长、宽、高的比，则长方体的所有视面，上面、前面、左面的面积比为，这三个面的面积和等于长方体表面积的二分之一，所以，长方体的上面的面积为，前面的面积为，左面的面积为，而，所以即是长、宽、高的乘积，所以这个长方体的体积为．

**例9:某学校入学考试，参加的男生与女生人数之比是．结果录取**91**人，其中男生与女生人数之比是．未被录取的学生中，男生与女生人数之比是．问报考的共有多少人？**

* 1. (法1)录取的学生中男生有人，女生有(人)，先将未录取的人数之比变成，又有(人)，所以每份人数是(人)，那么未录取的男生有(人)，未录取的女生有(人)．所以报考总人数是(人)．

(法2)设未被录取的男生人数为人，那么未被录取的女生人数为人，由于录取的学生中男生有人，女生有(人)，则，解得．所以未被录取的男生有12人，女生有16人．报考总人数是(人)．



**A**

**1.一项公路的修建工程被平均分成两份承包给甲、乙个工程队建设，两个工程队建设了相同多的一段时间后，分别剩下、的任务没有完成，已知两个工程队的工作效率(建设速度)之比，求这两个工程队原先承包的修建公路长度之比.**

* 1. (法一)甲工程队以倍乙工程队建设速度，仅完成了的承包任务，而乙工程队完成了，所以甲工程队承包任务的等于乙工程队承包任务的，所以甲工程队的承包的任务是乙工程队承包任务的，所以两个工程队承包的修建公路长度之比为．

(法二)两个工程队完成的工程任务(修建公路长度)之比等于工作效率之比，等于，而他们分别完成了各自任务的和，所以两个工程队承包的修建公路长度之比为．

**2.某团体有名会员，男女会员人数之比是，会员分成三组，甲组人数与乙、丙两组人数之和一样多，各组男女会员人数之比依次为、、，那么丙组有多少名男会员？**

* 1. 会员总人数人，男女比例为，则可知男、女会员人数分别为人、人；又已知甲组人数与乙、丙两组人数之和一样多，则可知甲组人数为人，乙、丙人数之和为人，可设丙组人数为人，则乙组人数为人，又已知甲组男、女会员比为，则甲组男、女会员人数分别为人、人，又已知乙、丙两组男、女会员比例，则可得：，解得．即丙组会员人数为人，又已知男、女比例，可得丙组男会员人数为人．

3.**、、三项工程的工作量之比为，由甲、乙、丙三队分别承担．三个工程队同时开工，若干天后，甲完成的工作量是乙未完成的工作量的二分之一，乙完成的工作量是丙未完成的工作量的三分之一，丙完成的工作量等于甲未完成的工作量，则甲、乙、丙队的工作效率的比是多少？**

* 1. 根据题意，如果把工程的工作量看作，则工程的工作量就是，工程的工作量就是．

　　设甲、乙、丙三个工程队的工作效率分别为、、.经过天，则：



将⑶代入⑵，得，

将⑷代入⑴，得，，

将代入⑴，得．代入⑶，得．

　　　　甲、乙、丙三队的．工作效率的连比是．

**4.某次数学竞赛设一、二、三等奖．已知：①甲、乙两校获一等奖的人数相等；②甲校获一等奖的人数占该校获奖总人数的百分数与乙校相应的百分数的比为；③甲、乙两校获二等奖的人数总和占两校获奖人数总和的；④甲校获三等奖的人数占该校获奖人数的；⑤甲校获二等奖的人数是乙校获二等奖人数的倍．那么，乙校获一等奖的人数占该校获奖总人数的百分数等于多少？**

* 1. 由①、②可知甲、乙两校获奖总人数的比为，不妨设甲校有60人获奖，则乙校有50人获奖．由③知两校获二等奖的共有人；由⑤知甲校获二等奖的有人；由④知甲校获一等奖的有人，那么乙校获一等奖的也有12人，从而所求百分数为．

**5.①某校毕业生共有**9**个班，每班人数相等．②已知一班的男生人数比二、三班两个班的女生总数多**1**；③四、五、六班三个班的女生总数比七、八、九班三个班的男生总数多**1**．那么该校毕业生中男、女生人数比是多少？**

* 1. 如下表所示，由②知，一、二、三班的男生总数比二、三班总人数多1；由③知，四至九班的男生总数比四、五、六班总人数少1．

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 一班男生 | 比 | 二、三班女生 | 多1人 |
| 加上 | 二、三班男生 |  | 二、三班男生 |  |
|  | 一、二、三班男生 | 比 | 二、三班总人数 | 多1人 |
|  | 七、八、九班男生 | 比 | 四、五、六班女生 | 少1人 |
| 加上 | 四、五、六班男生 |  | 四、五、六班男生 |  |
|  | 四、五、六、七、八、九班男生 | 比 | 四、五、六班总人数 | 少1人 |

因此，一至九班的男生总数是二、三、四、五、六共五个班的人数之和，由于每班人数均相等，则女生总数等于四个班的人数之和．所以，男、女生人数之比是．

**B**

**6.小新、小志、小刚三人拥有的藏书数量之比为，三人一共藏书本，求他们三人各自的藏书数量.**

* 1. 根据题意可知，他们三人各自的藏书数量分别占三人藏书总量的、、，所以小新拥有的藏书数量为本，小志拥有的藏书数量为本，小刚拥有的藏书数量为本.

**7.在抗洪救灾区活动中，甲、乙、丙三人一共捐了**80**元．已知甲比丙多捐**18**元，甲、乙所捐资的和与乙、丙所捐资的和之比是，则甲捐元，乙捐元，丙捐元．**

* 1. 由于甲比丙多捐18元，所以甲、乙所捐资的和比乙、丙所捐资的和多18元，那么甲、乙所捐资的和为：(元)，乙、丙所捐资的和为元．所以，甲捐了(元)，乙捐了(元)，丙捐了(元)．

**8.有个皮球，分给两个班使用，一班分到的与二班分到的相等，求两个班各分到多少皮球？**

根据题意可知一班与二班分到的球数比，所以一班分到皮球个，二班分到皮球个．

**9.参加植树的同学共有人，已知六年级与五年级人数的比是，六年级比四年级多人，三个年级参加植树的各有多少人?**

* 1. 假设四年级和六年级人数同样多，则参加植树的同学共有人，四、五、六三个年级的人数比为，知道三个量的和及它们的比，就可以按比例分配，分别求出三个年级参加植树的人数．六年级：人；五年级：人；四年级：人．

**10.圆珠笔和铅笔的价格比是4：3，20支圆珠笔和21支铅笔共用71．5元．问圆珠笔的单价是每支多少元?**

* 1. 设圆珠笔的价格为4，那么铅笔的价格为3，则20支圆珠笔和21支铅笔的价格为20×4+21×3=143，则单位“1”的价格为71.5÷143=0.5元．所以圆珠笔的单价是*O*.5×4=2(元)．

**11.****甲、乙两只蚂蚁同时从点出发，沿长方形的边爬去，结果在距点厘米的点相遇，已知乙蚂蚁的速度是甲的倍，求这个长方形的周长．**

* 1. 两只蚂蚁在距点厘米的点相遇，说明乙比甲一共多走了(厘米)．又知乙蚂蚁的速度是甲蚂蚁的倍，相同时间内乙蚂蚁爬的路程与甲蚂蚁爬的路程比为：1.2：1＝6：5，

所以甲爬的路程是(厘米)，乙爬的路程是(厘米)，长方形的周长为(厘米)．

**12.甲乙两车分别从*A*，*B*两地出发，相向而行．出发时，甲、乙的速度比是5∶4，相遇后，甲的速度减少20％，乙的速度增加20％，这样，当甲到达*B*地时，乙离*A*地还有10千米．问：*A*，*B*两地相距多少千米？**

* 1. 甲、乙原来的速度比是5∶4，相遇后的速度比是：[5×（1－20％）]∶[4×（1＋20％）]＝4∶4．8＝5∶6．相遇时，甲、乙分别走了全程的和。设全程*x*千米，剩下的部分甲行的长度和乙行的长度之比为5：6，其中相遇后甲行驶了全长的4/9，所以乙行驶了全长的，所以乙一共行了全长，还剩1-＝，没有走所以*A*、*B*全长为450千米.

**C**

**13.师徒二人加工一批零件，师傅加工一个零件用**9**分钟，徒弟加工一个零件用**15**分钟．完成任务时，师傅比徒弟多加工**100**个零件，求师傅和徒弟一共加工了多少个零件？**

* 1. 师傅与徒弟的工作效率之比是，工作时间相同，工作量与工作效率成正比，所以师傅与徒弟分别完成总量的和，师傅和徒弟一共加工了个零件

**14.师徒二人共加工零件个，师傅加工一个零件用分钟，徒弟加工一个零件用分钟．完成任务时，师傅比徒弟多加工多少个零件？**

* 1. 师傅与徒弟的工作效率之比是，而工作时间相同，则工作量与工作效率成正比，所以师傅与徒弟分别完成总量的和，师傅比徒弟多加工零件个．

**15.、、三个水桶的总容积是公升，如果、两桶装满水，桶是空的；若将桶水的全部和桶水的，或将桶水的全部和桶水的倒入桶，桶都恰好装满．求、、三个水桶容积各是多少公升？**

* 1. 根据题意可知，桶水的全部加上桶水的等于桶水的全部加上桶水的，所以桶水的等于桶水的，那么桶水的全部等于桶水的，桶水为桶水的．所以、、三个水桶的容积之比是．又、、三个水桶的总容积是公升，所以桶的容积是公升，桶的容积是公升，桶的容积是公升．

**16.优胜教育四五六年级共有615名学生，已知六年级学生的，等于五年级学生的，等于四年级学生的。这三个年级各有多少名学生学生？**

* 1. 将六年级学生的，等于五年级学生的，等于四年级学生的，看作一个单位，那么六年级学生人数等于2个单位，五年级学生等于2.5个单位，四年级学生等于学生，所以六年级、五年级、四年级学生人数的比为，所以六年级学生人数为=180人，五年级学生人数为人，四年级学生人数为人

**17.一块长方形铁板，宽是长的．从宽边截去厘米，长边截去以后，得到一块正方形铁板．问原来长方形铁板的长是多少厘米?**

* 1. 如果只将长边截去，宽、长之比为，所以宽边的长度为厘米，所以原来铁板的长为厘米．

**18.一个正方形的一边减少，另一边增加米，得到一个长方形，这个长方形的面积与原正方形面积相等．原正方形的边长是多少米?**

* 1. 要保证面积不变，一边减少，即是原来的，另一边要变成原来的，即增加，所以原正方形的边长为(米).

**19.一把小刀售价元．如果小明买了这把小刀，那么小明与小强剩余的钱数之比是；如果小强买了这把小刀，那么两人剩余的钱数之比变为．小明原来有多少钱？**

* 1. 由已知，小强的钱相当于小明、小强买刀后所剩钱数和的，小明的钱相当于小明、小强买刀后钱数和的，所以小明、小强的钱数的比值为，而小明买刀后小明、小强的钱数之比为，所以小明买刀前后的钱数之比为，所以小刀的售价等于小明原来钱数的，所以小明的钱数为元。也可这样看，小明买刀与未买刀的钱数比为，小明的钱数为（元）

**20.甲、乙两人原有的钱数之比为，后来甲又得到**180**元，乙又得到**30**元，这时甲、乙钱数之比为，求原来两人的钱数之和为多少？**

* 1. 两人原有钱数之比为，如果甲得到180元，乙得到150元，那么两人的钱数之比仍为，现在甲得到180元，乙只得到30元，相当于少得到了120元，现在两人钱数之比为，可以理解为：两人的钱数分别增加180元和150元之后，钱数之比为，然后乙的钱数减少120元，两人的钱数之比变为，所以120元相当于4份，1份为30元，后来两人的钱数之和为元，所以原来两人的总钱数之和为元．

**21.一项机械加工作业，用**4**台型机床，**5**天可以完成；用**4**台型机床和**2**台型机床**3**天可以完成；用**3**台型机床和**9**台型机床，**2**天可以完成，若**3**种机床各取一台工作**5**天后，剩下、型机床继续工作，还需要\_\_\_\_\_\_ 天可以完成作业．**

* 1. 由于用4台型机床5天可以完成；用4台型机床和2台型机床3天可以完成，所以2台型机床3天完成的量等于4台型机床2天完成的量，则、两种机床每天完成的量的比为，即型机床每天完成的量为3，型机床每天完成的量为4，该项作业总量为，那么型机床每天完成的量为，3种机床各取一台工作5天后，剩下的工作量为，、型机床还需继续工作天．

**22.动物园门票大人元，小孩元．六一儿童节那天，儿童免票，结果与前一天相比，大人增加了，儿童增加了，共增加了人，但门票收入与前一天相同．六一儿童节这天共有多少人入园？**

* 1. 前一天大人与小孩的人数比为，六一那天增加的大人与增加的小孩人数比为，大人增加的人数为人，小孩增加的人数为人，大人的总数为人，小孩的总人数为人，总人数为人．



**1.甲、乙、丙三个数，已知，，求。**

* 1. 由可得到，，而，

所以：．

**2.有一堆糖果，其中奶糖占45％，再放人16块水果糖后，奶糖就只占25％那么，这堆糖果中有奶糖多少块?**

* 1. 方法一：原来奶糖占，后来占，因此后来的糖果数是奶糖的4倍，也比原来糖果多16粒，从而原来的糖果是16+(1)=20块.其中奶糖有20×=9块．

方法二：原来奶糖与其他糖(包含水果糖)之比是45％：(1-45％)=9：11,设奶糖有9份，其他糖(包含水果糖)有11份．现在奶糖与其他糖之比是25％：(1-25％)=1：3=9：27,奶糖的份数不变，其他糖的份数增加了27-11=16份，而其他糖也恰好增加了16块，所以，*l*份即1块．奶糖占9份，就是9块奶糖．

**3.甲、乙两个工人上班，甲比乙多走的路程，而乙比甲的时间少，甲、乙的速度比是．**

* 1. 甲走的路程是乙走的路程的，甲用的时间是乙用的时间的，所以甲的速度是乙的速度的，即甲、乙的速度比是．

**4.一堆围棋子有黑白两种颜色，拿走**15**枚白棋子后，黑子与白子的个数之比为；再拿走**45**枚黑棋子后，黑子与白子的个数比为，求开始时黑棋子与白棋子各有多少枚？**

* 1. 第二次拿走45枚黑棋，黑子与白子的个数之比由变为，而其中白棋的数目是不变的，所以黑棋由原来的10份变成现在的1份，减少了9份，这样原来黑棋的个数为(枚)，白棋的个数为(枚)．

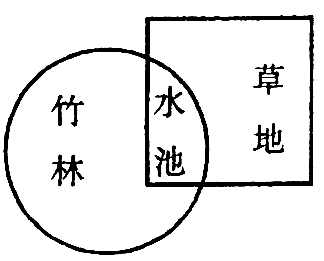
**5.加工某种零件，甲分钟加工个，乙分钟加工个，丙分钟加工个．现在三人在同样的时间内一共加工个零件．问：甲、乙、丙三人各加工多少个零件?**

* 1. 根据题意可知，甲、乙、丙的工作效率之比为，那么在相同的时间内，三人完成的工作量之比也是，所以甲加工了个零件，乙加工了个零件，丙加工了个零件。





**1.右图是一个园林的规划图，其中，正方形的是草地；圆的是竹林；竹林比草地多占地450平方米．问：水池占多少平方米?**



* 1. 正方形的是草地，那如果水池占1份，草地的面积便是3份；圆的是竹林，水池占1份，竹林的面积是6份。从而竹林比草地多出的面积是（6-3=）3份。3份的面积是450平方米，可见1份面积是450÷3=150（平方米），即水池面积是150平方米。

**2.乙两个班共种树若干棵，已知甲班种的棵数的等于乙班种的棵数的，且乙班比甲班多种树棵，甲、乙两个班各种树多少棵?**

* 1. 甲、乙两班种树棵数之比为：，甲班种树棵数为：(棵)，乙班种树棵数为：(棵)．

**3.甲本月收入的钱数是乙收入的，甲本月支出的钱数是乙支出的，甲节余240元，乙节余480元．甲本月收入多少元？**

* 1. 甲、乙本月收入的比是，分别节余240元和480元，支出的钱数之比是．如果乙节余480元，甲节余元，那么两人支出的钱数之比也是，现在甲只节余240元，多支出了60元，结果支出的钱数之比从变成了(即)，所以这60元就对应份，那么甲支出了元，所以甲本月收入为元．

**4.甲、乙两车分别从、两地同时相向开出，甲车速度是千米／小时，乙车速度是千米／小时，当甲车驶过、距离的多千米时与乙车相遇，、两地相距千米．**

* 1. 在相同的时间内，两车行驶的路程比等于两车的速度之比，由于两车的速度之比等于，那么、距离的多千米即是、距离的，所以千米的距离相当于全程的，全程的距离为(千米)．

**5.一个周长是厘米的大长方形，按图⑴与图⑵所示意那样，划分为四个小长方形．在图⑴中小长方形面积的比是，．而在图⑵中相应的比例是，.又知长方形的宽减去的宽所得到的差与的长减去的长所得到差之比为．求大长方形的面积．**

**（1）⑵**

**【解析】**因为，，所以；

因为，，所以，

设长方形的宽为,长为,得：．

得．又，所以，．

所以长方形面积．

**6.北京中学生运动会男女运动员比例为，组委会决定增加女子艺术体操项目，这样男女运动员比例变为；后来又决定增加男子象棋项目，男女比例变为,已知男子象棋项目运动员比女子艺术体操运动员多人，则总运动员人数为多少？**

* 1. 将运动会最初的运动员人数设为“”，那么男运动员人数为，女运动员人数为，而增加女子艺术体操项目，男运动员人数不变，仍然是，所以这时女运动员人数为，增加男子象棋项目，女运动员人数保持不变，仍然是，所以男运动员人数增加为．女子艺术体操项目人数为，男子象棋项目的人数为，男子象棋项目运动员比女子艺术体操运动员多，原来总运动员人数为人，男子象棋项目运动员有人，女子艺术体操运动员有人，所以现在的总运动员人数为人．

**7.袋子里红球与白球的数量之比是．放入若干只红球后，红球与白球数量之比变为；再放入若干只白球后，红球与白球数量之比变为．已知放入的红球比白球少只．那么原来袋子里共有只球．**

* 1. 根据第一次操作白球的数量不变，把改写成，改写成．第二次操作相对于第一次操作红球数量不变，把改写成，这时我们可以看出，经过两次操作后，红球共增加了份，白球增加了份．原来红球有个，白球有个．两种球共个．

**8.有若干个突击队参加某工地会战，已知每个突击队人数相同，而且每个队的女队员的人数是该队的男队员的，以后上级从第一突击队调走了该队的一半队员，而且全是男队员，于是工地上的全体女队员的人数是剩下的全体男队员的，问开始共有多少支突击队参加会战？**

* 1. 由于每个队的女队员的人数是该队的男队员的，所以原来全体女队员的人数是全体男队员的，即原来女队员的人数占所有队员人数的，调走第一突击队的一半队员后，女队员的人数占剩下的队员总数的，由于调走的全是男队员，女队员的人数没有变化，所以调走后的队员总数与调走前的队员总数之比为，即调走的队员人数占原来队员总人数的，而调走的队员为第一突击队的一半，且每个突击队人数相同，，故开始共有4支突击队参加会战．