第十八讲 因数与倍数





**因数与倍数**

因数与倍数的关系很简单，其实就是整除关系的另外一种称谓；当然也有概念的延伸，就是在多个数之间去研究公因数和公倍数，经常地应用最大公因数与最小公倍数解题．下面我们就先回顾基本的概念：

1. **公因数与最大公因数**

几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数；其中最大的一个，叫做这几个数的最大公因数．例如：12的因数有1，2，3，4，6，12．18的因数有l，2，3，6，9，18 那么它们的公因数有l，2，3，6；其中最大公因数为6．

1. **公倍数与最小公倍数**

几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数；其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数．例如：15的倍数有：15，30，45，60，75，90， 105，120，…． 10的倍数有：10，20，30，40，50，60，70， 80。90，…．那么它们的公倍数有30，60，90，…是有无穷多个的；而最小公倍数却只有一个，为30．

1. **互质的概念**

如果两个数的最大公因数是1，那么这两个数互质．显然的，两个不同的质数一定互质．

1. **辗转相除法求最大公因数**

（辗转相除法）用辗转相除法求4811和1981的最大公因数。  
　　解：∵4811=2×1981+849，  
　　1981=2×849+283，  
　　849=3×283，  
　　∴（4811，1981）=283。  
补充说明：如果要求三个或更多的数的最大公因数，可以先求其中任意两个数的最大公因数，再求这个公因数与另外一个数的最大公因数，这样求下去，直至求得最后结果。

1. **最大公因数与最小公倍数性质**
   1. **分数的计算 ； **
   2. **约倍关系 **



1.会求几个数的最大公因数与最小公倍数。

2.能用最大公因数与最小公倍数的性质解题。



**例1：**用一个数去除30、60、75，都能整除，这个数最大是多少？

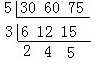
**分析：**∵要求的数去除30、60、75都能整除，

　　∴要求的数是30、60、75的公约数。

　　又∵要求符合条件的最大的数，

　　∴就是求30、60、75的最大公约数。

解：∵



　　（30，60，75）=5×3=15

　　这个数最大是15。

**例2：**一个数用3、4、5除都能整除，这个数最小是多少？

**分析**由题意可知，要求的数是3、4、5的公倍数，且是最小的公倍数。

　　解：∵［3，4，5］=3×4×5=60，

　　∴用3、4、5除都能整除的最小的数是60。

**例3：**有三根铁丝，长度分别是120厘米、180厘米和300厘米.现在要把它们截成相等的小段，每根都不能有剩余，每小段最长多少厘米？一共可以截成多少段？

**分析：**∵要截成相等的小段，且无剩余，

　　∴每段长度必是120、180和300的公约数。



　　又∵每段要尽可能长，

　　∴要求的每段长度就是120、180和300的最大公约数.

　　（120，180，300）=30×2=60

　　∴每小段最长60厘米。

　　120÷60+180÷60+300÷60

　　=2＋3＋5=10（段）

　　答：每段最长60厘米，一共可以截成10段。

**例4：**加工某种机器零件，要经过三道工序.第一道工序每个工人每小时可完成3个零件，第二道工序每个工人每小时可完成10个，第三道工序每个工人每小时可完成5个，要使加工生产均衡，三道工序至少各分配几个工人？

**分析：**要使加工生产均衡，各道工序生产的零件总数应是3、10和5的公倍数.要求三道工序“至少”要多少工人，要先求3、10和5的最小公倍数。



　　［3，10，5］=5×3×2=30

　　∴各道工序均应加130个零件。

　　30÷3=10（人）

　　30÷10=3（人）

　　30÷5=6（人）

　　答：第一道工序至少要分配10人，第二道工序至少要分配3人，第三道工序至少要分配6人。

**例5：**一次会餐供有三种饮料.餐后统计，三种饮料共用了65瓶；平均每2个人饮用一瓶A饮料，每3人饮用一瓶B饮料，每4人饮用一瓶C饮料.问参加会餐的人数是多少人？

**分析：**由题意可知，参加会餐人数应是2、3、4的公倍数。

　　解：∵[2，3，4]=12

　　∴参加会餐人数应是12的倍数。

　　又∵12÷2+12÷3+12÷4

　　=6+4+3=13（瓶），

　　∴可见12个人要用6瓶A饮料，4瓶B饮料，3瓶C饮料，共用13瓶饮料。

　　又∵65÷13=5，

　　∴参加会餐的总人数应是12的5倍，

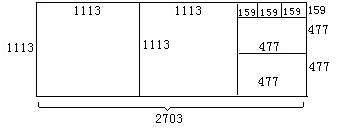
　　12×5=60（人）。

　　答：参加会餐的总人数是60人。

**例6：**一张长方形纸，长2703厘米，宽1113厘米.要把它截成若干个同样大小的正方形，纸张不能有剩余且正方形的边长要尽可能大.问：这样的正方形的边长是多少厘米？

**分析：**由题意可知，正方形的边长即是2703和1113的最大公约数.在学校，我们已经学过用短除法求两个数的最大公约数，但有时会遇到类似此题情况，两个数除了1以外的公约数一下不好找到.但又不能轻易断定它们是互质数.怎么办？在此，我们以例6为例介绍另一种求最大公约数的方法。

　　对于例6，可做如下图解：



　　从图中可知：在长2703厘米、宽1113厘米的长方形纸的一端，依次裁去以宽（1113厘米）为边长的正方形2个.在裁后剩下的长1113厘米，宽477厘米的长方形中，再裁去以宽（477厘米）为边长的正方形2个.然后又在裁剩下的长方形（长477厘米，宽159厘米）中，以159厘米为边长裁正方形，恰好裁成3个，且无剩余.因此可知，159厘米是477厘米、1113厘米和2703厘米的约数.所以裁成同样大的，且边长尽可能长的正方形的边长应是159厘米.所以，159厘米是2703和1113的最大公约数。

　　让我们把图解过程转化为计算过程，即：

　　2703÷1113，商2余477；

　　1113÷477，商2余159；

　　477÷159，商3余0。

　　或者写为

　　2703=2×1113+477，

　　1113=2×477+159，

　　477=3×159。

　　当余数为0时，最后一个算式中的除数159就是原来两个数2703和1113的最大公约数.

　　可见，477=159×3，

　　1113=159×3×2+159=159×7，

　　2703=159×7×2+477

　　=159×7×2+159×3=159×17。

　　又∵7和17是互质数，

　　∴159是2703和1113的最大公约数。

　　我们把这种求最大公约数的方法叫做辗转相除法.辗转相除法的优点在于它能在较短的时间内求出任意两个数的最大公约数。

**例7：**用辗转相除法求4811和1981的最大公约数。

　　解：∵4811=2×1981+849，

　　1981=2×849+283，

　　849=3×283，

　　∴（4811，1981）=283。

　　补充说明：如果要求三个或更多的数的最大公约数，可以先求其中任意两个数的最大公约数，再求这个公约数与另外一个数的最大公约数，这样求下去，直至求得最后结果.也可以直接观察，依次试公有的质因数。

**例8：**求1008、1260、882和1134四个数的最大公约数是多少？

　　解：∵（1260，1008）=252，

　　（882，1134）=126，

　　又（252，126）=126，

　　∴（1008，1260，882，1134）=126。

　　求两个数的最小公倍数，除了用短除法外，是否也有其他方法呢？请看例9.

**例9：**两个数的最大公约数是4，最小公倍数是252，其中一个数是28，另一个数是多少？

**解：**设要求的数为，则有：****

　　∴x=4×y28=4×7

　　∴28x=4×y×4×7

　　又∵4是x和28的最大公约数，（y，7）=1，

　　∴4×y×7是x和28的最小公倍数。

　　∴x×28=4×252

　　∴x=4×252÷28=36

　　∴要求的数是36。

　　通过例9的解答过程，不难发现：如果用a和b表示两个自然数，那么这两个自然数的最大公约数与最小公倍数关系是：

　　（a，b）×[a，b]=a×b。

　　这样，求两个数的最小公倍数的问题，即可转化成先求两个数的最大公约数，再用最大公约数除两个数的积，其结果就是这两个数的最小公倍数。

**例10：**求21672和11352的最小公倍数。

　　解：∵（21672，11352）=1032

　　（1032可以用辗转相除法求得）

　　∴[21672，11352]=21672×11352÷1032

　　=238392。

　　答：21672和11352的最小公倍数是238392.



**A**

1.两个自然数的最大公约数是6，最小公倍数是72。已知其中一个自然数是18，求另一个自然数。

答案：24

2.两个自然数的最大公约数是7，最小公倍数是210。这两个自然数的和是77，求这两个自然数。

答案：35和42

3.已知a与b，a与c的最大公约数分别是12和15，a，b，c的最小公倍数是120，求a，b，c。

答案：a为60，b为24，c为15或a为120，b为12，c为15

4.已知两个自然数的和是50，它们的最大公约数是5，求这两个自然数。

答案：5和45，15和35

5.已知两个自然数的积为240，最小公倍数为60，求这两个数。

答案：4和60，12和20

B

6.用自然数a去除498，450，414，得到相同的余数，a最大是多少？

答案：12

7.现有三个自然数，它们的和是1111，这样的三个自然数的公约数中，最大的可以是多少？

答案：101

8.狐狸和袋鼠进行跳远比赛，狐狸每次跳4.5米，袋鼠每次跳2.75米，它们每秒都只跳一次。比赛途中，从起点开始，每隔12.375米设一个陷阱，当它们之中一个先掉进陷阱时，另一个跳了多少米?

答案：40.5

9.用长9厘米、宽6厘米、高4厘米的长方体搭一个正方体，至少需要多少块这样的长方体木块？

答案：216

10.加工某种机器零件，要经过三道工序.第一道工序每个工人每小时可完成8个零件，第二道工序每个工人每小时可完成12个，第三道工序每个工人每小时可完成16个，要使加工生产均衡，三道工序至少各分配几个工人？

答案：6，4，3

**C**

11.一个两位数去除251，得到的余数是41.求这个两位数。

答案：42或70。

12.用一个自然数去除另一个整数，商40，余数是16.被除数、除数、商数与余数的和是933，求被除数和除数各是多少？

答案：被除数是856，除数是21。

13.某年的十月里有5个星期六，4个星期日，问这年的10月1日是星期几？

答案：这年的10月1日是星期四。

14. 3月18日是星期日，从3月17日作为第一天开始往回数（即3月16日（第二天），15日（第三天），…）的第1993天是星期几？

答案：第1993天必是星期二。

15.一个数除以3余2，除以5余3，除以7余2，求适合此条件的最小数。

答案：适合条件的最小的自然数是23。

16.一个数除以5余3，除以6余4，除以7余1，求适合条件的最小的自然数。

分析 “除以5余3”即“加2后被5整除”，同样“除以6余4”即“加2后被6整除”。

答案：适合条件的最小的自然数是148。

17.一个数除以3余2，除以5余3，除以7余4，求符合条件的最小自然数。

答案：符合条件的最小的自然数是53。

18.一个布袋中装有小球若干个.如果每次取3个，最后剩1个；如果每次取5个或7个，最后都剩2个.布袋中至少有小球多少个？

答案：布袋中至少有小球37个。

19. 69、90和125被某个正整数N除时，余数相同，试求N的最大值。

答案：N最大是7。



1.甲数是乙数的三分之一，甲数和乙数的最小公倍数是54，甲数是多少？乙数是多少？

**答案：**甲数是18，乙数是54。

2.一块长方形地面，长120米，宽60米，要在它的四周和四角种树，每两棵之间的距离相等，最少要种树苗多少棵？每相邻两棵之间的距离是多少米？

**答案：**每两棵之间的距离是60米，最少要种树苗6棵。

3.已知两个自然数的积是5766，它们的最大公约数是31.求这两个自然数。

**答案：**设这两个自然数为A和B。

　　[A，B]=5766÷31=186。

　　∵186=2×3×31，

　　∴这两个自然数为31和186或62和93。

4.兄弟三人在外工作，大哥6天回家一次，二哥8天回家一次，小弟12天回家一次.兄弟三人同时在十月一日回家，下一次三人再见面是哪一天？

**答案：**10月25日。

5.将长25分米，宽20分米，高15分米的长方体木块锯成完全一样的尽可能大的立方体，不能有剩余，每个立方体的体积是多少？一共可锯多少块？

**答案：**每个立方体的体积是125立方分米.一共可锯60块。

6.一箱地雷，每个地雷的重量相同，且都是超过1的整千克数，去掉箱子后地雷净重201千克，拿出若干个地雷后，净重183千克.求一个地雷的重量？

**答案：**3千克.





1. 将一个两位数的十位数字减去或加上它的个位数字，所得到的两个数都是78的大于1的约数。求这个两位数。

**答案：**42或85

2. 有一个自然数，它的最小的两个约数之和是4，最大的两个约数之和是100，求这个自然数。

**答案：**75

3. 有一个自然数，它的最大的两个约数之和是123，求这个自然数。

**答案：**82

4. 求只有8个约数但不大于30的所有自然数。

**答案：**30，24

5. 100以内约数个数最大的自然数有五个，它们分别是几？

**答案：**60，72，84，90，96

6. 一个学生做两个两位数乘法时，把其中的一个乘数的个位数字9误看成7，得出的乘积是756，问：正确的乘积是多少？

**答案：**812

7. 一个数如果等于除它本身以外的所有约数之和，则称此数为完全数。已知30以内有两个完全数，请将它们找出来。

**答案：**6，28

8. a、b两数的最大公约数是12，已知a有8个约数，b有9个约数，求a和b。

**答案：**a=24，b=36

9. 现有三个自然数，它们的和是1111，这样的三个自然数的公约数最大可以得多少?

**答案：**101

10. A，B是两个奇数，它们的最大公约数是3，求（A+B）和（A-B）的最大公约数。

**答案：**6

11. 甲、乙两数的最大公约数是37，两数的和是444，这样的自然数有哪几组？

**答案：**37与407或185与259

12. 试用2，3，4，5，6，7六个数码组成两个三位数，使这两个三位数与540的最大公约数尽可能大。

**答案：**324和756