第二十一讲 数论综合





**数论是历年小升初的考试难点，各学校都把数论当压轴题处理。由于行程题的类型较多，题型多样，变化众多，所以对学生来说处理起来很头疼。数论内容包括：整数的整除性，同余,奇数与偶数,质数与合数,约数与倍数,整数的分解与分拆等。作为一个理论性比较强的专题，数论在各种杯赛中都会占不小的比重，而且数论还和数字谜,不定方程等内容有着密切的联系,其重要性是不言而喻的。**

**基本公式**

**1.已知b|c,a|c,则[a,b]|c,特别地，若(a,b)=1,则有ab|c。**

**2.已知c|ab，(b,c)=1,则c|a。**

**3.唯一分解定理：任何一个大于1的自然数n都可以写成质数的连乘积，即**

**n= p1× p2×...×pk（#)**

**其中p1<p2<...<pk为质数，a1,a2,....ak为自然数，并且这种表示是唯一的。**

**该式称为n的质因子分解式。**

**4.约数个数定理：设自然数n的质因子分解式如（#）**

**那么n的约数个数为d(n)=(a1+1)(a2+1)....(ak+1)**

**所有约数和：（1+P1+P1+…p1）（1+P2+P2+…p2）…（1+Pk+Pk+…pk）**

**5.用[a,b]表示a和b的最小公倍数，(a,b)表示a和b的最大公约数，那么有ab=[a,b]×(a,b)。**

**6.自然数是否能被3，4，25，8，125，5，7,9，11，13等数整除的判别方法。**

**7.平方数的总结：**

**①平方差：A-B=（A+B）（A-B），其中我们还得注意A+B， A-B同奇偶性。**

**②约数：约数个数为奇数个的是完全平方数。约数个数为3的是质数的平方。**

**③质因数分答案：把数字分答案，使他满足积是平方数。**

**④立方和：A3+B3=(A+B)(A2-AB+B2)。**

**8.十进制自然数表示法，十进制和二进制，八进制，五进制等的相互转化。**

**9.周期性数字：abab=ab×101**



1.全面掌握数论的几大知识点，能否在考试中取得高分，解出数论的压轴大题是关键。

2.牢记基本公式，并在解题中灵活运用公式。



**例1:将4个不同的数字排在一起，可以组成24个不同的四位数（4×3×2×1=24）。将这24个四位数按从小到大的顺序排列的话，第二个是5的倍数；按从大到小排列的话，第二个是不能被4整除的偶数；按从小到大排列的第五个与第二十个的差在3000-4000之间。请求出这24个四位数中最大的一个。**

答案：不妨设这4个数字分别是a>b>c>d

那么从小到大的第5个就是dacb,它是5的倍数，因此b=0或5，注意到b>c>d,所以b=5;

从大到小排列的第2个是abdc,它是不能被4整除的偶数；所以c是偶数，c＜b=5，c=4或2

从小到大的第二十个是adbc,第五个是dacb,它们的差在3000-4000之间，所以a=d+4；

因为a>b,所以a至少是6，那么d最小是2，所以c就只能是4。而如果d=2，那么abdc的末2位是24，它是4的倍数，和条件矛盾。因此d=3,从而a=d+4=3+4=7。

这24个四位数中最大的一个显然是abcd,我们求得了a=7,b=5,c=4,d=3

所以这24个四位数中最大的一个是7543。

**例2：一个5位数，它的各个位数字和为43，且能被11整除，求所有满足条件的5位数？**

答案：现在我们有两个入手的选择，可以选择数字和，也可以选择被11整除，但我们发现被11整除性质的运用要具体的数字，而现在没有，所以我们选择先从数字和入手。

5位数数字和最大的为9×5=45，这样43的可能性只有9，9，9，9，7或9，9，9，8，8。这样我们接着用11的整除特征，发现符合条件的有99979，97999，98989符合条件。

**例3：由1，3，4，5，7，8这六个数字所组成的六位数中，能被11整除的最大的数是多少？**

答案：各位数字和为1+3+4+5+7+8=28。所以偶数位和奇数位上数字和均为14

为了使得该数最大，首位必须是8，第2位是7，14-8=6

那么第3位一定是5，第5位为1，该数最大为875413。

**例4：从一张长2002毫米，宽847毫米的长方形纸片上，剪下一个边长尽可能大的正方形，如果剩下的部分不是正方形，那么在剩下的纸片上再剪下一个边长尽可能大的正方形。按照上面的过程不断的重复，最后剪得的正方形的边长是多少毫米？**

答案：边长是2002和847的最大公约数，可用辗转相除法求得 （2002,847）=77

所以最后剪得的正方形的边长是77毫米。

辗转相除示例：

2002÷847=2…308 求2个数的最大公约数，就用大数除以小数  
847÷308=2…231 用上一个式子的除数除以余数一直除到除尽为止

308÷231=1…77 用上一个式子的除数除以余数一直除到除尽为止

231÷77=3 最后一个除尽的式子的除数就是两个数的最大公约数

**例5：一根木棍长100米，现从左往右每6米画一根标记线，从右往左每5米作一根标记线，请问所有的标记线中有多少根距离相差4米？**

答案：100能被5整除，所以每5米作标记线从左往右还是从右往左都是一样的。这样我们都以从左往右作，可见转化成讨论5，6的最小公倍数中的情况，画图可得有2根距离为4米，所以30，60，90里各有2条，但发现最后96和100也是距离4米，所以总共2×3+1=7。

**例6：某住宅区有12家住户，他们的门牌号分别是1，2，…,12.他们的电话号码依次是12个连续的六位自然数，并且每家的电话号码都能被这家的门牌号整除，已知这些电话号码的首位数字都小于6，并且门牌号是9的这一家的电话号码也能被13整除，问：这一家的电话号码是什么数？**

答案：

设第一户电话号是x+1,第二户x+2,….第12户电话号x+12

根据条件得x+i是i的倍数(i=1,2,…,12)因此x是1，2，….12的公倍数

[1,2,…..12]=27720

所以x=27720m

27720m+9是13的倍数，27720除以13余数为4

所以4m+9是13的倍数m=1,14,27….

第一家电话号码是27720m+1 m取14合适；

因此第一家电话号码是27720\*14+1=388081



**A**

1．一个六位数23□56□是88的倍数,这个数除以88所得的商是\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_.

**答案：**

一个数如果是88的倍数,这个数必然既是8的倍数,又是11的倍数.根据8的倍数,它的末三位数肯定也是8的倍数,从而可知这个六位数个位上的数是0或8.而11的倍数奇偶位上数字和的差应是0或11的倍数,从已知的四个数看,这个六位数奇偶位上数字的和是相等的,要使奇偶位上数字和差为0,两个方框内填入的数字是相同的,因此这个六位数有两种可能

23 0 56 0 或23 8 56 8

又 23056088=2620

23856888=2711

所以,本题的答案是2620或2711.

2．下面一个1983位数33…3□44…4中间漏写了一个数字(方框),已知这

991个 991个

个多位数被7整除，那么中间方框内的数字是\_\_\_\_\_.

**答案：**

33…3□44…4

991个 991个

=33…310993+3□410990+44…4

990个 990个

因为111111能被7整除，所以33…3和44…4都能被7整除,所以只要

990个 990个

3□4能被7整除，原数即可被7整除.故得中间方框内的数字是6.

3．只修改21475的某一位数字,就可知使修改后的数能被225整除,怎样修改？

**答案：**

因为225=259,要使修改后的数能被25整除,就要既能被25整除,又能被9整除,被25整除不成问题,末两位数75不必修改,只要看前三个数字即可,根据某数的各位数字之和是9的倍数,则这个数能被9整除的特征,因为2+1+4+7+5=19,19=18+1,19=27-8,所以不难排出以下四种改法:把1改为0；把4改为3；把1改为9；把2改为1.

4．***2，3，5，7，11，…***都是质数，也就是说每个数只以1和它本身为约数.已知一个长方形的长和宽都是质数个单位,并且周长是36个单位.问这个长方形的面积至多是多少个平方单位?

**答案：**

由于长+宽是 362=18

将18表示为两个质数和 18=5+13=7+11

所以长方形的面积是 513=65或711=77

故长方形的面积至多是77平方单位.

5.把7、14、20、21、28、30分成两组，每三个数相乘，使两组数的乘积相等.

**答案：**

先把14,20,21,28,30分解质因数,看这六个数中共有哪几个质因数,再分摊在两组中,使两组数乘积相等.

14=72 20=225

21=37 28=227

30=235 7

从上面五个数分解质因数来看,连7在内共有质因数四个7,六个2,二个3,二个5,因此每组数中一定要含三个2,一个3,一个5,二个7.

六个数可分成如下两组(分法是唯一的):

第一组: 7、28、和30

第二组：14、21和20

且72830=142120=5880满足要求.

**B**

6．有这样的两位数,它的两个数字之和能被4整除,而且比这个两位数大1的数,它的两个数字之和也能被4整除.所有这样的两位数的和是\_\_\_\_.

**答案：**

符合条件的两位数的两个数字之和能被4整除,而且比这个两位数大1的数,如果十位数不变,则个位增加1,其和便不能整除4,因此个位数一定是9,这种两位数有:39、79.

所以,所求的和是39+79=118.

7.学生1430人参加团体操,分成人数相等的若干队,每队人数在100至200之间,问哪几种分法?

**答案：**

把1430分解质因数得1430=251113

根据题目的要求,应在2、5、11及13中选用若干个数，使它们的乘积在100到200之间，于是得三种答案：

（1）2511=110；

（2）2513=130；

（3）1113=143.

所以,有三种分法:一种是分为13队,每队110人；二是分为11队，每队130人；三是分为10队，每队143人.

8.四只同样的瓶子内分别装有一定数量的油,每瓶和其他各瓶分别合称一次,记录千克数如下:8、9、10、11、12、13.已知四只空瓶的重量之和以及油的重量之和均为质数,求最重的两瓶内有多少油?

**答案：**

于每只瓶都称了三次,因此记录数之和是4瓶油(连瓶)重量之和的3倍,即4瓶油(加瓶)共重

(8+9+10+11+12+13)3=21(千克)

而油重之和及瓶重之和均为质数,所以它们必为一奇一偶,而质数中是偶数的质数只有2,故有

(1)油重之和为19千克,瓶重之和为2千克,每只瓶重千克,

最重的两瓶内的油为13-2=12(千克).

(2)油重之和为2千克,瓶重之和为19千克,每只瓶重千克,最重的两瓶内的油为13-2=(千克),这与油重之和为2千克矛盾,不合要求,删去.

9．一个小于200的自然数,它的每位数字都是奇数,并且它是两个两位数的乘积,那么这个自然数是\_\_\_\_\_.

**答案：**

因为这个数可以分解为两个两位数的积，而且1515=225>200,所以其中至少有1个因数小于15,而且这些因数均需是奇数,但11不可能符合条件,因为对于小于200的自然数凡11的倍数,具有隔位数字之和相等的特点,个位百位若是奇数,十位必是偶数.所以只需检查13的倍数中小于200的三位数1313=169不合要求,1315=195适合要求.所以,答案应是195.

10．试问,能否将由1至100这100个自然数排列在圆周上,使得在任何5个相连的数中,都至少有两个数可被3整除？如果回答：“可以”，则只要举出一种排法；如果回答：“不能”，则需给出说明.

**答案：**

假设能够按照题目要求在圆周上排列所述的100个数,我们来按所排列顺序将它们每5个分为一组,可得20组,其中每两组都没有共同的数,于是,在每一组的5个数中都至少有两个数是3 的倍数.从而一共有不少于40个数是3 的倍数.但事实上,在1至100的自然数中有33个数是3的倍数,导致矛盾.

C

11.一个学校参加兴趣活动的学生不到100人，其中男同学人数超过总数的4/7 ，女同学的人数超过总数的2/5 。问男女生各多少人？

**答案：**男生超过总数的4/7就是说女生少个总数的3/7，这样女生的范围在2/5～3/7之间，同理可得男生在4/7～3/5之间，这样把分数扩大，我们可得女生人数在28/70～30/70之间，所以只能是29人，这样男生为41人。

12.2005×684×375×□最后4位都是0,请问□里最小是几?

**答案：**先分析1×2×3×4××10的积的末尾共有多少个0。由于分解出2的个数比5多，这样我们可以得出就看所有数字中能分解出多少个5这个质因数。而能分解出5的一定是5的倍数。注意：5的倍数能分解一个5，25的倍数分解出2个5，125的倍数能分解出3个5……最终转化成计数问题，如5的倍数有[10/5]=2个。

2005=5×401 684=2×2×171

375=3×5×5×5前三个数里有2个质因子2，4个质因子5，要使得乘积的最后4位都是0

应该有4个质因子2和4个质因子5，还差2个质因子。因此□里最小是4。

13.03 年101中学招生人数是一个平方数，04年由于信息发布及时，04年的招生人数比03年多了101人，也是一个平方数，问04年的招生人数？

**答案：**看见两个平方数，发现跟平方差相关，这样我们大胆的设03年的为A，04年的为B，从中我们发现04年的比03年多101人，这样我们可以列式子B- A=101

此后思路要很顺，因为看见平方差只有一种方法那就是按公式展开，

所以B- A=（A+B）（A-B）=101，可见右边的数也要分成2个数的积，还得考虑同奇偶性，但101是个质数，所以101只能分成101×1，这样A+B=101，A-B=1，所以A=50，B=51，所以04年的招生人数为51×51=2601。

14.1、2、3、4…2008这2008个数的最小公倍数等与多少个2与一个奇数的积？

答案：最小公倍数就是分解质因数中共有的最多因数，这样我们发现除2以外都是奇数质因数，可见我们只要找需要多少个2，所以只要看1～2008中2n谁最大，可见210=1024，所以为10 个2。

15.有15位同学，每位同学都有编号，它们是1号到15号。1号同学写了一个自然数，2号说：“这个数能被2整除”，3号说“这个数能被3整除”，……，依次下去，每位同学都说，这个数能被他的编号数整除，1号作了一一验证，只有编号相邻的两位同学说得不对，其余同学都对，问：（1）说得不对的两位同学，他们的编号是哪两个连续自然数？（2）如果告诉你，1号写的数是五位数，请求出这个数。（写出解题过程）

答案：（1）首先可以断定编号是2，3，4，5，6，7号的同学说的一定都对。不然，其中说的不对的编号乘以2后所有编号也将说得不对，这样就与“只有编号相邻的两位同学说的不对”不符合。因此，这个数能被2，3，4，5，6，7都整除。

其次利用整除性质可知，这个数也能被2×5，3×4，2×7都整除，即编号为10，12，14的同学说的也对。从而可以断定说的不对的编号只能是8和9。

（2）这个数是2，3，4，5，6，7，10，11，12，13，14，15的公倍数

由于上述十二个数的最小公倍数是60060

因为60060是一个五位数，而十二个数的其他公倍数均不是五位数，所以1号同学写的数就是60060。



1.有\_\_\_\_个四位数满足下列条件：它的各位数字都是奇数；它的各位数字互不相同；它的每个数字都能整除它本身。

答案：6

2.如果在一个两位数的两个数字之间添写一个零，那么所得的三位数是原来的数的9倍，问这个两位数

是＿＿。

答案：设原来数为ab，这样后来的数为a0b,把数字展开我们可得：100a+b=9×(10a+b),所以我们可以知道5a=4b,所以a=4,b=5,所以原来的两位数为45。

3. ++=＿＿。

答案：周期性数字，每个数约分后为+++=1

4. 甲、乙、丙代表互不相同的3个正整数，并且满足：甲×甲=乙+乙=丙×135．那么甲最小是\_\_\_\_。

答案：题中要求丙与135的乘积为甲的平方数，而且是个偶数（乙+乙），这样我们分解135=5×3×3×3，所以丙最小应该是2×2×5×3，所以甲最小是：2×3×3×5=90。

5.下列数不是八进制数的是( )

A、125 B、126 C、127 D、128

答案：八进制数是由除以8的余数得来的，不可能出现8，所以答案是D。





1．在1～100这100个自然数中，所有不能被9整除的数的和是多少？

答案：1+2+……+100=5050

9+18+27+……+99=9×(1+2+……+11)=495

随意1-100中所有不能被9整除的数的和是5050-495=4555

2．某班学生不超过60人，在一次数学测验中，分数不低于90分的人数占，得80～89分的人数占，得70～79分得人数占，那么得70分以下的有\_\_\_\_\_\_\_\_人。

答案：有、、，说明总人数一定为7的倍数、2的倍数、3的倍数，故为[7、2、3]＝42的倍数；

又由于人数不超过60人，故这班的人数只能为42人。

从而70分以下的有：42×＝1人。

3．自然数N是一个两位数，它是一个质数，而且N的个位数字与十位数字都是质数，这样的自然数有\_\_\_\_\_\_\_个。

答案：枚举法：23，37，53，73，，有4个

4.三个自然数，其中每一个数都不能被另外两个数整除，而其中任意两个数的乘积却能被第三个数整除，那么这样的三个自然数的和的最小值是多少？

答案：这三个自然数最小是6，10，15（分别是2×3,2×5,3×5）

和的最小值为31。

5.五个连续偶数之和是完全平方数，中间三个偶数之和是立方数（即一个整数的三次方），这样一组数中的最大数的最小值是多少？

答案：设中间一个数为2x

那么5个数的和为10x=m^2

中间3个数的和为6x=n^3

设x=2^p × 3^q × 5^r

再根据一个数是完全平方数等价于它的各个质因子的幂都是偶数，一个数是立方数等价于他的各个质因子的幂都是3的倍数可以求得p=5,q=2,r=3

X=36000

因此所求为2x+4=72004

6.一个数减去100是一个平方数，减去63也是一个平方数，问这个是多少？

答案：A-B=（A+B）（A-B）=37=37×1，考虑同奇偶性，可知A=19，B=18，这样这个数为461。

7.从左向右编号为1至1991号的1991名同学排成一行．从左向右1至11报数，报数为11的同学原地不动，其余同学出列；然后留下的同学再从左向右1至11报数，报数为11的同学留下，其余的同学出列；留下的同学第三次从左向右1至1l报数，报到11的同学留下，其余同学出列．那么最后留下的同学中，从左边数第一个人的最初编号是\_\_\_\_\_\_．

答案:第一次报数后留下的同学，他们最初编号都是11的倍数；第二次报数后留下的同学，他们最初编号都是=121的倍数；第三次报数后留下的同学，他们最初编号都是=1331的倍数．因此，第三次报数后留下的同学中，从左边数第一个人的最初编号是1331．

8.有1997个奇数，它们的和等于它们的乘积．其中只有三个数不是l，而是三个不同的质数．那么，这样的三个质数可以是、、．

答案:设a、b、c为三个不同的质数，根据题意

1994+a+b+C=a·b·c．

取a=3，b=5，得1994+3+5+c=15c，解出c=143不是质数；

取a=3，b=7，得1994+3+7+c=21c，解出c=不是整数；

取a=5，b=7，得1994+5+7+c=35C，解出c=59．

故5、7、59是满足题意的三个质数．