本节内容

处理冲突的方法

——开放定址法

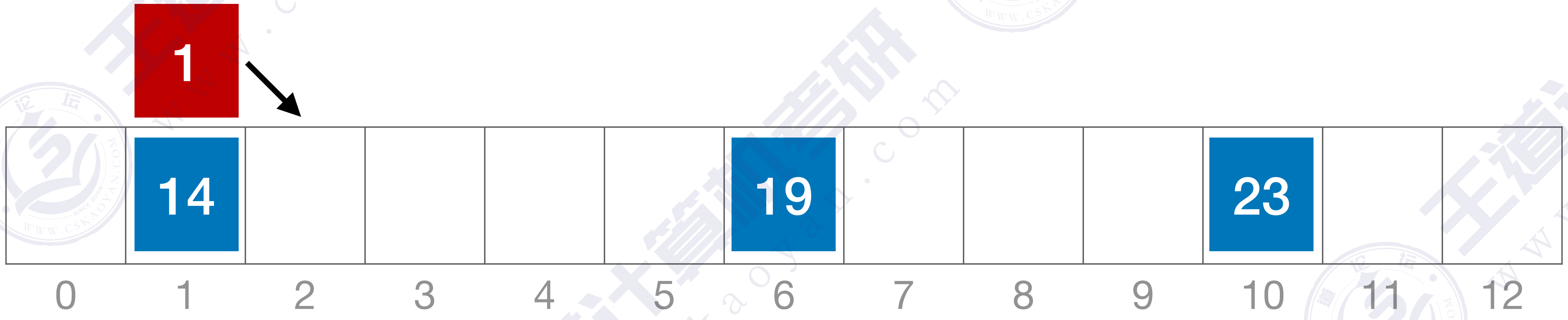
知识总览

- 处理冲突的方法——开放定址法
  - 开放定址法的原理
  - 四种常用方法
    - 线性探测法
    - 平方探测法
    - 双散列法
    - 伪随机序列法

如何处理“冲突”？——开放定址法

例：某散列表的长度为13，散列函数 H(key)=key%13。依次将数据元素 19、14、23、1 插入散列表：

19%13=6
14%13=1
23%13=10
1%13=1



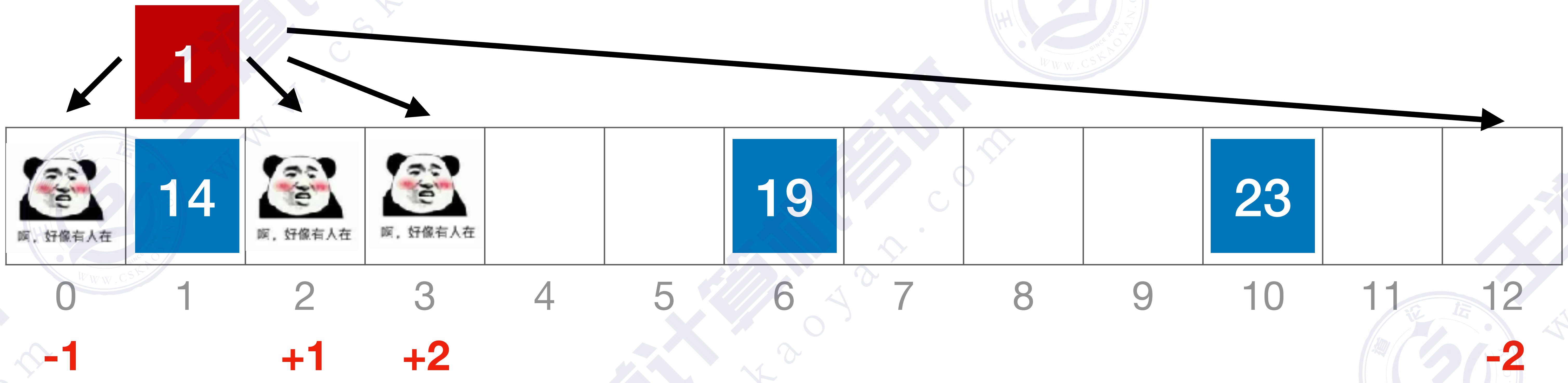
开放定址法：如果发生“冲突”，就给新元素找另一个空闲位置。

为什么叫“开放定址”？—— 一个散列地址，既对同义词开放，也对非同义词开放。

开放定址法的基本原理

开放定址法：如果发生“冲突”，就给新元素找另一个空闲位置。

19%13=6
14%13=1
23%13=10
1%13=1



待解决的问题：用什么规则确定“另一个空闲位置”？

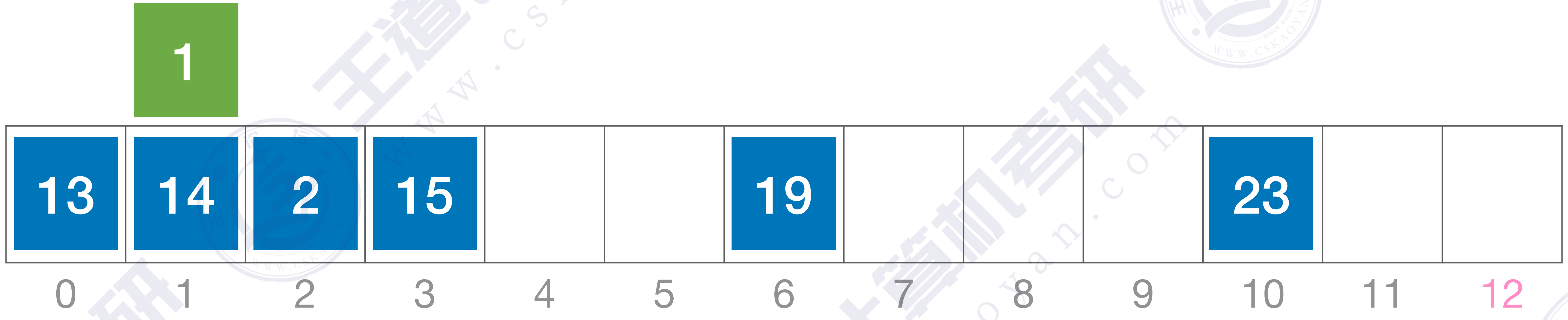
思路：需确定一个“探测的顺序”，从初始散列地址出发，去寻找下一个空闲位置。

eg：$d_0=0,\ d_1=1,\ d_2=-1,\ d_3=2,\ d_4=-2,\ \ldots\ldots$

注：d_i 表示第 i 次发生冲突时，下一个探测地址与初始散列地址的相对偏移量。

开放定址法的基本原理

根据散列函数 $H(key)$，求得初始散列地址。若发生冲突，如何找到“另一个空闲位置”？



发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

四种常用方法构造探测序列di

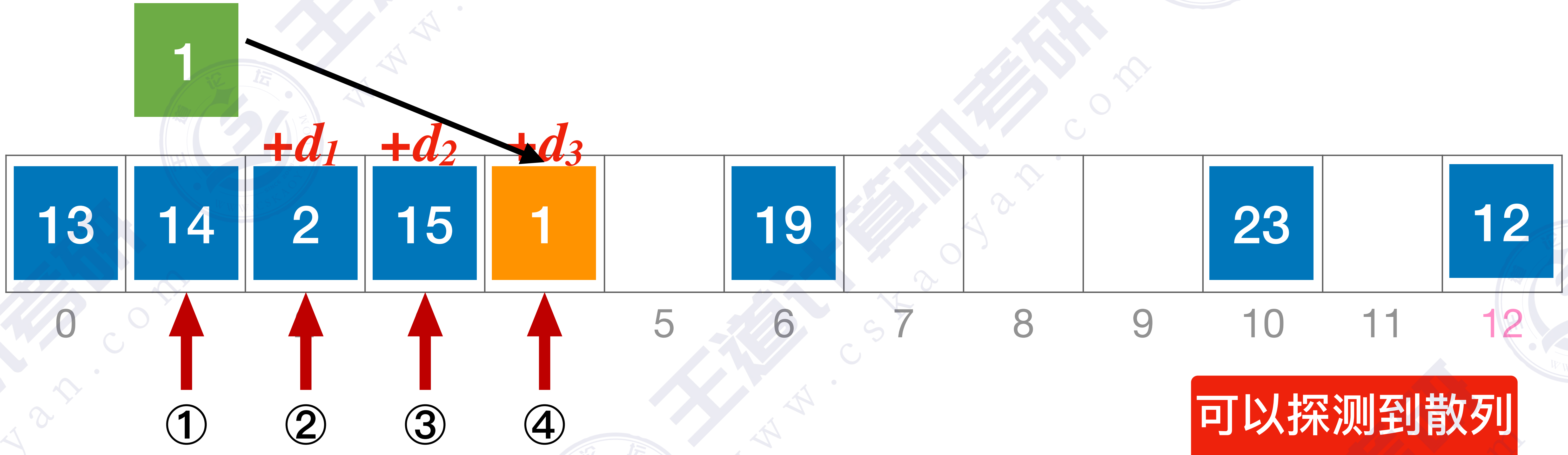
注：$0 \le i \le m-1$

探测序列/增量序列

- 线性探测法 $d_i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$
- 平方探测法 $d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \dots, k^2, -k^2$。其中$k \le m/2$
- 双散列法 $d_i = i \times hash_2(key)$。其中 $hash_2(key)$ 是另一散列函数
- 伪随机序列法 d_i 是一个伪随机序列，如 $d_i = 0, 5, 3, 11, \dots$

线性探测法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用线性探测法解决冲突。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



可以探测到散列表的每个地址

发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$$H_i = (H(key) + d_i)\ \%\ m$$

初始散列地址

偏移量

线性探测法，$d_i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$

初始散列地址H_0=1%13=1，发生冲突(第1次)

H_1 = (1 + 1) % 13 = 2，发生冲突(第2次)

H_2 = (1 + 2) % 13 = 3，发生冲突(第3次)

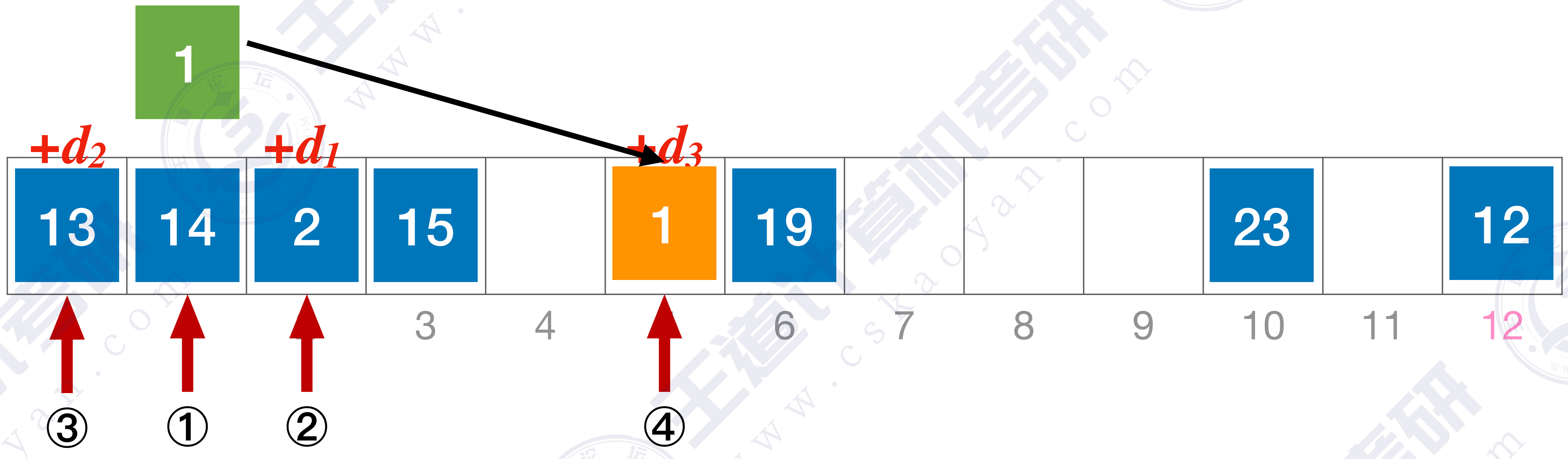
H_3 = (1 + 3) % 13 = 4，未发生冲突，插入位置#4

注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。
若探测到目标关键字，则查找成功。
若探测到空单元，则查找失败。

又称“二次探测法”

平方探测法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用平方探测法解决冲突。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$H_i = (H(key) + d_i) \% m$

初始散列地址

偏移量

平方探测法，$d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \ldots, k^2, -k^2$。其中$k \le m/2$

初始散列地址H_0=1%13=1，发生冲突(第1次)

H_1 = (1 + 1) % 13 = 2，发生冲突(第2次)

H_2 = (1 + −1) % 13 = 0，发生冲突(第3次)

H_3 = (1 + 4) % 13 = 5，未发生冲突，插入位置#5

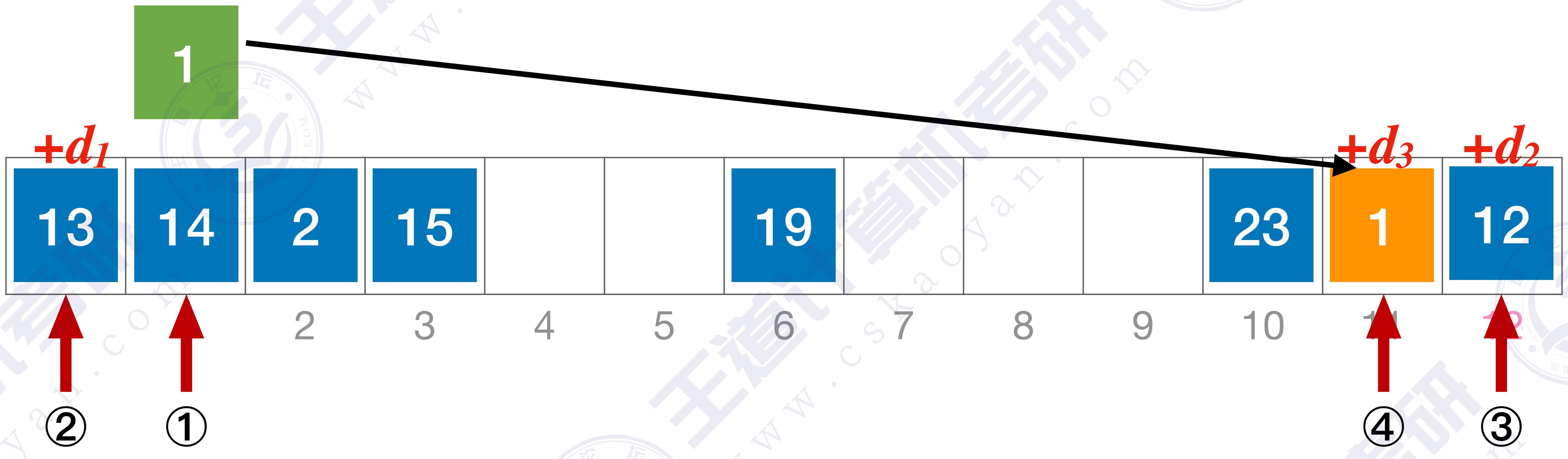
注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。

若探测到目标关键字，则查找成功。

若探测到空单元，则查找失败。

双散列法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用双散列法解决冲突，假设 $hash_2(key)=13-(key\ \%13)$。分析：插入元素1、查找元素1 的过程



发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$H_i = (H(key) + d_i)\ \%\ m$

初始散列地址

偏移量

双散列法，$d_i = i \times hash_2(key)$

初始散列地址H_0=1%13=1，发生冲突(第1次)

由于$key=1$，$hash_2(key)=13-(key\ \%13)=12$

$H_1 = (1 + 1*12)\ \%\ 13 = 0$，发生冲突(第2次)

$H_2 = (1 + 2*12)\ \%\ 13 = 12$，发生冲突(第3次)

$H_3 = (1 + 3*12)\ \%\ 13 = 11$，未发生冲突，插入位置#11

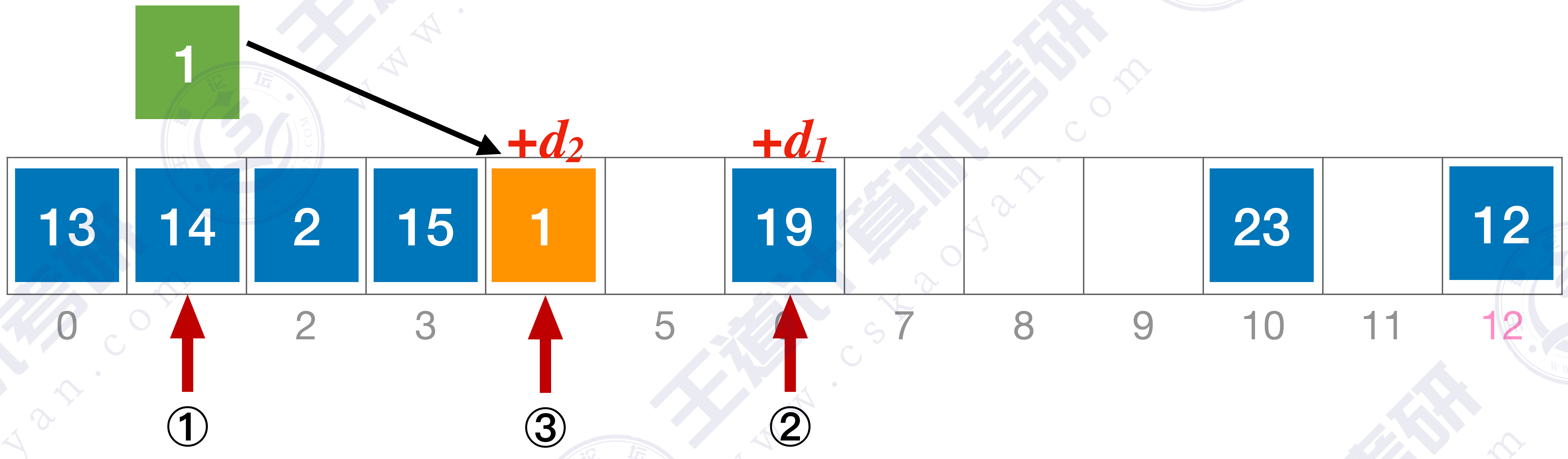
注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。

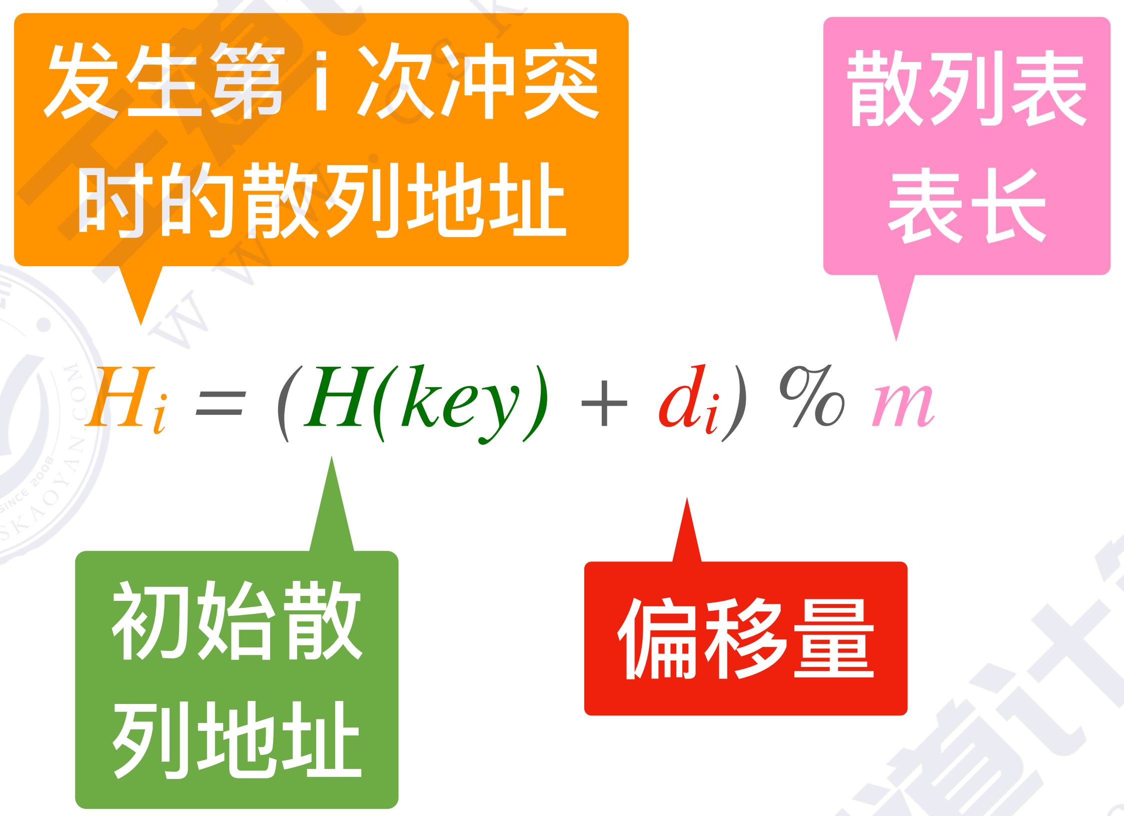
若探测到目标关键字，则查找成功。

若探测到空单元，则查找失败。

伪随机序列法（插入、查找操作）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用伪随机序列法解决冲突，假设伪随机序列$d_i=0, 5, 3, 11, \dots$，其中d_i表示第i次发生冲突时的增量。分析：插入元素1、查找元素1 的过程





d_i 是一个伪随机序列，由题目可知 $d_i= 0, 5, 3, 11, \dots$

初始散列地址H_0=1%13=1，发生冲突(第1次)

H_1 = (1 + 5) % 13 = 6，发生冲突(第2次)

H_2 = (1 + 3) % 13 = 4，未发生冲突，插入位置#4

注：查找操作原理类似，根据探测序列依次对比各存储单元内的关键字。
若探测到目标关键字，则查找成功。
若探测到空单元，则查找失败。

如何删除一个元素？

注：题目一定会说明具体是采用哪种探测序列（线性探测法、平方探测法、双散列法、伪随机序列法）

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用开放定址法解决冲突。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	2	15	1		19				23		12

如何删除一个元素：

Step 1：先根据散列函数算出散列地址，并对比关键字是否匹配。若匹配，则“查找成功”

Step 2：若关键字不匹配，则根据“探测序列”对比下一个地址的关键字，直到“查找成功”或“查找失败”

Step 3：若“查找成功”，则删除找到的元素

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用线性探测法解决冲突。

13	14	2	15	1		19				23		12
0	1			4	5	6	7	8	9	10	11	12
		①	②									

错误示范：删除元素15

- 计算元素15 的初始散列地址=15%13=2。对比位置#2，关键字不等于15；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，关键字等于15；
- 删除元素15，清空位置#3

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用线性探测法解决冲突。

13	14	2		1		19				23		12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

① ② ③

碰到空位置，查找失败?

错误示范：查找元素1

- 计算元素1 的初始散列地址=1%13=1。对比位置#1，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#2，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，探测到空单元，查找失败。

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 $H(key)=key\%13$，采用线性探测法解决冲突。

逻辑删除

13	14	2	已删	1		19				23		12
0	1	①	②	4	5	6	7	8	9	10	11	12

正确示范：删除元素15

- 计算元素15 的初始散列地址=15%13=2。对比位置#2，关键字不等于15；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，关键字等于15；
- 逻辑删除元素15，将位置#3标记为“已删除”

注：无论线性探测法、平方探测法、双散列法、伪随机序列法原理都一样。删除元素时，只能逻辑删除

注意：采用“开放定址法”时，删除元素不能简单地将被删元素的空间置为空，否则将截断在它之后的探测路径，可以做一个“已删除”标记，进行逻辑删除。

特别注意：关于删除操作

例：长度为13的散列表状态如下图所示，散列函数 *H(key)=key%13*，采用线性探测法解决冲突。

逻辑删除

13	14	2	已删	1		19				23		12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	①	②	③	④								

正确示范：查找元素1

- 计算元素1 的初始散列地址=1%13=1。对比位置#1，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#2，关键字不等于1；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#3，该位置原关键字已删，继续探测后一个位置；
- 根据线性探测法的探测序列，继续对比位置#4，关键字等于1，查找成功。

特别注意：关于删除操作

注意：采用“开放定址法”时，删除元素不能简单地将被删元素的空间置为空，否则将截断在它之后的探测路径，可以做一个“已删除”标记，进行逻辑删除。

整理前

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
已删	已删	已删	已删	1		19				23		12

注：新元素也可以插入到已被“逻辑删除”的地址

带来的问题：查找效率低下，散列表看起来很满，实则很空。

Tips：可以不定期整理散列表内的数据。

整理后

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1					19				23		12

知识回顾与重要考点

$H_i = (H(key) + d_i)\%m$

处理冲突的方法——开放定址法

- 基本原理
  - 当初始散列地址发生冲突时，根据“探测序列” di 探测下一个地址
  - 元素的操作
    - 插入 —— 根据散列函数算出初始散列地址，若发生冲突，就“探测”下一个地址，直到找到一个空闲地址，即可插入元素
    - 查找 —— 根据散列函数算出初始散列地址，对比关键字，若关键字不匹配，就“探测”下一个地址，直到关键字匹配(成功)或探测到一个空位置(失败)
    - 删除 —— 先按照“查找操作”的规则找到目标元素。若查找成功，就把目标元素“逻辑删除”。注意不能“物理删除”
- 四种常用的“探测序列”
  - 线性探测法 $d_i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$
  - 平方探测法 $d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \ldots, k^2, -k^2$。其中$k \le m/2$
  - 双散列法 $d_i = i \times hash_2(key)$。其中 $hash_2(key)$ 是另一散列函数
  - 伪随机序列法 d_i 是一个伪随机序列，如 $d_i = 0, 5, 3, 11, \ldots$

拓展：线性探测法的“探测覆盖率”

$+d_3$	$+d_4$	$+d_5$	$+d_6$	$+d_7$	初始地址	$+d_1$	$+d_2$
0	1	2	3	4	5	6	7

发生第 i 次冲突时的散列地址

散列表表长

$$H_i = (H(key) + d_i) \% m$$

初始散列地址

偏移量

线性探测法，$d_i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m\text{-}1$

采用线性探测法，一定可以探测到散列表的每个位置

只要散列表中有空闲位置，就一定可以插入成功

理想情况下，若散列表表长=m，则最多发生 m–1 次冲突即可“探测”完整个散列表。

拓展：平方探测法的“探测覆盖率”

表长 m=7

0	1	2	3	4	5	6
$+d_5$	$+d_4$	$+d_3$	$+d_6$	$+d_2$	初	$+d_1$

$d_0 = 0$ —— $H_0=5$
$d_1 = 1$ —— $H_1=6$
$d_2 = -1$ —— $H_2=4$
$d_3 = 4$ —— $H_3=2$
$d_4 = -4$ —— $H_4=1$
$d_5 = 9$ —— $H_5=0$
$d_6 = -9$ —— $H_6=3$

可以探测到所有位置

表长 m=8

0	1	2	3	4	5	6	7
	$+d_3$			$+d_2$	初	$+d_1$	

$+d_4$ $+d_6$ $+d_7$ $+d_5$

$d_0 = 0$ —— $H_0=5$
$d_1 = 1$ —— $H_1=6$
$d_2 = -1$ —— $H_2=4$
$d_3 = 4$ —— $H_3=1$
$d_4 = -4$ —— $H_4=1$
$d_5 = 9$ —— $H_5=6$
$d_6 = -9$ —— $H_6=4$
$d_7 = 16$ —— $H_7=5$

不能探测到所有位置

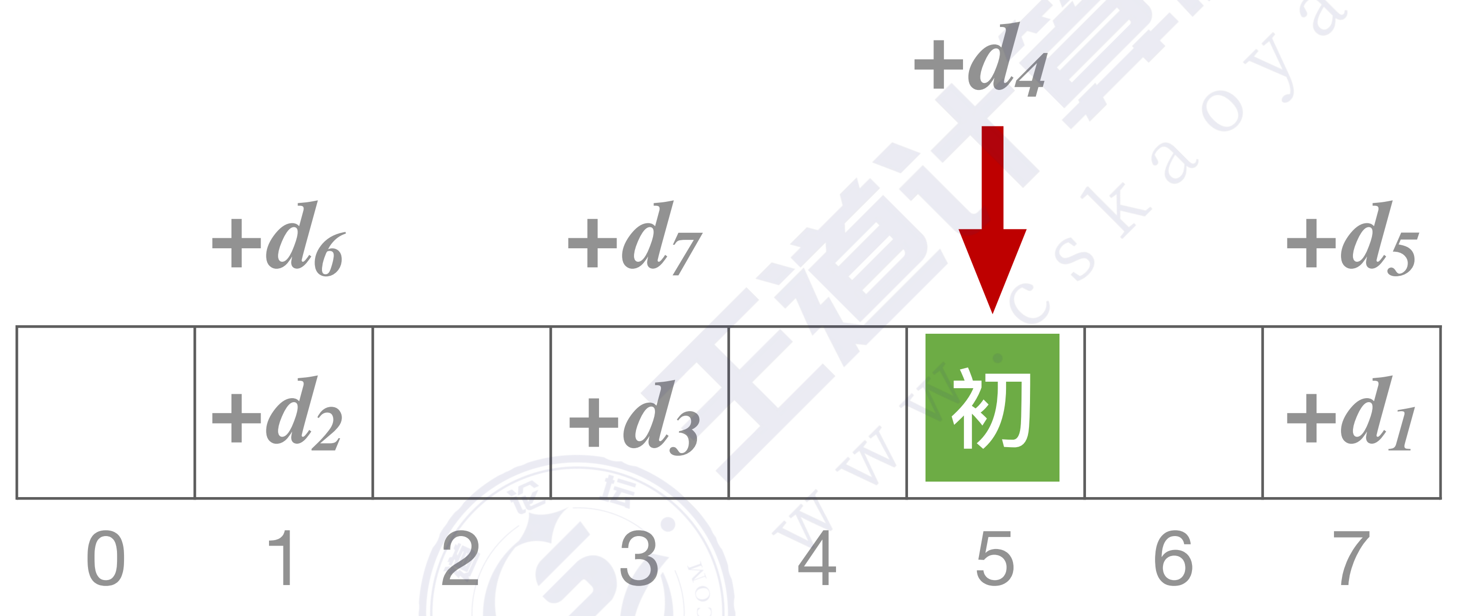
平方探测法，$d_i = 0^2, 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \ldots, k^2, -k^2$。其中$k \le m/2$，$i \le m-1$

采用平方探测法，至少可以探测到散列表中一半的位置

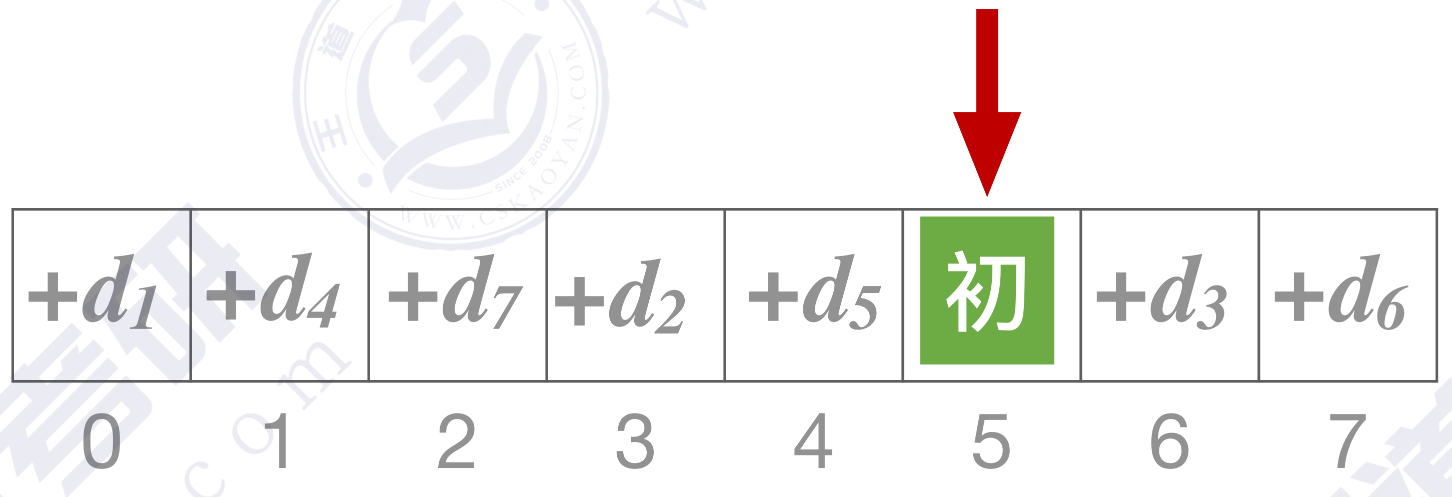
这意味着，即便散列表中有空闲位置，也未必能插入成功

若散列表长度 m 是一个可以表示成$4j + 3$的素数(如 7、11、19)，平方探测法就能探测到所有位置

拓展：双散列法的“探测覆盖率”



表长 m=8，$hash_2(key)=2$



表长 m=8，$hash_2(key)=3$

双散列法，$d_i = i \times hash_2(key)$

双散列法未必能探测到散列表的所有位置。

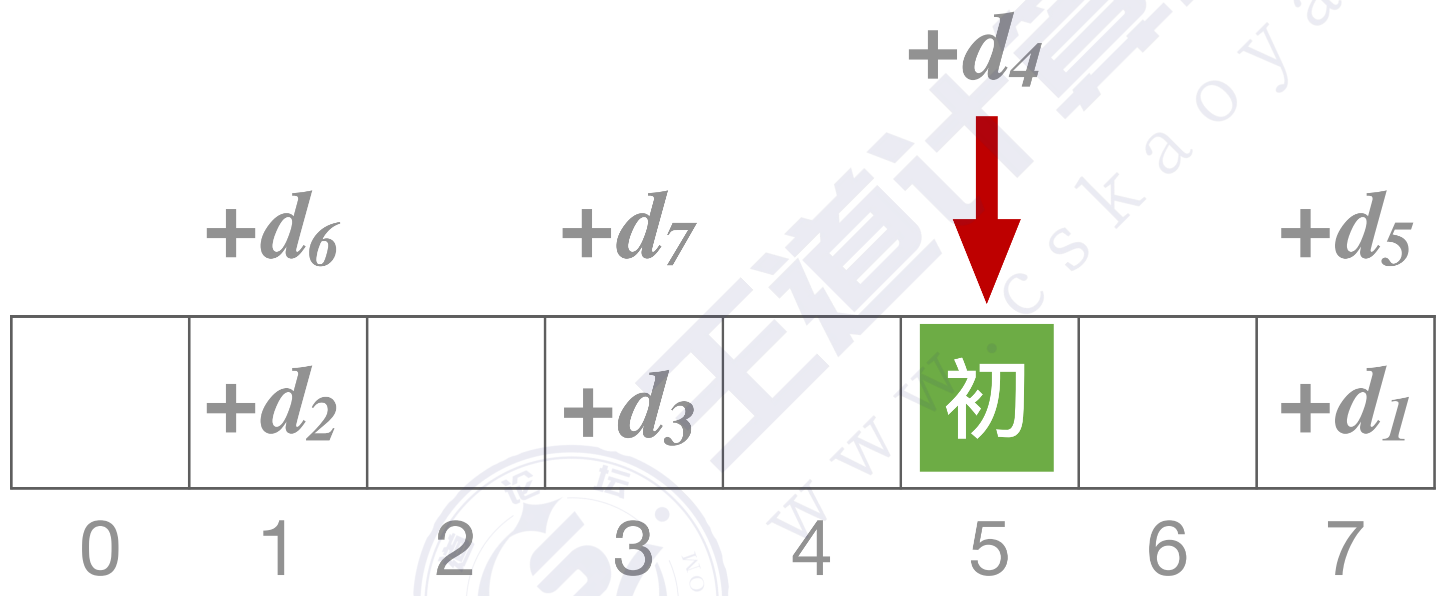
双散列法的探测覆盖率取决于第二个散列函数 $hash_2(key)$ 设计的是否合理。

若$hash_2(key)$ 计算得到的值与散列表表长m互质，就能保证双散列发可以探测所有单元

双散列法常用套路：令表长m本身就是质数，$hash_2(key)=m-(key\%m)$

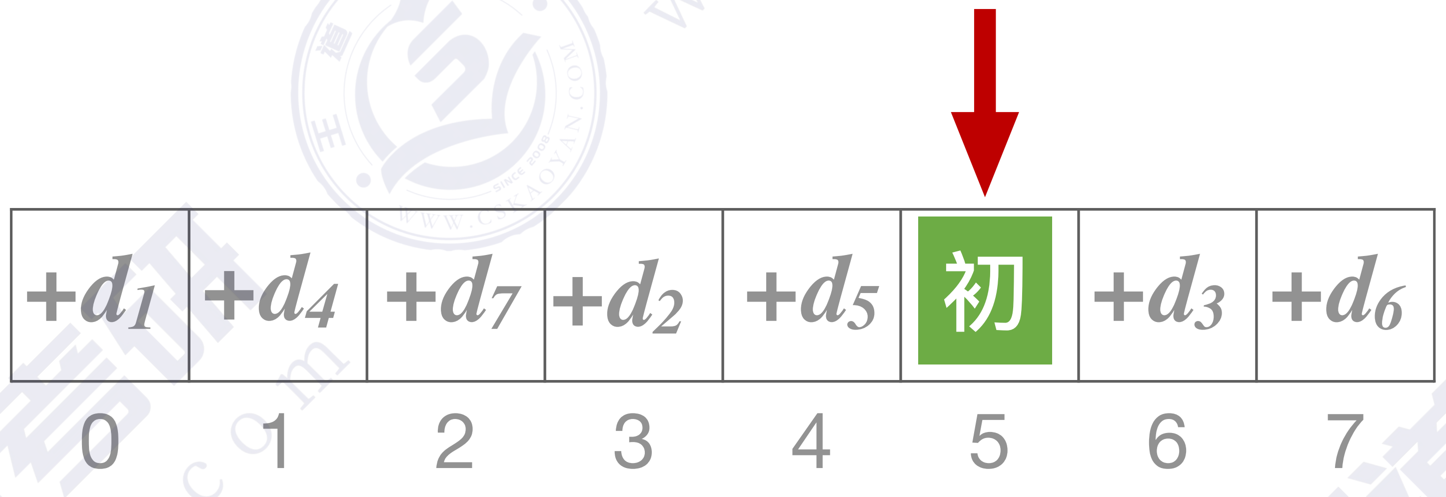
无论 key 值是多少，
$hash_2(key)$ 和 m 一定互质

拓展：伪随机序列法的“探测覆盖率”



表长 m=8

伪随机序列di=0,2,4,6,8,10,12,14



表长 m=8

伪随机序列di=0,-5,-2,1,-4,-1,2,-3

伪随机序列法：d_i 是一个伪随机序列，由程序员人为设计

采用伪随机序列法，是否能探测到散列表中全部位置，取决于伪随机序列的设计是否合理

拓展：四种探测序列的“探测覆盖率”

- 四种增量序列的“覆盖率”
  - 线性探测法 —— 经过 m-1 次冲突，一定能探测到散列表的所有单元
  - 平方探测法 —— 一般来说，探测序列至少能覆盖到散列表的一半单元。若能保证表长 m 是一个可以表示成 4X+3 的素数，则可以探测到散列表的所有单元
  - 双散列法 —— 若能保证 hash2(key)的值和表长m互质，则经过 m-1次冲突，一定能探测到散列表的所有单元
  - 伪随机序列法 —— 只要伪随机序列设计合理，就能探测到全部单元