王道考研——数据结构

WWW.CSKAOYAN.COM

第六章 图

本节内容

图

定义

基本术语

知识总览

- 图
  - 基本概念
  - 几种特殊的图

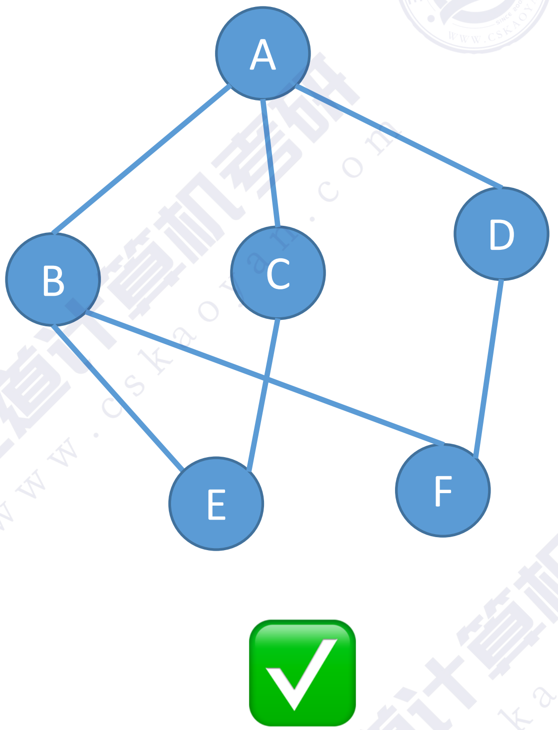
G: Graph

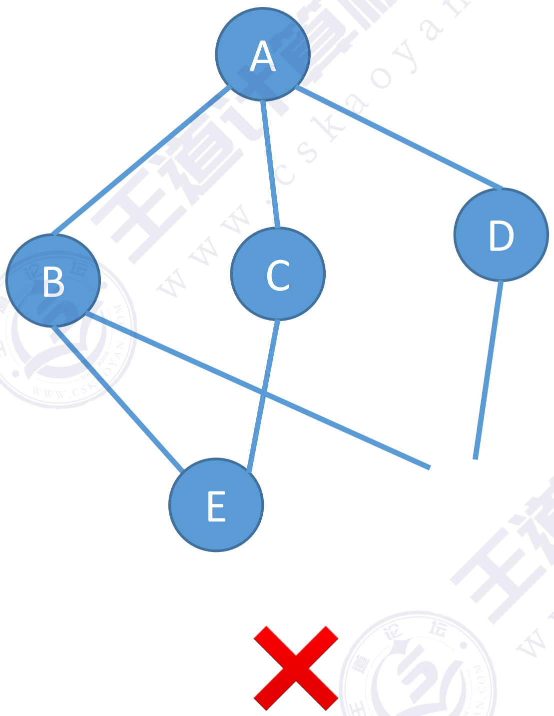
V: Vertex
E: Edge

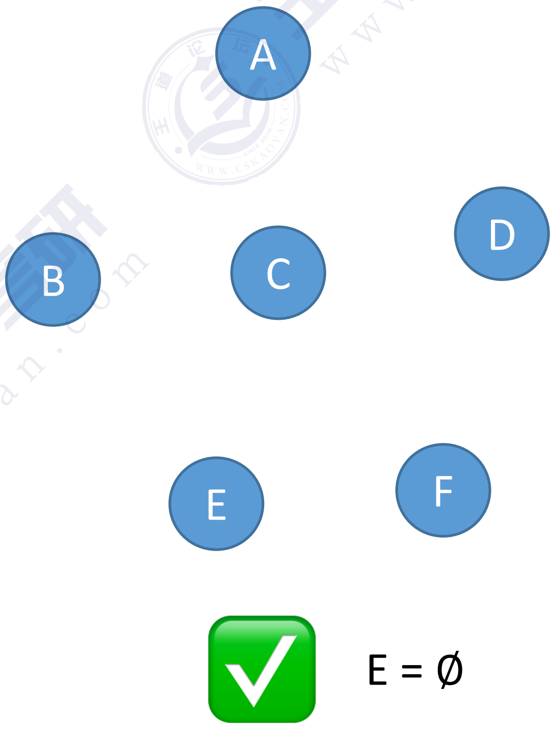
图的定义

图G由顶点集V和边集E组成，记为$G = (V, E)$，其中$V(G)$表示图G中顶点的有限非空集；$E(G)$表示图G中顶点之间的关系（边）集合。若$V = \{v_1, v_2, \dots , v_n\}$，则用$|V|$表示图$G$中顶点的个数，也称图$G$的阶，$E = \{(u, v) \mid u\in V, v\in V\}$，用$|E|$表示图$G$中边的条数。

注意：线性表可以是空表，树可以是空树，但图不可以是空，即V一定是非空集





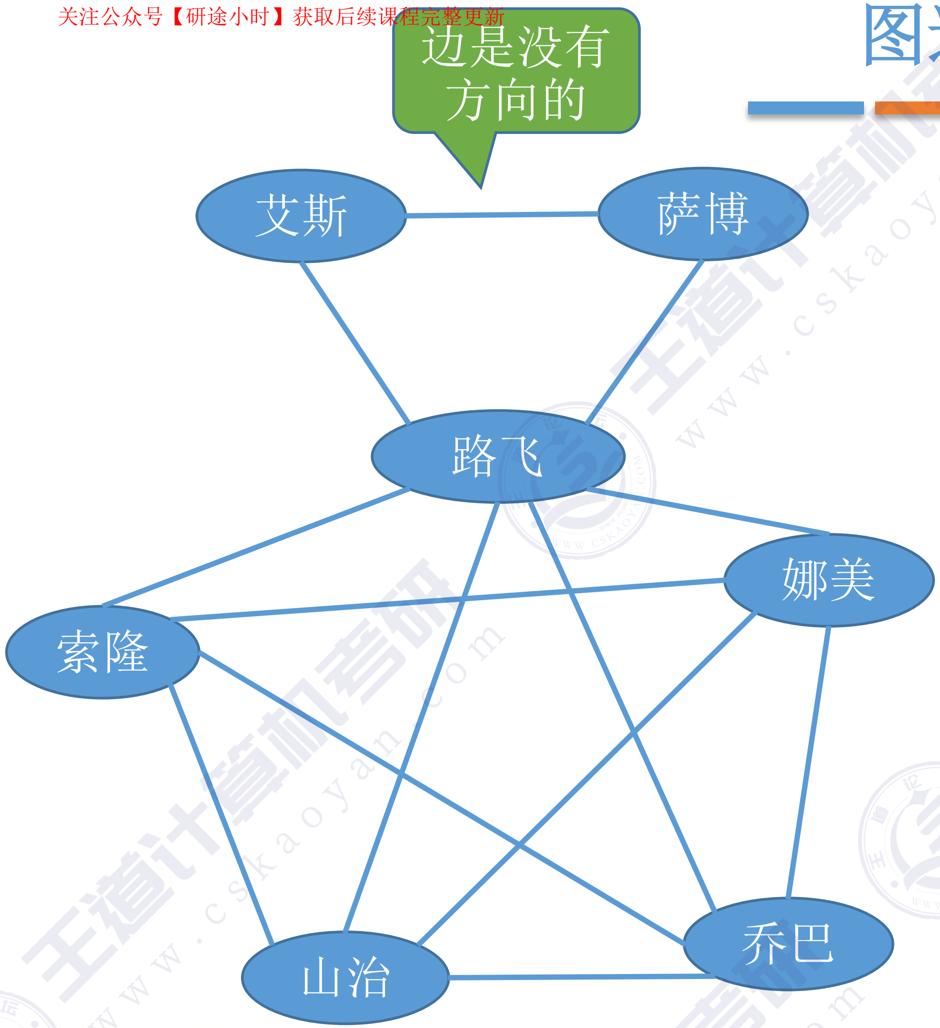


图逻辑结构的应用

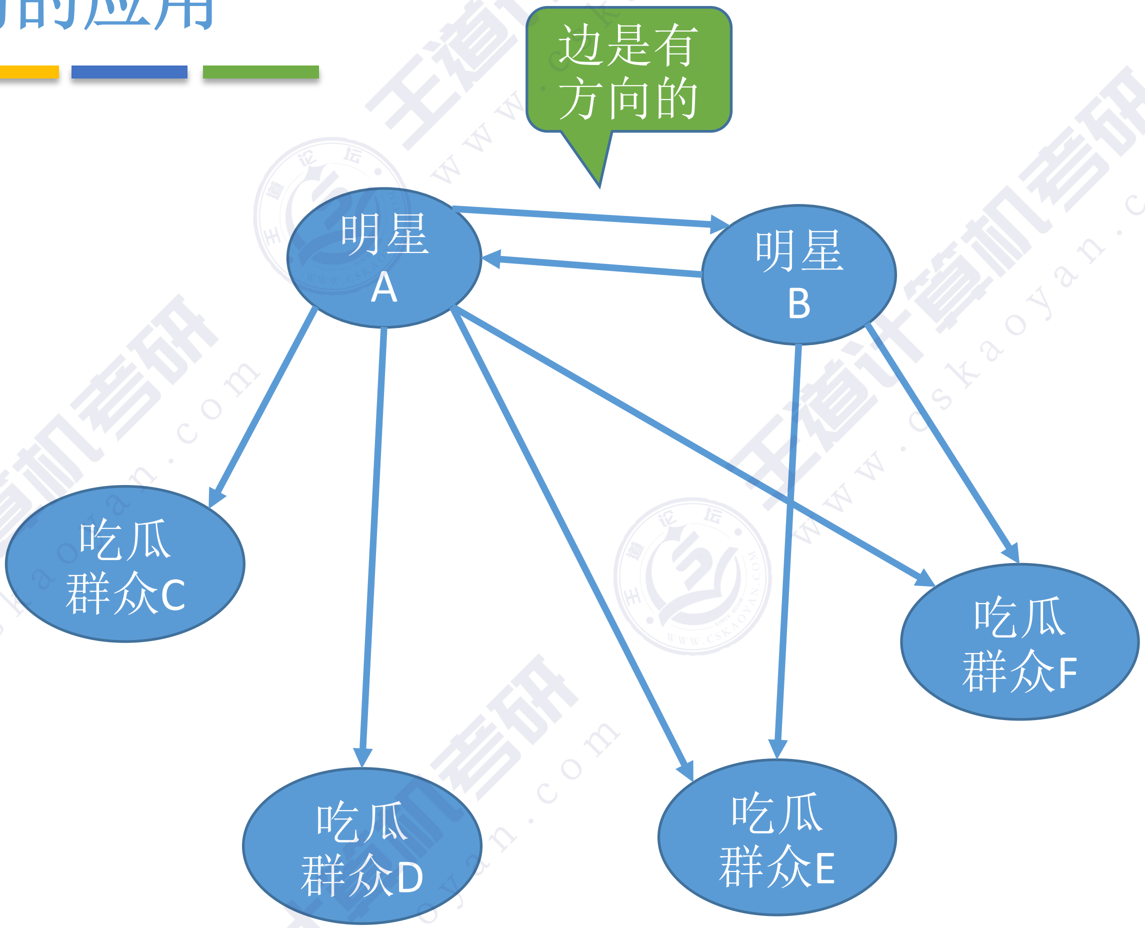
V: 车站　　E: 铁路

V: 路口　　E: 道路

图逻辑结构的应用

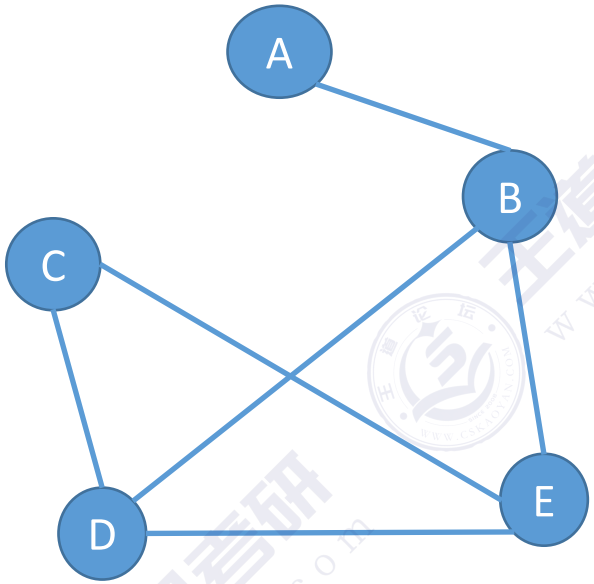


微信好友关系



微博粉丝关系

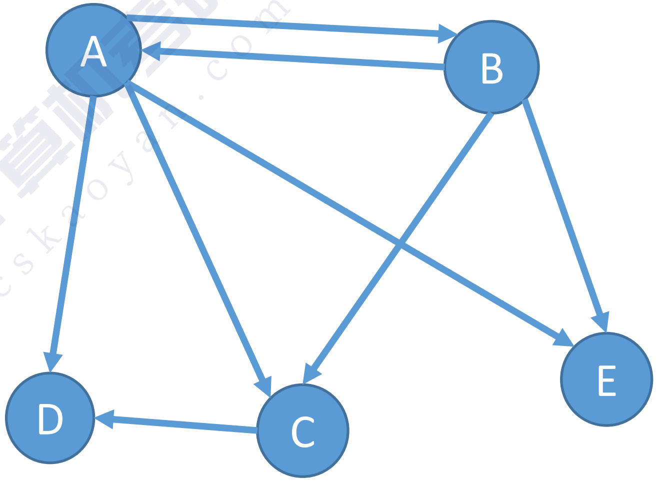
无向图、有向图



若E是无向边（简称边）的有限集合时，则图G为无向图。边是顶点的无序对，记为(v, w)或(w, v)，因为$(v, w) = (w, v)$，其中v、w是顶点。可以说顶点w和顶点v互为邻接点。边(v, w)依附于顶点w和v，或者说边(v, w)和顶点v、w相关联。

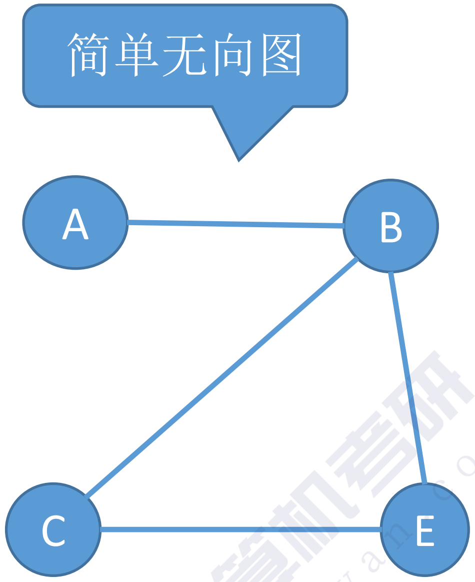
$G_2 = (V_2, E_2)$
$V_2 = \{A, B, C, D, E\}$
$E_2 = \{(A, B), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

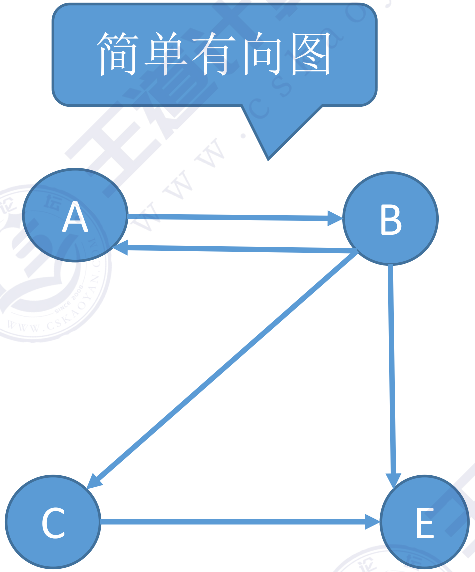
若E是有向边（也称弧）的有限集合时，则图G为有向图。弧是顶点的有序对，记为$<v, w>$，其中v、w是顶点，v称为弧尾，w称为弧头，$<v, w>$称为从顶点v到顶点w的弧，也称v邻接到w，或w邻接自v。$<v, w> \neq <w, v>$

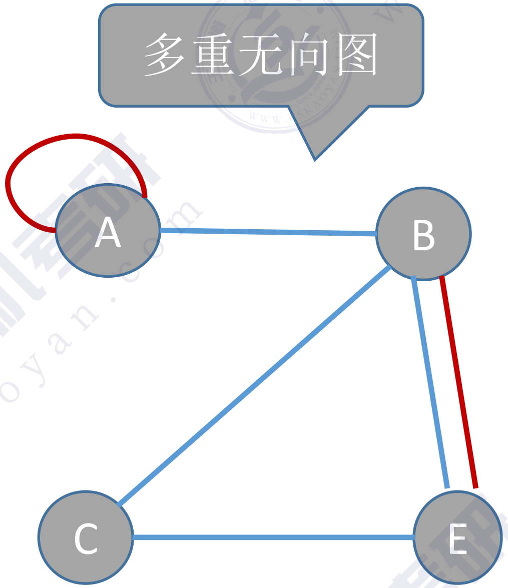


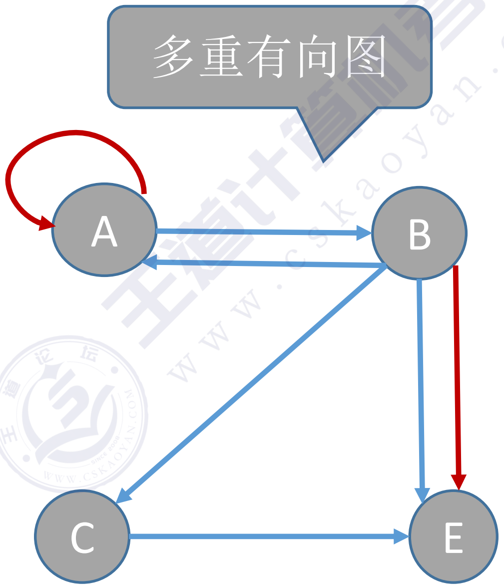
$G_1 = (V_1, E_1)$
$V_1 = \{A, B, C, D, E\}$
$E_1 = \{<A, B>, <A, C>, <A, D>, <A, E>, <B, A>, <B, C>, <B, E>, <C, D>\}$

简单图、多重图







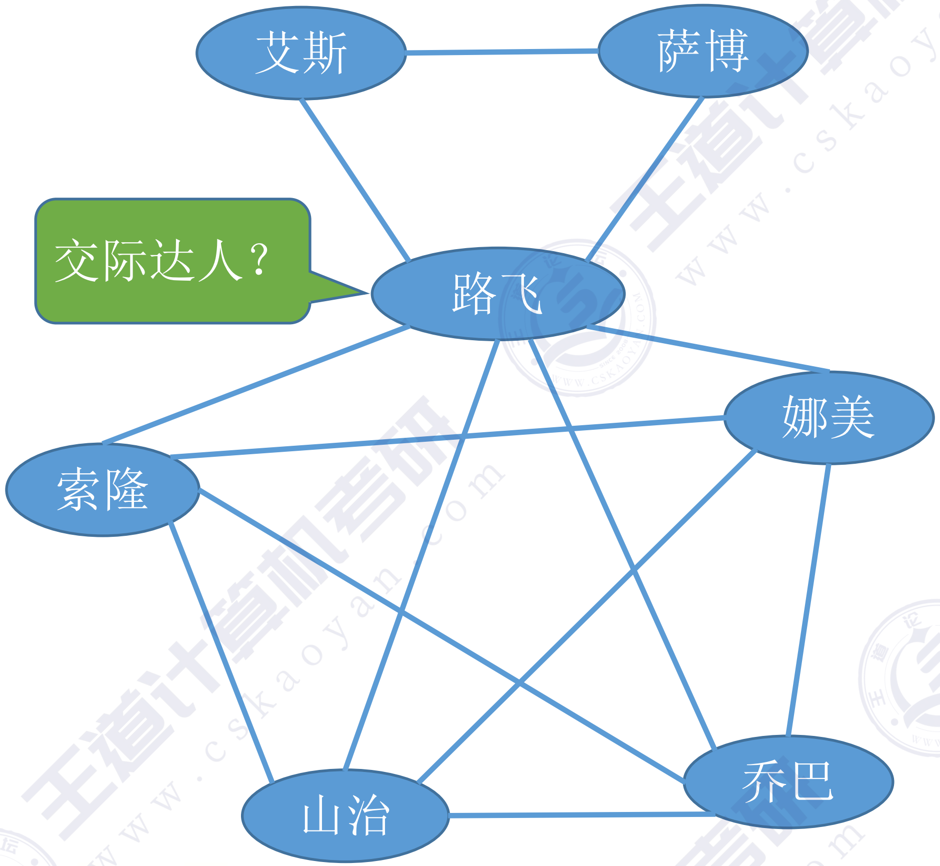


简单图——① 不存在重复边；
② 不存在顶点到自身的边

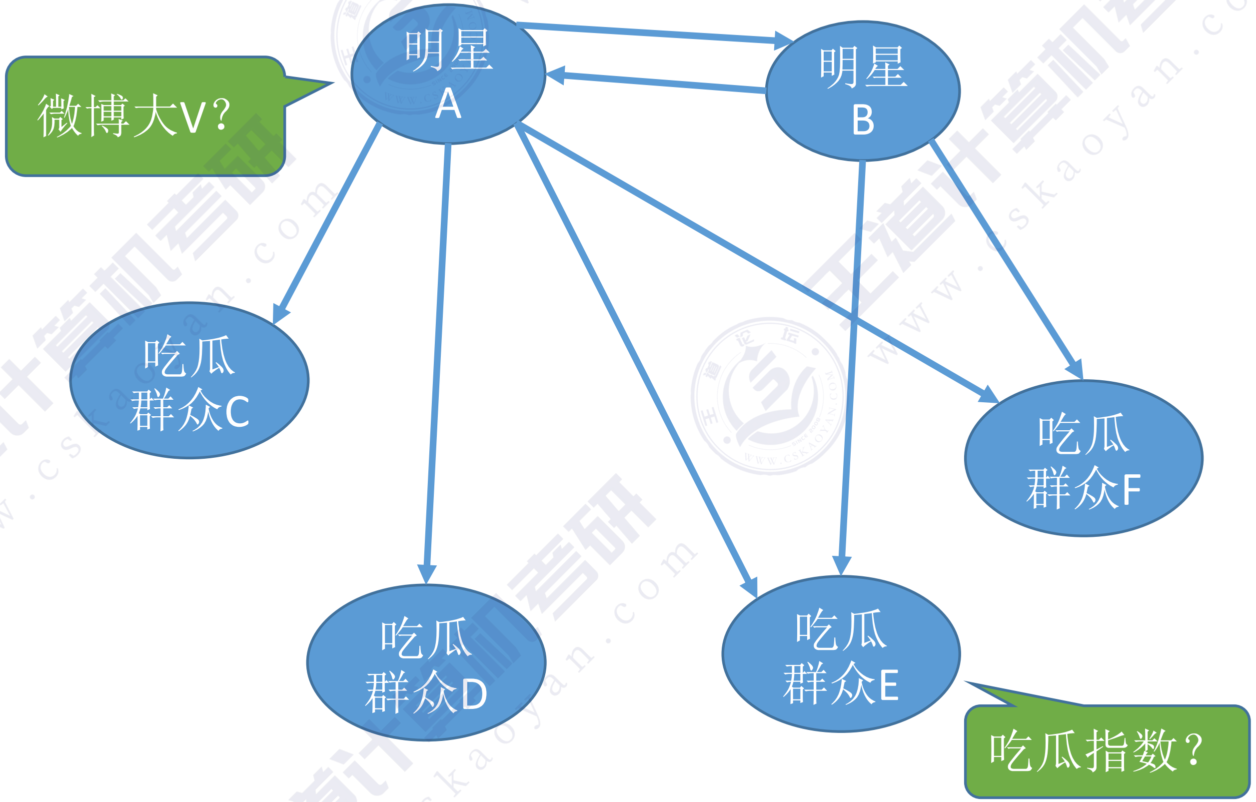
数据结构课程只探讨“简单图”

多重图——图*G*中某两个结点之间的边数多于一条，又允许顶点通过同一条边和自己关联，则*G*为多重图

图逻辑结构的应用

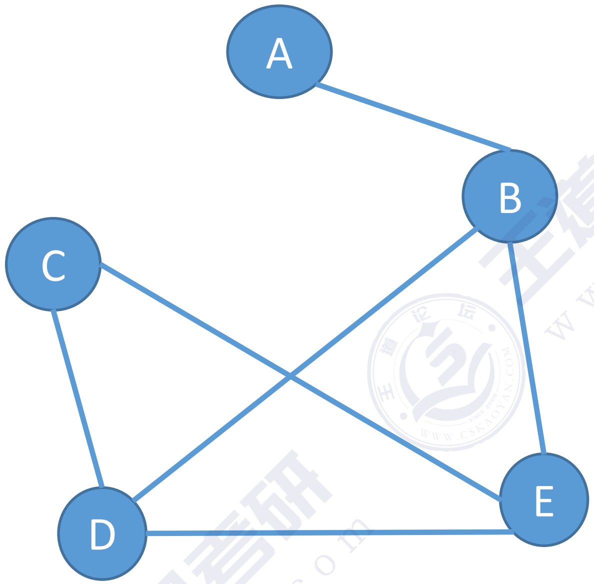


微信好友关系



微博粉丝关系

顶点的度、入度、出度



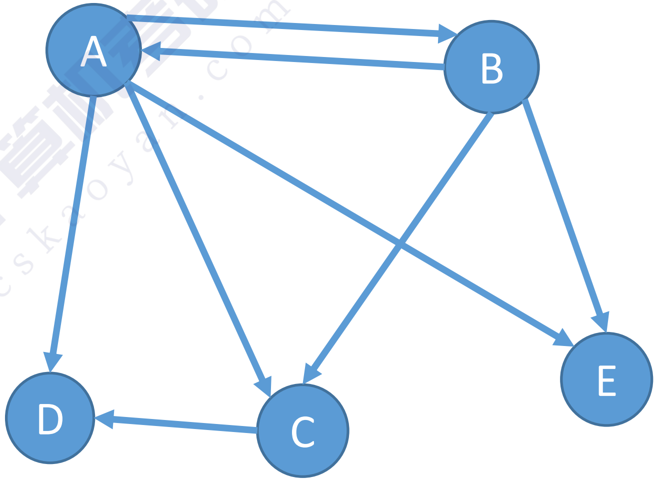
对于无向图：顶点v的度是指依附于该顶点的边的条数，记为TD(v)。

在具有n个顶点、e条边的无向图中，$\sum_{i=1}^{n} TD(v_i) = 2e$

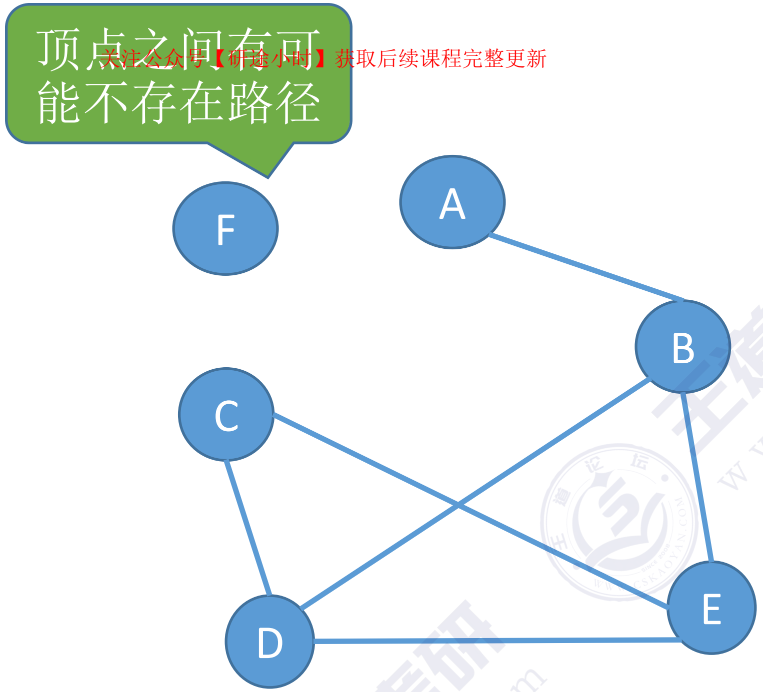
即无向图的全部顶点的度的和等于边数的2倍

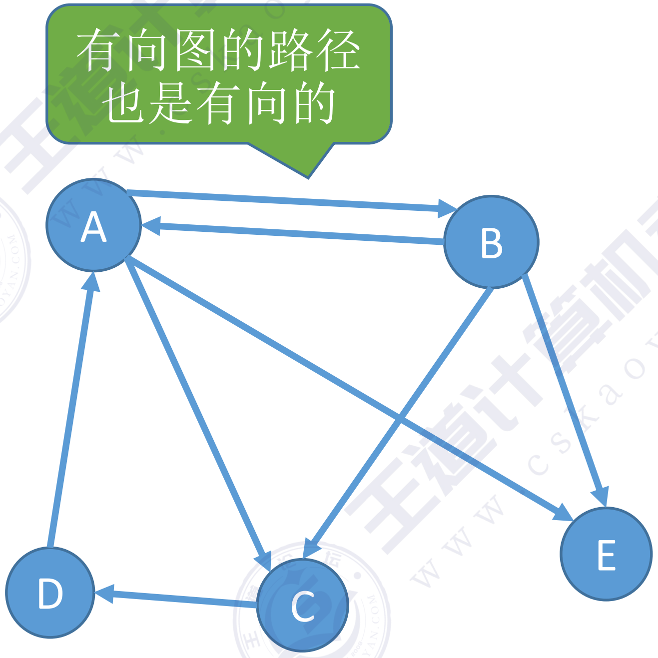
对于有向图：
入度是以顶点v为终点的有向边的数目，记为ID(v)；
出度是以顶点v为起点的有向边的数目，记为OD(v)。
顶点v的度等于其入度和出度之和，即TD(v) = ID(v) + OD(v)。

在具有n个顶点、e条边的有向图中，$\sum_{i=1}^{n} ID(v_i) = \sum_{i=1}^{n} OD(v_i) = e$



顶点-顶点的关系描述

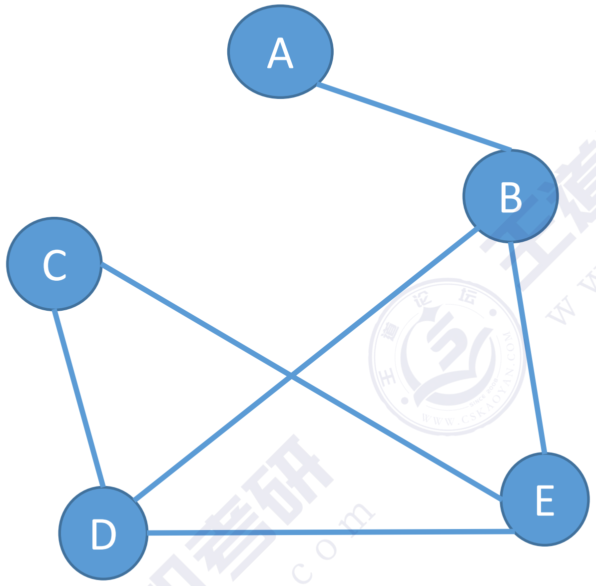


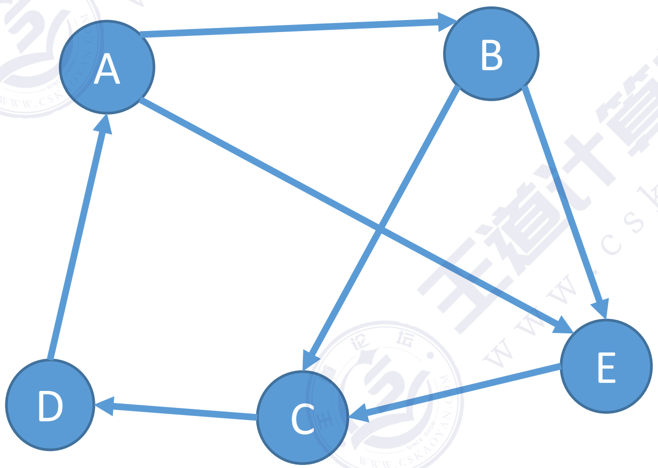


- 路径——顶点v_p到顶点v_q之间的一条路径是指顶点序列，$v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_m}, v_q$
- 回路——第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环
- 简单路径——在路径序列中，顶点不重复出现的路径称为简单路径。
- 简单回路——除第一个顶点和最后一个顶点外，其余顶点不重复出现的回路称为简单回路。
- 路径长度——路径上边的数目
- 点到点的距离——从顶点u出发到顶点v的最短路径若存在，则此路径的长度称为从u到v的距离。若从u到v根本不存在路径，则记该距离为无穷（∞）。

- 无向图中，若从顶点v到顶点w有路径存在，则称v和w是连通的
- 有向图中，若从顶点v到顶点w和从顶点w到顶点v之间都有路径，则称这两个顶点是强连通的

连通图、强连通图





若图G中任意两个顶点都是连通的，则称图G为连通图，否则称为非连通图。

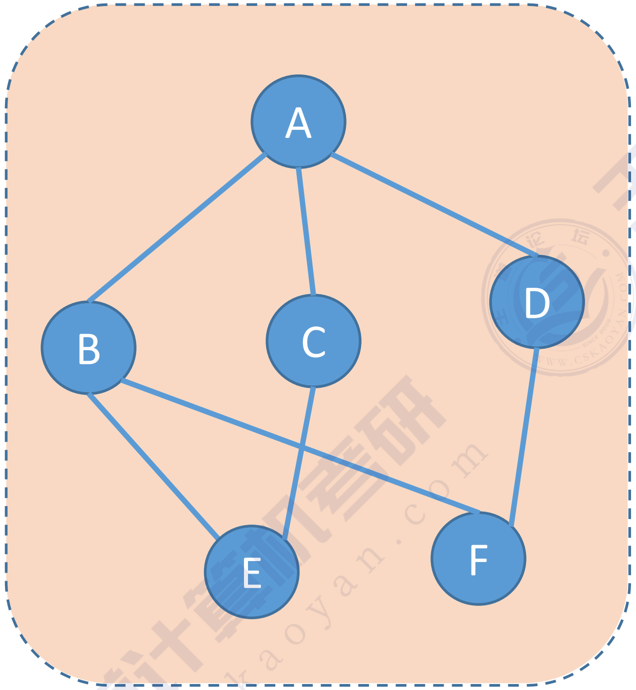
常见考点：
对于n个顶点的无向图G，
若G是连通图，则最少有 n-1 条边
若G是非连通图，则最多可能有 C_{n-1}^{2} 条边

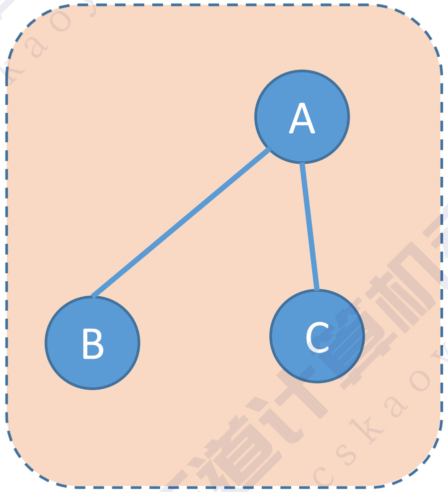
若图中任何一对顶点都是强连通的，则称此图为强连通图。

常见考点：
对于n个顶点的有向图G，
若G是强连通图，则最少有 n 条边（形成回路）

研究图的局部——子图

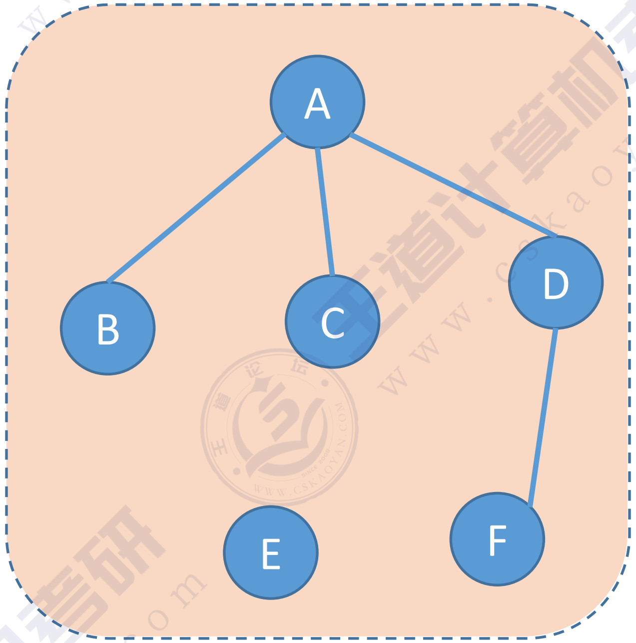
无向图G





子图

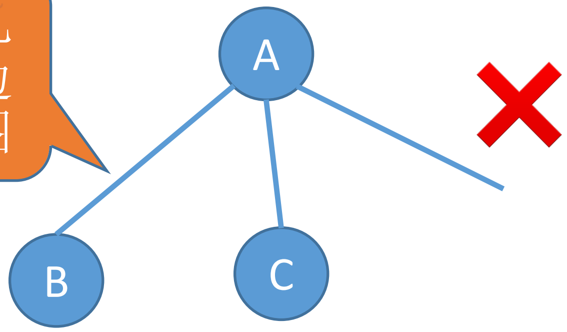
生成子图



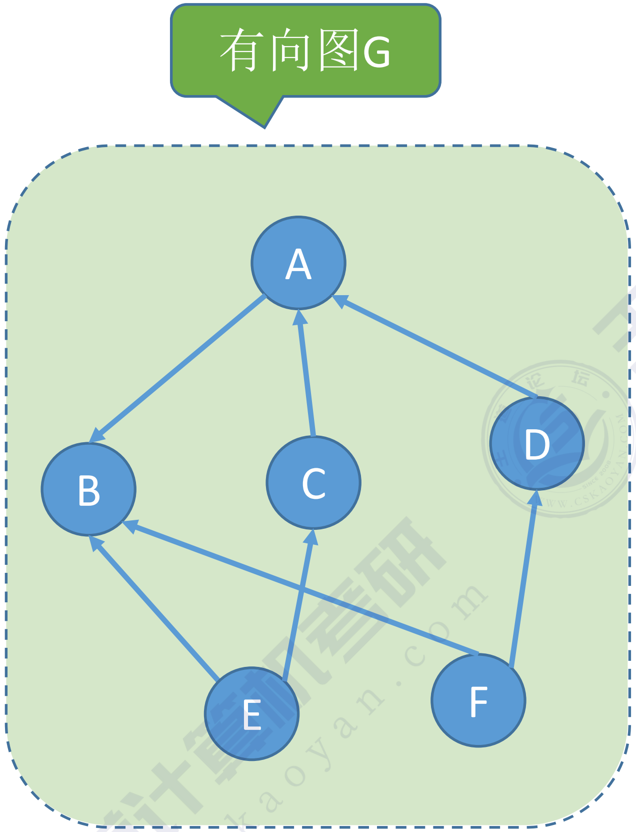
设有两个图$G = (V, E)$和$G' = (V', E')$，若V'是V的子集，且E'是E的子集，则称G'是G的子图。

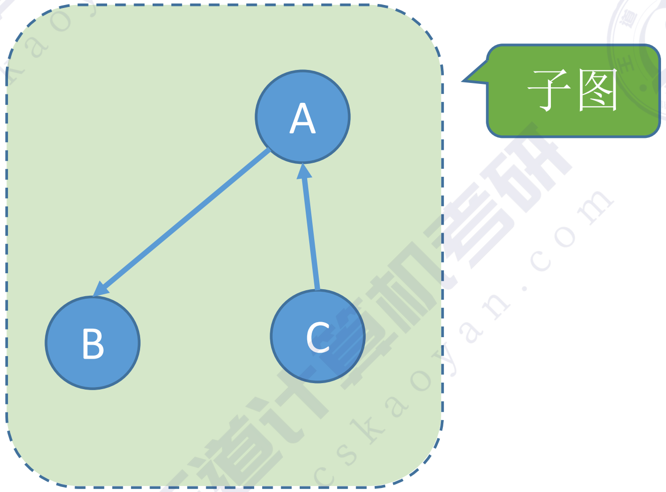
若有满足$V(G') = V(G)$的子图G'，则称其为G的生成子图

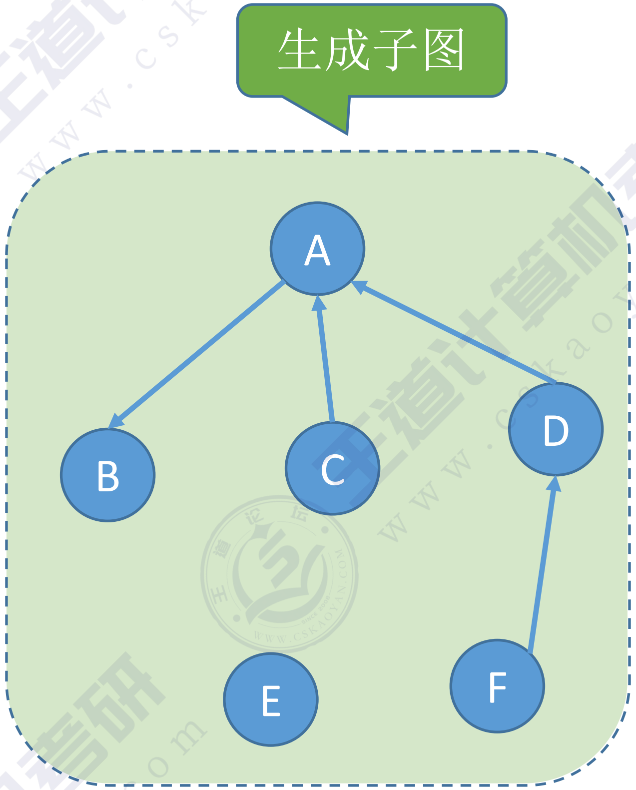
并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

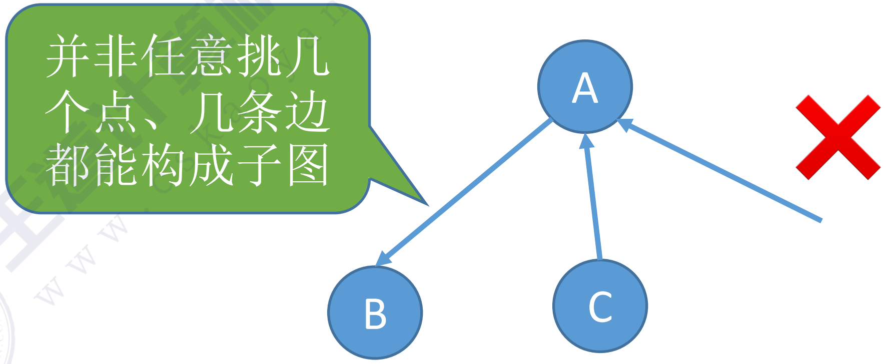


研究图的局部——子图









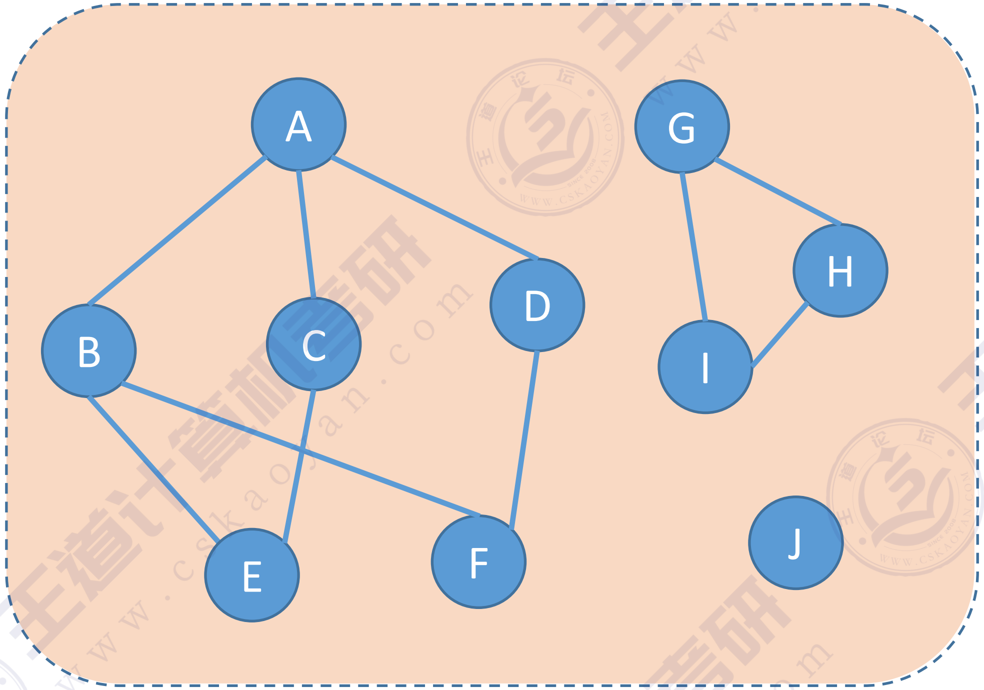
设有两个图$G = (V, E)$和$G' = (V', E')$，若V'是V的子集，且E'是E的子集，则称G'是G的子图。

若有满足$V(G') = V(G)$的子图G'，则称其为G的生成子图

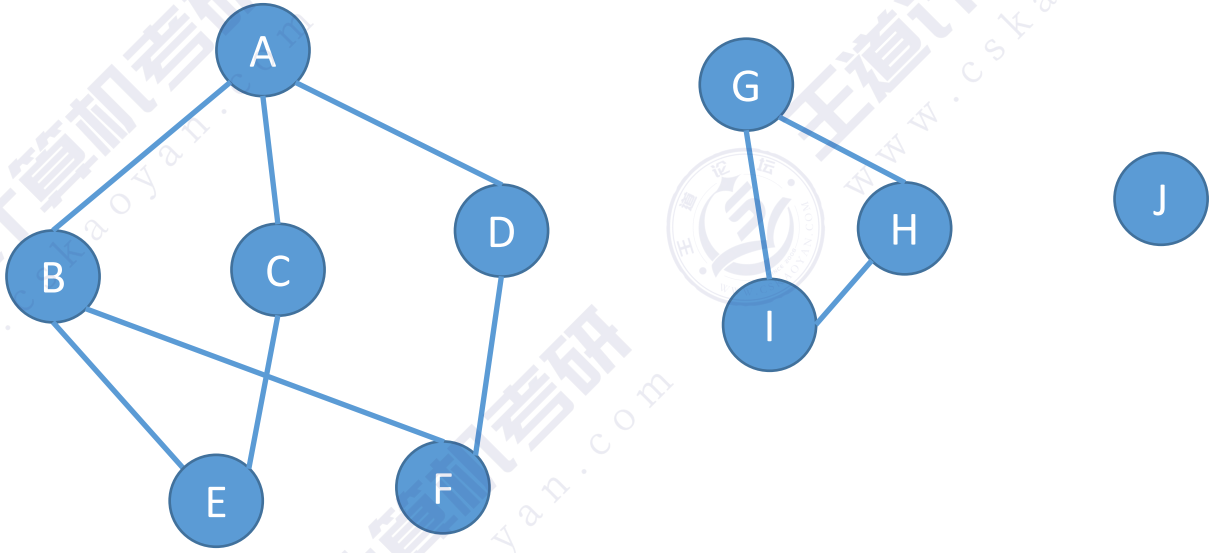
子图必须连通，且包含尽可能多的顶点和边

连通分量

无向图中的**极大连通子图**称为**连通分量**。



无向图G



G的三个连通分量

连通分量

中国铁路客运线路图：

大陆铁路网——连通分量1

海南岛铁路网——连通分量2

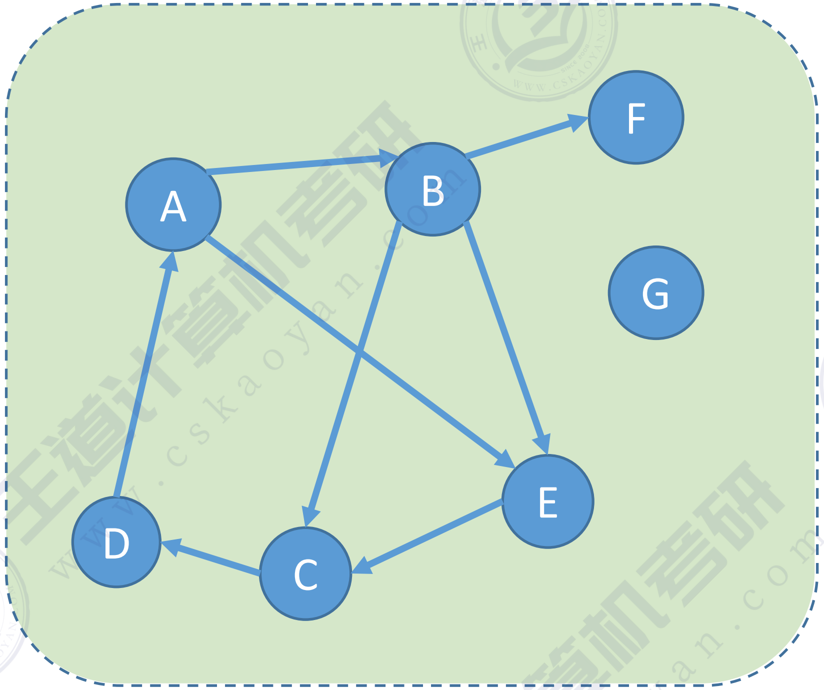
台湾岛铁路网——连通分量3

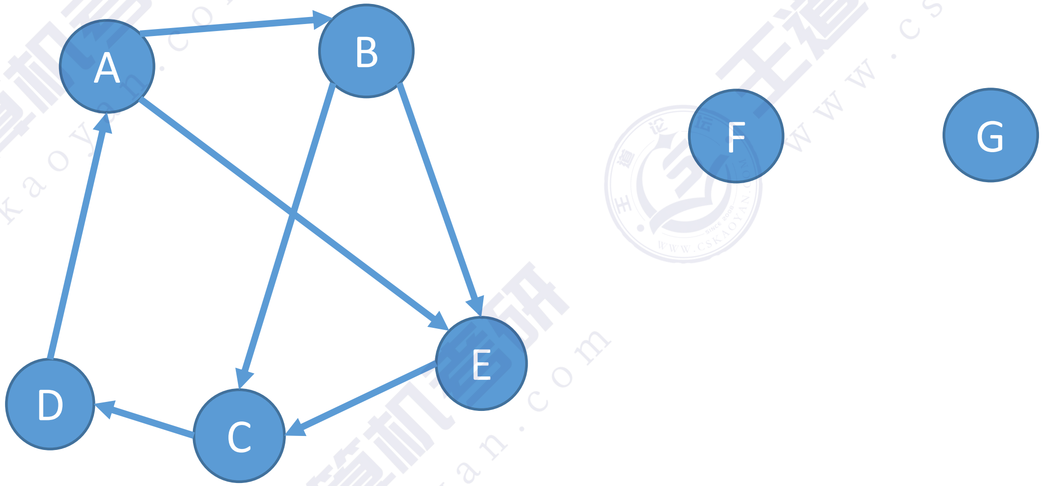
子图必须强连通，同时保留尽可能多的边

强连通分量

有向图中的极大强连通子图称为有向图的强连通分量

有向图G





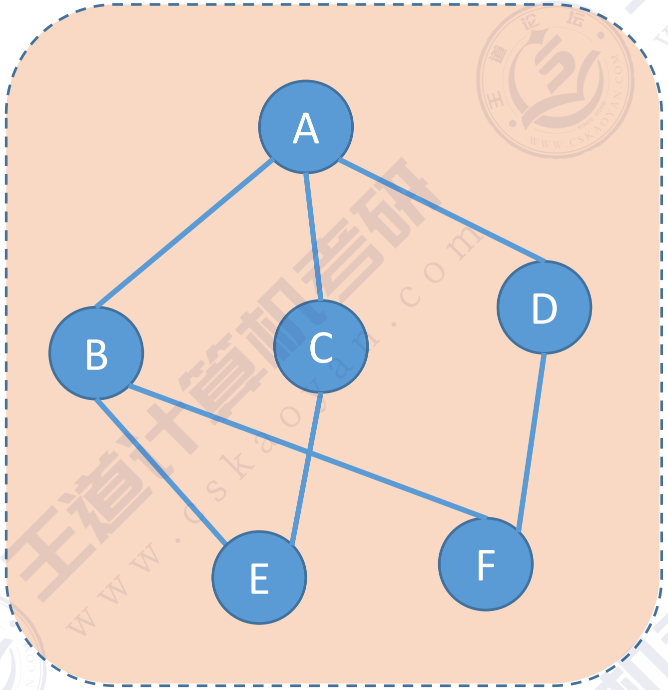
G的三个强连通分量

边尽可能的少，
但要保持连通

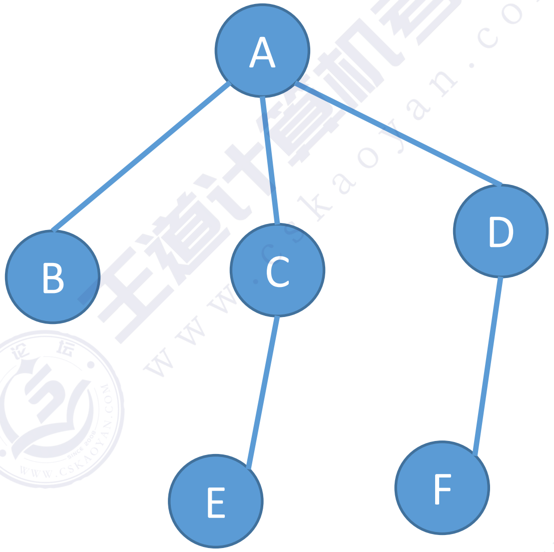
生成树

连通图的生成树是包含图中全部顶点的一个极小连通子图。

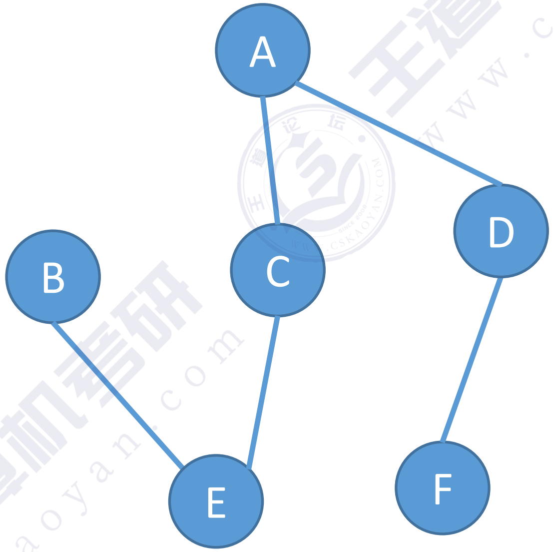
若图中顶点数为n，则它的生成树含有 n-1 条边。对生成树而言，若砍去它的一条边，则会变成非连通图，若加上一条边则会形成一个回路。



无向图G



G的生成树1

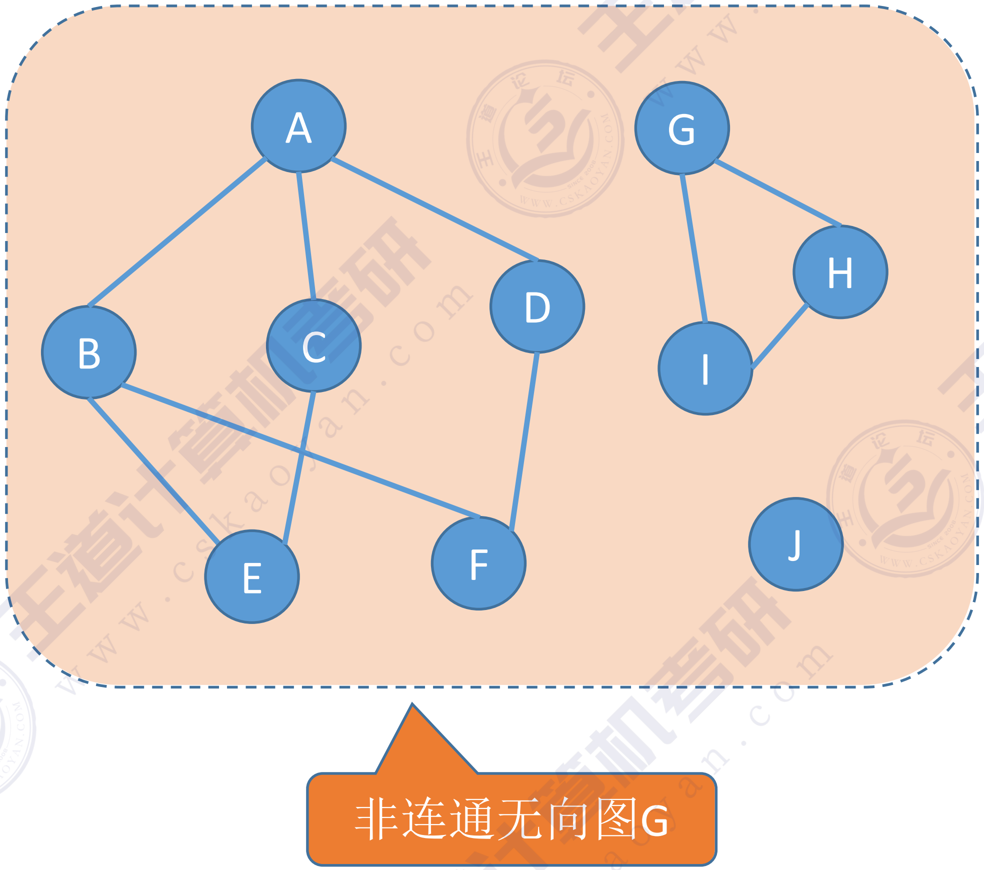


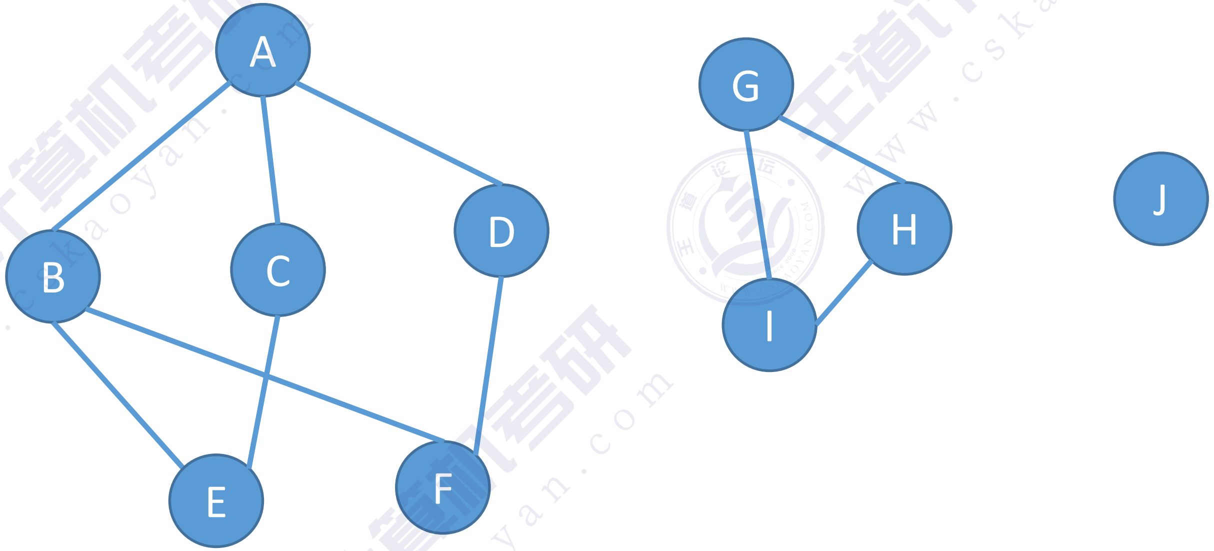
G的生成树2

……

生成森林

在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。

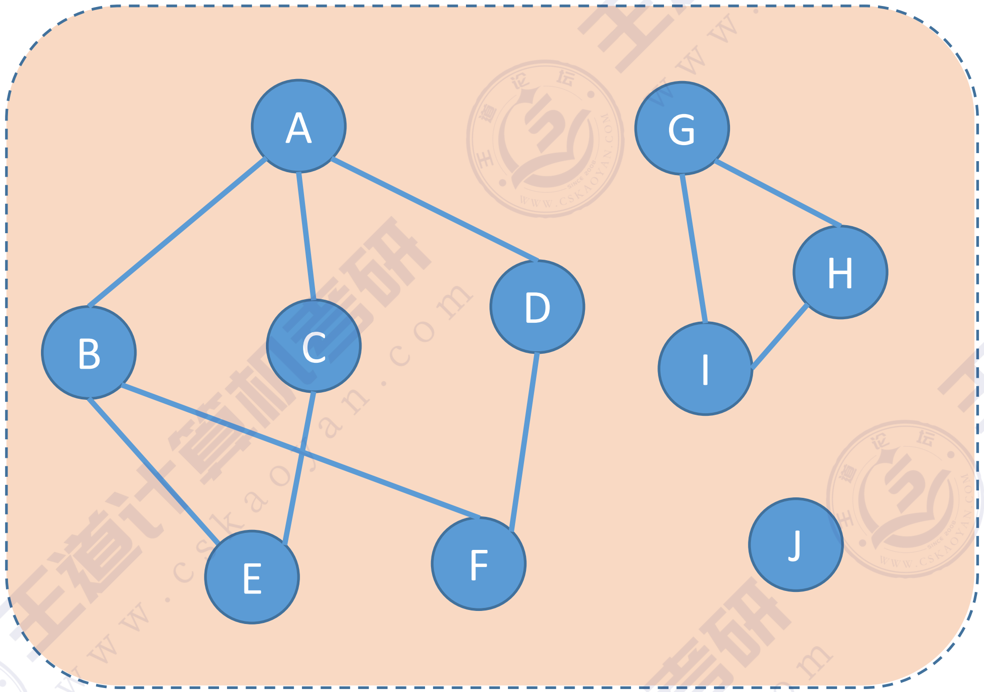




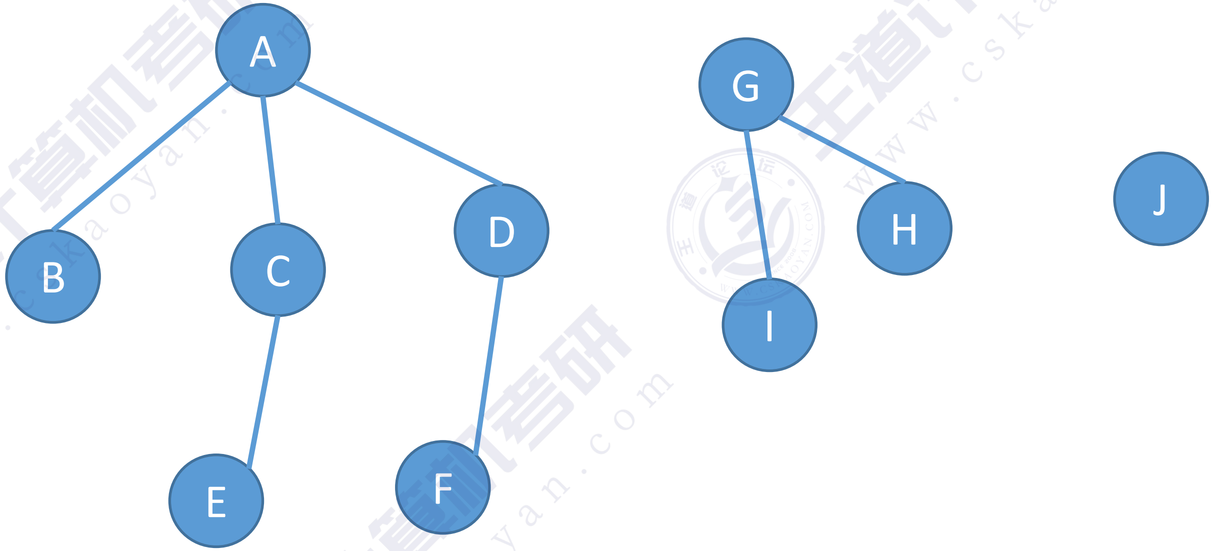
G的连通分量 →G的生成森林

生成森林

在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。

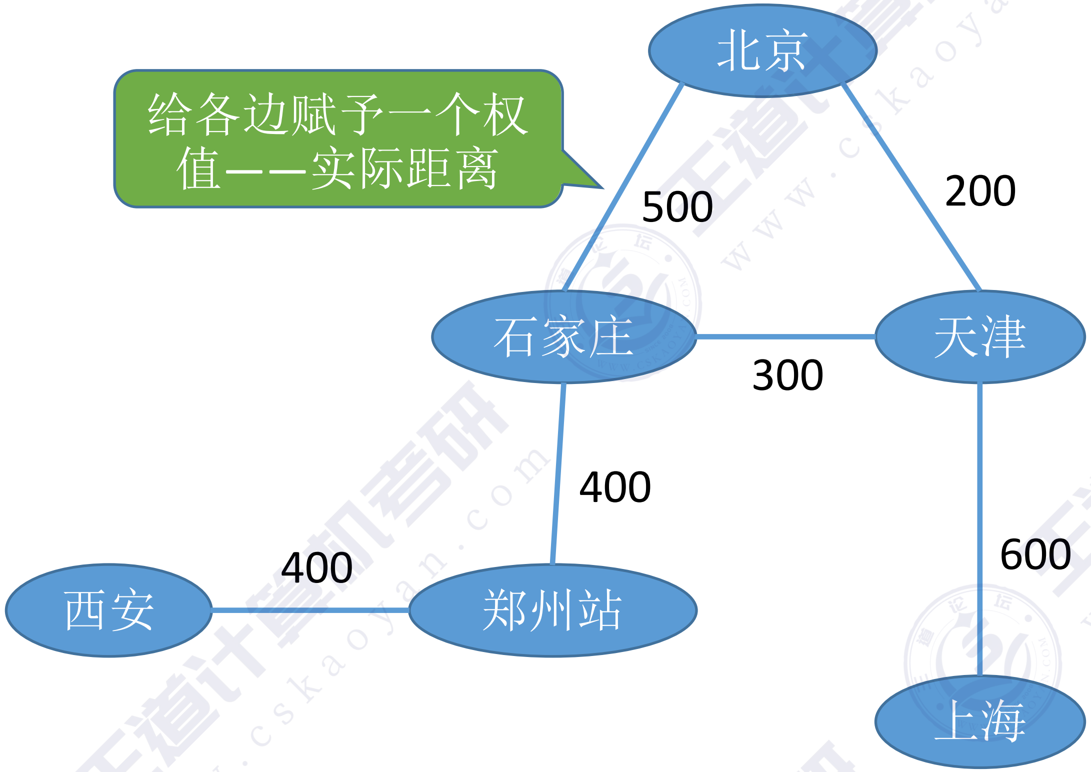


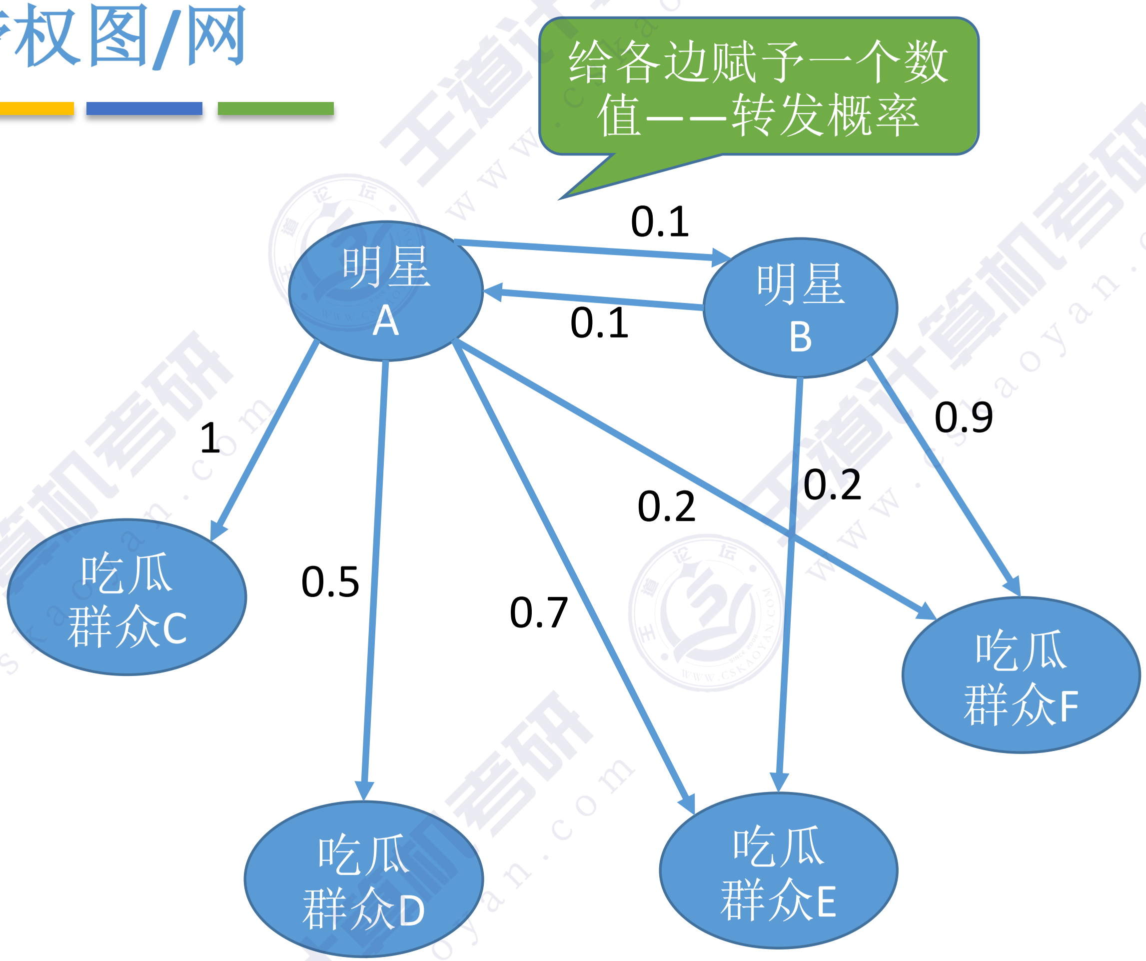
非连通无向图G



G的连通分量 →G的生成森林

边的权、带权图/网



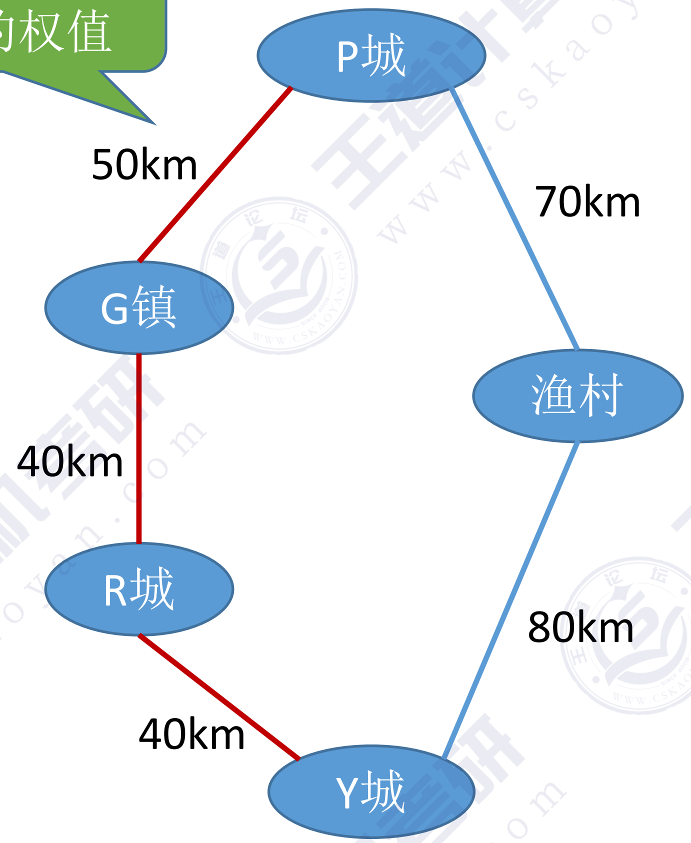


边的权——在一个图中，每条边都可以标上具有某种含义的数值，该数值称为该边的权值。
带权图/网——边上带有权值的图称为带权图，也称网。

带权路径长度——当图是带权图时，一条路径上所有边的权值之和，称为该路径的带权路径长度

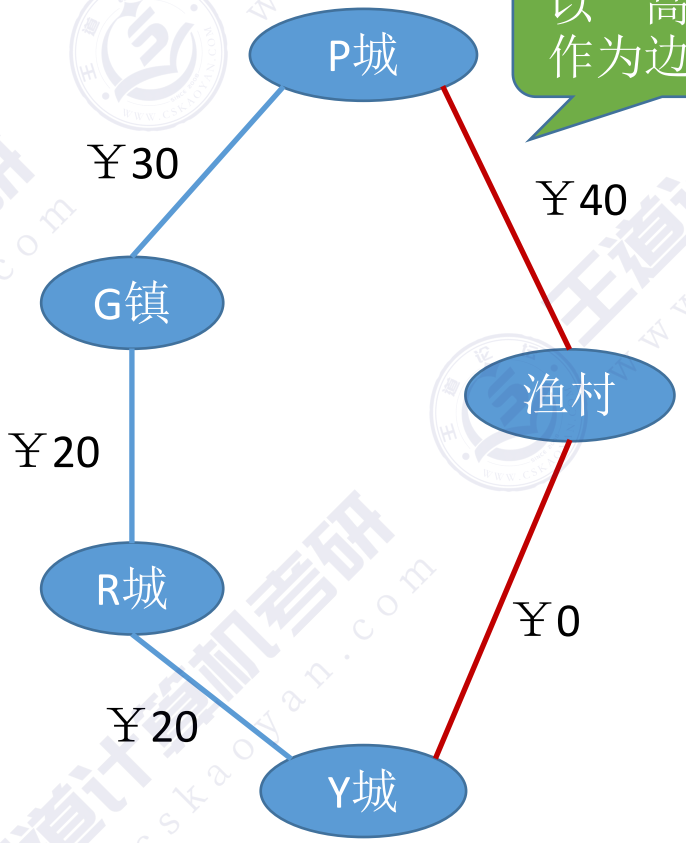
带权图的应用举例

以“实际距离”作为边的权值



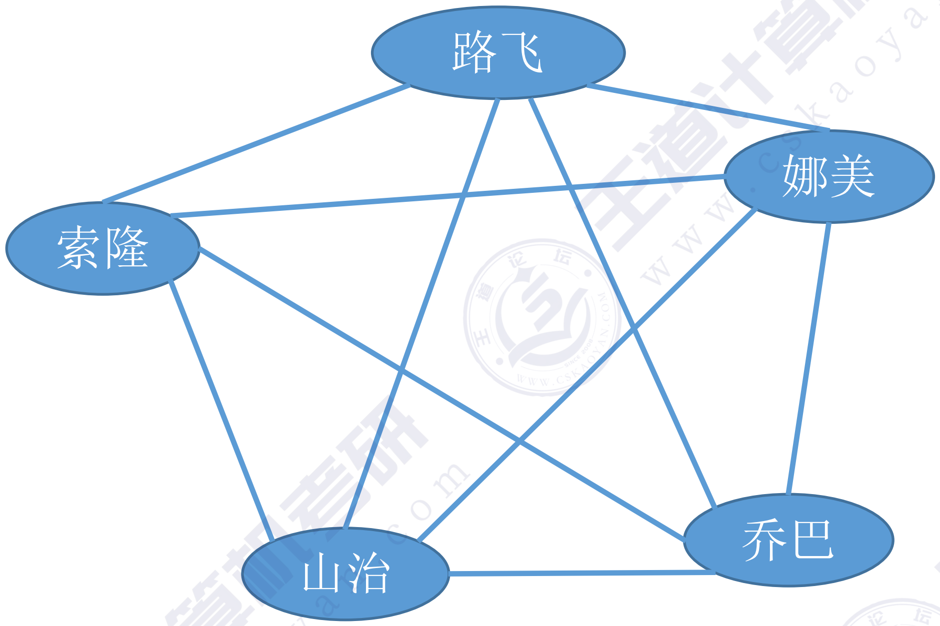
地图导航——距离最短

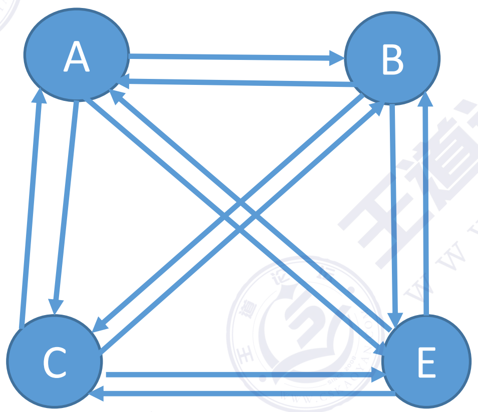
以“高速费”作为边的权值



地图导航——收费最低

几种特殊形态的图





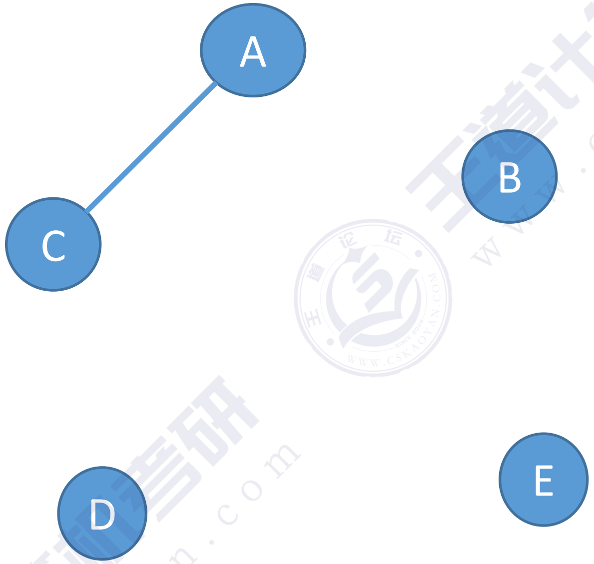
无向完全图——无向图中任意两个顶点之间都存在边

若无向图的顶点数|V|=n，则
$|E| \in [0, C_n^2] = [0, n(n\text{–}1)/2]$

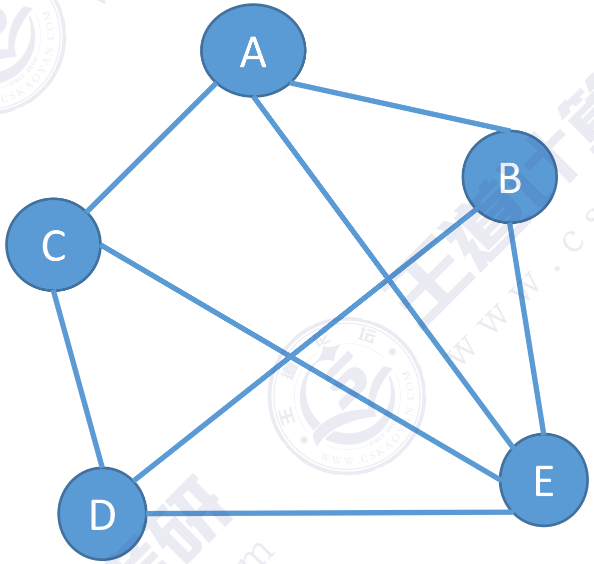
有向完全图——有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧

若有向图的顶点数|V|=n，则
$|E| \in [0, 2C_n^2] = [0, n(n\text{–}1)]$

几种特殊形态的图



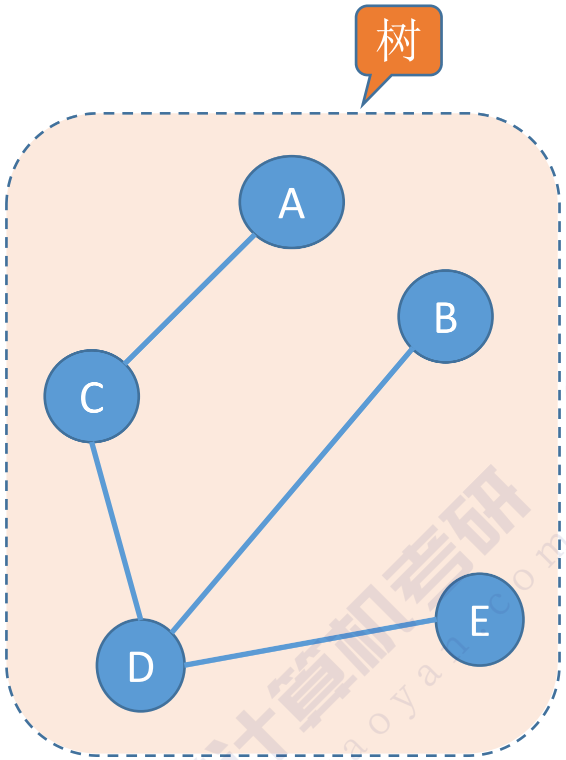
边数很少的图称为稀疏图

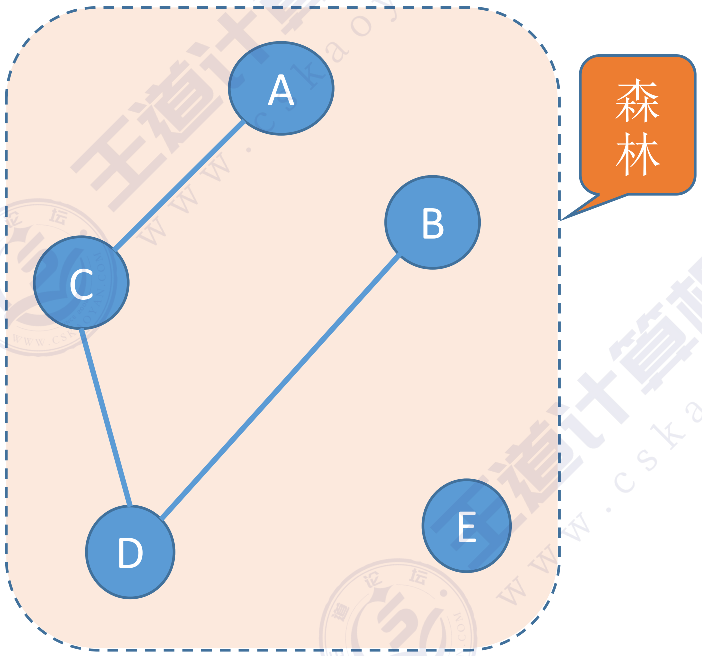


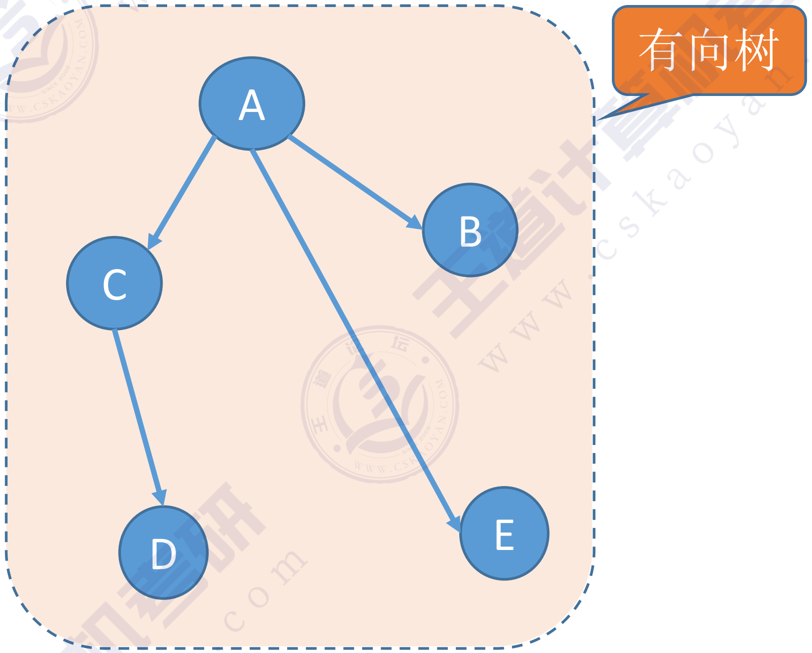
反之称为稠密图

没有绝对的界限，一般来说$|E| < |V|\log|V|$时，可以将G视为稀疏图

几种特殊形态的图







树——不存在回路，且连通的无向图

有向树——一个顶点的入度为0、其余顶点的入度均为1的有向图，称为有向树。

n个顶点的树，必有n-1条边。

常见考点：n个顶点的图，若 |E|>n-1，则一定有回路

知识回顾与重要考点

- 图的基本概念
  - 定义：G=(V, E)，顶点集 V，边集 E
  - 无向图（无向边/边）、有向图（有向边/弧）
  - 顶点的度、出度、入度（无向图？有向图？）
  - 边的权、带权图/网
  - 点到点的关系
    - 路径、回路、简单路径、简单回路
    - 路径长度
    - 点到点的距离（最短路径）
    - 无向图顶点的连通性、连通图
    - 有向图顶点的强连通性、强连通图
  - 图的局部
    - 子图
    - 连通分量——极大连通子图
    - 强连通分量——极大强连通子图
    - 连通无向图的生成树——包含全部顶点的极小连通子图
    - 非连通无向图的生成森林——各连通分量的生成树
  - 几种特殊形态的图
    - 完全图
    - 稠密图、稀疏图
    - 树、森林、有向树

常见考点：

对于n个顶点的无向图G，

- 所有顶点的度之和=2|E|
- 若G是连通图，则最少有 n-1 条边（树），若 |E|>n-1，则一定有回路
- 若G是非连通图，则最多可能有 C_{n-1}^2 条边
- 无向完全图共有C_n^2 条边

对于n个顶点的有向图G，

- 所有顶点的出度之和=入度之和=|E|
- 所有顶点的度之和=2|E|
- 若G是强连通图，则最少有 n 条边（形成回路）
- 有向完全图共有$2C_n^2$ 条边