本节内容

浮点数的表示

本节总览

- 浮点数的表示和运算
  - 浮点数的表示
    - 浮点数的作用和基本原理
    - 浮点数规格化
    - 浮点数的表示范围
  - IEEE 754 标准
  - 浮点数的加减运算

定点数的局限性

钱包

我的财富： - 8540 ¥

2B 定点整数 short 即可表示

马云的财富： +302657264526 ¥

4B 定点整数 int.....都表示不了

8B long型也表示不了

如果换一种货币：1 人民币 ≈ 10000000000 津巴布韦币

如何在位数不变的情况下增加数据表示范围？

定点数可表示的数字范围有限，但我们不能无限制地增加数据的长度

从科学计数法理解浮点数

普通计数法：

+302657264526

科学计数法：

+3.026 * 10^{11}

+11 +3.026

1 人民币 ≈ 10^{10} 津巴布韦币

阶码反映数值大小

尾数反映精度

+21 +3.026

阶码		尾数	
J_f	$J_1J_2 \cdots J_m$	S_f	$S_1S_2 \cdots S_n$
阶符	阶码的数值部分	数符	尾数的数值部分

浮点数的表示

r 进制： $K_n K_{n-1} \ldots K_2 K_1 K_0 K_{-1} K_{-2} \ldots K_{-m}$

$$= K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0 + K_{-1} \times r^{-1} + K_{-2} \times r^{-2} + \ldots + K_{-m} \times r^{-m}$$

定点数：如纯小数0.1011和纯整数11110

浮点数：

阶码		尾数	
J_f	$J_1 J_2 \cdots J_m$	S_f	$S_1 S_2 \cdots S_n$
阶符	阶码的数值部分	数符	尾数的数值部分

阶码：常用补码或移码表示的定点整数

尾数：常用原码或补码表示的定点小数

浮点数的真值： $N = \boxed{r}^E \times M$

阶码的底，通常为2

类比十进制：+302657264526 = +3.026 * 10 $^{+11}$

可记为：+11 +3.026

阶码E反映浮点数的**表示范围**及小数点的实际位置；
尾数M的数值部分的位数n反映浮点数的**精度**。

尾数给出一个小数，阶码指明了小数点要向前/向后移动几位。

浮点数的表示

r 进制：　$K_n\ K_{n-1}\ \dots\ K_2\ K_1\ K_0 K_{-1} K_{-2}\ \dots\ K_{-m}$

$$= K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0 + K_{-1} \times r^{-1} + K_{-2} \times r^{-2} + \dots + K_{-m} \times r^{-m}$$

定点数：如纯小数0.1011和纯整数11110

浮点数：

阶码		尾数	
J_f	$J_1 J_2 \cdots J_m$	S_f	$S_1 S_2 \cdots S_n$
阶符	阶码的数值部分	数符	尾数的数值部分

浮点数的真值：　$N = \boxed{r}^E \times M$

阶码的底，通常为2

阶码E反映浮点数的**表示范围**及小数点的实际位置；
尾数M的数值部分的位数n反映浮点数的**精度**。

阶码：常用补码或移码表示的定点整数

尾数：常用原码或补码表示的定点小数

例：阶码、尾数均用补码表示，求a、b的真值
a = 0,01;1.1001
b = 0,10;0.01001

a：　阶码0,01对应真值+1
　　尾数1.1001对应真值-0.0111 = - $(2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4})$

a的真值 = $2^1 \times (-0.0111) = -0.111$

相当于尾数表示的定点小数算数左移一位，或小数点右移一位

1B的存储空间

0	0	1	1	1	0	0	1

浮点数的表示

r 进制： $K_n\ K_{n-1}\ \dots\ K_2\ K_1\ K_0 K_{-1} K_{-2}\ \dots\ K_{-m}$

$$= K_n \times r^n + K_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + K_2 \times r^2 + K_1 \times r^1 + K_0 \times r^0 + K_{-1} \times r^{-1} + K_{-2} \times r^{-2} + \dots + K_{-m} \times r^{-m}$$

定点数：如纯小数0.1011和纯整数11110

浮点数：

阶码		尾数	
J_f	$J_1 J_2 \cdots J_m$	S_f	$S_1 S_2 \cdots S_n$
阶符	阶码的数值部分	数符	尾数的数值部分

浮点数的真值： $N = \boxed{r}^E \times M$

阶码的底，通常为2

阶码E反映浮点数的**表示范围**及小数点的实际位置；
尾数M的数值部分的位数n反映浮点数的**精度**。

阶码：常用补码或移码表示的定点整数

尾数：常用原码或补码表示的定点小数

例：阶码、尾数均用补码表示，求a、b的真值
a = 0,01;1.1001
b = 0,10;0.01001

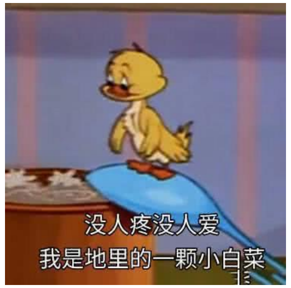
b： 阶码0,10对应真值+2
尾数0.01001对应真值+0.01001 = + $(2^{-2} + 2^{-5})$

b的真值 = $2^2 \times (+0.01001) = +1.001$

相当于尾数表示的定点小数算数左移2位，或小数点右移2位

1B的存储空间

0	1	0	0	0	1	0	0	1



浮点数尾数的规格化

浮点数：

阶码		尾数	
J_f	$J_1J_2\cdots J_m$	S_f	$S_1S_2\cdots S_n$
阶符	阶码的数值部分	数符	尾数的数值部分

浮点数的真值： $N=\boxed{r}^{E}\times M$

阶码的底，通常为2

阶码E反映浮点数的**表示范围**及小数点的实际位置；
尾数M的数值部分的位数n反映浮点数的**精度**。

+302657264526 = +3.026 * 10 $^{+11}$
可记为： +11 +3.026
也可记为： +14 +0.003

尾数的最高位是无效值，会丧失精度

阶码：常用补码或移码表示的整数

尾数：常用原码或补码表示的小数

例：阶码、尾数均用补码表示，求a、b的真值
a = 0,01;1.1001
b = 0,10;0.01001

b： 阶码0,10对应真值+2
尾数0.01001对应真值+0.01001 = + $(2^{-2}+2^{-5})$

所以b = $2^2\times(+0.01001)$ = +1.001

1B的存储空间

0	1	0	0	0	1	0	0	1

b = $2^2\times(+0.01001)$
= $2^1\times(+0.10010)$

0	0	1	0	1	0	0	1

尾数算数左移1位，阶码减1。直到尾数最高位是有效值（左规）

浮点数尾数的规格化

规格化浮点数：规定尾数的最高数值位必须是一个有效值 。

通过算数左移、阶码减1 来规格化

左规：当浮点数运算的结果为非规格化时要进行规格化处理，将尾数算数左移一位，阶码减1。

通过算数右移、阶码加1 来规格化

右规：当浮点数运算的结果尾数出现溢出（双符号位为01或10）时，将尾数算数右移一位，阶码加1。

例：a = 010;00.1100，b = 010;00.1000，求a+b

$$a = 2^2 \times 00.1100 \ ,\ b = 2^2 \times 00.1000$$

$$\begin{aligned} a+b &= 2^2 \times 00.1100 + 2^2 \times 00.1000 \\ &= 2^2 \times (00.1100 + 00.1000) \\ &= 2^2 \times 01.0100 \quad \text{右规} \\ &= 2^3 \times 00.1010 \end{aligned}$$

0	1	1	0	1	0	1	0

注：采用“双符号位”，当溢出发生时，可以挽救。更高的符号位是正确的符号位

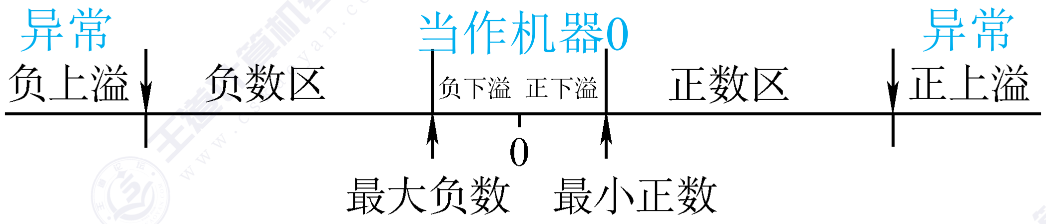
规格化浮点数的特点

规格化的原码尾数，最高数值位一定是1

1. 用原码表示的尾数进行规格化：
正数为0.1××…×的形式，其最大值表示为0.11…1；最小值表示为0.10…0。
尾数的表示范围为$1/2 \le M \le (1-2^{-n})$。
负数为1.1××…×的形式，其最大值表示为1.10…0；最小值表示为1.11…1。
尾数的表示范围为$-(1-2^{-n}) \le M \le -1/2$。

规格化的补码尾数，符号位与最高数值位一定相反

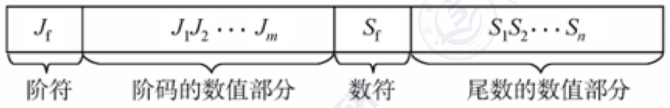
2. 用补码表示的尾数进行规格化：
正数为0.1××…×的形式，其最大值表示为0.11…1；最小值表示为0.10…0。
尾数的表示范围为$1/2 \le M \le (1-2^{-n})$。
负数为1.0××…×的形式，其最大值表示为1.01…1；最小值表示为1.00…0。
尾数的表示范围为$-1 \le M \le -(1/2+2^{-n})$。



eg：若某浮点数的阶码、尾数用补码表示，共4+8位：
0.110；1.1110100 如何规格化？

注：补码算数左移，低位补0；补码算数右移，高位补1。

知识点回顾

- 浮点数的表示
  - 表示
    - 

    - 阶码 + 尾数
      - 尾数给出具体数值，阶码指明小数点前移、后移多少位
      - 阶码通常是用补码、移码表示的定点整数
      - 尾数通常是用补码、原码表示的定点小数
      - 真值
        - $N=r^E \times M$
  - 规格化
    - 尾数的最高数值位必须是一个有效值 （类比十进制科学计数法，通常我们会让数值部分最高位为非0）
    - 左规：数值位最高位无效时，通过尾数算数左移、阶码减1的方法处理，直到尾数最高数值位有效时停止
    - 右规：若采用双符号位表示尾数，则当运算后尾数“假溢出”时，可以通过尾数右移、阶码加1的方法处理
    - 原码表示的尾数规格化：尾数的最高数值位必须是1
    - 补码表示的尾数规格化：尾数最高数值位必须和尾数符号位相反
  - 表示范围
    - 

公众号：王道在线

b站：王道计算机教育

抖音：王道计算机考研