SÉPTIMA Y OCTAVA CLASE

Analytics AoZ

1. Inferencia Estadística – Estimación Puntual.
2. Estimación Interválica.
3. Pruebas de Hipótesis y tipos de errores.
4. **Pruebas Chi-cuadrado**
5. Test en R
   - Ejemplo de t-student una muestra, dos muestras y muestras parejas.
6. Diseño experimental – ANOVA
7. Pruebas no Paramétricas
   - Wilcoxon
   - U de Mann-Whitney
   - K de Kruskall-Wallis
8. Casos aplicados de Geología de los puntos 1 al 7 en Rstudio.

REPASO5 y REPASO6 : EJERCICIO PARA AFIANZAR LO APRENDIDO

GUIA PARA CALSIFICAR TEST DE HIPÓTESIS CON VARIABLES DE RESPUESTA CONTINUA

Analytics AoZ

Table 4.1. Guide to the classification of some hypothesis tests with continuous response variables.

[-, not applicable]

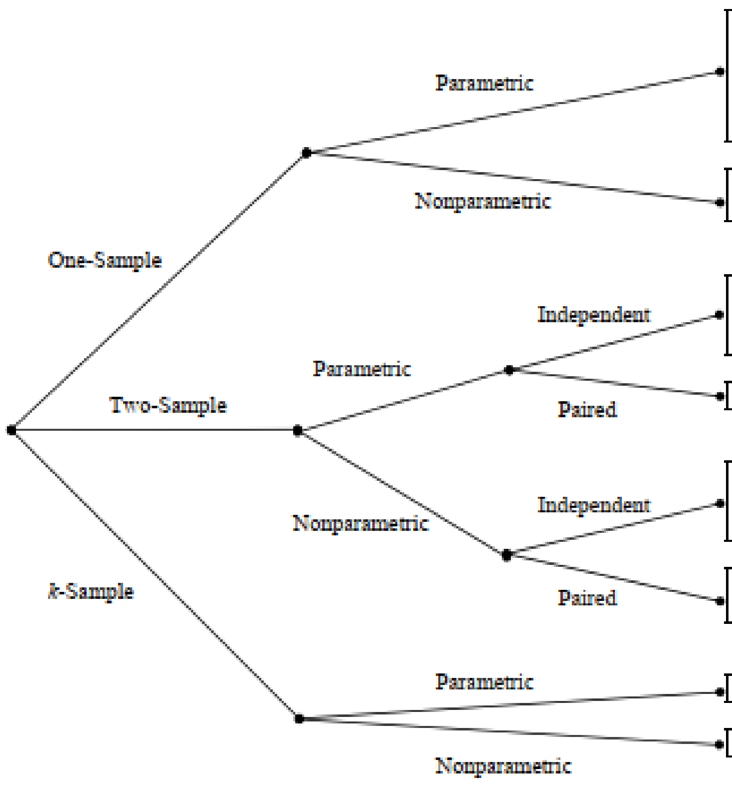
Parametric	Nonparametric	Permutation
	Two independent data groups (chap. 5)	
Two-sample *t*-test	Rank-sum test (two-sample Wilcoxon; Mann-Whitney test)	Two-sample permutation test
	Matched pairs of data (chap. 6)	
Paired *t*-test	Signed-rank test, sign test	Paired permutation test
	Three or more independent data groups (chap. 7)	
Analysis of variance	Kruskal-Wallis test	One-way permutation test
	Three or more dependent data groups (chap. 7)	
Analysis of variance without replication	Friedman test, aligned-rank test	-
	Two-factor group comparisons (chap. 7)	
Two-factor analysis of variance	Brunner-Dette-Munk (BDM) test	Two-factor permutation test
	Correlation between two continuous variables (chap. 8)	
Pearson's r (linear correlation)	Spearman's ρ or Kendall's τ (monotonic correlation)	Permutation test for Pearson's r
	Model of relation between two continuous variables (chaps. 9 and 10)	
Linear regression	Theil-Sen line	Bootstrap of linear regression

Referencia: Statical Methods in Water Resource 2020 , USGS

ÁRBOL DE DECISIÓN PARA EL USO DE TES ESTADÍSTICOS PARAMÉTRICOS Y NO PARAMÉTRICOS

Analytics AoZ

Decision Tree for Selecting the Specific Method



Test	Population Parameter	Distributional Assumption	Section
t-Test and CI	*Mean*	Normal	3.2.1.1
Stratified t-Test	*Mean*	Normal	3.2.1.3
Chen Test	*Mean*	Right-Skewed	3.2.1.4
Land's CI Method	*Mean*	Lognormal	3.2.1.5
Test for a Proportion and CI	*Proportion*		3.2.1.6
Sign Test	*Median*	None	3.2.2.1
Wilcoxon Signed Ranks Test	*Median /Mean*	Symmetric	3.2.2.2
t-Test and CI (equal variances)	*Diff in Means*	Normal	3.3.1.1.1
t-Test and CI (unequal variances)	*Diff in Means*	Normal	3.3.1.1.2
Test for Proportions and CI	*Diff in Props*		3.3.1.1.3
Paired t-Test	*Diff in Means*	Normal	3.3.1.2.1
Wilcoxon Rank Sum Test	*Diff in Means*	Same Variance	3.3.2.1.1
Quantile Test	Right-Tail		3.3.2.1.2
Slippage Test	Right-Tail		3.3.2.1.3
Sign Test	*Median*	None	3.3.2.2.1
Wilcoxon Signed Ranks Test	*Median /Mean*	Symmetric	3.3.2.2.2
Dunnett's Test	*Mean*		3.4.1.1
Kruskal-Wallis Test	*Mean*		3.4.1.2

EPA QA/G-9S 47 DRAFT FINAL September 2004

Referencia: EPA QA/G-9S

ANALISIS BIVARIADO

Análisis Bivariado

dos Variables cualitativas

Cualitativa vs. Cuantitativa

Cuantitativa vs Cuantitativa

dicotómicas

politómicas

Chi cuadrado

Chi cuadrado

Prueba exacta de Fisher

ANALISIS BIVARIADO

Análisis Bivariado

dos Variables cualitativas

Cualitativa vs. Cuantitativa

Cuantitativa vs Cuantitativa

Cualitativa dicotómica

Cualitativa politómica

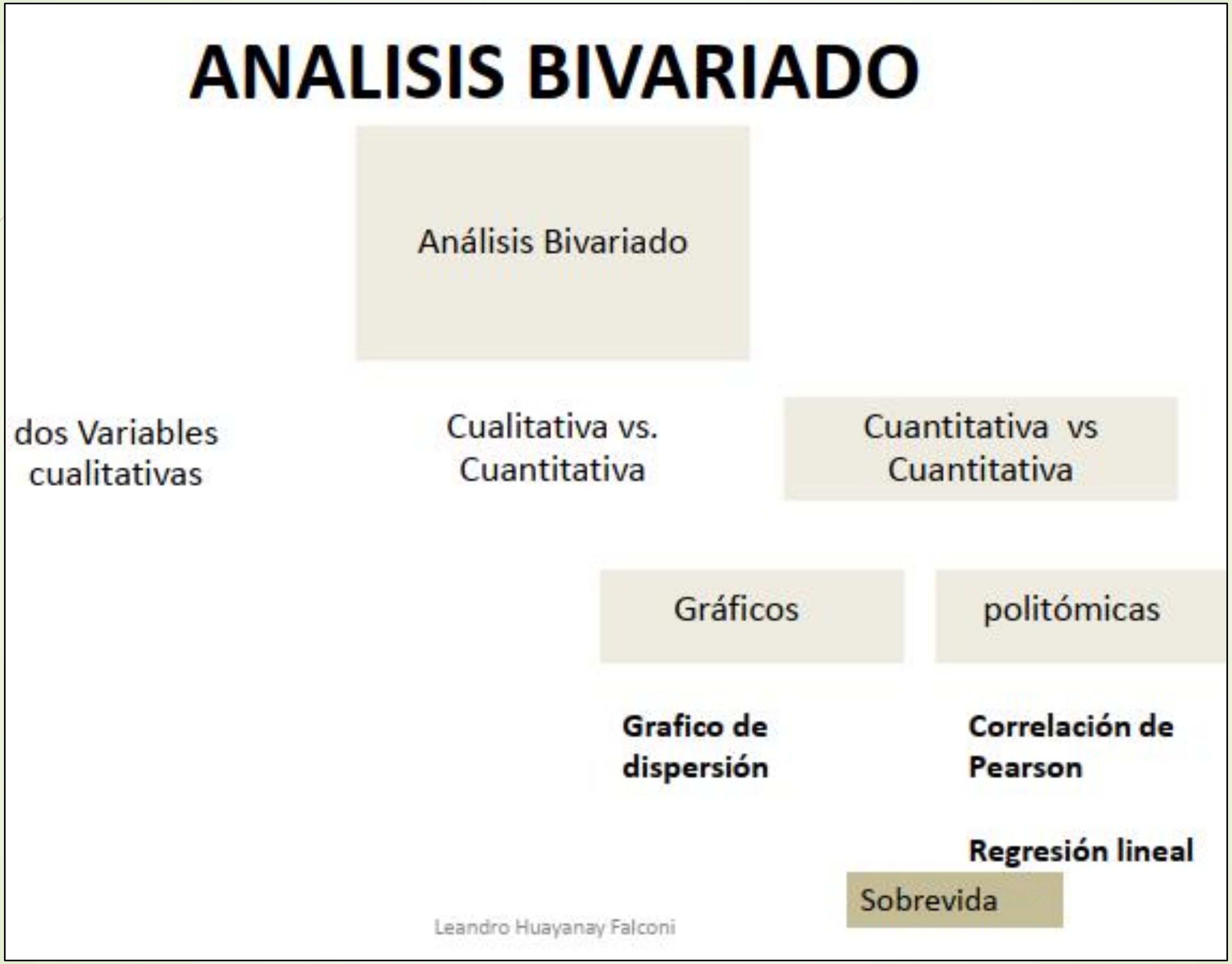
t student

Wilcoxon-Mann-Withney

Anova

Kruskal Wallis

Leandro Huayanay Falconi



Analytics AoZ

Pruebas Chi-cuadrada

Estas pruebas permiten el estudio de varias situaciones en relación con variables aleatorias **cualitativas** o cuantitativas, cuyos datos se presentan generalmente en forma de tablas de frecuencias. El denominador común a todas ellas es que su tratamiento estadístico está basado en la misma distribución teórica: **la distribución χ^2 (chi-cuadrado ó ji-cuadrado)**. En esencia se van a abordar tres tipos de problemas:

- **Prueba de Bondad de Ajuste**
  Se utiliza para verificar si una *muestra aleatoria* proviene de una población cuya distribución sigue una distribución teórica conocida (binomial, poisson, uniforme y normal). En general mayor potencia en cualitativas.
- **Prueba de Independencia de Variables**
  Se utiliza para comprobar si dos variables son independientes en las observaciones de una misma población.
- **Prueba de Homogeneidad de Proporciones**
  Se utiliza para determinar si "r" poblaciones diferentes tienen proporciones iguales para un mismo grupo de clasificación.

Prueba de Bondad de Ajuste

La bondad de ajuste es una prueba que se utiliza para verificar si los datos de una muestra corresponden a una determinada distribución poblacional (binomial, poisson, uniforme y normal).

Las observaciones obtenidas de la muestra se clasifican en una tabla como la siguiente:

Categoría Ai	Frecuencia Observada Oi	Probabilidad (teórica) P(Ai)	Frecuencia Esperada Ei = n*P(Ai)
A_1	O_1	$P(A_1)$	E_1
A_2	O_2	$P(A_2)$	E_2
…	…	….	…
A_r	O_r	$P(A_r)$	E_r
TOTAL	n	1	n

Nota: **P(Ai)** se obtiene a partir de la distribución teórica propuesta.

En la práctica, se trata de decidir si las frecuencias observadas $\mathbf{O_i}$, de la variable en estudio, están o no en concordancia con las frecuencias esperadas $\mathbf{E_i}$; es decir, si el número de resultados observados en cada clase corresponde aproximadamente al número esperado en dicha clase.

La prueba se especifica de la siguiente forma: :

1. Formular las Hipótesis.

   H_0: Los datos de la muestra **no** siguen una distribución diferente a la distribución propuesta.

   H_1: Los datos de la muestra (**si**) siguen una distribución diferente a la distribución propuesta.

2. Fijar el nivel de significación: $0 \leq \alpha \leq 1$
3. Calcular el estadístico de Prueba:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(O_i - E_i\right)^2}{E_i}, \text{ donde: } E_i = nP(A_i)$$

4. Calcular el valor crítico: $\chi^2_{(gl;1-\alpha)}$, siendo **gl=k–p–1**, donde **k** es el número de categorías de la variable y **p** es el número de parámetros desconocidos que se han tenido que estimar para determinar las probabilidades de ocurrencia de dichas categorías.
5. Tomar la decisión de acuerdo a la siguiente regla:

   H_0 se rechaza si: $\chi^2_c > \chi^2_{(gl;\,1-\alpha)}$, en caso contrario H_0 no se rechaza.

<u>Nota:</u> ***El valor de estadístico de prueba se aproxima a una distribución χ^2_c , si $n \geq 30$ y todas las frecuencias esperadas E_i son mayores que 5 (en ocasiones deberemos agrupar varias categorías a fin de que se cumpla este requisito).***

Ejemplo 1: Caso de distribución uniforme (proporciones iguales)

Analytics AoZ

Para determinar si un dado es equilibrado ("legal"), es arrojado 360 veces, obteniendo los resultados que se muestran en el cuadro siguiente. Con un nivel de significación de 0.04, ¿es razonable concluir que el dado no es equilibrado?

Resultado del dado (X_i)	Número de veces (O_i)
1	57
2	46
3	68
4	52
5	72
6	65

Solución:

Se quiere probar si las frecuencias observadas y esperadas de los resultados del dado, no son concordantes. En este caso la distribución teórica propuesta es la ***Uniforme***, ya que se espera que al arrojarse un dado "legal", la proporción de veces que aparecerá cualquier resultado será la misma, es decir 1/6.

En una distribución uniforme las proporciones de cada una de las categorías de la variable es la misma.

Calculo del Estadístico de Prueba:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \text{ donde: } E_i = nP(A_i)$$

Categoría Ai	Frecuencia Observada Oi	Probabilidad (teórica Uniforme) P(Ai)	Frecuencia Esperada Ei = n*P(Ai)	Chi-cuadrado prueba (Oi-Ei)^2/Ei
1	57	1/6	60	0.150
2	46	1/6	60	3.267
3	68	1/6	60	1.067
4	52	1/6	60	1.067
5	72	1/6	60	2.400
6	65	1/6	60	0.417
Total	**N=360**	**1**	**360**	**Chi-square= 8.368**

$\chi^2_{(gl;1-\alpha)}$, siendo **gl=k–p–1**

1-Alpha = 0.96
gl = 6-p-1= 6-0-1 = 5

$$\chi^2_{(5;0.96)} = 11.644$$

Valor Crítico

El estadístico de prueba no es mayor que el valor critico por tanto no se Rechaza H0

Ejemplo 1

La solución se plantea de la siguiente forma: :

1. Formular las Hipótesis.

   H_0: Los datos de la muestra **no** se ajustan a una distribución diferente a la uniforme. (El dado no está desequilibrado). **(H_0: p_i = 1/6)**

   H_1: Los datos de la muestra (**si**) se ajustan a una distribución diferente a la uniforme. (El dado (si) esta desequilibrado). **(H_0: $p_i \neq$ 1/6)**

2. Fijar el nivel de significación: $0 \leq \alpha \leq 0.1$
3. Calcular el estadístico de Prueba:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \text{ donde: } E_i = nP(A_i) \longrightarrow \chi^2_c = 8.36667$$

p-Valor = $P(\chi^2 > \chi^2_c)$
$= P(\chi^2 > 8.36667)$
$= \mathbf{0.1372}$

4. Calcular el valor crítico: $\chi^2_{(6-0-1;1-0.04)} = \chi^2_{(5;\,0.96)} = 11.64$
5. Regla de decisión:

   H_0 se rechaza si: $\chi^2_c > \chi^2_{(5;\,0.96)}$, en caso contrario H_0 no se rechaza

   H_0 se rechaza si: p-valor < a, en caso contrario H_0 no se rechaza

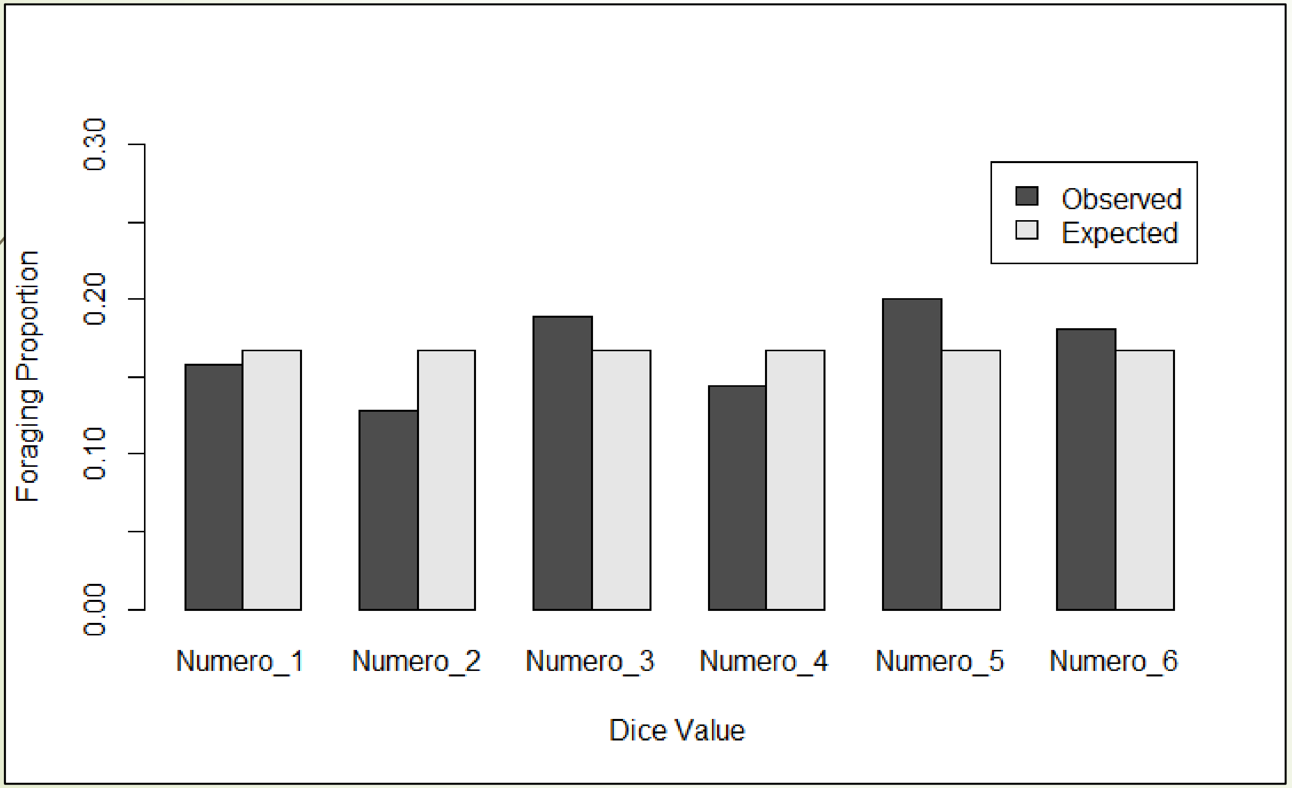
6. Decisión: **H_0 no se rechaza**
7. Conclusión: Con un NS 0 0.04, **no puedo afirmar** que Los datos de la muestra se ajustan a una distribución distinta a la uniforme, (o que el dado evidencia estar desequilibrado).

Analytics AoZ

Solución en R

Chi-squared test for given probabilities

data: observed
X-squared = 8.3667, df = 5, p-value = 0.1372



Fuente para código en R: https://rcompanion.org/rcompanion/b_03.html

Resolver 1 (Lo haremos a mano en casa se hará en software).

Con el fin de observar si la litología se distribuía uniformente en el terreno se realizaron 30 perfiles observando si correspondía a: A, B o C. Se tomó la litología (si era A, B ó C) y se realizó una tabla de frecuencias arrojando:

Variable	Frecuencia absoluta
A	9
B	16
C	5

Tabla 9.2. Frecuencia de los tres tipos de litología encontrados

Realice el test estadístico corresponde con los gráficos correspondientes.

Ejemplo 2. La empresa de medición de rating Televisivo *Ibote Time*, registró las audiencias de sábado por la noche, de 8:00 p.m. a 9:00 pm. durante las primeras 13 semanas de la temporada de televisión, obteniendo los siguientes resultados: ABC 29%, CBS 28%, NBC 25% y otros 18%.

Dos semanas después, una muestra de 300 hogares seleccionados aleatoriamente arrojó los siguientes resultados de audiencia: ABC 95 hogares, CBS 70 hogares, NBC 89 hogares y otros 46 hogares. Pruebe, con nivel de significación 0.05, si han cambiado las proporciones de telespectadores

Ejemplo 3. La empresa de investigación de mercado *D&J S.A.* hizo un estudio para determinar la opinión de los televidentes sobre un nuevo programa humorístico. Se tomó una muestra aleatoria de 400 personas, obteniéndose los siguientes resultados:

Opinión	muy bueno	bueno	regular	malo	muy malo	total
Frecuencia	25	60	175	120	20	400

Pruebe si la opinión de los televidentes respecto al nuevo programa humorístico no se distribuye en la proporción: 2:4:6:5:3. Use $\alpha = 0.05$.

VAMOS AL R!!!!

Ejemplo 4. Caso de distribución Poisson

Analytics AoZ

Una entidad financiera que opera a nivel nacional, quiere estudiar el número de solicitudes de crédito recibidas por día durante los últimos 300 días. El encargado del estudio presentó el cuadro que se muestra a continuación. Sobre el particular: ¿es razonable concluir que el número de solicitudes de crédito recibidas diariamente siguen una distribución de **Poisson**?

Número de solicitudes (X_i)	Número de días (f_i)
0	50
1	77
2	81
3	48
4	31
5 o más	13

Solución:

En este caso la distribución teórica propuesta es la de **Poisson**, en la que:

$$\text{Si } X \sim P(\lambda) \rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

donde: $\boldsymbol{\lambda}$ es la media de la distribución poblacional, cuyo valor será estimada por la media de la distribución muestral $\overline{\boldsymbol{X}}$:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{572}{300} = \mathbf{1.90667}$$

Lo que implica el uso de **un grado de libertad**

Ejemplo 4

Analytics AoZ

Número de solicitudes de crédito (categorías)	Número de días (frecuencias)				
A_i	O_i	$A_i\ O_i$	$P(A_i)$	$E_i = nP(A_i)$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	50	0	0.148575		
1	77	77	0.283283		
2	81	162 **A=**	0.270063		
3	48	144	0.171640		
4	31	124	0.081815		
5	13	65	**1- A**		
	300	572			

Media = 1.90667

Ejemplo 4

Analytics AoZ

Número de solicitudes de crédito	Número de días				
A_i	O_i	$A_i\ O_i$	$P(A_i)$	$E_i=nP(A_i)$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	50	0	0.148575		
1	77	77	0.283283		
2	81	162	0.270063		
3	48	144	0.171640		
4	31	124	0.081815		
5	13	65	0.044625		
	300	572	1.000000		

Media = 1.90667

Ejemplo 4

Número de solicitudes de crédito	Número de días				
A_i	O_i	$A_i\ O_i$	$P(A_i)$	$E_i=nP(A_i)$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	50	0	0.148575	44.57	
1	77	77	0.283283	84.98	
2	81	162	0.270063	81.02	
3	48	144	0.171640	51.49	
4	31	124	0.081815	24.54	
5	13	65	0.044625	13.39	
	300	572	1.000000	300.00	

Media = 1.90667

Ejemplo 4

Número de solicitudes de crédito	Número de días				
A_i	O_i	$A_i\ O_i$	$P(A_i)$	$E_i=nP(A_i)$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	50	0	0.148575	44.57	0.6609
1	77	77	0.283283	84.98	0.7502
2	81	162	0.270063	81.02	0.0000
3	48	144	0.171640	51.49	0.2368
4	31	124	0.081815	24.54	1.6979
5	13	65	0.044625	13.39	0.0112
	300	572	1.000000	300.00	3.3570

Media = 1.90667

$\chi_c^2 =$ 3.3570

Ejemplo 4

1. Hipótesis.

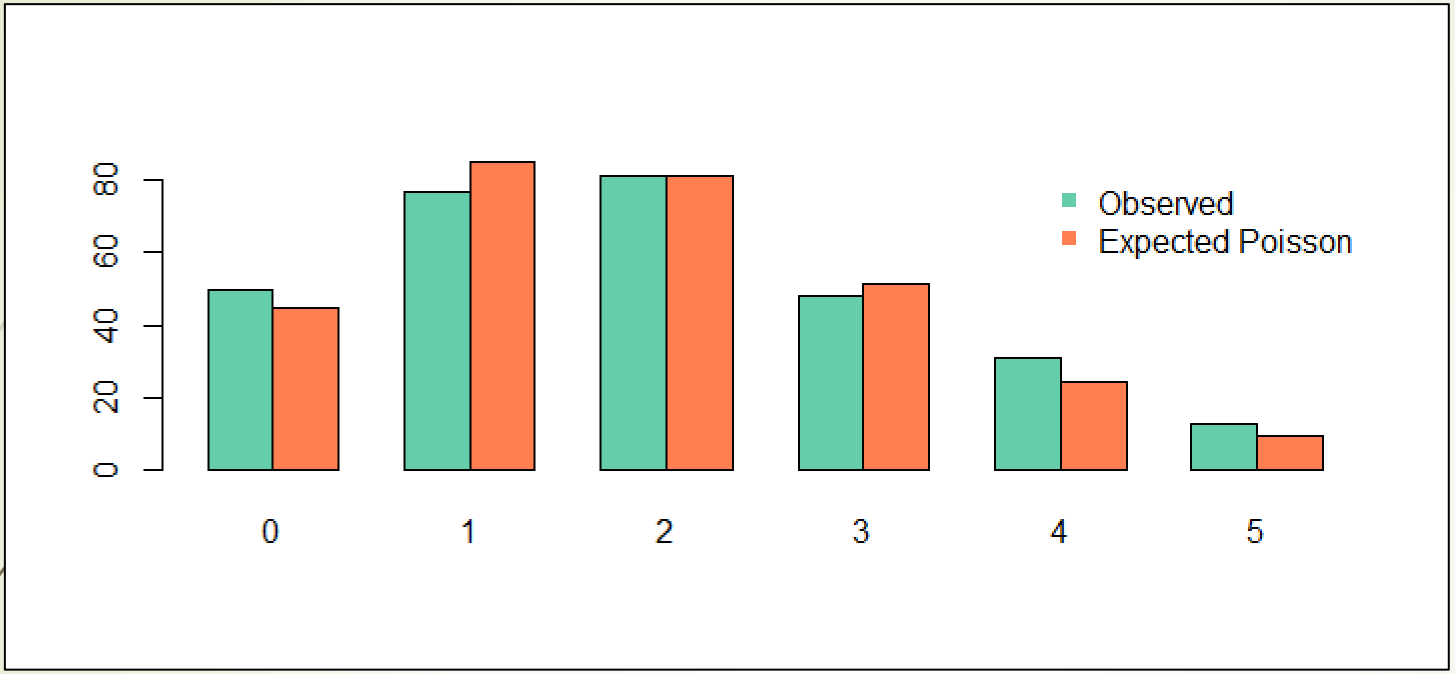
   H_0: Las solicitudes de crédito diarias **no** se ajustan a una distribución diferente a la de Poisson

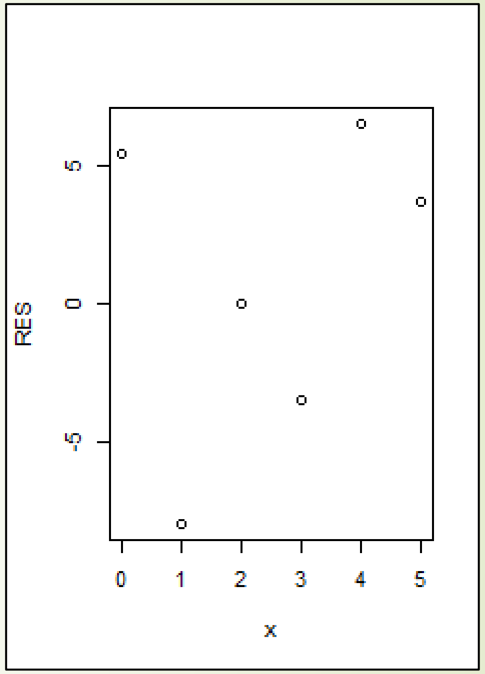
   H_1: Las solicitudes de crédito diarias (**si**) se ajustan a una distribución diferente a la de Poisson
2. Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$
3. Estadístico de Prueba: χ^2_c **= 3,3570**
4. Valor Crítico: $\chi^2_{(6-1-1;\,0{,}95)} = \chi^2_{(4;\,0{,}95)}$ **= 9,48773**
5. p-value = $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi^2_c) = 0.500$
6. Reglas de Decisión:
   - **H_0 se rechaza, si $\chi^2_c > \chi^2_{(gl;\,1-\alpha)}$, caso contrario no se rechaza.**
   - **H_0 se rechaza, si p-value < α, caso contrario no se rechaza.**
7. Decisión: H_0 no se rechaza.
8. Conclusión: Con un NS = 0,5, no se puede afirmar que las solicitudes de crédito diarias se ajustan a una distribución diferente a la de Poisson.

Observe que en este caso:
gl = k-p-1, donde:
k = 6 (categorias de la variable)
p = 1 (ya que se tuvo que estimar el valor de **un parámetro** (la media), a partir de la muestra,

Ahora, veamos la solución utilizando R

Solución en R





Fuente para código en R:

https://www.r-bloggers.com/2013/04/checking-the-goodness-of-fit-of-the-poisson-distribution-in-r-for-alpha-decay-by-americium-241/

https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35f.htm

https://rcompanion.org/rcompanion/b_03.html

http://www.sthda.com/english/wiki/chi-square-goodness-of-fit-test-in-r

Poisson – Alumno soluciona (**Edson**)

1. El gerente de operaciones de Bancaper, entidad financiera que opera a nivel nacional, quiere estudiar si el número de solicitudes de crédito recibidas por día tiene distribución Poisson. Se seleccionaron 300 días de operaciones, con lo cual el gerente elaboró el siguiente cuadro:

# Solicitudes de crédito	0	1	2	3	4	5 o más
Frecuencia (número de días)	50	77	81	48	31	13

¿Sería razonable concluir que la distribución del número de solicitudes diarias de préstamo no es del tipo Poisson? Use el nivel de significación del 5%.
(Presente las hipótesis, p-valor el estadístico de prueba y la conclusión).

Poisson - Alumno Soluciona (**Pedro**)

1. Se supone que el número de llamadas telefónicas que entran al conmutador de la empresa Comunicaciones S.A. durante intervalos de un minuto debe tener una distribución de Poisson.
Los resultados obtenidos de analizar una muestra aleatoria de 100 intervalos de un minuto de duración son los siguientes:

N° llamadas que entran c/min., X	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia observada	15	31	20	15	13	4	2

Use un nivel de significación de 0.02 y los siguientes datos para probar la hipótesis de que las llamadas que entran no tienen distribución de Poisson.
(Presente las hipótesis, p-valor el estadístico de prueba y la conclusión).

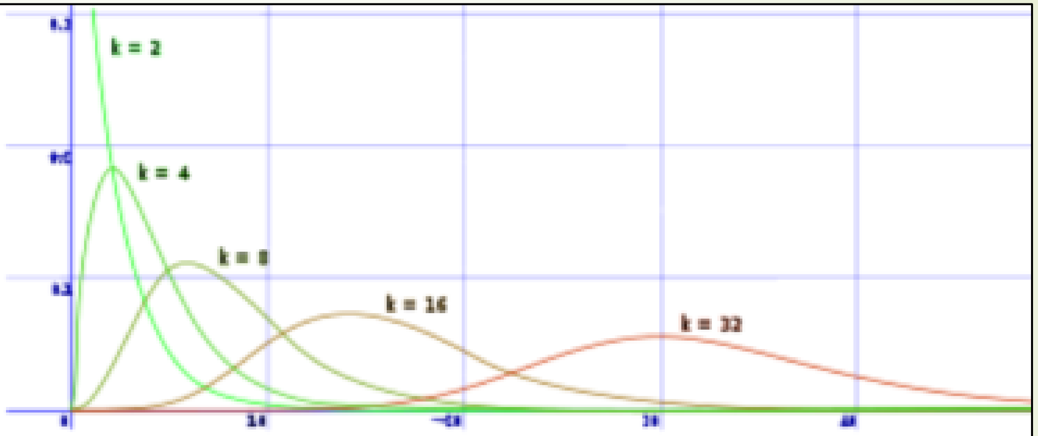
Distribución Chi-Cuadrado

Analytics AoZ

La **Distribución chi-cuadrado**,

$$\chi_k^2(x) = \frac{x^{k/2-1}\, e^{-x/2}}{2^{k/2}\, \Gamma(k/2)}$$

Tiene grados de libertad K

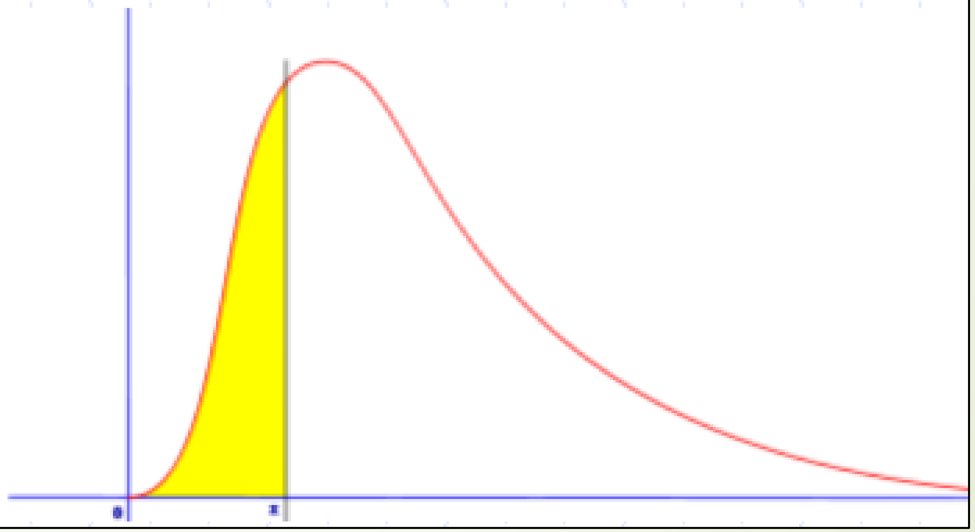


La **Distribución de probabilidad** de esta función para valores menores de un x dado, que representamos por $(\chi_k^2 < x)$

$$P(\chi_k^2 < x) = \int_0^x \chi_k^2\, du$$

donde:

$$\int_0^x \chi_k^2\, du = \int_0^x \frac{u^{k/2-1}\, e^{-u/2}}{2^{k/2}\, \Gamma(k/2)}\, du$$



Prueba de Independencia

Esta prueba se aplica para comprobar si dos ***variables o características*** **cualitativas independientes** están relacionadas o asociadas entre sí (***no son independientes)*** en las observaciones de una misma población.

Así, los datos de la muestra se clasifican a la vez en las "**r**" categorías de la variable **X**, y en las "**c**" categorías de la variable **Y**.
De este modo los datos de la muestra se presenta en una tabla resumen de **r x c** llamada "***tabla cruzada o tabla de contingencia***":

Variable X	Variable Y				Total Fila
	Y_1	Y_2	…	Y_c	
X_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1c}	O_{1*}
X_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2c}	O_{2*}
…	…	…	…	…	…
X_r	O_{r1}	O_{r2}	…	O_{rc}	O_{r*}
Total Columna	O_{*1}	O_{*2}	…	O_{*c}	n

La prueba se especifica de la siguiente forma: :

1. Formular las Hipótesis.

   H_0: Las variables **no** están relacionadas o asociadas (**sí** son independientes).

   H_1: Las variables (**si**) están relacionadas o asociadas (**no** son independientes).

2. Fijar el nivel de significación: $0 \leq \alpha \leq 1$
3. Calcular el estadístico de Prueba:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \quad \text{donde: } E_{ij} = \frac{O_{*j}O_{i*}}{n}$$

4. Calcular el valor crítico: $\chi^2_{(gl;\ 1-\alpha)}$, siendo **gl=(r–1)*(c–1)**, **r** el número de filas y **c** el número de columnas.

5. Tomar la decisión de acuerdo a la siguiente regla:

   H_0 se rechaza si: $\chi^2_c > \chi^2_{(gl;\ 1-\alpha)}$, en caso contrario no se rechaza.

Nota: ***El valor de estadístico de pueba se aproxima a una distribución χ^2_c , si $n \geq 30$ y todas frecuencias esperadas E_i son mayores que 5 (en ocasiones deberemos agrupar varias categorías a fin de que se cumpla este requisito).***

Analytics AoZ

Ejemplo 5

Analytics AoZ

El Área de Investigación de cierta Universidad desea determinar, con base en los siguientes resultados de un estudio, si existe relación entre la clase socioeconómica de un estudiante y su evaluación de un curso de proyectos. Use un nivel de significación de 0.03

Clase socioeconómica	Evaluación			
	Deficiente	Buena	Excelente	Total
Bajo	51	103	596	
Medio bajo	254	240	612	
Medio alto	391	153	560	
Alto	340	119	651	
Total				

1. Hipótesis.

   H_0: La clase socioeconómica y la evaluación en el curso de proyectos de un estudiante **no** están asociados o relacionados (Si son independientes)

   H_1: La clase socioeconómica y la evaluación en el curso de proyectos de un estudiante (**si**) están asociados o relacionados (No son independientes)

2. Estadístico de Prueba:

2. Valor Crítico: $\chi^2_{(6;\, 0,97)}$ **=** **gl = (4-1)*(3-1) = 6**
3. p-value = P($\chi^2 > \chi^2_c$) **=**
4. Reglas de Decisión:
   - **H_0 se rechaza, si $\chi^2_c > \chi^2_{(6;\, 0,95)}$, caso contrario no se rechaza.**
   - **H_0 se rechaza, si p-value < α, caso contrario no se rechaza.**
7. Decisión:

7. Conclusión: Con un NS=0,03,

Ejemplo 6

Cierto especialista afirma que el ***tipo de ocupación*** de las mujeres esta ***asociado*** a la ***edad*** que tienen. Para comprobarlo, se elaboró una tabla de contingencia de **7 x 7** con los datos de la Encuesta de Demografía y Salud, 2004-2006. A la luz de la tabla presentada a continuación que opina usted?

Perú 2004-2006: Mujeres que trabajaron en los últimos 12 meses antes de la encuesta, por tipo de ocupación, según grupos quinquenales de edad

Grupos Quinquenales de Edad	Tipo de Ocupación						
	Profesional / Técnico / Gerente	Oficinista	Ventas y Servicios	Manual Calificado	Manual No Calificado	Servicios Domesticos	Agricultura
De 15 a 19 años	51	103	596	96	13	417	536
De 20 a 24 años	254	240	612	148	28	338	412
De 25 a 29 años	391	153	560	116	17	205	496
De 30 a 34 años	340	119	651	141	14	191	555
De 35 a 39 años	316	81	639	131	22	246	550
De 40 a 44 años	288	87	588	118	9	155	458
De 45 a 49 años	183	71	504	103	13	142	432

FUENTE. INEI / ENDES Continua 2004-2006

1. Hipótesis.

   H_0: El tipo de ocupación y la edad de las mujeres no están asociados o relacionados (Si son independientes)

   H_1: El tipo de ocupación y la edad de las mujeres (si) están asociados o relacionados (No son independientes)

2. Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$
3. Estadístico de Prueba: χ^2_c **= 666,379**
4. Valor Crítico: $\chi^2_{(36;\,0{,}95)}$ **= 50,9985**
5. p-value = $\mathbf{P(\chi^2 > \chi^2_c) = 0{,}000}$
6. Reglas de Decisión:
   - **H_0 se rechaza, si $\chi^2_c > \chi^2_{(36;\,0{,}95)}$, caso contrario no se rechaza.**
   - **H_0 se rechaza, si p-value < α, caso contrario no se rechaza.**
7. Decisión: **H_0 se rechaza**
8. Conclusión: Con un NS=0,05, **puedo afirmar** que el tipo de ocupación y la edad de las mujeres sí están asociados o relacionados; es decir no son independientes.

Nota: Realice la prueba utilizando software

Fuente para código en R:

https://rpubs.com/Joaquin_AR/220579

https://rpubs.com/fredesdanyel/646504

https://www.youtube.com/watch?v=LnaeG0MzQVw&ab_channel=UTSSC

http://www.sthda.com/english/wiki/chi-square-test-of-independence-in-r

http://www.r-tutor.com/elementary-statistics/goodness-fit/chi-squared-test-independence

https://www.rpubs.com/cwoods/chisquare_independence

INVESTGAR ACERCA DEL G-test of Independence

https://rcompanion.org/rcompanion/b_06.html

Prueba de Homogenidad de Proporciones

Analytics AoZ

Se aplica para determinar si "**c**" poblaciones diferentes tienen **proporciones iguales** para un mismo grupo de clasificación.

La información proviene de muestras tomadas en cada una de las "**c**" poblaciones, la misma que se presenta en una tabla de contingencia como la siguiente:

Grupo o clase	Población				Total Fila
	1	2	…	c	
X_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1c}	O_{1*}
X_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2c}	O_{2*}
…	…	…	…	…	…
X_r	O_{r1}	O_{r2}	…	O_{rc}	O_{r*}
Total Columna	O_{*1}	O_{*2}	…	O_{*c}	n

La prueba se especifica de la siguiente forma:

1. Formular las Hipótesis.

   H_0: En ninguno de los grupos las proporciones son diferentes.

   H_1: En al menos uno de los grupos las proporciones (si) son diferentes.

2. Fijar el nivel de significación: $0 \leq \alpha \leq 1$
3. Calcular el estadístico de prueba:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \quad \text{donde: } E_{ij} = \frac{O_{*j}O_{i*}}{n}$$

4. Calcular el valor crítico: $\chi^2_{(gl;1-\alpha)}$, siendo **gl=(r–1)*(c–1)**, **r** el número de filas y **c** el número de columnas.
5. Tomar la decisión de acuerdo a la siguiente regla de decisión:

H_0 se rechaza si: $\chi^2_c > \chi^2_{(gl;\,1-\alpha)}$, en caso contrario no se rechaza.

<u>Nota:</u> ***El valor de estadístico de prueba se aproxima a una distribución χ^2_c , si $n \geq 30$ y todas frecuencias esperadas E_i son mayores que 5 (en ocasiones deberemos agrupar varias categorías a fin de que se cumpla este requisito).***

Ejemplo 7

El alcalde de una ciudad desea conocer la opinión de los ciudadanos, respecto a la implementación de un nuevo impuesto predial. Con dicho propósito ha levantado un sondeo de opinión cuyos resultados son los que se presentan a continuación. ¿Se puede afirmar que existe evidencia como para concluir que la opinión de los ciudadanos no es la misma en todos los asentamientos humanos?.

Opinión	AAHH 1	AAHH 2	AAHH 3	AAHH 4	Total
De acuerdo	115,45	53,24	40,33	98,57	306
En desacuerdo	35	22	35	40	132
No opina	8,14	5,16	4,21	5,24	22
Total	158	80	79	143	460

Analytics AoZ

Minitab - Sin título

Archivo Editar Datos Calc Estadísticas Gráfica Editor Herramientas Ventana Ayuda Asistente

Sesión

Prueba chi-cuadrada para asociación: Filas de la hoja de trab, Columnas de la hoja de t

```
Filas: Filas de la hoja de trabajo   Columnas: Columnas de la hoja de trabajo

           C2      C3      C4      C5   Todo
1         115      53      40      98    306
       105.10   53.22   52.55   95.13
       0.9317  0.0009  2.9981  0.0868

2          35      22      35      40    132
        45.34   22.96   22.67   41.03
       2.3577  0.0399  6.7068  0.0261

3           8       5       4       5     22
         7.56    3.83    3.78    6.84
       0.0260  0.3602  0.0130  0.4946

Todo      158      80      79     143    460

Contenido de la celda:      Conteo
                            Conteo esperado
                            Contribución a Chi-cuadrada

Chi-cuadrada de Pearson = 14.042, GL = 6, Valor p = 0.029
Chi-cuadrada de la tasa de verosimilitud  = 13.543, DF = 6, Valor p = 0.035

* NOTA * 2 celdas con conteos esperados menores que 5
```

<u>Nota:</u> ***El valor del estadístico de prueba se aproxima a una distribución χ^2_c , si $n \geq 30$ y todas las frecuencias esperadas E_i son mayores que 5 (en ocasiones deberemos agrupar varias categorías a fin de que se cumpla este requisito).***

En nuestro ejemplo, <u>2 celdas tienen frecuencias esperadas no mayores a 5</u>, situación que nos obliga a replantear la solución del problema, en cuanto al número de categorías de la variable. La solución en este caso es agrupar las categorías 2 y 3 en una sola, de modo que la tabla de contingencia se reduce a una matriz de 2 filas y 4 columnas.

Hoja de trabajo 1 ***

	C1-T	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20
1	De acuerdo	115	53	40	98															
2	En desacuerdo	35	22	35	40															
3	No opina	8	5	4	5															
4																				

Hoja de trabajo actual: Hoja de trabajo 1

08:52 a.m. 03/09/2017

Analytics AoZ

Ejemplo 7. Replanteamiento de la solución.

La tabla de contingencia quedaría como sigue:

Opinión	AAHH 1	AAHH 2	AAHH 3	AAHH 4	Total
De acuerdo	115	53	40	98	306
En desacuerdo/No opina	43	27	39	45	154
Total	158	80	79	143	460

Luego, procediendo de la misma manera que al inicio de la solución de este problema, tenemos que:

Ejemplo 7. Replanteamiento de la solución.

Analytics AoZ

Minitab - Sin título

Archivo Editar Datos Calc Estadísticas Gráfica Editor Herramientas Ventana Ayuda Asistente

Sesión

Prueba chi-cuadrada para asociación: Filas de la hoja de trab, Columnas de la hoja de t

```
Filas: Filas de la hoja de trabajo   Columnas: Columnas de la hoja de trabajo

            C2      C3      C4      C5  Todo

1          115      53      40      98   306
        105.10   53.22   52.55   95.13
        0.9317  0.0009  2.9981  0.0868

2           43      27      39      45   154
         52.90   26.78   26.45   47.87
        1.8513  0.0018  5.9573  0.1725

Todo       158      80      79     143   460

Contenido de la celda:       Conteo
                             Conteo esperado
                             Contribución a Chi-cuadrada


Chi-cuadrada de Pearson = 12.000, GL = 3, Valor p = 0.007
Chi-cuadrada de la tasa de verosimilitud  = 11.607, DF = 3, Valor p = 0.009
```

	C1-T	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20
1	De acuerdo	115	53	40	98															
2	En desacuerdo	43	27	39	45															
3																				
4																				

Hoja de trabajo actual: Hoja de trabajo 1 Editable

Ejemplo 7

Analytics AoZ

1. Hipótesis.

   H_0: La opinión de los ciudadanos no es diferente en todos los asentamientos humanos

   H_1: En al menos uno de los asentamientos humanos La opinión de los ciudadanos (si) es diferente
2. Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$
3. Estadístico de Prueba: $\chi^2_c = 12{,}00$
4. Valor Crítico: $\chi^2_{(3;\,0{,}95)} = 7{,}815$
5. P-value = $P(\chi^2 > \chi^2_c) = 0{,}0499$
6. Reglas de Decisión:
   - **H_0 se rechaza, si $\chi^2_c > \chi^2_{(3;\,0{,}95)}$, caso contrario no se rechaza.**
   - **H_0 se rechaza, si p-value < α, caso contrario no se rechaza.**
7. Decisión: H_0 se rechaza
8. Conclusión: Con un NS = 0,05, se puede afirmar que en al menos uno de los asentamientos humanos la opinión de los ciudadanos (si) es diferente

Test Homogeneidad de Proporciones:

https://sites.williams.edu/bklingen/files/2012/02/R-code-for-inference-about-several-proportions.pdf
https://mse.redwoods.edu/darnold/math15/spring2013/R/Activities/ChiSquareTestOfHomogeneity.html
https://www.math.csi.cuny.edu/Statistics/R/simpleR/stat013.html

Para completar los test de ajuste estadístico revisar:
http://finzi.psych.upenn.edu/R/library/EnvStats/html/gofTest.html
Test para variables cualitativas:
https://www.cienciadedatos.net/documentos/22.2_test_exacto_de_fisher_chi-cuadrado_de_pearson_mcnemar_qcochran

SÉPTIMA Y OCTAVA CLASE

Analytics AoZ

1. Inferencia Estadística – Estimación Puntual.
2. Estimación Interválica.
3. Pruebas de Hipótesis y tipos de errores.
4. Pruebas Chi-cuadrado
5. Test en R
   - Ejemplo de **t-student una muestra, dos muestras y muestras parejas.**
6. Diseño experimental – ANOVA
7. Pruebas no Paramétricas
   - Wilcoxon
   - U de Mann-Whitney
   - K de Kruskall-Wallis
8. Casos aplicados de Geología de los puntos 1 al 7 en Rstudio.

REPASO5 y REPASO6 : EJERCICIO PARA AFIANZAR LO APRENDIDO

T-Tests

Uno de los test más comunes en estadística el t-test, usado para determinar si la **media de dos grupos son iguales una a otra**. Se **asume** que **ambos grupos son muestras de una *distribución normal* con *iguales varianzas***. La hipótesis nula es que las dos medias son iguales, y la alternativa que no lo son. Se calcula un t-estadístico que sigue una distribución *t* con n1+n2-2 grados de libertad. Además debemos considerar que es ampliamente usado la modificación de t-test conocido como Welch´s t-test que ajusta el numero de grados de libertad cuando la varianza no son pensadas a ser iguales.

- **One Sample-t**
- **Unpaired two-sample t-test**
- **Paired Samples T-test in R**

Analytics AoZ

One-Sample t-test

Este test es usado para comparar medias de una muestra para una desviación estándar desconocida (o teórica/hipotética) media (μ).

?

1. whether the mean (m) of the sample *is equal* to the theoretical mean (μ)?
2. whether the mean (m) of the sample *is less than* the theoretical mean (μ)?
3. whether the mean (m) of the sample *is greater than* the theoretical mean (μ)?

Criterio del punto crítico

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$t_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_α	$t_c < t_\alpha$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$t_{1-\alpha}$	$t_c > t_{1-\alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$t_{1-\alpha/2}$	$\lvert t_c \rvert > t_{1-a/2}$

Criterio del p-valor

Analytics AoZ

	Hipótesis	Estadística de Prueba	cálculo del p-valor	Reglas para rechazar H_0
3	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$t_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$P(t < t_c) = P\left(t < \dfrac{\bar{X} - \mu_o}{s/\sqrt{n}}\right)$	p-valor < α
2	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$P(t > t_c) = P\left(t > \dfrac{\bar{X} - \mu_o}{s/\sqrt{n}}\right)$	
1	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$2P(t < t_c)$ o, $2P(t > t_c)$	

! Note that:

- Hypotheses 1) are called **two-tailed tests**
- Hypotheses 2) and 3) are called **one-tailed tests**

FÓRMULA

$$t = \frac{m - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

where,

m is the sample mean
n is the sample size
s is the sample standard deviation with n−1 degrees of freedom
μ is the theoretical value
We can compute the p-value corresponding to the absolute value of the t-test statistics (|t|) for the degrees of freedom (df): df=n−1.

Como interpretar el resultado: Si el p-valor es inferior al nivel de significancia designado (por lo general 0.05) podemos rechazar la hipótesis nula y aceptar la alternativa. En otras palabras, concluimos que la media muestral es significativamente diferente, menor o igual de la media teórica.

Ejemplo 1.

Un fabricante afirma que mediante el uso de un aditivo especial en la gasolina, los automóviles podrían recorrer por término medio, 3 kilómetros más por litro. Para evaluar este producto se usa una muestra aleatoria de 100 automóviles, alcanzando un incremento medio de 3,4 kilómetros por litro, con una desviación estándar de 1,8 kilómetros. ¿Con α = 0,05, se puede afirmar que con el uso del aditivo, los automóviles incrementarán su recorrido?

Solución .-

De los datos tenemos: $\mu_0 = 3{,}00 \quad n = 100 \quad \bar{x} = 3{,}40 \quad s = 1{,}80$

1. **Hipótesis a plantear**

   H_0: El uso del aditivo no permite el incremento del recorrido.

   H_0: μ = 3

   H_1: El uso del aditivo (SI) permite el incremento del recorrido.

   H_1: μ > 3

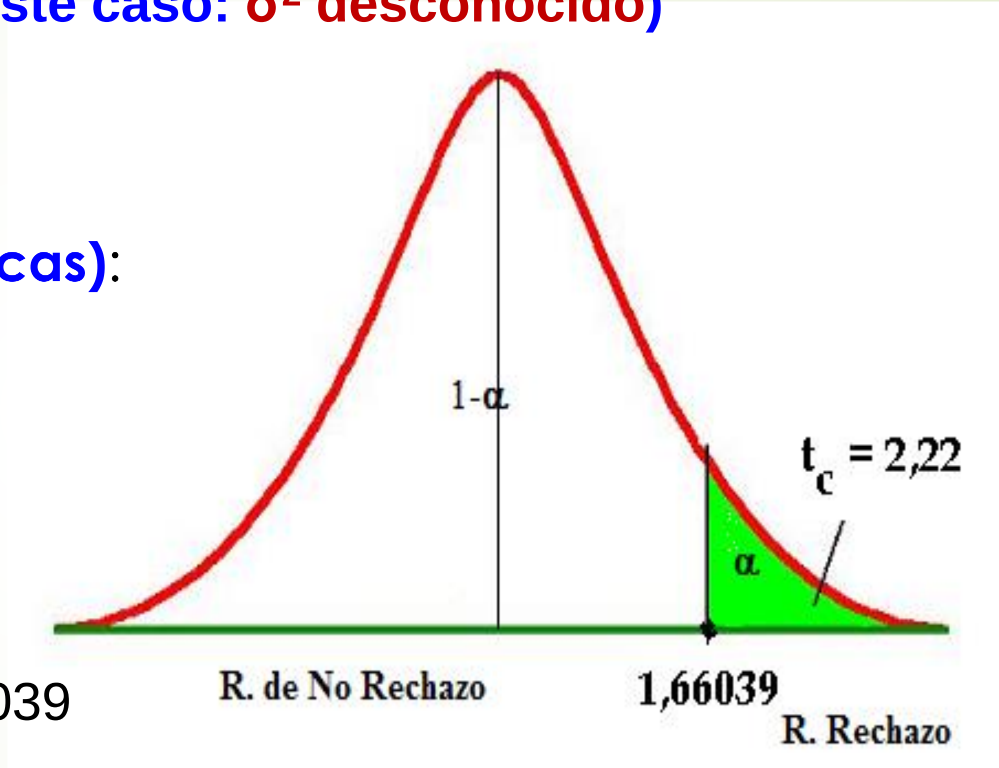
Ejemplo 1.-

2. **Nivel de significación:** $\alpha = 0,05$
3. **Estadística de Prueba (En este caso: σ^2 desconocido)**

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{3,4 - 3,0}{1,8/\sqrt{100}} = 2,22$$

4. **Valor crítico (Regiones críticas)**:

$t_{(n-1;\ 1-\alpha)} = t_{(99;\ 0,95)} = 1,66039$



5. **Regla de Decisión:**

Si $t_c > t_{(n-1;\ 1-\alpha)}$ se rechaza H_0

6. **Decisión de la Prueba**:

Como $t_c = 2,22 > t_{(99;0,95)} = 1,66039$

la decisión es: Rechazar H_0

7. **Conclusión:**

Con un nivel de significación del 5%, SI SE PUEDE AFIRMAR que el uso del aditivo permite el incremento del recorrido del automóvil.

Ejemplo 2.-

Un proceso funciona correctamente cuando produce frascos de champú con un contenido promedio de 200 gramos. Una muestra aleatoria de 8 frascos de una remesa presentó los siguientes pesos: 197, 206, 197, 208, 201, 197, 203, 209. Asumiendo que la distribución de los pesos es normal; al nivel del 5%, ¿hay razones para creer de que el proceso no está funcionando correctamente?

Solución .-

De los datos tenemos: $\mu_0 = 200 \quad n = 8 \quad \bar{x} = 202{,}25 \quad s = 5{,}04$

1. **Hipótesis a plantear**

   H_0: El proceso No está funcionando incorrectamente
   H_0: $\mu = 200$
   H_1: El proceso (SI) está funcionando incorrectamente.
   H_1: $\mu \neq 200$

Analytics AoZ

Ejemplo 2.-

2. **Nivel de significación**: $\alpha = 0{,}05$
3. **Estadística de Prueba (En este caso: σ^2 desconocido)**

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{202{,}25 - 200}{5{,}04/\sqrt{8}} = 1{,}26$$

4. **Valor crítico:**

   $t_{(n-1;\, 1-\alpha/2)} = t_{(7;\, 0{,}975)} = 2{,}365$

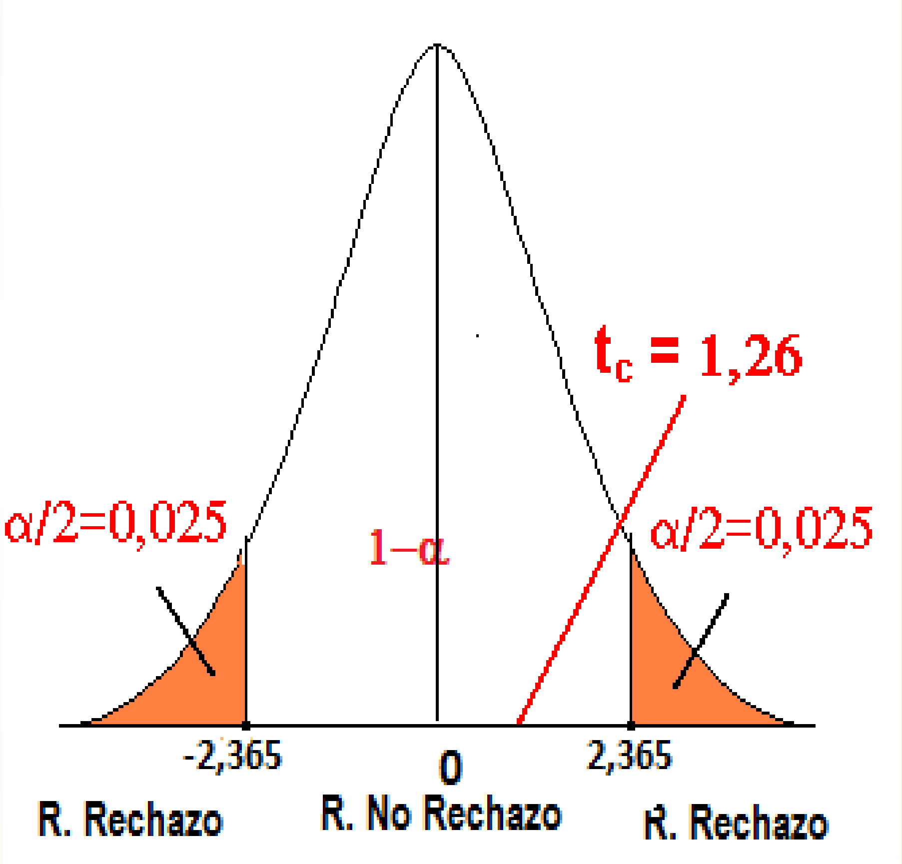
5. **Regla de Decisión:**

   Si $|\, t_c \,| > t_{(n-1;\, 1-\alpha/2)}$ se rechaza H_0

6. **Decisión de la Prueba**:

   Como $|\, t_c \,| = 1{,}26 < t_{(7;\, 0{,}975)} = 2{,}365$

   la decisión es: No Rechazar H_0



7. **Conclusión:**

   Con un nivel de significación del 5%, NO SE PUEDE AFIRMAR que el proceso está funcionando incorrectamente.

Analytics AoZ

Ejemplo 3 ®.-

Tenemos una muestra que contienen los pesos de en kg de roca que pasa a dilución. Los valores que tenemos para cada uno son:
17.6, 20.6, 22.2, 15.3, 20.9, 21.0, 18.9, 18.9, 18.9, 18.2 en kilogramos. Debemos determinar si los pesos en promedio de roca difieren de 25 kg porque este es el peso ideal para la dilución.

	name	weight
1	M_1	17.6
2	M_2	20.6
3	M_3	22.2
4	M_4	15.3
5	M_5	20.9
6	M_6	21.0
7	M_7	18.9
8	M_8	18.9
9	M_9	18.9
10	M_10	18.2

```
t.test(x, mu = 0, alternative = "two.sided")
```

- **x**: a numeric vector containing your data values
- **mu**: the theoretical mean. Default is 0 but you can change it.
- **alternative**: the alternative hypothesis. Allowed value is one of "two.sided" (default), "greater" or "less".

En caso de tener **conocida la varianza poblacional** usaremos la distribución normal estándar:

Criterio del punto crítico

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Regla para rechazar H_0
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$z_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	z_α	$z_c < z_\alpha$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$z_{1-\alpha}$	$z_c > z_{1-\alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$z_{1-\alpha/2}$	$\lvert z_c \rvert > z_{1-\alpha/2}$

Criterio del p-valor

Hipótesis	Estadística de Prueba	Càlculo del p-valor	Regla para rechazar H_0
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$z_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$P(z < z_c) = P\left(z < \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	*p-valor* $< \alpha$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$P(z > z_c) = P\left(z > \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$2P(Z < Z_c)$ o, $2P(Z > Z_c)$	

Ejemplo 4

Un inspector de calidad investiga las acusaciones contra una embotelladora por el deficiente llenado de botellas que debe ser, en promedio 32,5 onzas. Para ello toma una muestra de 60 botellas, encontrando que el contenido medio es de 31,9 onzas de líquido. Se sabe que la máquina embotelladora debe producir un llenado con una desviación estándar de 3,6 onzas.

a) Con α = 0,05, ¿puede el inspector llegar a la conclusión que se están llenando las botellas por debajo de su especificación de contenido?. Use los tres criterios conocidos.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el inspector decida no rechazar H_o cuando en realidad μ = 31,0

***Solución** a)* De los datos tenemos:

$$\mu_0 = 32{,}5 \quad n = 60 \quad \bar{x} = 31{,}9 \quad \sigma = 3{,}6 \quad \alpha = 0{,}05 \quad z_\alpha = -1{,}645$$

Las hipótesis a plantear son las siguientes:

H_0: El llenando de botellas NO es deficiente (promedio NO está por debajo de su capacidad).

H_0: μ = 32,5

H_1: El llenando de botellas es deficiente (promedio está por debajo de su capacidad).

H_1: μ < 32,5

- Criterio del ***valor o punto crítico***

2. **Nivel de significación**: $\alpha = 0{,}05$
3. **Estadística de Prueba (En este caso: $\sigma^2 = 3{,}6^2$ es conocido)**

$$Z_o = \frac{\bar{X} - \mu_o}{3{,}6/\sqrt{60}} = \frac{31{,}9 - 32{,}5}{3{,}6/\sqrt{60}} = -1{,}29$$

4. **Valor crítico:**
   $z_\alpha = z_{0,05} = -1{,}645$
5. **Regla de Decisión:**
   Si $z_c < z_\alpha$, se rechaza H_0
6. **Decisión de la Prueba**:
   Como $z_c = -1{,}29 > z_{0,05} = -1.645$
   la decisión es: No Rechazar H_0

7. **Conclusión:**
   Con un nivel de significación del 5%, NO SE PUEDE AFIRMAR que el el llenado de botellas es deficiente.

Analytics AoZ

En caso de querer **analizar la proporción para n>30** usaremos la distribución normal estándar:

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi < \pi_0$	$z_c = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	z_α	$z_c < z_\alpha$
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi > \pi_0$		$z_{1-\alpha}$	$z_c > z_{1-\alpha}$
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi \neq \pi_0$		$z_{1-\alpha/2}$	$\lvert z_c \rvert > z_{1-\alpha/2}$

Ejemplo 5.-

Analytics AoZ

Un fabricante de cigarrillos asegura que el 20% de los fumadores prefieren la marca que ellos producen. Para probar esta afirmación se toma una muestra de 40 fumadores a quienes se les consulta sobre la marca de cigarrillos que fuman. Si 9 de los entrevistados prefieren la marca A. ¿Con α = 0,05, se puede rebatir la afirmación del fabricante?.

Solución .-

De los datos tenemos: $\pi_0 = 0,20 \quad n = 40 \quad k = 9 \quad p = \frac{9}{40} = 0,225$

1. Hipótesis a plantear

   H_0: No se rebate la afirmación del fabricante (La proporción de consumidores que
   prefieren la marca A no es diferente al 20%).

   $H_0: \pi = 0,20$

   H_1: Se rebate la afirmación del fabricante (La proporción de consumidores que
   prefieren la marca A es diferente al 20%).

   $H_1: \pi \neq 0,20$

Ejemplo 5.-

Analytics AoZ

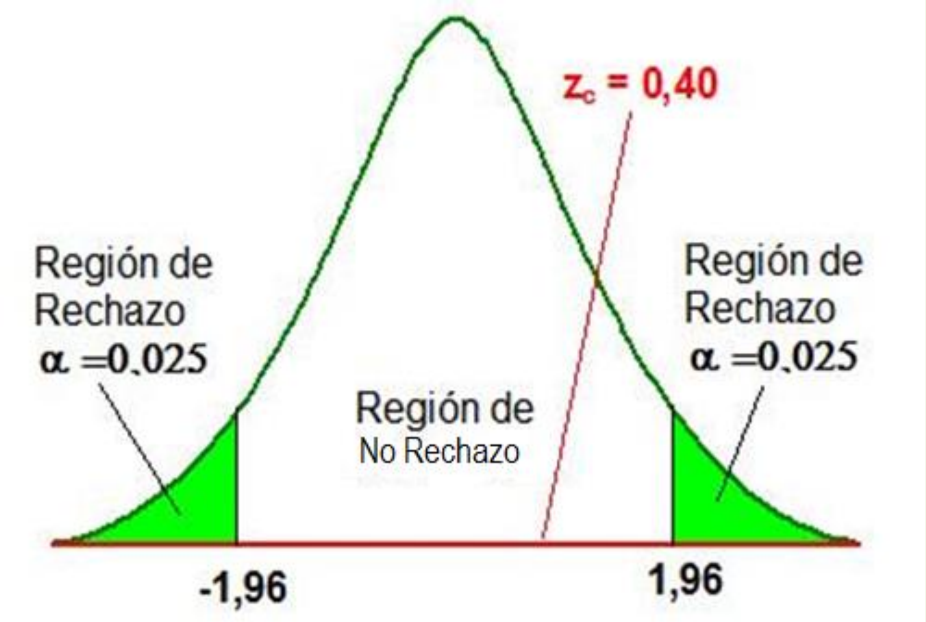
2. Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$
3. Estadística de Prueba

$$z_c = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} = \frac{0{,}025}{0{,}0632} = 0{,}40$$

4. Valor crítico:
   $Z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1{,}96$

5. Regla de Decisión:
   Si $| z_c | > z_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_0

6. Decisión de la Prueba:
   No Rechazar H_0



7. Conclusión: Con un NS del 5%, NO es posible rebatir la afirmación del fabricante (No se puede afirmar que la proporción de consumidores que prefieren la marca A es diferente al 20%).

Ejemplo 6.

El porcentaje de aceptación de cierta marca de detergente es 20%; con el fin de incrementar este porcentaje, se realiza una intensa campaña de publicidad por radio y televisión a favor de la marca. Luego de esta campaña se desea evaluar si esta fue efectiva o no, para lo que se selecciona una muestra aleatoria de 450 consumidores de detergente, encontrándose que 105 de ellos utilizaron el detergente en mención.

a) Si se fija un nivel de significancia del 2.5% ¿Cuál es la conclusión?

b) ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula, si el verdadero porcentaje de aceptación de la marca el 22%? Use el mismo n.s. de a).

Solución ***a).***

$$\pi_o = 0{,}20 \quad n = 450 \quad k = 105 \quad p = \frac{105}{450} = 0{,}2333 \quad \alpha = 0.025$$

1. Las hipótesis a plantear son:

H_0: La campaña de publicidad por radio y TV NO fue efectiva (El porcentaje de aceptación NO aumentó).

$H_0: \pi = 0{,}20$

H_1: La campaña de publicidad por radio y TV (SI) fue efectiva (El porcentaje de aceptación (SI) aumentó).

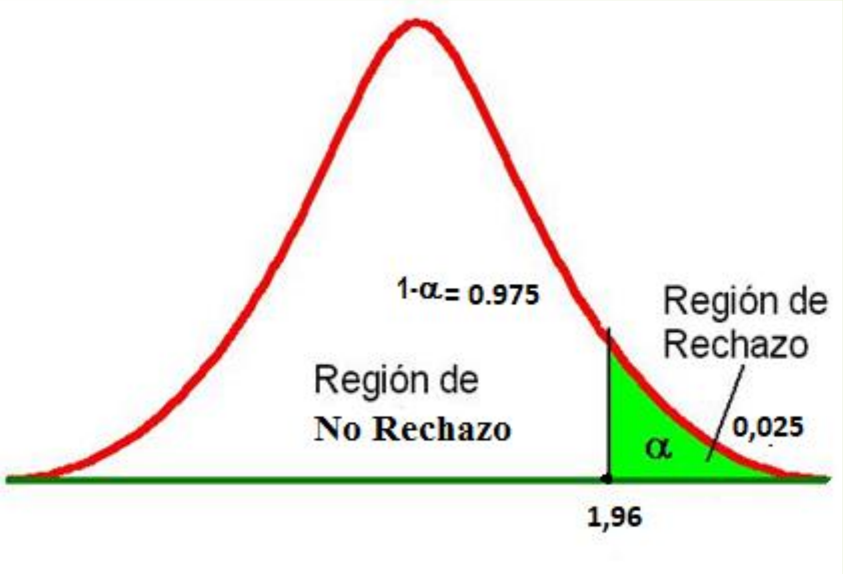
$H_1: \pi > 0{,}20$

Ejemplo 6.

- Utilizando el ***criterio del punto o valor crítico del estadístico***

2. Nivel de significación: $\alpha = 0{,}025$
3. Estadística de Prueba

$$Z_o = \frac{p - \pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}} = \frac{0{,}0333}{0{,}01886} = \mathbf{1,766}$$



4. Valor crítico:
   $Z_{1-\alpha} = z_{0,975} = 1{,}96$
5. Regla de Decisión:
   Si $z_o > z_{1-\alpha}$ se rechaza H_0
6. Decisión: **NO Rechazar H_0**
7. Conclusión: con un NS del 2.5%, NO es posible afirmar que la campaña de publicidad por radio y TV fue efectiva.

Ejemplo 7.-

Un fabricante de cigarrillos asegura que el 20% de los fumadores prefieren la marca que ellos producen. Para probar esta afirmación se toma una muestra de 40 fumadores a quienes se les consulta sobre la marca de cigarrillos que fuman. Si 9 de los entrevistados prefieren la marca A. ¿Con α = 0,05, se puede rebatir la afirmación del fabricante?.

Solución .-

De los datos tenemos: $\pi_0 = 0{,}20 \quad n = 40 \quad k = 9 \quad p = \dfrac{9}{40} = 0{,}225$

1. Hipótesis a plantear

   H_0: No se rebate la afirmación del fabricante (La proporción de consumidores que
   prefieren la marca A no es diferente al 20%).

   H_0: $\pi = 0{,}20$

   H_1: Se rebate la afirmación del fabricante (La proporción de consumidores que
   prefieren la marca A es diferente al 20%).

   H_1: $\pi \neq 0{,}20$

Ejemplo 7.-

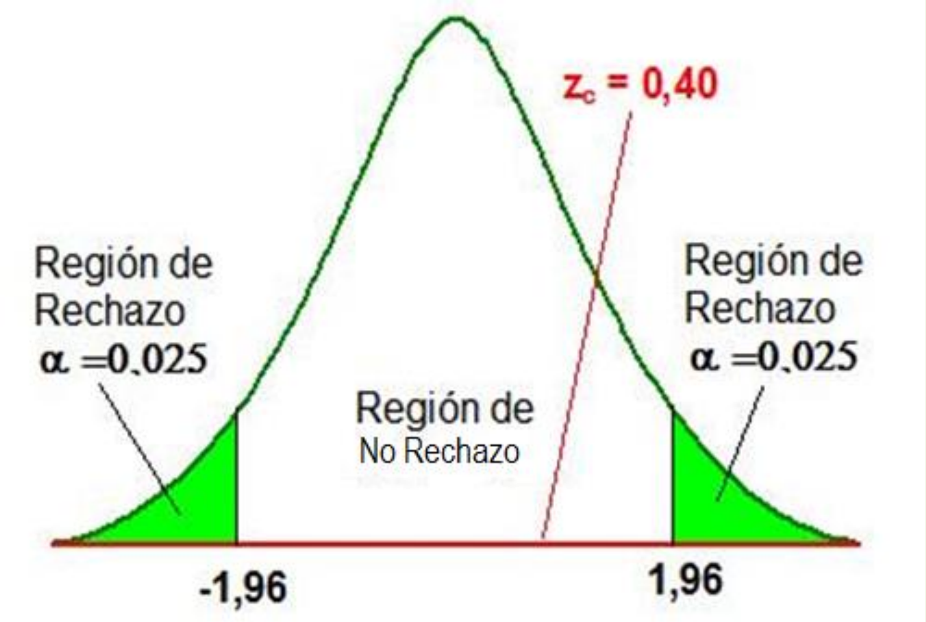
2. Nivel de significación: $\alpha = 0,05$
3. Estadística de Prueba

$$z_c = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} = \frac{0,025}{0,0632} = 0,40$$

4. Valor crítico:
$Z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1,96$

5. Regla de Decisión:
Si $| z_c | > z_{1-\alpha/2}$ se rechaza H_0

6. Decisión de la Prueba:
No Rechazar H_0



7. Conclusión: Con un NS del 5%, NO es posible rebatir la afirmación del fabricante (No se puede afirmar que la proporción de consumidores que prefieren la marca A es diferente al 20%).

En caso de querer **prueba para la varianza** usaremos la distribución chi-cuadrado:

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$ $H_1: \sigma^2 < \sigma^2_0$	$\chi^2_c = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$	$\chi^2_{(n-1;\,\alpha)}$	$\chi^2_c < \chi^2_{(n-1;\,\alpha)}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$ $H_1: \sigma^2 < \sigma^2_0$		$\chi^2_{(n-1;\,1-\alpha)}$	$\chi^2_c > \chi^2_{(n-1;\,1-\alpha)}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma^2_0$		$\chi^2_{(n-1;\,\alpha/2)}$ $\chi^2_{(n-1;\,1-\alpha/2)}$	$\chi^2_c < \chi^2_{(n-1;\,\alpha/2)}$ o $\chi^2_c > \chi^2_{(n-1;\,1-\alpha/2)}$

Ejemplo 8

Analytics AoZ

Una máquina automática empacadora de azúcar se usa para llenar bolsas de 2 Kg. Una muestra de 15 bolsas arrojó una media de 1.97 Kg. con una desviación estándar de 0,012 Kg.; si se supone que la distribución de los pesos es normal, y de la experiencia pasada se sabe que la desviación estándar de los pesos es de 0,009, ¿puede explicarse el aparente incremento en la variabilidad por el error muestral únicamente?.

Solución.- Los datos que tenemos son: $\sigma_0 = 0{,}009 \quad n = 15 \quad s = 0{,}012$

Las hipótesis planteadas son:

H_0: La variabilidad no se ha incrementado

H_1: La variabilidad se ha incrementado.

$$H_o : \sigma^2 = 0{,}009^2$$

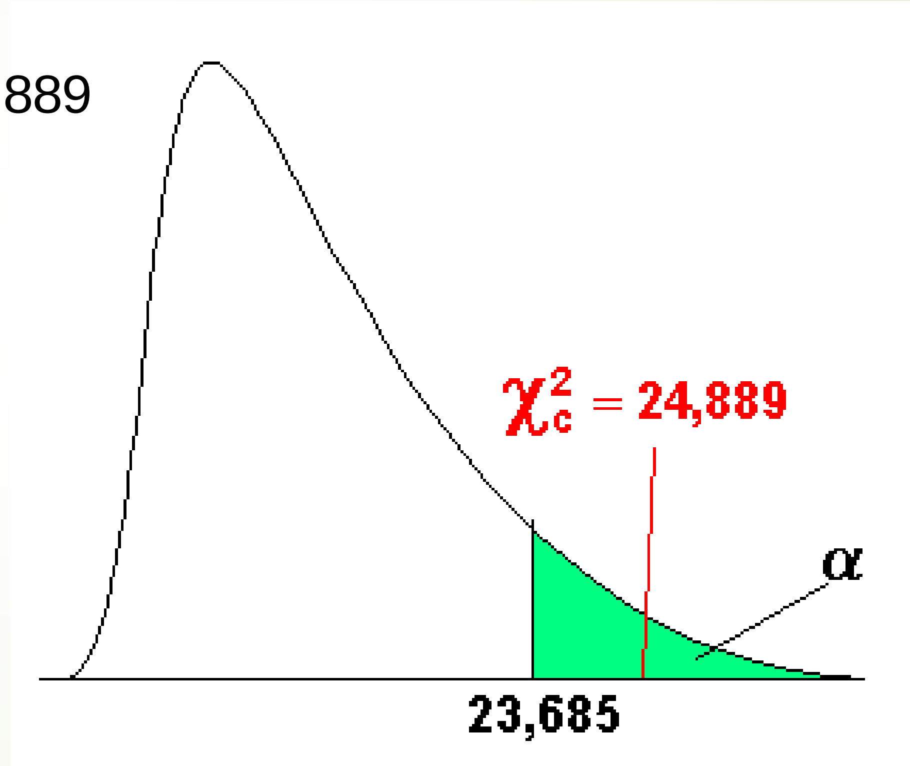
$$H_1 : \sigma^2 > 0{,}009^2$$

Ejemplo 8

Nivel de Significación: Se asume $\alpha = 0{,}05$

Estadística de Prueba

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0} = \frac{(15-1)(0{,}012^2)}{0{,}009^2} = 24{,}889$$



Valor Crítico

$$\chi^2_{(n-1;1-\alpha)} = \chi^2_{(14;0{,}95)} = 23{,}685$$

Como $\chi^2_c > \chi^2_{(n-1;1-\alpha)}$

Se puede decidir Rechazar H_0

Unpaired Two-Sample T-test

Este test es usado para comparar dos medias de una dos grupos independientes. Por ejemplo suponiendo que tenemos las medidas de 100 individuos: 50 mujeres (grupo A) y 50 hombres (grupo B). Nosotros queremos comprobar que el peso promedio de mujeres (mA) es significantemente diferente que el de hombres (mB).

En este caso, nosotros tenemos dos no relacionadas (i.e., independientes o no apareadas) grupos de muestras. Por lo tanto, es posible usar el **independentend t-test** para evaluar si las medias son diferentes.

Nota (Condiciones):

- Cuando dos grupos de muestras (A y B), son comparados, son **normalmente distribuidos.** Esto puede ser verificado con el test de **Shapiro-Wilk.**
- Cuando las **varianzas** de los dos grupos son iguales. Esto puede ser verificado usando el **F-test.**

Analytics AoZ

1. whether the mean of group A (m_A) *is equal* to the mean of group B (m_B)?
2. whether the mean of group A (m_A) *is less than* the mean of group B (m_B)?
3. whether the mean of group A (m_A) *is greather than* the mean of group B (m_B)?

Analytics AoZ

Hipótesis a plantear:

- **Tendremos los siguientes casos:**

Hipótesis Nula:

$$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$$

versus alguna de las siguientes hipótesis alternativas:

$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$$

$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$$

$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$$

En este caso μ_0 representa el valor hipotético de la diferencia, el cual es planteado en H_0 y que suele ser con frecuencia "cero"

In statistics, we can define the corresponding *null hypothesis* (H_0) as follow:

1. $H_0: m_A = m_B$
2. $H_0: m_A \leq m_B$
3. $H_0: m_A \geq m_B$

The corresponding *alternative hypotheses* (H_a) are as follow:

1. $H_a: m_A \neq m_B$ (different)
2. $H_a: m_A > m_B$ (greater)
3. $H_a: m_A < m_B$ (less)

Note that:

- Hypotheses 1) are called **two-tailed tests**
- Hypotheses 2) and 3) are called **one-tailed tests**

Prueba de hipótesis para comparar medias

Analytics AoZ

Caso de varianzas desconocidas, pero iguales

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t_c = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$	$t_{(n_1+n_2-2;\,\alpha)}$	$t_c < t_{(n_1+n_2-2;\,\alpha)}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$		$t_{(n_1+n_2-2;\,1-\alpha)}$	$t_c > t_{(n_1+n_2-2;\,1-\alpha)}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$		$t_{(n_1+n_2-2;\,\alpha/2)}$ $t_{(n_1+n_2-2;\,1-\alpha/2)}$	$t_c < t_{(n_1+n_2-2;\,\alpha/2)}$ o $t_c > t_{(n_1+n_2-2;\,1-\alpha/2)}$

$$\text{siendo:}\quad s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Caso de varianzas desconocidas, pero diferentes

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t_c = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$t_{(G;\,\alpha)}$	$t_c < t_{(G;\,\alpha)}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$		$t_{(G;\,1-\alpha)}$	$t_c > t_{(G;\,1-\alpha)}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$		$t_{(G;\,\alpha/2)}$ $t_{(G;\,1-\alpha/2)}$	$t_c < t_{(G;\,\alpha/2)}$ o $t_c > t_{(G;\,1-\alpha/2)}$

$$\text{siendo:}\quad G = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1}+\dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}} - 2$$

Prueba de hipótesis para comparar medias (no es t-test)

Analytics AoZ

Caso de **varianzas conocidas**

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ H_1: $\mu_1 < \mu_2$	$z_c = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	z_α	$z_c < z_\alpha$
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ H_1: $\mu_1 > \mu_2$		$z_{1-\alpha}$	$z_c > z_{1-\alpha}$
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$		$z_{\alpha/2}$ $z_{1-\alpha/2}$	$z_c < z_{\alpha/2}$ ó $z_c > z_{1-\alpha/2}$

Prueba de hipótesis para comparar varianzas (necesario conocer)

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F_c = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$	$F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, \alpha)}$	$F_c < F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, \alpha)}$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha)}$	$F_c > F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha)}$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$		$F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, \alpha/2)}$ $F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha/2)}$	$F_c < F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, \alpha/2)}$ o $F_c > F_{(n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha/2)}$

Analytics AoZ

Ejemplo Varianzas:

Se lleva a cabo un estudio para comparar el tiempo que tardan hombres y mujeres en armar un producto determinado. Las experiencias anteriores indican que la distribución de los tiempos tanto para hombres como para mujeres es aproximadamente normal. En una muestra de 11 hombres, la desviación estándar fue 6,1 minutos; y la muestra de 16 mujeres, la desviación estándar fue de 5,3 minutos. ¿Cree usted que exista diferencia en la variabilidad los tiempos entre hombres y mujeres?

Solución .- De los datos del problema tenemos

Hombres: $n_1 = 11$; $s_1 = 6,1$ Mujeres: $n_2 = 16$; $s_2 = 5,3$

Las hipótesis a plantear son:

H_0: No existe diferencia en la variabilidad de los tiempos

H_1: Existe diferencia en la variabilidad de los tiempos

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Ejemplo Varianzas:

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}05$

Estadística de Prueba

$$F_c = \frac{6{,}1^2}{5{,}3^2} = 1{,}325$$

Valores críticos:

$$F_{(10;15;\,0{,}025)} = 0{,}284$$

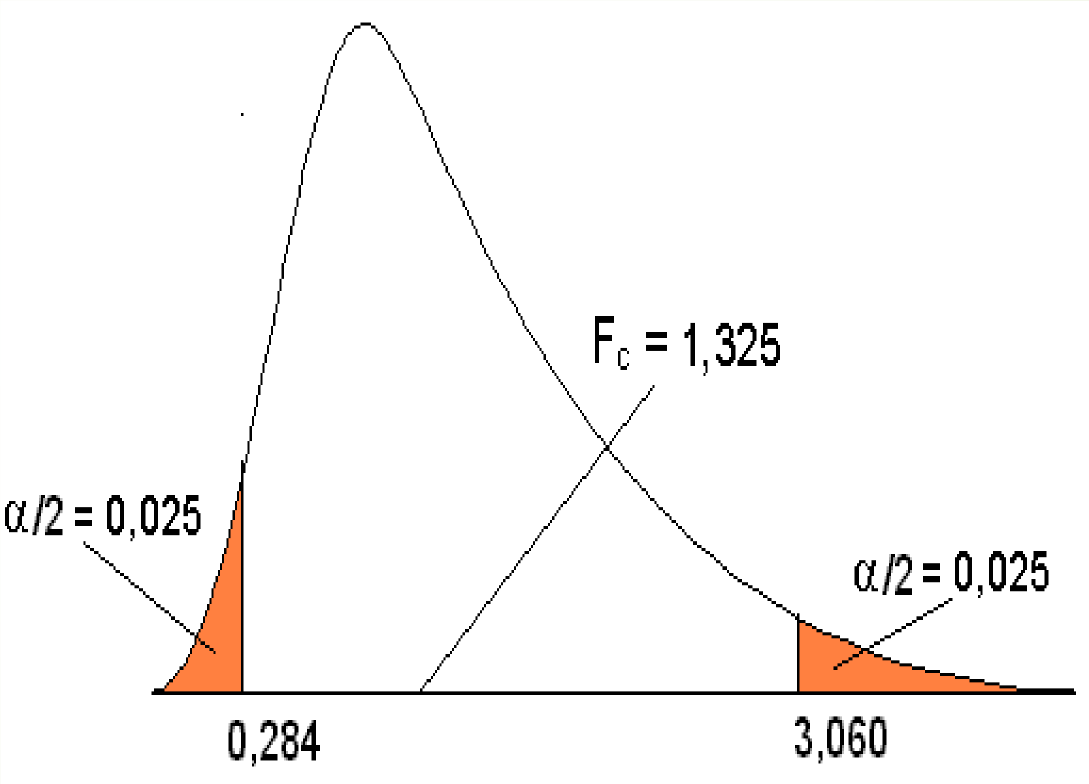
$$F_{(10;\,15;\,0{,}975)} = 3{,}060$$

Regla de Decisión:

Si $F_c < F_{(n_1-1;\,n_2-1;\,\alpha/2)}$ ó

$F_c > F_{(n_1-1;\,n_2-1;\,1-\alpha/2)}$

H_0 se rechaza



Decisión de la Prueba: No Rechazar H_0

Analytics AoZ

Ejemplo 1

Analytics AoZ

El jefe de compras de una fábrica está considerando la posibilidad de comprar un nuevo tipo de fresadora. *Ha determinado comprar la nueva máquina si confirma que las piezas producidas con ella tienen una mayor resistencia a la rotura que las de la máquina antigua*. La desviación estándar de la resistencia a la rotura para la máquina antigua es 25 Kg y para la nueva 20 Kg. Una muestra de 100 piezas tomada de la máquina antigua arrojó una resistencia media de 65 Kg. en tanto que una muestra similar de la nueva maquina señaló una resistencia media de 75 Kg. ¿Con α = 0,01, el jefe de compras debe adquirir la nueva máquina?.

Solución .- De los datos del problema tenemos:

$$X: \text{Nueva}: \quad n_1 = 100 \quad \bar{x}_1 = 75 \quad \sigma_1 = 20$$

$$Y: \text{Antigua}: \quad n_2 = 100 \quad \bar{x}_2 = 65 \quad \sigma_2 = 25$$

Las hipótesis a plantear son:

H_0: No comprar la nueva máquina $\quad H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

H_1: Comprar la nueva máquina $\quad H_1: \mu_1 > \mu_2$

Ejemplo 2

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}01$

Estadística de Prueba

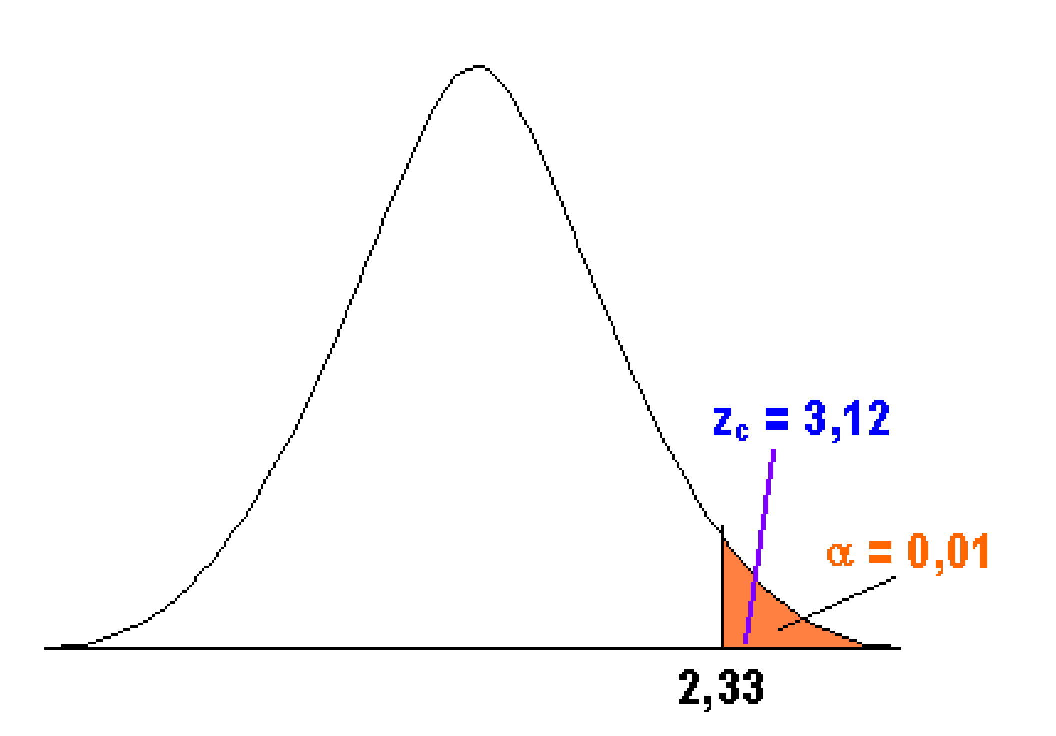
$$z_c = \frac{75 - 65}{\sqrt{\frac{20^2}{100} + \frac{25^2}{100}}} = 3{,}12$$

Valor crítico:

$z_{1-\alpha} = 2{,}33$

Regla de Decisión:

Si $z_c > z_{1-\alpha}$ se rechaza H_0



Decisión de la Prueba: Rechazar H_0

Ejemplo 2

Analytics AoZ

Al medir el rendimiento de dos grupos de trabajo A y B se han obtenido los siguientes resultados (en kg. de materia prima por hora de trabajo):

Grupo A:	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0	13,9
Grupo B:	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1	13,4

¿Se puede considerar que los rendimientos de los grupos A y B son significativamente diferentes suponiendo que ambas muestras provienen de poblaciones normales? ($\alpha = 0.01$).

Solución .- De los datos del problema tenemos:

$$\text{Grupo A}: \quad n_1 = 6 \quad \bar{x}_1 = 13,417 \quad s_1 = 1,659$$

$$\text{Grupo B}: \quad n_2 = 6 \quad \bar{x}_2 = 13,733 \quad s_2 = 0,628$$

Las hipótesis a plantear son:

H_0: Los rendimientos de los A y B no son significativamente diferentes

H_1: Los rendimientos de los A y B son significativamente diferentes

Caso de varianzas desconocidas, pero no se sabe si son iguales o diferentes, entonces se debe hacer la prueba de igualdad de varianzas.

Ejemplo 2

Prueba de comparación de varianzas

Las hipótesis a plantear son:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}01$

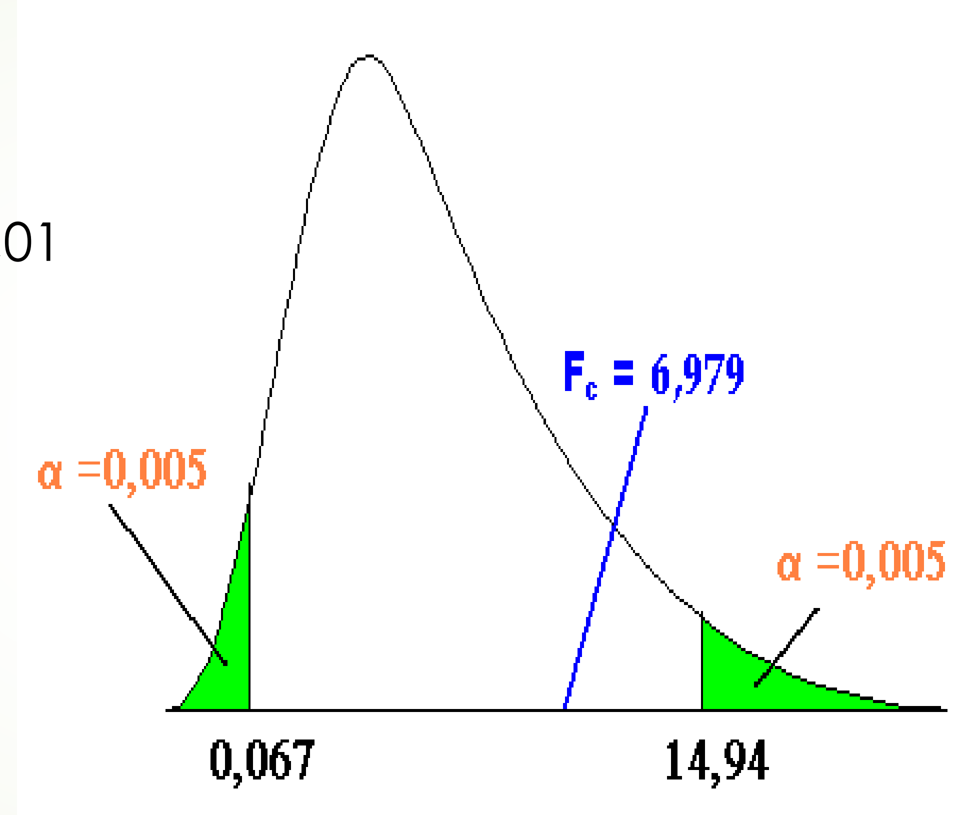
Estadística de Prueba:

$$F_c = \frac{1{,}659^2}{0{,}628^2} = 6{,}979$$

Valores Críticos:

$$F_{(5;5;0{,}005)} = 0{,}067$$

$$F_{(5;5;0{,}995)} = 14{,}94$$



Decisión: No se Rechaza H_0, y se concluye que ***las varianzas son iguales***.

Ejemplo 2

Analytics AoZ

Del resultado anterior se puede aplicar el ***caso de varianzas desconocidas pero iguales:***

Las hipótesis a plantear son:

H_0: Los rendimientos de los A y B no son diferentes $H_0: \mu_1 = \mu_2$

H_1: Los rendimientos de los A y B son diferentes $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$s_p^2 = \frac{(5)(1,659)^2 + (5)(0,628)^2}{5+5-2} = 1,5743$$

Nivel de significación: $\alpha = 0,01$

Estadística de Prueba

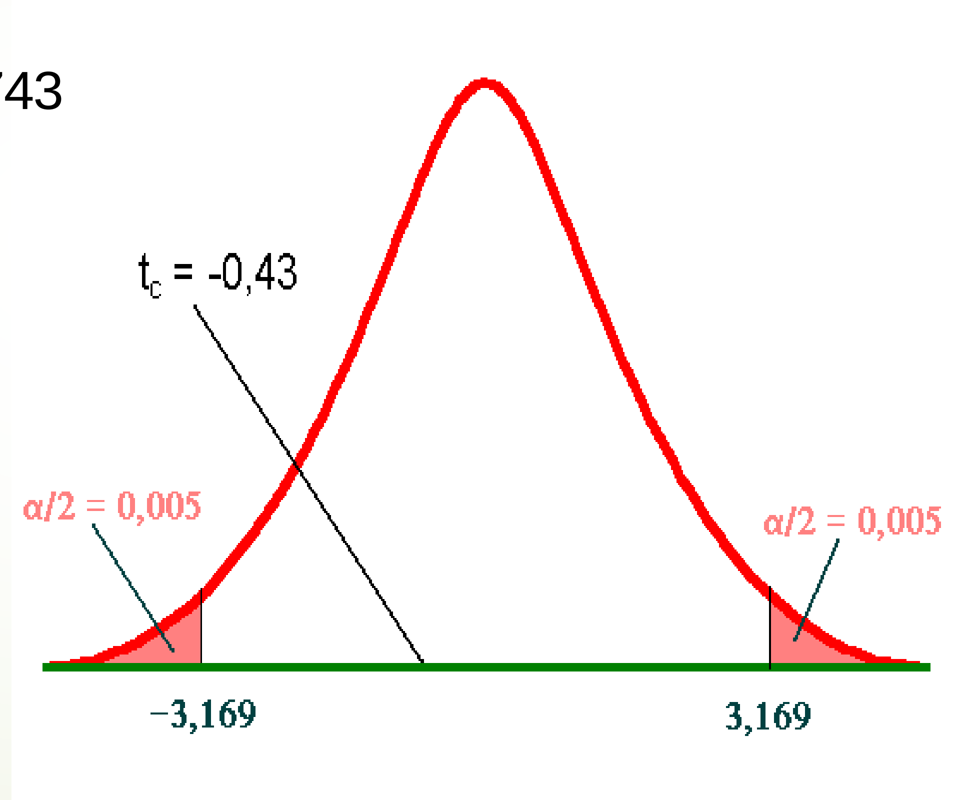
$$t_c = \frac{13,417 - 13,733}{\sqrt{1,5743\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}} = -0,44$$

Valores críticos:

$$t_{(10;0,005)} = -3,169$$

$$t_{(10;0,995)} = 3,169$$

Decisión: H_0 No se rechaza



T-test Clásico

Si la varianza de los dos grupos son iguales (**homocedasticidad**), el valor del t-test, comparando las dos muestras (A y B), será calculado de la siguiente manera:

$$t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}}$$

here,
mA and mB represent the mean value of the group A and B, respectively.
nA and nB represent the sizes of the group A and B, respectively.
S2 is an estimator of the pooled variance of the two groups. It can be calculated as follow :

$$S^2 = \frac{\sum (x - m_A)^2 + \sum (x - m_B)^2}{n_A + n_B - 2}$$

with degrees of freedom (df): df=nA+nB−2.

Welch T-test

Si la varianza de los dos grupos son diferentes (**heterocedasticidad**), el valor del t-test, comparando las dos muestras (A y B), será calculado de la siguiente manera:

$$t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$$

Donde SA and SB son las desviaciones estándar de los dos grupos A y B, respectivamente. mA and mB represent the mean value of the group A and B, respectively. A diferencia de la prueba t de Student clásica, la fórmula de la prueba t de Welch implica la comparación de la varianza de cada uno de los dos grupos (S2A y S2B). En otras palabras, no utiliza las varianzas agrupadas.

Los **grados de liberta** del **Welch T-test** es estimado de la siguiente manera:

$$df = \left(\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B^2}\right) / \left(\frac{S_A^4}{n_A^2(n_B - 1)} + \frac{S_B^4}{n_B^2(n_B - 1)}\right)$$

Nota

- El p-valor puede ser computado para el valor absoluto correspondiente al estadístico t (|t|).
- El Welch t-test es considerado apropiado usar. Usualmente, los resultados del t-test clásico y el Welch t-test son similares a menos que ambos tamaños de grupo y desviaciones estándar son muy diferentes.
- Para interpretar los resultados si el p-valor es inferior al nivel de significación (usualmente 0.05), podemos rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa. En otras palabras, podemos concluir que el valor medio del grupo A y el grupo B son significativamente diferentes.
- Si **no se cumple la suposición de la distribución normal** de los datos es recomendado usar el **test no paramétrico Two-Samples Wilcoxon rank test**.

	group	weight
1	Banda1	38.9
2	Banda1	61.2
3	Banda1	73.3
4	Banda1	21.8
5	Banda1	63.4
6	Banda1	64.6
7	Banda1	48.4
8	Banda1	48.8
9	Banda1	48.5
10	Banda2	67.8
11	Banda2	60.0
12	Banda2	63.4
13	Banda2	76.0
14	Banda2	89.4
15	Banda2	73.3
16	Banda2	67.3
17	Banda2	61.3
18	Banda2	62.4

Ejemplo aplicado en R:

Tenemos los promedios de pesos de las bandas de hierro que transportan el mineral a planta la cuales son mostradas en la siguiente tabla al lado izquierdo.
Deseamos saber si el promedio del peso de las bandas que transportan hierro son diferentes entre la Banda1 comparado con la Banda2. En caso sea así existe un problema en el sistema de bandas y debe ser cambiado.

Analytics AoZ

Paired Samples T-test

Analytics AoZ

El t-test de muestras **apareadas** es usado para comparar las medias entre dos grupos relacionados de muestras. En este caso, tenemos dos valores (i.e., *pares de valores)* para las mismas muestras.

Tomemos como ejemplo la data de 20 geólogos que reciben entrenamiento durante 3 meses. Queremos saber si el entrenamiento X tiene un impacto en el rendimiento del geólogo. La respuesta para esto ha sido la medida del ***rendimiento antes y después***. Esto da 20 sets de valores antes y después del entrenamiento desde la medida del *rendimiento del mismo geólogo 2 veces*.

En tal situación el t-test de muestras apareadas para comparar los promedios de rendimiento antes y después del entrenamiento.

Para realizar el test debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Calcular la diferencia entre cada par de valores (d).
2. Computar la media (m) y la desviación estándar (s)de d.
3. Comparar el promedio de la diferencia con 0. Si la diferencia es significativa entre los dos pares de muestras, luego la media de d (m) se espera que sea lejana de cero.

Nota:

- El t-test de muestras apareadas será usado solo cuando la diferencia d es normalmente distribuida. Esto puede ser chequeado con el Shapiro-Wilk test.
- Si la data **no esta normalmente distribuida**, es recomendable usar un **test no parmétrico paired two-simples Wilcoxon test**.

1. whether the mean difference (m) *is equal* to 0?
2. whether the mean difference (m) *is less than* 0?
3. whether the mean difference (m) *is greather than* 0?

In statistics, we can define the corresponding *null hypothesis* (H_0) as follow:

1. $H_0 : m = 0$
2. $H_0 : m \leq 0$
3. $H_0 : m \geq 0$

The corresponding *alternative hypotheses* (H_a) are as follow:

1. $H_a : m \neq 0$ (different)
2. $H_a : m > 0$ (greater)
3. $H_a : m < 0$ (less)

Note that:

- Hypotheses 1) are called **two-tailed tests**
- Hypotheses 2) and 3) are called **one-tailed tests**

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D < 0$	$t_c = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$	$t_{(n-1;\, \alpha)}$	$t_c < t_{(n-1;\, \alpha)}$
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D > 0$		$t_{(n-1;\, 1-\alpha)}$	$t_c > t_{(n-1;\, 1-\alpha)}$
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D \neq 0$		$t_{(n-1;\, \alpha/2)}$ $t_{(n-1;\, 1-\alpha/2)}$	$t_c < t_{(n-1;\, \alpha/2)}$ $t_c < t_{(n-1;\, 1-\alpha/2)}$

Analytics AoZ

T-test paired samples

Si la varianza de los dos grupos son iguales (**homoscedasticidad**), el valor del t-test, comparando las dos muestras (A y B), será calculado de la siguiente manera:

$$t = \frac{m}{s/\sqrt{n}}$$

Donde,
m es la diferencia de medias.
n es el tamaño de muestra (i.e., tamaño de d).
s es la desviación estándar de d.

Podemos computar el p-valor correspondiente al absoluto valor del t-test estadítico (1t1) para los grados de libertad (df) : df =n-1

Si el p-valor es inferior o igual al nivel de significación (por lo general 0.05) se concluye que las muestras apareadas son significativamente diferentes.

Prueba de hipótesis de la media de datos pareados

a) Cuando $n > 30$

Hipótesis	Estadística de Prueba	Valores Críticos	Reglas para rechazar H_0
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D < 0$	$z_c = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$	z_α	$z_c < z_\alpha$
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D > 0$		$z_{1-\alpha}$	$z_c > z_{1-\alpha}$
$H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D \neq 0$		$z_{\alpha/2}$ $z_{1-\alpha/2}$	$z_c < z_{\alpha/2}$ ó $z_c > z_{1-\alpha/2}$

Ejemplo

Un analista de sistemas está probando la factibilidad de utilizar un nuevo sistema de computo. El analista solo cambiará el procesamiento al nuevo sistema si hubiera evidencia de que este emplea menos tiempo de procesamiento que el antiguo. A fin de tomar una decisión, se seleccionó una muestra de siete trabajos y se registró el tiempo de procesamiento con los dos sistemas, en segundos, con los siguientes resultados: Al 1% de significación, ¿hay alguna evidencia de que el sistema antiguo utiliza mas tiempo de procesamiento?.

	Trabajo						
	1	2	3	4	5	6	7
Antiguo	8	4	10	9	8	7	12
Nuevo	6	3	7	8	5	8	9

Ejemplo

Solución .- De los datos tenemos

	Trabajo						
	1	2	3	4	5	6	7
Antiguo	8	4	10	9	8	7	12
Nuevo	6	3	7	8	5	8	9
Diferencia	2	1	3	1	3	-1	3

$$\bar{d} = 1,7143 \quad s_d = 1,496 \quad n = 7 \quad \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 0,5654$$

Las hipótesis a plantear son:

H_0: Sistema antigua no utiliza más tiempo

H_1: Sistema antigua utiliza más tiempo

H_0: $\mu_D \leq 0$

H_1: $\mu_D > 0$

Ejemplo

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}01$

Estadística de Prueba

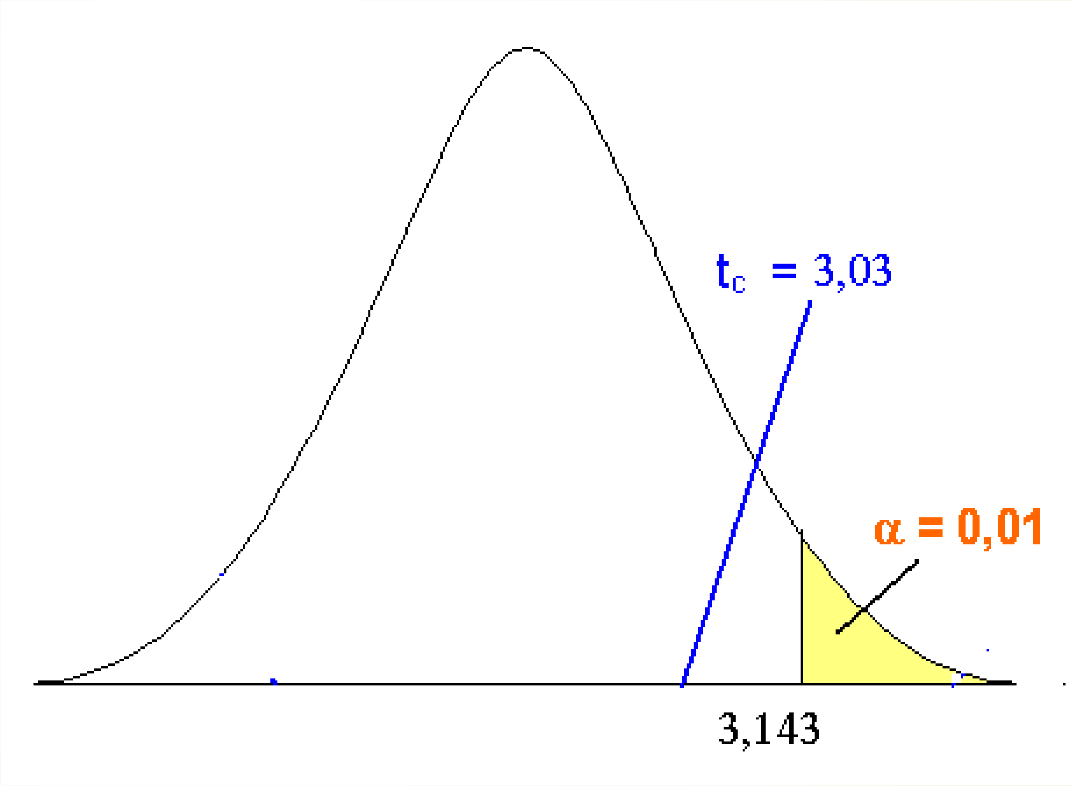
$$t_c = \frac{1{,}7143}{0{,}5654} = 3{,}03$$

Valores críticos:

$$t_{(6;\,0{,}99)} = 3{,}143$$

Como: no se observa que:

$t_c > t_{(n-1;\ 1-\alpha)}$

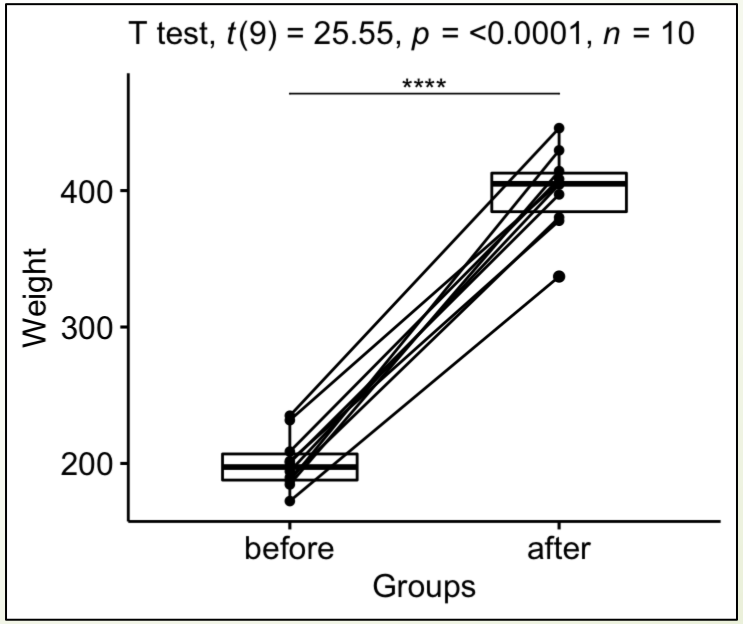


Decisión: NO Rechazar H_0

T-test paired sample in R:

```
t.test(x, y, paired = TRUE, alternative = "two.sided")
```

- **x,y**: numeric vectors
- **paired**: a logical value specifying that we want to compute a paired t-test
- **alternative**: the alternative hypothesis. Allowed value is one of “two.sided” (default), “greater” or “less”.



group	rendimiento
1 before	200.1
2 before	190.9
3 before	192.7
4 before	213.0
5 before	241.4
6 before	196.9
7 before	172.2
8 before	185.5
9 before	205.2
10 before	193.7
11 after	392.9
12 after	393.2
13 after	345.1
14 after	393.0
15 after	434.0
16 after	427.9
17 after	422.0
18 after	383.9
19 after	392.3
20 after	352.2

Ejemplo aplicado en R_2:

Tenemos los rendimientos de los geólogos antes y después el primer before y segundo after se corresponden, se muestra a la izquierda los valores de rendimiento por grupo.
Deseamos saber si el la diferencia promedio de los rendimientos difieren después del tratamiento.

Analytics AoZ

https://rcompanion.org/handbook/I_09.html

https://www.datanovia.com/en/lessons/how-to-do-a-t-test-in-r-calculation-and-reporting/#two-sample-t-test

https://statistics.berkeley.edu/computing/r-t-tests