6 二次型

2020年7月19日 星期日 下午7:12

二次型

- 二次型的概念及其标准型
  - 二次型的定义与矩阵表示：含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

    $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1}x_{n-1}x_n$$

    称为 n 元二次型．若规定 $a_{ij}=a_{ji}$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，则二次型有矩阵表示 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x^TAx$，其中

    $$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

    且 $A^T=A$ 是对称矩阵，称 A 为二次型的矩阵，秩 $r(A)$ 称为二次型的秩，记为 $r(f)$
  - 二次型的标准形：二次型只含有平方项，即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$，称为二次型的标准形．
  - 二次型的规范形：若标准形中，系数 $d_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 仅为 $1,-1,0$，则这样的二次型被称为二次型的规范形．
    - 标准形不唯一，规
  - 惯性指数：在标准形中，正平方项的个数称为正惯性指数，记为 p；负平方项的个数称为负惯性指数，记为 q．
  - 惯性定理：二次型经过可逆坐标变换后，正负惯性指数保持不变，且 $p+q=r(f)=r(A)$．
  - 矩阵合同：若 A、B 为 n 阶实对称矩阵，存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$，则称 A 与 B 合同．记作 $A\simeq B$

    $A\simeq B \Leftrightarrow p_A=p_B,\ q_A=q_B$

    $\Leftrightarrow$ A 与 B 的正、负特征值个数相同．
- 可逆的坐标变换：令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$，若 $|P|\neq 0$，称

  $$\begin{cases} x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n \\ x_2 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n \end{cases}$$

  为由 x 到 y 的可逆坐标变换，记作 $x=Py$
- 二次型化为标准形
  - 概念理解：二次型化为标准形实质上就是将矩阵 A 化为对角矩阵．由于 A 是实对称矩阵，所以一定可以用正交矩阵将其化为对角矩阵，即二次型总可以用正交变换化为标准形．
  - 二次型化为标准形的方法
    - 正交变换法
      1. 求 A 的特征值，即由 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$．
      2. 求 A 的特征向量，即由 $(\lambda_iE-A)x=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$．
      3. 对 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 进行施密特正交化、单位化得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ [不同特征值的特征向量正交]
      4. 令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则 $x=Qy$ 为正交变换．(正交变换保持向量的长度不变)
      5. 写出标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ [$Q^{-1}AQ=\Lambda \Rightarrow Qy=x$]

      $x^TAx \xrightarrow[Q^TAQ=\Lambda]{x=Qy} (Qy)^TA(Qy) = y^TQ$

      $\Rightarrow$
      1. 正交变换：阵A的特
      2. 配方法化阵ABA

③ 二次型

配方法：通过配方的方法把二次型化为若干部分的平方和与差，然后进行变换的方法

正定二次型

定义：n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，若对任意的 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \neq 0$，均有 $x^TAx>0$，则称 f 为正定二次型，称二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵。

正定矩阵首先是二次型的矩阵，是实对称矩阵、

二次型正定的充要条件：

n元二次型 $f=x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x\neq 0$，有 $x^TAx>0$（定义）（定义证明很重要）

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p=n$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 D，使 $A=D^TD$

$\Leftrightarrow$ $A\simeq E$（A与E合同）$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=E$

$\Leftrightarrow$ A 的特征值 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$\Leftrightarrow$ A 的全部顺序主子式均大于 0

$\Rightarrow$ x^TAx 正定的必要条件 $\begin{cases} ① \ a_{ii}>0 \quad (i=1,2,\cdots) \\ ② \ |A|>0 \end{cases}$

用配方法化二次型为标准形的步骤：

1°、若二次型中有平方项，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则对所有含 x_1 的项配完全平方（经配方后使所剩各项中不再含有 x_1），再配第二个平方项，…，直至配成完全平方之和（完全平方项的系数 $=n$）

令 $x=Cy$，得标准形 $x^TAx=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

例：$x^TAx=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

$\Rightarrow \ =x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+3x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3 \\ x_2=y_2-3y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases} \xleftarrow[\text{线性变换}]{\text{可逆}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^TAC=$

注：当配方后完全平方项的系数少于变量个数时，作变换时应补充所缺的平方项，使其变换成为可逆线性变换、

如，上题若将 $5x_3^2$ 换为 $10x_3^2$，则得 $f=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2$

则仍旧令

$y_1=x_1+x_2+x_3$ 即 $x_1=y_1-y_2+2y_3$

$\begin{cases} [illegible] \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [illegible] \\ x_2 = y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

若令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 3x_3 \end{cases}$，则这个变换是不可逆的．无法求得 $x = Cy$ 中的可逆矩阵 C

2°、若二次型中没有平方项，只有混合项，不妨设 $a_{12} \neq 0$，
则令 $x_1 = y_1 + y_2$，$x_2 = y_1 - y_2$，$x_3 = y_3$，…，$x_n = y_n$，使二次型中出现 $a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2$，再用1°配方．

例：$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 4y_1y_3 - 4y_2y_3$

$= (y_1 + 3y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2 - 8y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + 3y_3 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - 3z_3 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 - 4z_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 - 2z_3 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^TAC = \Lambda$