# 5 特征值与特征向量

2020年7月19日 星期日 下午3:06

特征值与特征向量
- 特征值与特征向量
  - 基本概念
    - 特征值与特征向量：设$A$是$n$阶矩阵，$\lambda$是一个数，若存在$n$维非零列向量$\xi\neq0$，使得$A\xi=\lambda\xi$，则称$\lambda$是$A$的特征值，$\xi$是$A$的对应于特征值$\lambda$的特征向量。
    - 特征多项式与特征方程：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一个$n$阶矩阵，则行列式$|\lambda E-A|$称为矩阵$A$的特征多项式，$|\lambda E-A|=0$称为$A$的特征方程。 $\Leftarrow A\xi=\lambda\xi \Rightarrow (A-\lambda E)\xi=0$，$\xi\neq0 \Rightarrow (A-\lambda E)X=0$，$\xi$有非
  - 基本性质
    - 特征值的性质：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$是$A$的特征值，则有：
      - ① $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$ 迹 $\Rightarrow$ 上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是矩阵主对角线上的元素。
      - ② $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$.
    - 特征向量的性质
      - ① $k$重特征值$\lambda$至多有$k$个线性无关的特征向量.
      - ② 若$\xi_1,\xi_2$是$A$的属于不同特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，则$\xi_1,\xi_2$线性无关
      - ③ 若$\xi_1,\xi_2$是$A$的属于同一特征值$\lambda$的特征向量，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$（$k_1,k_2$是不同时为零的任意常数）仍是$A$的属于特征值$\lambda$的特征向量.
  - 求法
    - 特征值
      - 定义法
      - 特征多项式法：解特征方程$|\lambda E-A|=0$
    - 特征向量
      - 定义法
      - 基础解系法：求线性方程组$(\lambda_0E-A)X=0$的基础解系得到属于特征值$\lambda_0$的线性无关的特征向量.
    - 公式法

| 矩阵 | $A$ | $kA$ | $A^k$ | $f(A)$ | $A^{-1}$ | $A^*$ | $P^{-1}AP$ | $k_1A+k_2E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 特征值 | $\lambda$ | $k\lambda$ | $\lambda^k$ | $f(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{\|A\|}{\lambda}$ | $\lambda$ | $k_1\lambda+k_2$ |
| 特征向量 | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $P^{-1}\xi$ | $\xi$ |

证：$P^{-1}AP=B$
$\Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha)=B(P^{-1}\alpha)=P^{-1}A\alpha=P^{-1}\lambda\alpha=\lambda P^{-1}\alpha$
$\Rightarrow B(P^{-1}\alpha)=\lambda P^{-1}\alpha$
$\therefore$ B的特征值同A，且特征向量为$P^{-1}\alpha$

注：若A有各行元素之
证：设 A =
$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ =
$\therefore (1,1,1)^T$为特

- 相似
  - 矩阵的相似
    - 定义：设$A,B$是两个$n$阶方阵，若存在$n$阶可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，则称$A$相似于$B$，记成$A\sim B$ $\Rightarrow$ 相似可传递，证：
    - 性质
      - (1) 若$A\sim B$，则有：① $r(A)=r(B)$；② $|A|=|B|$；③ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$；④ $A,B$有相同的特征值.
        - A与B相似，则A与B有相同的特征多项式，从而A与B有相同的特征值.
      - (2) 若$A\sim B$，则$A^m\sim B^m$，$f(A)\sim f(B)$ [其中$f(x)$是多项式]
      - (3) 若$A\sim B$，且$A$可逆，则$A^{-1}\sim B^{-1}$，$f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$，$A^*\sim B^*$
      - (4) 若$A\sim B$，则$A^T\sim B^T$

$\Rightarrow A\sim B \Leftrightarrow P^{-1}AP=$
$\Rightarrow P^{-1}(A+kE$
$\therefore A+kE$

  - 矩阵的相似对角化
    - 定义：设$n$阶矩阵$A$，若存在$n$阶可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda$是对角矩阵，则称$A$可相似对角化，记$A\sim\Lambda$，称$\Lambda$是$A$的相似标准形. $A\sim\Lambda \Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow P^{-1}A^nP=\Lambda^n \Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$
    - 矩阵可相似对角化的条件
      - ① $n$阶矩阵$A$可相似对角化$\Leftrightarrow A$有$n$个线性无关的特征向量
      - ② $n$阶矩阵$A$可相似对角化$\Leftrightarrow A$对应每个$k_i$重特征值都有$k_i$个线性无关的特征向量 , A可相
      - ③ $n$阶矩阵$A$有$n$个不同特征值 $\Rightarrow A$可相似对角化

③ n阶矩阵A有n个不同特征值 ⇒ A可相似对角化

④ n阶矩阵A为实对称矩阵 ⇒ A可相似对角化

⇒ A

实对称矩阵隐含的信息

- 概念：A为对称矩阵，且组成A的元素都是实数。 ⇒ [A
- 性质
  - ①特征值是实数，特征向量是实向量。 ⇒ PE
  - ②不同特征值的特征向量相互正交
  - ③必相似于对角矩阵，即必有n个线性无关的特征向量。 ⇒ 若A、B为实对称矩阵，则A、B有相
  - ④.存在正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda=Q^TAQ$，故A正交相似于$\Lambda$.

$\Downarrow$

$Q^TQ=E=Q^{-1}Q \Leftarrow Q^T=Q^{-1}$

Schmidt正交化方法：（施密特正交化）

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

那么$\beta_1,\beta_2,\beta_3$两两正交，称为正交向量组、将其单位化，有

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$这一过程称为Schmidt正交化.

求特征向量的一般步骤：

①.先由$|\lambda E-A|=0$求矩阵A的特征值$\lambda_i$（共n个，A为n阶矩阵）

②.再由$(\lambda_i E-A)x=0$求基础解系，即矩阵A属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量.

用正交矩阵把实对称矩阵A化为对角矩阵的一般步骤：

①、求矩阵A的特征值.

②、求矩阵A的特征向量.

③、单位化，当特征值有重根时，需要先对重根的特征向量进行Schmidt正交化.

④、构造正交矩阵P，得$P^{-1}AP=\Lambda$（P与$\Lambda$的次序要一致）

注：利用正交性质，已知实对称矩阵A的两个

[illegible]
特征向量可求第3个特征向量.