1 随机事件和概率

2020年7月30日 星期四 下午7:07

- 基本概念
  - 随机试验（E）
    - ①试验可以在相同的条件下重复进行
    - ②试验所有结果是明确可知道的，并且不只一个
    - ③每一次试验会出现哪一个结果，事先并不能确定
  - 样本空间：随机试验的每一可能结果称为样本点，记作 ω. 由所有样本点全体组成的集合称为样本空间，记作 Ω.
  - 随机事件：样本空间的子集，即样本点的集合，为随机事件简称事件。由一个样本点所组成的单点集称为基本事件。
- 事件的关系与运算
  - 关系
    - 包含：如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$
    - 相等：如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$
    - 相容：若 $AB \neq \varnothing$，则称事件 A 和 B 相容；若 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，也叫互斥（事件 A 与 B 不能同时发生）。
    - 对立：如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件。
  - 运算
    - 和（并）：称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 和（或并），记为 $A \cup B$.
    - 差：称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的差，记为 $A - B$.
    - 积（交）：称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的积（或交），记为 $A \cap B$ 或 AB
    - 完备事件组：如果有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j = \varnothing$（$i \neq j$），且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组或完全事件组
    - 运算法则
      - 吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$A \cap B = A$
      - 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
      - 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
      - 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
      - 对偶律（德·摩根律）：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- 概率的定义
  - 描述性定义：通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量（非负值）称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.
  - 统计性定义
    - 频率：相同条件下做重复试验，事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.
    - 概率：当试验次数 n 充分大时，频率将"稳定"于某常数 p 的"附近"，n 越大，频率偏离这个常数的可能性越小，这个常数 p 就称为事件 A 的概率.
  - 公理化定义：设随机试验的样本空间为 Ω，如果对每个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$，且事件函数 $P(\cdot)$ 满足：
    - (1)、非负性：$P(A) \geq 0$；
    - (2)、规范性：$P(\Omega) = 1$；
    - (3) 可列可加性：对任意可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
- 古典概型、几何概型和 n 重伯努利实验
  - 古典概型
    - 定义：样本空间满足
      - ① 只有有限个样本点（基本事件）
      - ② 每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样.
    - 计算：如果古典概型的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，则 A 的概率为 $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{A所含基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$
  - 几何概型
    - 定义：条件
      - ① 样本空间（基本事件空间）Ω 是一个可度量的有界区域.
      - ② 每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比，而与 S 的位置及形状无关.
    - 计算：如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 A = {样本点落入区域 S_A} 的概率为 $P(A) = \frac{S_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}$

n重伯努利试验：把一随机试验独立重复若干次，即各次试验所联系的事件之间相互独立，且同一事件在各个试验中出现的概率相同，称为独立重复试验。如果每次试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$，则称这种试验为伯努利试验。将伯努利试验独立重复进行 n 次，称为 n 重伯努利试验

概率的基本性质与公式

性质
- 有界性：对于任一事件 A，有 $0 \le P(A) \le 1$，且 $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$。
- 单调性：设 A,B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B) \ge P(A)$

公式
- 逆事件概率公式：$P(\bar{A}) = 1-P(A)$
- 加法公式：$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$，$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
- 减法公式：$P(A-B) = P(A)-P(AB) = P(A\bar{B})$
- 条件概率公式：任意两个事件 A,B，$P(A)>0$，在已知 A 发生的条件下，B 发生的概率为条件概率，记为 $P(B|A)$，且
  $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$
- 乘法公式：若 $P(A)>0$，则 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$
- 全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为0的一个完备事件组，则对任意事件 A，有
  $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$
- 贝叶斯公式（逆概率公式）：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的概率均不为0的一个完备事件组，则对任意事件 A，且 $P(A)>0$，有
  $$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)} = \frac{P(AB_j)}{P(A)}, \quad j=1,2,\cdots,n$$