1 行列式

2020年6月22日 星期一 下午8:52

概念

- 逆序：一个排列中如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这两个数构成一个逆序。
- 逆序数：一个排列中逆序总数称为这个排列的逆序数。[用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数]
- n阶行列式的完全展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

性质

① 经转置，行列式的值不变，即 $|A^T| = A$
② 某行(列)有公因子k，可把k提到行列式外，特别地，当某行(列)全为0，则行列式的值为0.
③ 两行(列)互换，行列式的值变号。特别地，两行(列)成比例 行列式值为0.
④ 某行(列)所有元素都是两个数的和，则可拆成两个行列式之和.
⑤ 某行(列)的k倍加至另一行(列)，行列式的值不变.

展开定理

- 余子式：在n阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第i行，第j列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的n-1阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.
- 代数余子式：余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$
- 行列式按行(列)展开公式 ☆

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

① 行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其对应的代数余子式后再求和
② 行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和，值为0.

公式

① 上下三角行列式(主对角线)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

② 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdot a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

③ 拉普拉斯展开式：(A为m阶，B为n阶)

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

④范德蒙(德)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \Rightarrow 所有同类因子 (x_j - x_i) 其中 j>i, 的乘积.$$

计算

- 具体型（数字型）
  - 三角化法：化为主对角线或副对角线行列式
  - 公式法：拉普拉斯展开式，范德蒙行列式等
  - 数学归纳法
    - ① 验证 $n=1$ 时命题正确；假设 $n=k$ 时命题正确；证明 $n=k+1$ 时命题正确
    - ② 验证 $n=1$ 和 $n=2$ 命题都正确，假设 $n<k$ 命题正确，证明 $n=k$ 命题正确.
  - 递推法
- 抽象型
  - 用行列式性质
  - 用矩阵性质
  - 用特征值. $|A| = \prod \lambda_i$
- 常用技巧
  - ①直接按行(列)展开
  - ②把第1行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)
  - ③把每行(列)都加到第1行(列)
  - ④逐行(列)相加.

方阵的行列式

- ① $|A^T| = |A|$
- ② A、B 均为 n 阶方阵：$|AB| = |A||B|$
- ③ A 为 n 阶方阵：$|kA| = k^n|A|$
- ④ A 为 n 阶方阵：$|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^{n-1}$
- ⑤ A 为 n 阶可逆矩阵：$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$
- ⑥ A 为 n 阶方阵，$\lambda_i (i=1,2,\cdots)$ 为其特征值：$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
- ⑦ A 与 B 相似 $(A \sim B)$：$P^{-1}AP = B \Rightarrow |A| = |B|$