5 大数定律和中心极限定理

2020年8月1日 星期六 上午9:21

切比雪夫不等式和依概率收敛

- 切比雪夫不等式：设随机变量X的数学期望和方差均存在，则对任意$\varepsilon>0$有
$$P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$
- 依概率收敛：设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一个随机变量序列，A是一个常数，如果对任意$\varepsilon>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-A|<\varepsilon\}=1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}P\{|X_n-A|\ge\varepsilon\}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}X_n=A$$
则称随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$依概率收敛于常数A，记作$X_n\xrightarrow{P}A$.

大数定律

- 切比雪夫大数定律：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为两两不相关的随机变量序列，其期望$E(X_i)$与方差$D(X_i)$均存在，且存在常数C，使$D(X_i)\le C$ $(i=1,2,\cdots)$，则对任意$\varepsilon>0$有
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$
- 伯努利大数定律：设随机变量$X_n\sim B(n,p)$，$n=1,2,\cdots$，则对任意$\varepsilon>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=p$$
- 辛钦大数定律：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，且有数学期望$E(X_i)=\mu$，$i=1,2,\cdots$，则对任意$\varepsilon>0$有
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1. \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu$$

中心极限定理

- 列维—林德伯格中心极限定理：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，且有数学期望与方差，$E(X_n)=\mu$，$D(X_n)=\sigma^2$，$n=1,2,\cdots$，则对任意实数x，有
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\Phi(x)$$
[$\Phi(x)$是标准正态的分布函数]

  ⇒ 定理表明：当n充分大时 ① $\sum_{i=1}^{n}X_i$近似服从$N(n\mu,n\sigma^2)$；

  ② $\sum_{i=1}^{n}X_i$的标准化随机变量$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$近似服从标

- 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理：设随机变量$X_n\sim B(n,p)$ $(n=1,2,\cdots)$，则对于任意实数x，有
$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x)$$
其中$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数。

弓定理表明：当n充分大时 ① 服从$B(n,p)$的随机变量X_n近似服从$N(np, np(1-p))$；
② X_n的标准化随机变量$\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$近似服从标准正态，