6 数理统计

2020年8月1日 星期六 上午10:15

数理统计

- 总体与样本
  - 总体：研究对象的某项数量指标 X 的全体称为总体，总体中的每个元素称为个体。
  - 样本
    - 定义：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，简称样本。n 为样本容量，样本的具体观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值，或称为总体 X 的 n 个独立观测值。 ⇒ 样本内部相互独立，与总
    - 分布：若总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的分布为 $F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$ ⇒ (1) 离散型 X 的样本的联合分 (2) 连续型 X 的样本的联合概
- 统计量及其分布
  - 统计量
    - 定义：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元函数，如果 g 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个统计量。若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本值，则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的观测值。
    - 常用统计量 ⇓ 用于统计分析和统计推断。
      - 样本数字特征
        - 样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$；
        - 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$；
        - 样本标准差：$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$；
        - 样本k阶(原点)矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad (k=1,2,\cdots)$
        - 样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k \quad (k=1,2,\cdots)$
      - 顺序统计量：将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测量按其取值从小到大的顺序 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$，随机变量 $X_{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 称作第 k 顺序统计量，其中 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X$
    - 常用统计量的性质
      - (1) 如果总体 X 有数学期望 $E(X) = \mu$ ⇒ $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$
      - (2) 如果总体 X 有方差 $D(X)$ ⇒ $D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X)$，$E(S^2) = D(X)$
  - 三大分布
    - (1) χ^2 分布：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$，则称随机变量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$
    - (2) t 分布：设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，则称随机变量 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T \sim t(n)$
    - (3) F 分布：设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，则称随机变量 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布，记作 $F \sim F(n_1, n_2)$，n_1, n_2 分别称第一、二自由度

一个正态总体的抽样分布

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的样本，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2，则有：

①、$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

②、$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立，且 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

③、$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

④、$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

参数的点估计

概念：设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 是一个未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本。由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计，则称统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的估计量，通常记为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本的一个观察值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，并将此值作为未知参数 θ 的近似值，统计中称这个值为未知参数 θ 的近似值。

估计量的求法

矩估计法

基本思想：用样本矩估计相应的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩相应的函数，然后求出要估计的参数。

步骤

① 求总体的 l 阶原点矩 $E(X^l)$ ⇒ $E(X^l)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^l f(x;\theta)dx$ 或 $E($

② 求样本的 l 阶原点矩 A_l ⇒ $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$

③ 联立 $A_l=E(X^l)$ 解方程得 $\hat{\theta}$ ［注：l 值不同得到的 $\hat{\theta}$ 不唯一，-

最大似然估计法

概念

基本思想：对未知参数 θ 进行估计时，在该参数可能的取值范围

的概率最大的参数值 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计，这样选定

似然函数

离散型：总体 X 的概率分布为 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率

$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p$

$L(\theta)$ 即为样本的似然函数。

连续型：总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)$，则样本的

$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}$

最大似然估计值：对于给定的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使似然函数

$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为未知参数 θ 的最大似然

称为 θ 的最大似然估计量。

计算步骤

①写出样本的似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 或 $\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

②如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微，值 $\hat{\theta}$ 往往可以从方程

$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0$ 或 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ ［若两个参数 θ_1,θ_2，则

中求解，称这两个方程为似然方程。

(若最大值点非驻点，则不能用此方程求解)

区间估计和假设检验

估计量的评价标准

- 无偏性：设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的无偏估计量。
- 有效性：设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效，或 $\hat{\theta}_1$ 是比 $\hat{\theta}_2$ 更有效的估计量。
- 一致性：设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的一致估计量。

区间估计

- 置信区间：设 θ 是总体 X 的未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，对于给定的 α $(0<\alpha<$
  如果两个统计量满足
  $$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$
  则称随机区间 (θ_1,θ_2) 为参数 θ 的置信水平(或置信度)为 $1-\alpha$ 的置信区间(或
  为 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间，θ_1 和 θ_2 分别称为置信下限和置信上限。
- 一个正态总体参数的区间估计：设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本
  $\bar{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差。

未知参数	$1-\alpha$ 置信区间
求 μ 的置信区间，σ^2 已知	$\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
求 μ 的置信区间，σ^2 未知	$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
求 σ^2 的置信区间	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

假设检验

- 实际推断原理：小概率事件在一次试验中实际上是不会发生的，实际推断原理又称
- 假设检验
  - 假设：假设是指关于总体的论断或命题，常用字母 H 表示，假设分为基
    原假设，零假设)和备选假设(又称备择假设，对立假设)。
  - 假设检验：根据样本，按照一定规则判断所做假设 H_0 的真伪，并作
- 两类错误
  - 第Ⅰ类错误(弃真)：拒绝实际真的假设 H_0
  - 第Ⅱ类错误(取伪)：接受实际不真的假设 H_0
- 显著性水平：在假设检验中允许犯第Ⅰ类错误的概率，记为 α $(0<$
  检验的显著水平或检验水平，它表现了对 H_0 弃真的

显著性检验

显著性检验：只控制第Ⅰ类错误概率α的统计检验，称为显著

显著性检验的一般步骤

① 根据问题要求提出原假设 H_0；

② 给出显著性水平 α $(0<\alpha<1)$；

③ 确定检验统计量及拒绝域形式；

④ 按把第Ⅰ类错误的概率等于 α，求出选取统计
绝域 W. $\Rightarrow$ $P\{H_0$为真，拒绝$H_0\} = \alpha$ 寻代

⑤ 根据样本值计算检验统计量 T 的观测值 t，当
否则，接收原假设 H_0.

正态总体下，参数 μ 的假设检验

情形	假设 H_0	假设 H_1	检验统计量	H_0为真时检验统计量的分布	拒绝域
σ^2已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$U\sim N(0,1)$	$\lvert U\rvert \geq u_{\alpha/2}$
	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$U \geq u_{\alpha/2}$
	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$			$U \leq u_{\alpha/2}$
σ^2未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$T\sim t(n-1)$	$\lvert T\rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$T \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$			$T \leq t_{\alpha/2}(n-1)$