Ministerul Educației și Cercetării al Republicii Moldova

Universitatea Tehnică a Moldovei

Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică

Departamentul Ingineria Software și Automatica

Raport

Lucrare de control

Matematică discretă

Varianta 4

A efectuat:	Student grupa TI-231 FR	Apareci Aurica
A verificat:	Lector universitar	Ceban Gherghe

Chișinău

2024

Problema 1. Este dată funcția logică f(*x1,x2,x3,x4*) prin setul de valori a argumentelor pentru care primește valoarea 1

1. De alcătuit tabelul de adevăr
2. De obținut forma canonică disjunctivă normală (FCDN) și forma canonică conjunctivă normală (FCCN)
3. De minimizat FCDN prin 3 metode: Quine, Quine-McKluskey, Karnaugh
4. De implementat schema logică în baza ȘI-NU, SAU-NU
5. De construit diagrama temporară pentru funcția f(*x1,x2,x3,x4*)

f(*x1,x2,x3,x4*)=∨(2,3,6,7,8,14,15)

Tabelul de adevăr

	X_1	X_2	X_3	X_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

FCDN

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\vee$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\vee$
$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4\vee$
$\bar{x}_1x_2x_3x_4\vee$
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee$
$x_1x_2x_3\bar{x}_4\vee$
$x_1x_2x_3x_4\vee$

FCCN

$(x_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4)\wedge$
$(x_1\vee x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)\wedge$
$(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3\vee x_4)\wedge$
$(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)\wedge$
$(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)\wedge$
$(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3\vee x_4)\wedge$
$(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)\wedge$
$(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3\vee x_4)\wedge$
$(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)\wedge$

Minimizarea FCDN - Quine

FCDN:

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{1}$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\vee$ $\cancel{2}$
$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{3}$
$\bar{x}_1x_2x_3x_4\vee$ 4
$\mathbf{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee}$ **5**
$x_1x_2x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{6}$
$x_1x_2x_3x_4\vee$ $\cancel{7}$

I Alipire

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee$ $\cancel{1}$
$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{2}$
$\bar{x}_1x_3x_4\vee$ $\cancel{3}$
$\bar{x}_1x_2x_3\vee$ 4
$x_2x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{5}$
$x_2x_3\bar{x}_4\vee$ $\cancel{6}$
$x_1x_2x_3\vee$ $\cancel{7}$

II Alipire

$\bar{x}_1x_3\vee$
$\bar{x}_1x_3\vee$
$x_2x_3\vee$
$x_2x_3\vee$

Implicanți primi:

A: $\bar{x}_1x_3$
B: x_2x_3
C: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

F_{CM}=A∨B∨C
$F_{CM}=\bar{x}_1x_3\vee x_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

Tabela de acoperire:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_3$	1	1	1	1	0	0	0
x_2x_3	0	0	1	1	0	1	1
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	0	0	0	0	1	0	0

Minimizarea FCDN – Quine-McKluskey

0010
0011
0110
0111
1000
1110
1111

Nivelul 0	0010 1000
Nivelul 1	0011 0110
Nivelul 2	0111 1110
Nivelul 3	1111

Nivelul 0	001_ 0_10
Nivelul 1	0_11 011_ _110
Nivelul 2	_111 111_

Nivelul 0	0_1_ 0_1_
Nivelul 1	_11_ _11_

Implicanți primi:
A: 0_1_
B: _11_
C: 1000

Tabela de acoperire:

	0010	1000	0011	0110	0111	1110	1111
0_1_	1	1	1	1	0	0	0
_11_	0	0	1	1	0	1	1
1000	0	0	0	0	1	0	0

Minimizarea FCDN – Karnaugh

	00	01	11	10
00				1
01				
11	1	1	1	
10	1	1	1	

$F_{DM}=\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

Minimizarea FCCN – Karnaugh

	00	01	11	10
00	0	0	0	
01	0	0	0	0
11				0
10				0

$F_{CM}=(x_1 \vee x_3)\wedge(\bar{x}_2 \vee x_3)\wedge(x_3 \vee \bar{x}_4)\wedge(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

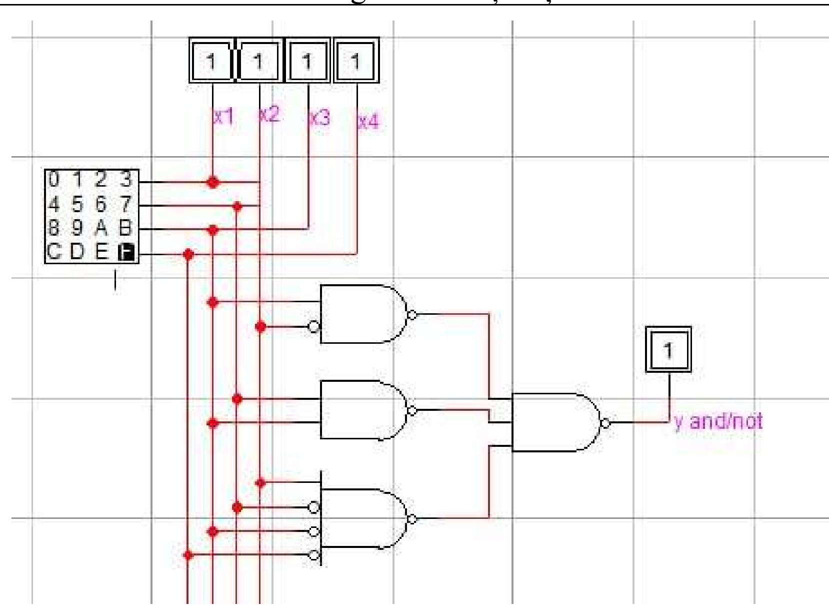
ȘI-NU

$F_{CM}=\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ $F_{CM}=\overline{\overline{(\bar{x}_1x_3)}\,\overline{(x_2x_3)}\,\overline{(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4)}}$

SAU-NU

$F_{DM}=(x_1 \vee x_3)\wedge(\bar{x}_2x_3)\wedge(x_3\bar{x}_4)\wedge(\bar{x}_1x_2x_3)$ $F_{DM}=\overline{\overline{(x_1 \vee x_3)} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_3)} \vee \overline{(x_3 \vee \bar{x}_4)} \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}}$

Schema logică a funcției ȘI-NU



Schema logică a funcției **SAU-NU**

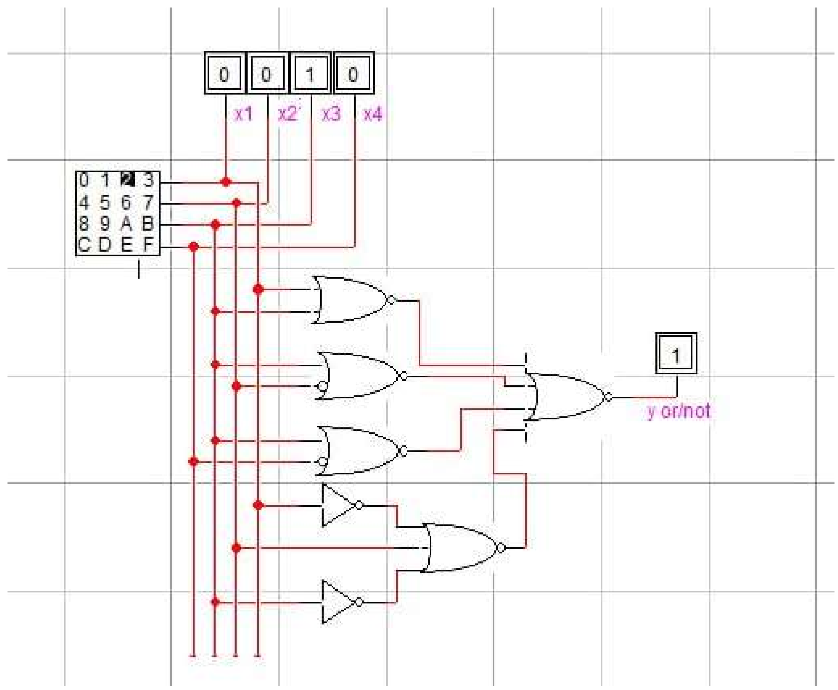
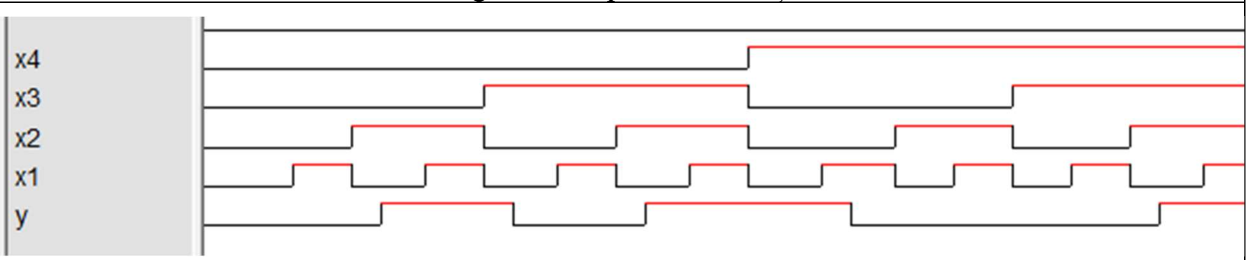
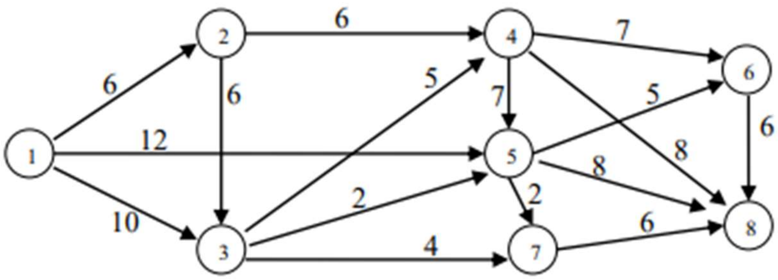


Diagrama temporară a funcției



Problema 2. Utilizând algoritmul Ford și Bellman-Kalaba de aflat drumurile de valoare minimă și maximă între vârfurile 1 și 8 în graful dat.



Algoritmul Ford

Permite determinarea drumului minim care începe cu un vârf iniţial xi până la oricare vârf al grafului G. Dacă prin Pij se va nota ponderea arcului (xi, xj) atunci algoritmul conţine următorii paşi:

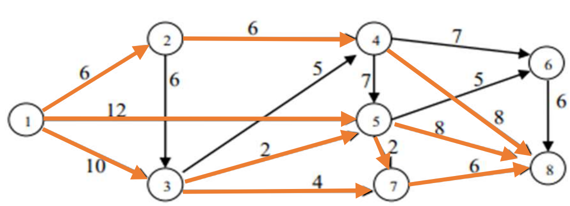
1. Fiecărui vârf xj al grafului G se va ataşa un număr foarte mare Hj(∞). Vârfului iniţial i se va ataşa Ho = 0;
2. Se vor calcula diferenţele Hj - Hi pentru fiecare arc (xi, xj). Sunt posibile trei cazuri:
   a) Hj - Hi < Pij,
   b) Hj - Hi = Pij,
   c) Hj - Hi > Pij. Cazul "c" permite micşorarea distanţei dintre vârful iniţial şi xj din care cauză se va realiza Hj = Hi + Pij.
3. Pasul 2 se va repeta atâta timp cât vor mai exista arce pentru care are loc inegalitatea "c". La terminare, etichetele Hi vor defini distanţa de la vârful iniţial până la vârful dat xi.

$H_1 = 0$
$H_2 = \infty/6$
$H_3 = \infty/10$
$H_4 = \infty/12$
$H_5 = \infty/12$
$H_6 = \infty/19/17$
$H_7 = \infty/14$
$H_8 = \infty/20$

X_iX_j	P_{ij}	H_j-H_i	H_j-H_i
(1,2)	6	H_2-$H_1 = \infty - 0 > 6$; $H_2 = H_1 + 6 = 6$	H_2-$H_1 = 6 - 0 = 6$
(1,3)	10	H_3-$H_1 = \infty - 0 > 10$; $H_3 = H_1 + 10 = 10$	H_3-$H_1 = 10 - 0 = 10$
(1,5)	12	H_5-$H_1 = \infty - 0 > 12$; $H_5 = H_1 + 12 = 12$	H_5-$H_1 = 12 - 0 = 12$
(2,3)	6	H_3-$H_2 = 10 - 6 < 6$; nu se schimbă	H_3-$H_2 = 10 - 6 < 6$
(2,4)	6	H_4-$H_2 = \infty - 6 > 6$; $H_4 = H_2 + 6 = 12$	H_4-$H_2 = 12 - 6 = 6$
(3,4)	5	H_4-$H_3 = 12 - 10 < 5$; nu se schimbă	H_4-$H_3 = 12 - 10 < 5$
(3,5)	2	H_5-$H_3 = 12 - 10 = 2$; nu se schimbă	H_5-$H_3 = 12 - 10 = 2$
(3,7)	4	H_7-$H_3 = \infty - 10 > 4$; $H_7 = H_3 + 4 = 14$	H_7-$H_3 = 14 - 10 = 4$
(4,5)	7	H_5-$H_4 = 12 - 12 < 7$; nu se schimbă	H_5-$H_4 = 12 - 12 < 7$
(4,6)	7	H_6-$H_4 = \infty - 12 > 7$; $H_6 = H_4 + 7 = 19$	H_6-$H_4 = 17 - 12 < 7$
(4,8)	8	H_8-$H_4 = \infty - 12 > 8$; $H_8 = H_4 + 8 = 20$	H_8-$H_4 = 20 - 12 = 8$
(5,6)	5	H_6-$H_5 = 19 - 12 > 5$; $H_6 = H_5 + 5 = 17$	H_6-$H_5 = 17 - 12 = 5$
(5,7)	2	H_7-$H_5 = 14 - 12 = 2$; nu se schimbă	H_7-$H_5 = 14 - 12 = 2$
(5,8)	8	H_8-$H_5 = 20 - 12 = 8$; nu se schimbă	H_8-$H_5 = 20 - 12 = 8$
(6,8)	6	H_8-$H_6 = 20 - 17 < 6$; nu se schimbă	H_8-$H_6 = 20 - 17 < 6$
(7,8)	6	H_7-$H_5 = 20 - 14 = 6$; nu se schimbă	H_7-$H_5 = 20 - 14 = 6$

$dist_{min}(1,8)=20$

1→2→4→8
1→3→5→7→8
1→3→5→8
1→3→7→8
1→5→7→8
1→5→8



Algoritmul Ford

Permite determinarea drumului maxim care începe cu un vârf iniţial xi până la oricare vârf al grafului G. Dacă prin Pij se va nota ponderea arcului (xi, xj) atunci algoritmul conţine următorii paşi:

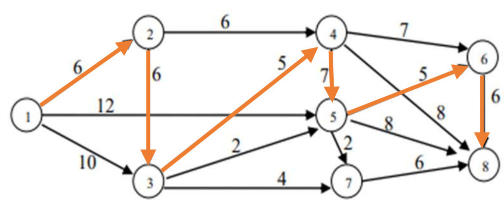
1. Fiecărui vârf xj al grafului G se va ataşa un număr foarte mic Hj(-∞). Vârfului iniţial i se va ataşa Ho = 0;
2. Se vor calcula diferenţele Hj - Hi pentru fiecare arc (xi, xj). Sunt posibile trei cazuri:
   a) Hj - Hi > Pij,
   b) Hj - Hi = Pij,
   c) Hj - Hi < Pij. Cazul "c" permite mărirea distanţei dintre vârful iniţial şi xj din care cauză se va realiza Hj = Hi + Pij.
3. Pasul 2 se va repeta atâta timp cât vor mai exista arce pentru care are loc inegalitatea “c”. La terminare, etichetele Hi vor defini distanţa de la vârful iniţial până la vârful dat xi.

$H_1 = 0$
$H_2 = -\infty/6$
$H_3 = -\infty/10/12$
$H_4 = -\infty/12/17$
$H_5 = -\infty/12/14/24$
$H_6 = -\infty/24/29$
$H_7 = -\infty/16/26$
$H_8 = -\infty/25/35$

X_iX_j	P_{ij}	H_j-H_i	H_j-H_i
(1,2)	6	H_2-$H_1 = -\infty - 0 < 6$; $H_2 = H_1 + 6 = 6$	H_2-$H_1 = 6 - 0 = 6$
(1,3)	10	H_3-$H_1 = -\infty - 0 < 10$; $H_3 = H_1 + 10 = 10$	H_3-$H_1 = 12 - 0 > 10$
(1,5)	12	H_5-$H_1 = -\infty - 0 < 12$; $H_5 = H_1 + 12 = 12$	H_5-$H_1 = 24 - 0 > 12$
(2,3)	6	H_3-$H_2 = 10 - 6 < 6$; $H_3 = H_2 + 6 = 12$	H_3-$H_2 = 12 - 6 = 6$
(2,4)	6	H_4-$H_2 = -\infty - 6 < 6$; $H_4 = H_2 + 6 = 12$	H_4-$H_2 = 17 - 6 > 6$
(3,4)	5	H_4-$H_3 = 12 - 12 < 5$; $H_4 = H_3 + 5 = 17$	H_4-$H_3 = 17 - 12 = 5$
(3,5)	2	H_5-$H_3 = 12 - 12 < 2$; $H_5 = H_3 + 2 = 14$	H_5-$H_3 = 24 - 12 > 2$
(3,7)	4	H_7-$H_3 = -\infty - 12 < 4$; $H_7 = H_3 + 4 = 16$	H_7-$H_3 = 26 - 12 > 4$
(4,5)	7	H_5-$H_4 = 14 - 17 < 7$; $H_5 = H_4 + 7 = 24$	H_5-$H_4 = 24 - 17 = 7$
(4,6)	7	H_6-$H_4 = -\infty - 17 < 7$; $H_6 = H_4 + 7 = 24$	H_6-$H_4 = 29 - 17 > 7$
(4,8)	8	H_8-$H_4 = -\infty - 17 < 8$; $H_8 = H_4 + 8 = 25$	H_8-$H_4 = 35 - 17 > 8$
(5,6)	5	H_6-$H_5 = 24 - 24 < 5$; $H_6 = H_5 + 5 = 29$	H_6-$H_5 = 29 - 24 = 5$
(5,7)	2	H_7-$H_5 = 16 - 24 < 2$; $H_7 = H_5 + 2 = 26$	H_7-$H_5 = 26 - 24 = 2$
(5,8)	8	H_8-$H_5 = 26 - 8 > 8$; nu se schimbă	H_8-$H_5 = 35 - 24 > 8$
(6,8)	6	H_8-$H_6 = 25 - 29 < 6$; $H_8 = H_6 + 6 = 35$	H_8-$H_6 = 35 - 29 = 6$
(7,8)	6	H_7-$H_5 = 35 - 26 > 6$; nu se schimbă	H_7-$H_5 = 35 - 26 > 6$

$dist_{max}(1,8)=35$

1→2→3→4→5→6→8



Algoritmul Bellman-Calaba

Etapa iniţială presupune ataşarea grafului dat G a unei matrice ponderate de adiacenţă, care se va forma în conformitate cu următoarele:

1. M(i,j) = Pij, dacă există arcul (xi, xj) de pondere Pij;
2. M(i,j) = ∞, unde ∞ este un număr foarte mare/mic, dacă arcul (xi, xj) este lipsă;
3. M(i,j) = 0, dacă i = j.

La etapa a doua se va elabora un vector V0 în felul următor:

1. V0(i) = Pin, dacă există arcul (xi, xn), unde xn este vârful final pentru care se caută drumul minim, Pin este ponderea acestui arc;
2. V0(i) = ∞, dacă arcul (xi, xn) este lipsă;
3. V0(i) = 0, dacă i = j. Algoritmul constă în calcularea iterativă a vectorului V în conformitate cu următorul procedeu:

1. Vk(i) = min{Vk-1; Pij+Vk-1(j)}, unde i = 1, 2,…, n - 1, j = 1, 2,..., n; i<>j; 2. Vk(n) = 0. Când se va ajunge la Vk = Vk-1 - STOP. Componenta cu numărul i a vectorului Vk cu valoarea diferită de zero ne va da valoarea minimă a drumului care leagă vârful i cu vârful n.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	6	10	∞	12	∞	∞	∞
X_2	∞	0	6	6	∞	∞	∞	∞
X_3	∞	∞	0	5	2	∞	4	∞
X_4	∞	∞	∞	0	7	7	∞	8
X_5	∞	∞	∞	∞	0	5	2	8
X_6	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	6
X_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	6
X_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
V_0	∞	∞	∞	8	8	6	6	0
V_1	20	14	10	8	8	6	6	0
V_2	20	14	10	8	8	6	6	0

$dist_{min}(1,8)=20$

1→2→4→8

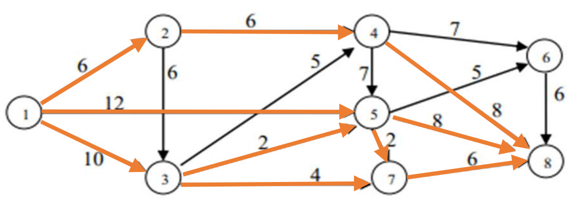
1→3→5→7→8

1→3→5→8

1→3→7→8

1→5→7→8

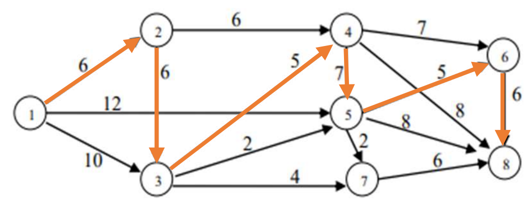
1→5→8



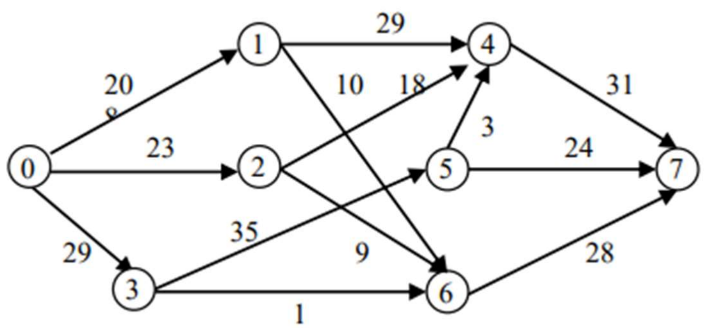
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	6	10	-∞	12	-∞	-∞	-∞
X_2	-∞	0	6	6	-∞	-∞	-∞	-∞
X_3	-∞	-∞	0	5	2	-∞	4	-∞
X_4	-∞	-∞	-∞	0	7	7	-∞	8
X_5	-∞	-∞	-∞	-∞	0	5	2	8
X_6	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0	-∞	6
X_7	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0	6
X_8	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0
V_0	-∞	-∞	-∞	8	8	6	6	0
V_1	20	14	13	15	11	6	6	0
V_2	23	21	20	18	11	6	6	0
V_3	30	26	23	18	11	6	6	0
V_4	33	29	23	18	11	6	6	0
V_5	35	29	23	18	11	6	6	0
V_6	35	29	23	18	11	6	6	0

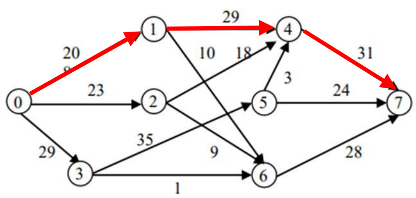
$dist_{max}(1,8)=35$

1→2→3→4→5→6→8



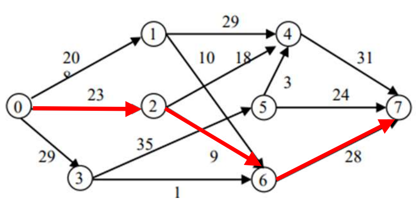
Problema 3. Determina-ți valoarea fluxului maximal în rețeaua de transport conform algoritmului Ford-Fulkersson.





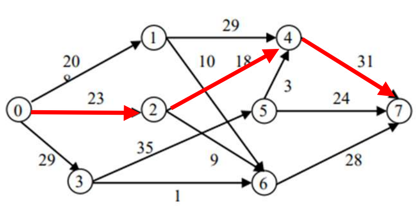
[+] +0 +1 +4

I (0, 1, 4, 7) $e1 = \min_{v+}\{20-0, 19-0, 31-0\}=20$



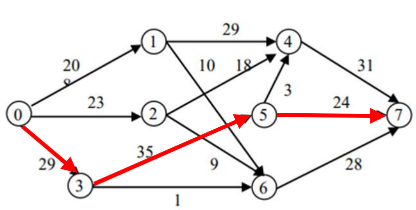
[+] +0 +2 +6

II (0, 2, 6, 7) $e1 = \min_{v+}\{23-0, 9-0, 28-0\}=9$



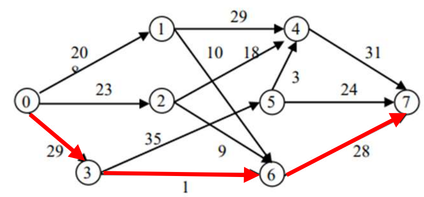
[+] +0 +2 +4

III (0, 2, 4, 7) $e1 = \min_{v+}\{23-9, 18-0, 31-20\}=11$



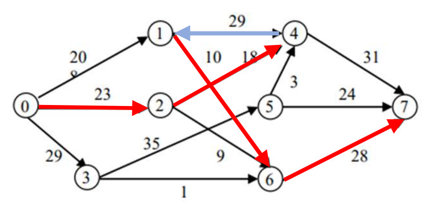
[+] +0 +3 +5

IV (0, 3, 5, 7) $e1 = \min_{v+}\{29-0, 35-0, 23-0\}=23$



[+] +0 +3 +6

V (0, 3, 6, 7) $e1 = \min_{v+}\{29-23, 1-0, 28-9\}=1$

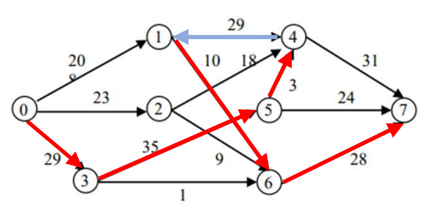


[+] +0 +2 -4 +1 +6

VI (0, 2, 4, 1, 6, 7)

$e1 = \min_{v+}\{23-20, 18-11, 10-0, 18-10\}=3$

$e2 = \min_{v-}\{20\}=20$ $e = \min\{3, 20\}=3$



[+] +0 +3 +5 -4 +1 +6

VII (0, 3, 5, 4, 1, 6, 7)

$e1 = \min_{v+}\{29-24, 35-23, 3-0, 10-3, 28-13\}=3$

$e2 = \min_{v-}\{17\}=17$ $e = \min\{3, 17\}=3$

$f_b = 20+9+11+23+1+3+3 = 70$

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A= \{0, 3, 5\}$
$X\backslash A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$

(0,1); (0,2); (3,6); (5,4); (5,7);
20 + 23 + 1 + 3 + 23 = 70

Flux maxim = 70