Dokumentace k projektu pro předměty IZP a IUS

Iterační výpočty

projekt č. 2

21. listopadu 2010

Autor: Kateřina Zaklová, xzaklo00@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

Obsah

Úvod

Tento dokument popisuje tvorbu programu, který slouží k výpočtu matematických funkcí váženého aritmetického průměru, váženého kvadratického průměru, tangensu a logaritmu. Program počítá funkce pomocí iteračních algoritmů a pouze za využití standartních matematických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení).

Dokument je rozdělen do několika částí, kde je popsán návrh řešení, vlastní implementace a testování programu.

Analýza problému a princip řešení

Zadání problému

Cílem bylo vytvořit program v jazyce C, který zpracuje posloupnost číselných hodnot datového typu double ze standartního vstupu a dle zvoleného přepínače vypočítá danou matematickou operaci a vypíše její výsledky.

K výpočtu logaritmu a hyperbolického tangens nebylo možno použít standardní funkce z knihovny <math.h>, ale bylo třeba implementovat vlastní aproximace těchto funkcí pouze pomocí základních matematických operací, program tedy výsledek nespočítá s úplně stejnou přesností jako knihovní funkce.

Pro výpočet váženého aritmetického a kvadratického průměru použijeme statické funkce. Není zde třeba znát přesnost výpočtu.

Data na standartním vstupu mohou být v libovolně dlouhé posloupnosti znaků a dělí je libovolný počet bílých znaků. Výstupem programu bude posloupnost číselných znaků odpovídajících spuštěné funkci programu.

Program funguje jako konzolová aplikace, kterou ovládáme z příkazového řádku zadanými parametry. Kromě přepínače funkcí jsou u hyperbolického tangens a logaritmu požadovány ještě další parametry – základ logaritmu a přesnost výpočtu zadaná jako počet platných číslic.

Nekonečné řady

Jak je zřejmé ze zadání, program je třeba vytvořit za pomoci iteračních algoritmů. Tyto algoritmy se vytváří prostřednictvím vzorců posloupností příslušných funkcí – nekonečných řad. Použité vzorce lze nalézt v odborné literatuře, ale před jejich použitím se musíme zaměřit na jejich konvergenci.

Definice nekonečné řady:

„Je-li $\{a_k\}$ číselná posloupnost, pak nekonečnou číselnou řadou (stručně číselnou řadou nebo řadou) nazýváme výraz $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, který často stručněji značíme $\sum_{1}^{\infty} a_k$ nebo $\sum a_k$. Sčítanec a_m se nazývá m-tý člen řady. Výraz $s_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ se nazývá n-tý částečný součet řady $\sum_{1}^{\infty} a_k$. Posloupnost $\{s_k\}=s_1, s_2, s_3, \ldots=(a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots)$ se nazývá posloupnost částečných součtů řady $\sum_{1}^{\infty} a_k$.“ (1, str. 692)

Taylorova řada

Tato řada je zvláštní mocninnou řadou. Pro vyjádření hodnot funkce nemusíme vyjadřovat všechny členy Taylorovy řady, ale můžeme zanedbat ty s vyššími derivacemi. Tento postup používáme především, pokud chceme nějakou složitou funkci nahradit mnohočlenem.

Výsledný mnohočlen pak udává hodnoty, které sice nejsou přesně stejné, ale velmi blízké původní funkci.

Rekurence

Aproximaci funkcí řešíme pomocí tzv. rekurentních vztahů. Jedná se o vztahy, kde výpočet nové hodnoty závisí na hodnotě výpočtu z předchozího kroku. Při implementaci vztahů si musíme zadat počáteční hodnotu a díky ní postupně získáváme hodnoty další.

Konvergence

Při řešení aproximace funkcí prostřednictvím iteračních algoritmů musíme přihlédnout také k rychlosti jejich konvergence. Předem upravíme vstupní hodnoty a přesuneme je do intervalu, kde funkce konverguje nejrychleji. Tím předejdeme příliš dlouhé době výpočtu a jeho zbytečné náročnosti, neboť si výpočet samotný rozdělíme na několik paralelních částí.

Přesnost výpočtu

Ačkoliv počítáme s nekonečnými řadami, každý výpočet provádíme s danou přesností jen na několik desetinných míst. Tato přesnost stanovuje konečnou podmínku, kdy se výpočet zastaví a vytiskne výsledek. Tento výsledek se blíží k přesné hodnotě právě se zadanou přesností na určitý počet desetinných míst. Tato přesnost je označena eps a je dosažena, pokud absolutní hodnota rozdílu posledních dvou vypočítaných členů je menší než eps.

Návrh řešení problémů

Analýza vstupních dat

Program zpracovává hodnoty ze standartního vstupu funkcí scanf, která dokáže odfiltrovat případné chybně zadané vstupní hodnoty, ty jsou následně převedeny na NAN.

Další případy chybných vstupů jsou ošetřeny přímo v konkrétních funkcích.

Vážený aritmetický průměr

Funkce zpracovává dvojice vstupních hodnot, kde jedna z nich je hodnota samotná a druhá je její nezápornou váhou. Vycházíme přitom ze vztahu:

$$\bar{x}=\frac{\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3+\ldots+\omega_n x_n}{\omega_1+\omega_2+\omega_3\ldots+\omega_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}$$

Ten použijeme jako rekurentní vztah, kde počítáme podíl dvou sum. Suma v čitateli je součin hodnoty s její váhou, ke které přičteme sumu předchozí. Suma ve jmenovateli je součet všech příslušných vah. Tyto dvě sumy průběžně dělíme a získáváme tak posloupnost mezivýsledků včetně výsledku konečného.

Vážený kvadratický průměr

Funkce pracuje podobným způsobem jako vážený aritmetický průměr, pouze s tím rozdílem, že u váženého kvadratického průměru hodnoty x umocníme na druhou a konečný podíl sum odmocníme. Použijeme vztah:

$$\bar{x}=\sqrt{\frac{\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2+\omega_3 x_3^2+\ldots+\omega_n x_n^2}{\omega_1+\omega_2+\omega_3\ldots+\omega_n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}}$$

Hyperbolický tangens

Pro výpočet hyperbolického tangensu je nutné provést aproximaci funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus. Jelikož nemůžeme použít knihovní funkce sinh a cosh, aproximujeme funkce za pomoci nekonečných řad.

$$\sinh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad |x|<+\infty$$

$$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad |x|<+\infty$$

Součty převedeme na rekurentní vztahy:

sinh:

$$y_n = y_{n-1} \frac{x^2}{k_n(k_n - 1)},\ k_n = k_{n-1} + 2,\ y_0 = x,\ k_0 = 3$$

cosh:

$$y_n = y_{n-1} \frac{x^2}{k_n(k_n - 1)},\ k_n = k_{n-1} + 2,\ y_0 = 1,\ k_0 = 2$$

Oba vztahy platí na celém definičním oboru, proto není nutné přesouvat se do konkrétních intervalů. Před výpočtem jsou také ošetřeny stavy, které se týkají okrajových hodnot (např. nekonečno). Pro urychlení programu bude hodnotám x větším než 20 přiřazován výsledek 1 a naopak, hodnotám x menším, než -20 se přiřadí výsledek -1. Hranice je dána na 20, neboť při přesnosti na 15 míst se zlom pohybuje právě pod touto hodnotou.

Logaritmus

Pro výpočet obecného logaritmu použijeme vzorec $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Můžeme si vybrat hned z několika vzorců Taylorova rozvoje pro přirozený logaritmus. Některé z nich jsou definované jen na částech definičního oboru, jiné platí pro celý definiční obor, ale v určitých jeho částech konvergují pomalu, proto si je musíme převést do vhodného intervalu. Funkce tedy bude aproximována pomocí následujícího vzorce $\ln x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1^3}{3(x+1)^3} + \frac{x-1^5}{5(x+1)^5} + \ldots\right) \quad x > 0$.

Provedeme substituci $t = \frac{x-1}{x+1}$, čímž získáme vzorec $\ln(x) = 2\mathrm{t}\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \ldots\right)$, který následně převedeme na rekurentní vztah.

Logaritmická funkce nejrychleji konverguje okolo čísla 1, proto je vhodné převést vstupní hodnoty do intervalu $\langle 0{,}5 ; 1{,}5 \rangle$. Tím pádem dělíme zadané x hodnotou meze tak dlouho, dokud se nedostaneme do daného intervalu. Využijeme přitom vlastnosti logaritmu $\log_y(xz) = \log_y x + \log_y z$. K výsledku pak musíme přičíst počet logaritmů meze. Před výpočtem ještě musíme ošetřit stavy pro případnou hodnotu x, která nepatří do definičního oboru funkce.

Přesnost výpočtu

Požadovaná přesnost výpočtu je zadávána jako parametr příkazové řádky sigdig. Ve funkci ho potom převedeme na $eps = 0{,}1^{sigdig+1}$, aby byla zajištěna dostatečná přesnost výpočtu.

Testování

Obecné testy

Program se zde testuje na možné chybové stavy, které mohou nastat při zadávání parametrů pro spuštění.

```
 ./proj2
Chybne parametry prikazoveho radku!
./proj2 bla
Chybne parametry prikazoveho radku, pro napovedu zadejte parametr -h
./proj2 -wam
Chybne parametry prikazoveho radku, pro napovedu zadejte parametr -h
./proj2 --wam
OK
./proj2 --wqm
OK
./proj2 --tanh bla
Chybny parametr urcujici presnost!
k./proj2 --tanh 60
Chybny parametr urcujici presnost!
./proj2 --tanh 10
OK
./proj2 --logax
Chybne parametry prikazoveho radku, pro napovedu zadejte parametr -h
./proj2 --logax 5
Chybne parametry prikazoveho radku, pro napovedu zadejte parametr -h
./proj2 --logax 5 3
OK
./proj2 --logax 5 bla
Chybny zaklad logaritmu!
```

Testy funkcí

Dále zkontrolujeme výsledné hodnoty různých funkcí a vstupy s nekorektními znaky.

Vážený aritmetický průměr

```
./proj2 --wam
16 25 79 67 169 542
1.6000000000e+01
6.1880434783e+01
1.5345583596e+02

1 2 a b c d
1.0000000000e+00
nan
nan

7 6 5 7 9
7.0000000000e+00
5.9230769231e+00
nan

1 2 3 -4
1.0000000000e+00
nan
```

Vážený kvadratický průměr

```
./proj2 --wqm
2 a b c
nan
nan

-1 1 3 4
1.0000000000e+00
2.7202941017e+00

inf 2 5 6
inf
inf
```

Hyperbolický tangens

```
./proj2 --tanh 5
```

1.3	8.6172315931e-01
-1.3	-8.6172315931e-01
32.009	1.0000000000e+00
-32.009	-1.0000000000e+00
4e23	1.0000000000e+00
-4e23	-1.0000000000e+00
4e-23	4.0000000000e-23
-4e-23	-4.0000000000e-23
0.1	9.9667994625e-02
-0.1	-9.9667994625e-02
0	0.0000000000e+00
1	7.6159415596e-01
-1	-7.6159415596e-01
nan	nan
-nan	-nan
inf	1.0000000000e+00
-inf	-1.0000000000e+00

Obecný logaritmus

```
./proj2 --logax 5 3.45
```

-1.3	-nan
32.009	inf
-32.009	-inf
4e23	nan
-4e23	2.7988446685e+00
4e-23	nan
-4e-23	4.3884756424e+01
0.1	nan
-0.1	-4.1645862134e+01
0	nan
1	-1.8593612700e+00
-1	nan
nan	-inf

`0.0000000000e+00`	`-nan`
`nan`	`inf`
`nan`	`nan`

Vlastní řešení

Ovládání programu

Program se ovládá pouze pomocí parametrů z příkazové řádky. Při spuštění s parametrem -h vypíše na výstup nápovědu k ovládání programu. Výpočty provádí po zadání příslušného přepínače a dalších vyžadovaných údajů.

Parametry

Dostupné parametry jsou zpracovány ve struktuře Tparams.

`proj2 -h`

-vypíše nápovědu

`proj2 --wam`

- vypočítá vážený aritmetický průměr

`proj2 --wqm`

- vypočítá vážený kvadratický průměr

`proj2 --tanh sigdig`

- vypočítá hyperbolický tangens s přesností sigdig (počet platných číslic)

`proj2 --logax sigdig a`

- vypočítá logaritmus zadané hodnoty x o základě a s přesností sigdig (počet platných číslic)

Volba datových typů

Pro proměnné i výsledky jsem na základě zadání zvolila datový typ double.

Závěr

Program dokáže vypočítat vážený aritmetický a kvadratický průměr, hyperbolický tangens a obecný logaritmus. Výsledky jsou sorvnatelné se standardními matematickými funkcemi. Program je funkční v prostředí Linux a Microsoft Windows.

Použitá literatura

[1] BARTSCH, Hans-Jochen. Matematické vzorce.

4. vydání Nakladatelství Academia 1. (reprint), Praha 2006. ISBN 80-200-1448-9

Metriky kódu

Počet souborů: 1 soubor

Počet řádků zdrojového textu: 433 řádků

Velikost statických dat: 430 bytů

Velikost spustitelného souboru: 17 770 bytů (Linux)