

# Skrypt z Algorytmów i struktur danych

*Zbiór mniej lub bardziej ciekawych algorytmów  
i struktur danych, jakie bywały omawiane na wy-  
kładzie (albo i nie).*

PRACA ZBIOROWA POD REDAKCJĄ  
KRZYSZTOFA PIECUCHA

Korzystać na własną odpowiedzialność.



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Zrobione</b>	<b>5</b>
1.1	Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej . . . . .	6
1.1.1	Przykłady wykorzystania twierdzenia . . . . .	7
1.2	Sortowanie bitoniczne . . . . .	8
1.3	Algorytm macierzowy wyznaczania liczb Fibonacciego . . . . .	14
1.4	Algorytm Strassena . . . . .	16
1.5	Model afinicznych drzew decyzyjnych . . . . .	18
1.6	Problem plecakowy . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Under construction</b>	<b>25</b>
2.1	Złożoność obliczeniowa . . . . .	26
2.2	Model obliczeń . . . . .	27
2.3	Kopce binarne . . . . .	28
2.4	Algorytm rosyjskich wieśniaków . . . . .	30
2.5	Sortowanie topologiczne . . . . .	33
2.6	Algorytmy sortowania . . . . .	34
2.6.1	Quick sort . . . . .	36
2.7	Minimalne drzewa rozpinające . . . . .	37
2.7.1	Cut Property i Circle Property . . . . .	37
2.7.2	Cycle property . . . . .	37
2.7.3	Cut property . . . . .	37
2.7.4	Algorytm Prima . . . . .	38
2.7.5	Algorytm Kruskala . . . . .	38
2.7.6	Algorytm Borůvky . . . . .	38
2.8	Algorytm Dijkstry . . . . .	39
2.8.1	Działanie . . . . .	39
2.9	Dowód poprawności algorytmu . . . . .	39
2.10	Analiza . . . . .	40
2.11	Problemy . . . . .	40

2.12	Algorytm szeregowania . . . . .	41
2.13	Programowanie dynamiczne na drzewach . . . . .	42
2.14	Problemy NP . . . . .	43
2.15	Sieci przełączników Benesa-Waksmana . . . . .	46
2.15.1	Budowa . . . . .	46
2.15.2	Konstrukcja sieci tworzącej wszystkie możliwe permutacje zbioru . . . . .	46
2.15.3	Własności wygenerowanej sieci . . . . .	46
2.15.4	Dowód poprawności konstrukcji . . . . .	47
2.15.5	Sortowanie . . . . .	47
2.16	Pokrycie zbioru . . . . .	48
2.17	Przynależność słowa do języka . . . . .	50
2.18	Pokrycie wierzchołkowe . . . . .	54
2.19	Algorytm znajdowania dwóch najbliższych punktów . . . . .	55
2.19.1	Podejście siłowe . . . . .	55
2.19.2	Podejście Dziel i Zwyciężaj . . . . .	55
2.20	Kopce dwumianowe w wersji leniwej . . . . .	57
2.20.1	Różnice w implementacji . . . . .	57
2.20.2	Analiza złożoności . . . . .	57

**Dodatek A Porównanie programów przedmiotu AiSD na różnych uczelniach** **59**

# Rozdział 1

## Zrobione

## 1.1 Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

Popularną metodą rozwiązywania zadań jest metoda Dziel i Zwyciężaj. Polega ona na podzieleniu problemu na mniejsze, rozwiązaniu ich w sposób rekurencyjny, a następnie na scaleniu wyniku w jeden. Schemat tej metody jest przedstawiony jako Schemat 1.

---

**Schemat 1:** Procedura Dziel\_i\_zwyciezaj

---

```
if  $n \leq 1$  then
  | rozwiąż trywialny przypadek
end
Stwórz  $a$  podproblemów wielkości  $n/b$  w czasie  $D(n)$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $a$  do
  | wykonaj procedurę Dziel_i_zwyciezaj rekurencyjnie dla  $i$ -tego
  | podproblemu
end
Połącz wyniki w czasie  $P(n)$ 
```

---

Złożoność takiego algorytmu możemy zapisać zależnością rekurencyjną  $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k \log^p n)$  przy czym  $P(n) + D(n) \in \Theta(n^k \log^p n)$ . Jednakże zależność rekurencyjna na czas działania algorytmu nie zawsze nas satysfakcjonuje. Zazwyczaj chcielibyśmy uzyskać wzór zwarty. Do tego celu służy poniższe twierdzenie, znane Twierdzeniem o rekurencji uniwersalnej.

**Twierdzenie 1.** *Niech  $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k \log^p n)$  oraz  $a \geq 1$ ,  $b > 1$ ,  $k \geq 0$  oraz  $p$  liczby rzeczywiste. Wtedy*

1. jeżeli  $a > b^k$ , to  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. jeżeli  $a = b^k$  oraz
  - (a)  $p > -1$  to  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log^{p+1} n)$
  - (b)  $p = -1$  to  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log \log n)$
  - (c)  $p < -1$  to  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
3. jeżeli  $a < b^k$  oraz
  - (a)  $p \geq 0$  to  $T(n) \in \Theta(n^k \log^p n)$
  - (b)  $p < 0$  to  $T(n) \in O(n^k)$

*Dowód.* TODO TODO TODO.

□

### 1.1.1 Przykłady wykorzystania twierdzenia

W rozdziale 2.6 zapoznamy się z algorytmem sortowania przez scalanie. Jego złożoność określona jest wzorem rekurencyjnym  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$ . W tym przypadku  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $k = 1$  oraz  $p = 0$ . Ponieważ  $a = b^k$  sprawdzamy dodatkowo, że  $p > -1$  i otrzymujemy, że w naszym przypadku powinniśmy skorzystać z pkt 2a. Otrzymujemy, że złożoność naszego algorytmu jest  $\Theta(n^{\log_b a} \log^{p+1} n)$  czyli  $\Theta(n \log n)$ .

Nie podoba mi się to, że to jest osobny podrozdział. Nie wiem czy to powinien być osobny akapit, tabelka czy może coś jeszcze innego.

W rozdziale 1.2 opisany został algorytm sortowania bitonicznego. Jego złożoność określona jest wzorem  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n \log n)$ . W tym przypadku  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $k = 1$  i  $p = 1$ . Ponieważ  $a = b^k$  i  $p > -1$  korzystamy z punktu 2a. Otrzymujemy złożoność  $\Theta(n \log^2 n)$ .

Naprawić referencję.

W rozdziale ?? opisany jest algorytm Karatsuby. Jego złożoność opisana jest rekurencyjnym wzorem  $3T(n/2) + \Theta(n)$ . W tym przypadku  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $k = 1$  i  $p = 0$ . Ponieważ  $a > b^k$  korzystamy z punktu 1. Otrzymujemy złożoność  $\Theta(n^{\log_2 3})$  czyli około  $\Theta(n^{1.585})$ .

Wyszukiwanie binarne to algorytm klasy Dziel i Zwyciężaj wyszukujący element w posortowanym ciągu. Ma złożoność opisaną rekurencyjnym wzorem  $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ . Mamy więc  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $k = p = 0$ . Ponieważ  $a = b^k$  i  $p > -1$  korzystamy z punktu 2a. Otrzymujemy złożoność  $\Theta(\log n)$ .

Algorytm Strassena jest opisany w rozdziale 1.4. Jego złożoność opisana jest rekurencyjnym wzorem  $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$ . W tym przypadku mamy  $a = 7$ ,  $b = 2$ ,  $k = 2$ ,  $p = 0$ . Jako, że  $a > b^k$  wykorzystamy punkt 1. Otrzymujemy złożoność  $\Theta(n^{\log_2 7})$  czyli około  $\Theta(n^{2.807})$ .

## 1.2 Sortowanie bitoniczne

W tym rozdziale przedstawimy algorytm sortowania bitonicznego. Jest to algorytm działający w czasie  $\Theta(n \log^2 n)$  czyli gorszym niż inne, znane algorytmy sortujące, takie jak sortowanie przez scalanie albo sortowanie szybkie. Zaletą sortowania bitonicznego jest to, że może zostać uruchomiony równoległe na wielu procesorach. Ponadto, dzięki temu, że algorytm zawsze porównuje te same elementy bez względu na dane wejściowe, istnieje prosta implementacja fizyczna tego algorytmu (np. w postaci tzw. sieci sortujących). Algorytm będzie zakładał, że rozmiar danych  $n$  jest potęgą dwójki. Gdyby tak nie było, moglibyśmy wypełnić tablicę do posortowania nieskończonościami, tak aby uzupełnić rozmiar danych do potęgi dwójki. Rozmiar danych zwiększyłby się wtedy nie więcej niż dwukrotnie, zatem złożoność asymptotyczna pozostałaby taka sama.

Sortowanie bitoniczne posługuje się tzw. ciągami bitonicznymi, które sobie teraz zdefiniujemy.

**Definicja 1.** *Ciągiem bitonicznym właściwym nazywamy każdy ciąg powstały przez sklejenie ciągu niemalejącego z ciągiem nierosnącym.*

Dla przykładu ciąg 2, 2, 5, 100, 72, 69, 42, 17 jest ciągiem bitonicznym właściwym, gdyż powstał przez sklejenie ciągu niemalejącego 2, 2, 5 oraz ciągu nierosnącego 100, 72, 69, 42, 17. Ciąg 1, 0, 1, 0 nie jest ciągiem bitonicznym właściwym, gdyż nie istnieją taki ciąg niemalejący i taki ciąg nierosnący, które w wyniku sklejenia dałyby podany ciąg.

**Definicja 2.** *Ciągiem bitonicznym nazywamy każdy ciąg powstały przez rotację cykliczną ciągu bitonicznego właściwego.*

Ciąg 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72 jest ciągiem bitonicznym, gdyż powstał przez rotację cykliczną ciągu bitonicznego właściwego 2, 2, 5, 100, 72, 69, 42, 17.

Istnieje prosty algorytm sprawdzający, czy ciąg jest bitoniczny. Należy znaleźć element największy oraz najmniejszy. Następnie od elementu najmniejszego należy przejść cyklicznie w prawo (tj. w sytuacji gdy natrafimy na koniec ciągu, wracamy do początku) aż napotkamy element największy. Elementy, które przeszliśmy w ten sposób powinny tworzyć ciąg niemalejący. Analogicznie, idziemy od elementu największego cyklicznie w prawo aż do elementu najmniejszego. Elementy, które odwiedziliśmy powinny tworzyć ciąg nierosnący. W sytuacji w której mamy wiele elementów najmniejszych (największych), powinny one ze sobą sąsiadować (w sensie cyklicznym) i nie ma znaczenia, który z nich wybierzemy. Dla przykładu w ciągu 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72 idąc od elementu najmniejszego do największego tworzymy ciąg 2, 2, 5, 100 i jest to ciąg niemalejący. Idąc od elementu największego do najmniejszego otrzymujemy ciąg 100, 72, 69, 42, 17, 2 i jest to ciąg nierosnący.



Jedyną procedurą, która będzie przedstawiała elementy w tablicy, będzie procedura `bitonic_compare` (Algorytm 2). Jako dane wejściowe otrzymuje ona tablicę `A`, wielkość tablicy `n` oraz wartość logiczną `up`, która określa, czy ciąg będzie sortowany rosnąco czy malejąco. Procedura dzieli zadaną na wejściu tablicę na

---

**Algorytm 2:** Procedura `bitonic_compare`

---

```

Input:  $A[0..n-1]$ , up
for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do
    if  $(A[i] > A[i + n/2]) = up$  then
         $A[i] \leftrightarrow A[i + n/2]$ 
    end
end

```

---

dwie równe części. Następnie porównuje pierwszy element z pierwszej części z pierwszym elementem z drugiej części. Jeśli te elementy nie znajdują się w pożądanym porządku, to je przestawia. Następnie powtarza tą czynność z kolejnymi elementami.

Dla przykładu, jeśli procedurę uruchomimy z tablicą  $A = [2, 8, 7, 1, 4, 3, 5, 6]$ , wartością  $n = 8$  oraz `up = true`, w wyniku otrzymamy tablicę  $A = [2, 3, 5, 1, 4, 8, 7, 6]$ . W pierwszym kroku wartość 2 zostanie porównana z wartością 4. Ponieważ chcemy otrzymać porządek rosnący (wartość zmiennej `up` jest ustawiona na `true`), to zostawiamy tą parę w spokoju. W następnym kroku porównujemy wartość 8 z wartością 3. Te wartości są w złym porządku, dlatego algorytm zamienia je miejscami. Dalej porównujemy 7 z 5 i zamieniamy je miejscami i w końcu porównujemy 1 z 6 i te wartości zostawiamy w spokoju, gdyż są w dobrym porządku.

Procedura `bitonic_compare` ma bardzo ważną własność, którą teraz udowodnimy.

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli elementy tablicy  $A[0..n-1]$  tworzą ciąg bitoniczny, to po zakończeniu procedury `bitonic_compare` elementy tablicy  $A[0..n/2-1]$  oraz tablicy  $A[n/2..n-1]$  będą tworzyły ciągi bitoniczne. Ponadto jeśli wartość zmiennej `up` jest ustawiona na `true` to każdy element tablicy  $A[0..n/2-1]$  będzie nie większy od każdego elementu tablicy  $A[n/2..n-1]$ . W przeciwnym przypadku będzie niemniejszy.*

Weźmy dla przykładu ciąg bitoniczny 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72. Po przejściu procedury `bitonic_compare` z ustawioną zmienną `up` na wartość `true` otrzymamy ciąg 2, 5, 17, 2, 69, 42, 100, 72. Ciągi 2, 5, 17, 2 oraz 69, 42, 100, 72 są ciągami bitonicznymi. Ponadto każdy element ciągu 2, 5, 17, 2 jest nie większy od każdego elementu ciągu 69, 42, 100, 72.

Przejdźmy do dowodu powyższego twierdzenia. Przyda nam się do tego poniższy lemat:

**Lemat 1** (zasada zero-jeden). *Twierdzenie 2. jest prawdziwe dla dowolnych tablic wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe dla tablic zero-jedynkowych.*

*Dowód.* Jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla każdej tablicy to w szczególności jest prawdziwe dla tablic złożonych z zer i jedynek. Dowód w drugą stronę jest dużo ciekawszy.

Weźmy dowolną funkcję niemalejącą  $f$ . To znaczy funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $\forall_{a,b \in \mathbb{R}} a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ . Dla tablicy  $T$  przez  $f(T)$  będziemy rozumieli tablicę powstałą przez zaaplikowanie funkcji  $f$  do każdego elementu tablicy  $T$ . Niech  $A$  oznacza tablicę wejściową do procedury `bitonic_compare` i niech  $B$  oznacza tablicę wyjściową. Udowodnimy, że karmiąc procedurę `bitonic_compare` tablicą  $f(A)$  otrzymamy tablicę  $f(B)$ . W kroku  $i$ -tym procedura rozważa przestawienie elementów  $t_i$  oraz  $t_{i+n/2}$ . Jeśli  $f(a_i) = f(a_{i+n/2})$  to nie ma znaczenia czy elementy zostaną przestawione. Z kolei jeśli  $f(a_i) < f(a_{i+n/2})$  to  $a_i < a_{i+n/2}$  zatem jeśli procedura przestawi elementy  $f(a_i)$  oraz  $f(a_{i+n/2})$  to również przestawi elementy  $a_i$  oraz  $a_{i+n/2}$ . Analogicznie gdy  $f(a_i) > f(a_{i+n/2})$ . Zatem istotnie: dla każdej funkcji niemalejącej  $f$ , procedura `bitonic_compare` otrzymując na wejściu tablicę  $f(A)$  zwróci na wyjściu tablicę  $f(B)$ .

Wróćmy do dowodu lematu. Dowód nie wprost. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich tablic zero-jedynkowych i nie jest prawdziwe dla pewnej tablicy  $T[0..n-1]$ . Niech  $S[0..n-1]$  oznacza zawartość tablicy po zakończeniu procedury `bitonic_compare`. Jeśli twierdzenie nie jest prawdziwe, oznacza to, że albo któraś z tablic  $S[0..n/2-1]$ ,  $S[n/2..n-1]$  nie jest bitoniczna albo, że element pierwszej z nich jest większy od któregoś elementu z drugiej tablicy. Rozważmy dwa przypadki.

Załóżmy, że tablica  $S[0..n/2-1]$  nie jest bitoniczna (przypadek kiedy druga z tablic nie jest bitoniczna, jest analogiczny). Załóżmy, że ciąg powstały przez przejście od najmniejszego elementu w tej tablicy do największego nie tworzy ciągu niemalejącego (przypadek gdy ciąg powstały przez przejście od największego elementu do najmniejszego nie tworzy ciągu nierosnącego jest analogiczny). Zatem istnieje w tablicy element  $S[i]$  większy od elementu  $S[i+1]$ . Rozważmy następującą funkcję:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \leq S[i] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że w takiej sytuacji twierdzenie nie byłoby prawdziwe dla tablicy  $f(T)$ , zatem dla tablicy zero-jedynkowej. Gdyż ponownie - element  $f(S[i]) = 1$  byłby większy od elementu  $f(S[i+1]) = 0$ .

1	2	3	5	4	6	7	1	S[]
0	0	0	1	0	1	1	0	f(S)
			$i$	$i+1$				

Drugi przypadek. Załóżmy, że zmienna `up` ustawiona jest na `true` (przypadek drugi jest analogiczny). Załóżmy, że element `S[i]` jest mniejszy od elementu `S[j]` gdzie  $j < n/2$  oraz  $i \geq n/2$ . Rozważmy funkcję:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \leq S[j] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Wtedy twierdzenie nie byłoby prawdziwe dla tablicy  $f(T)$  (zero-jedynkowej). Po-  
nownie - element  $f(S[i]) = 0$  byłby mniejszy od elementu  $f(S[j]) = 1$ .

1	2	100	2	102	99	103	107	S[]
0	0	1	0	1	0	1	1	f(S)
		$j$			$i$			

□

Do pełni szczęścia potrzebujemy udowodnić, że Twierdzenie 2 jest prawdziwe dla wszystkich ciągów zero-jedynkowych.

**Lemat 2.** *Twierdzenie 2. jest prawdziwe dla wszystkich ciągów zero-jedynkowych.*

*Dowód.* Zakładać będziemy, że zmienna `up` jest ustawiona na `true` (dowód dla sytuacji przeciwnej jest analogiczny). Istnieje sześć rodzaj bitonicznych ciągów zero-jedynkowych :  $0^n$ ,  $0^k 1^l$ ,  $0^k 1^l 0^m$ ,  $1^n$ ,  $1^k 0^l$ ,  $1^k 0^l 1^m$  z czego trzy ostatnie są symetryczne do trzech pierwszych (więc zostaną pominięte w dowodzie). Rozważmy wszystkie interesujące nas przypadki:

Ten dowód jest nudny.

- $0^n$ . Po wykonaniu procedury `bitonic_compare` otrzymamy  $0^{n/2}$  oraz  $0^{n/2}$ . Oba ciągi są bitoniczne i każdy element z pierwszego ciągu jest nie większy od każdego elementu z ciągu drugiego.
- $0^k 1^l$  oraz  $k < n/2$ . Wtedy po wykonaniu procedury `bitonic_compare` otrzymamy ciągi  $0^k 1^{l-n/2}$  oraz  $1^{n/2}$ . Oba ciągi są bitoniczne i każdy element z pierwszego ciągu jest nie większy od każdego elementu z ciągu drugiego.
- $0^k 1^l$  oraz  $k > n/2$ . Otrzymamy ciągi  $0^{n/2}$  oraz  $0^{k-n/2} 1^l$ . Znowu - oba są bitoniczne i każdy element z pierwszego jest nie większy od każdego z drugiego.
- $0^k 1^l 0^m$  oraz  $k > n/2$ . Wtedy otrzymujemy ciągi  $0^{n/2}$  oraz  $0^{k-n/2} 1^l 0^m$ . Spełniają one tezę twierdzenia.

- $0^k 1^l 0^m$  oraz  $m > n/2$ . Ciągi, które otrzymamy wyglądają tak:  $0^{n/2}$  oraz  $0^k 1^l 0^{m-n/2}$ . Są to ciągi, które nas cieszą.
- $0^k 1^l 0^m$  oraz  $l > n/2$ . Dostaniemy wtedy ciągi  $0^k 1^{l-n/2} 0^m$  oraz  $1^{n/2}$ . Są to ciągi, które spełniają naszą tezę.
- $0^k 1^l 0^m$  oraz  $k, l, m < n/2$ . Ciągi, które uzyskamy to  $0^{n/2}$  oraz  $1^{n/2-m} 0^{n/2-l} 1^{n/2-k}$ . Spełniają one naszą tezę.

□

Na mocy Lematów 1 i 2 Twierdzenie 2 jest prawdziwe dla wszystkich tablic  $T[0..n-1]$ . Mając tak piękne twierdzenie, możemy napisać prosty algorytm sortujący ciągi bitoniczne (Algorytm 3).

---

**Algorytm 3:** Procedura `bitonic_merge`

---

**Input:** `A` - tablica bitoniczna, `n`, `up`  
**Output:** `A` - tablica posortowana  
**if** `n > 1` **then**  
    `bitonic_compare(A[0..n-1], n, up)`  
    `bitonic_merge(A[0..n/2-1], n/2, up)`  
    `bitonic_merge(A[n/2..n-1], n/2, up)`  
**end**

---

Algorytm zaczyna od wywołania procedury `bitonic_compare`. Dzięki niej, wszystkie elementy mniejsze wrzucane są do pierwszej połowy tablicy, a elementy większe do drugiej połowy. Ponadto `bitonic_compare` gwarantuje, że obie podtablice pozostają bitoniczne (jakie to piękne!). Możemy zatem wykonać całą procedurę ponownie na obu podtablicach rekurencyjnie.

Złożoność algorytmu wyraża się wzorem rekurencyjnym  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$ . Rozwiązując rekurencję otrzymujemy, że złożoność algorytmu to  $\Theta(n \log n)$ .

Mamy algorytm sortujący ciągi bitoniczne. Jak uzyskać algorytm sortujący dowolne ciągi? Zrealizujemy to w najprostszy możliwy sposób! Posortujemy (rekurencyjnie) pierwszą połowę tablicy rosnąco, drugą połowę tablicy malejąco (dlatego potrzebna nam była zmienna `up`!) i uzyskamy w ten sposób ciąg bitoniczny. Teraz wystarczy już uruchomić algorytm sortujący ciągi bitoniczne i voilà.

Złożoność algorytmu wyraża się wzorem rekurencyjnym  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n \log n)$ . Rozwiązaniem tej rekurencji jest  $\Theta(n \log^2 n)$ .

---

**Algorytm 4:** Procedura `bitonic_sort`

---

**Input:** A, n, up

**Output:** A - tablica posortowana

**if**  $n > 1$  **then**

`bitonic_sort`(A[0.. $n/2 - 1$ ],  $n/2$ , true)

`bitonic_sort`(A[ $n/2$ .. $n - 1$ ],  $n/2$ , false)

`bitonic_merge`(A[0.. $n - 1$ ],  $n$ , up)

**end**

---

### 1.3 Algorytm macierzowy wyznaczania liczb Fibonacciego

W tym rozdziale opiszemy algorytm obliczania liczb Fibonacciego, który wykorzystuje szybkie potęgowanie. Algorytm działa w czasie  $\Theta(\log n)$ , co sprawia, że jest znacznie atrakcyjniejszy (gdy pytamy tylko o jedną liczbę) od algorytmu dynamicznego, który wymaga czasu  $\Theta(n)$ . Zaczniemy od zdefiniowania ciągu Fibonacciego:

$$F_n = \begin{cases} n, & \text{jeśli } n \leq 1 \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

Teraz, znajdziemy taką macierz  $M$ , która po wymnożeniu przez transponowany wektor wyrazów  $F_n$  i  $F_{n-1}$  da nam wektor, w którym otrzymamy wyrazy  $F_{n+1}$  oraz  $F_n$ . Łatwo sprawdzić, że dla ciągu Fibonacciego taka macierz ma postać:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bo:

$$M \times \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Wynika to wprost z definicji mnożenia macierzy oraz definicji ciągu Fibonacciego. Wykonajmy mnożenie z równania 1.1  $n$  razy:

$$\underbrace{M \times \left( M \times \left( M \times \dots \left( M \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \right) \dots \right) \right)}_{n \text{ razy}}$$

Z faktu, że mnożenie macierzy jest łączne oraz powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$M^n \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

Pokażemy, że powyższa macierz ma zastosowanie w obliczaniu  $n$ -tej liczby Fibonacciego.

**Lemat 3.**

$$M^n \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

*Dowód przez indukcję.* Sprawdźmy dla  $n = 0$ . Mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^0 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = I \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

Rozważmy  $n + 1$  zakładając poprawność dla  $n$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{teza}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \stackrel{1.1}{=} \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

□

---

**Algorytm 5:** Procedura `get_fibonacci`

---

**Input:**  $n$

**Output:**  $n$ -ta liczba Fibonacciego

$$M \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M' \leftarrow \text{exp\_by\_squaring}(M, n - 1)$$

$$M'' \leftarrow M' \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**return**  $M''_{1,1}$

---

Mimo że powyższy algorytm działa w czasie  $\Theta(\log n)$ , warto mieć na uwadze fakt, że liczby Fibonacciego rosną wykładniczo. W praktyce oznacza to pracę na liczbach przekraczających długość słowa maszynowego.

Zaprezentowaną metodę można uogólnić na dowolne ciągi, które zdefiniowane są przez liniową kombinację skończonej liczby poprzednich elementów. Wystarczy znaleźć odpowiednią macierz  $M$ . Dla ciągów postaci:

$$G_{n+1} = a_n G_n + a_{n-1} G_{n-1} + \dots + a_{n-k} G_{n-k}$$

wygląda ona następująco:

$$M = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-k+1} & a_{n-k} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dowód tej konstrukcji pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

## 1.4 Algorytm Strassena

Z mnożeniem macierzy mieliście już prawdopodobnie do czynienia na Algebrze. Mając dane dwie macierze nad ciałem liczb rzeczywistych  $A$  (o rozmiarze  $n \times m$ ) oraz  $B$  (o rozmiarze  $m \times p$ ), chcemy policzyć ich iloczyn:

$$A \cdot B = C$$

gdzie elementy macierzy  $C$  (o rozmiarze  $n \times p$ ) zadane są wzorem:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^m a_{i,r} \cdot b_{r,j}$$

Przykładowo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \\ (0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Korzystając prosto z definicji możemy napisać następujący algorytm mnożenia dwóch macierzy:

---

**Algorytm 6:** Naiwny algorytm mnożenia macierzy

---

**Input:**  $A, B$  - macierze o rozmiarach  $n \times m$  oraz  $m \times p$

**Output:**  $C = A \cdot B$

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n$  **do**

**for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $p$  **do**

$C[i][j] \leftarrow 0$

**for**  $r \leftarrow 1$  **to**  $m$  **do**

$C[i][j] \leftarrow C[i][j] + A[i][r] \cdot B[r][j]$

**end**

**end**

**end**

---

Powyższy algorytm działa w czasie  $\Theta(n^3)$ . Korzystając ze sprytnej sztuczki, jesteśmy w stanie zmniejszyć złożoność naszego algorytmu.

Zacznijmy od założenia, że rozmiar macierzy jest postaci  $2^k \times 2^k$ . Jeśli macierze nie są takiej postaci, to możemy uzupełnić brakujące wiersze i kolumny zerami. Następnie podzielimy macierze na cztery równe części:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}$$

Każda z części jest rozmiaru  $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ . Ponadto wzór na każdą część macierzy  $C$  wyraża się wzorem:

$$C_{i,j} = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j}$$



Czy wzór ten umożliwia nam ułożenie efektywnego algorytmu mnożenia macierzy? Nie. W algorytmie mamy do policzenia 4 podmacierze macierzy  $C$ . Każda podmacierz wymaga 2 mnożeń oraz jednego dodawania. Dodawanie macierzy możemy w prosty sposób zrealizować w czasie  $\Theta(n^2)$ . Mnożenie podmacierzy możemy wykonać rekurencyjnie. Taki algorytm będzie działał w czasie  $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$  czyli  $\Theta(n^3)$ . Osiągnęliśmy tą samą złożoność czasową jak w przypadku algorytmu liczącego iloczyn wprost z definicji.

Algorytm Strassena osiąga lepszą złożoność asymptotyczną przez pozbycie się jednego z mnożeń. Algorytm ten liczy następujące macierze:

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2})$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1}$$

$$M_3 = A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2})$$

$$M_4 = A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1})$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2}$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2})$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2})$$

Do policzenia każdej z tych macierzy potrzebujemy jednego mnożenia i co najwyżej dwóch dodawań/odejmowań. Podmacierze macierzy  $C$  możemy policzyć teraz w następujący sposób:

$$C_{1,1} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$C_{1,2} = M_3 + M_5$$

$$C_{2,1} = M_2 + M_4$$

$$C_{2,2} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

Wykonując proste przekształcenia arytmetyczne, możemy dowieść poprawności powyższych równań.

Używając powyższych wzorów, możemy skonstruować algorytm rekurencyjny. Będzie on dzielił macierze  $A$  oraz  $B$  o rozmiarze  $2^k \times 2^k$  na cztery równe części. Następnie policzy on macierze  $M_i$ . Tam, gdzie będzie musiał dodawać/odejmować użyje on algorytmu działającego w czasie  $\Theta(n^2)$ . Tam, gdzie będzie musiał mnożyć - wywoła się on rekurencyjnie. Na podstawie macierzy  $M_i$  policzy macierz  $C$ . Ponieważ wykona dokładnie 7 mnożeń oraz stałą ilość dodawań, jego złożoność obliczeniowa będzie wyrażała się wzorem rekurencyjnym  $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$ . Korzystając z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy złożoność  $\Theta(n^{\log_2 7})$  czyli około  $\Theta(n^{2.81})$ .

## 1.5 Model afinicznych drzew decyzyjnych

Zdefiniujmy następujący problem (ang. element uniqueness). Mając daną tablicę  $T[0..n-1]$  liczb rzeczywistych, odpowiedzieć na pytanie czy istnieją w tablicy dwa elementy, które są sobie równe. Pierwsze rozwiązanie jakie przychodzi wielu ludziom do głowy, to posortować tablicę  $T$  a następnie sprawdzić sąsiednie elementy. Algorytm ten rozwiązuje nasz problem w czasie  $\Theta(n \log n)$ . Pytanie - czy da się szybciej? W niniejszym rozdziale udowodnimy, że w modelu afinicznych drzew decyzyjnych problemu nie da się rozwiązać lepiej.

W modelu afinicznych drzew decyzyjnych, w każdym zapytaniu możemy wybrać sobie  $n + 1$  liczb:  $c, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , a następnie zapytać czy

$$c + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t_i \geq 0$$

gdzie  $t_i$  to elementy tablicy  $T$ . Gdybyśmy użyli terminologii algebraicznej, to powiedzielibyśmy, że  $t$  jest punktem w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , lewa strona powyższej nierówności to przekształcenie afiniczne, a zbiór wszystkich punktów z  $\mathbb{R}^n$ , które spełniają tę nierówność to półprzestrzeń afiniczna. Jeśli na Algebrze nie wyrobiście sobie jeszcze intuicji, to w  $\mathbb{R}^2$  półprzestrzeń afiniczną otrzymujemy przez narysowanie dowolnej prostej i wzięcie wszystkich elementów z jednej ze stron. Podobnie w  $\mathbb{R}^3$  półprzestrzeń afiniczną otrzymujemy poprzez narysowanie dowolnej płaszczyzny, a następnie wzięcia wszystkich elementów z jednej ze stron. W wyższych wymiarach wygląda to analogicznie.

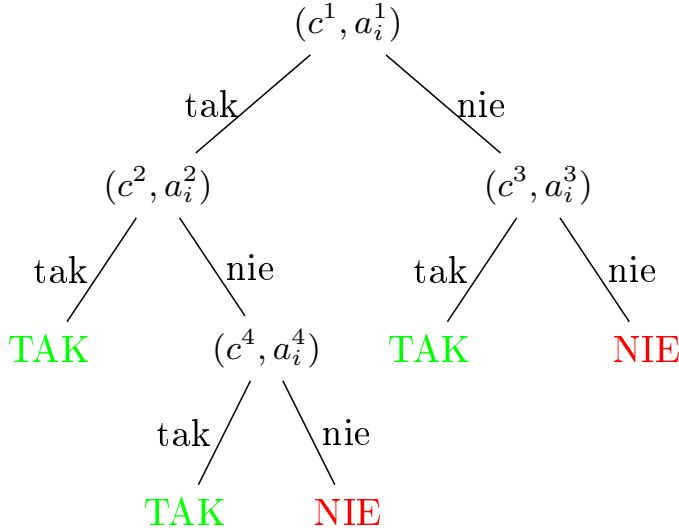
Algorytm używający tego typu porównań można zapisać za pomocą drzewa (rys. 1.5). Zaczynamy z korzenia tego drzewa. W każdym wierzchołku wewnętrznym zadajemy zapytanie. W zależności od tego czy odpowiedź na pytanie była pozytywna czy negatywna, idziemy w drzewie w lewo lub w prawo. Gdy dojdziemy do liścia w drzewie otrzymujemy nasze rozwiązanie (tak lub nie). Takie drzewo będziemy nazywać afinicznym drzewem decyzyjnym.

Aby było nam łatwiej zdefiniować główny lemat naszego rozdziału, zdefiniujemy sobie dwa pojęcia.

**Definicja 3.** *Mówimy, że punkt  $t \in \mathbb{R}^n$  osiąga liść  $l$  w afinicznym drzewie decyzyjnym, jeśli algorytm uruchomiony dla punktu  $t$  dochodzi do liścia  $l$ .*

**Definicja 4.** *Mówimy, że podzbiór  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zbiorem wypukłym, jeśli dla dowolnych punktów  $u, v \in C$  oraz dowolnej liczby rzeczywistej  $0 \leq \alpha \leq 1$  punkt  $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$  także należy do  $C$ .*

Pierwsza z definicji pozwala nam mówić o elementach, które trafiają do tego samego liścia, a druga to sformalizowane pojęcie wypukłości znane z liceum. Uzbrowieni w nowe definicje, możemy przejść do obiecanego lematu:



Rysunek 1.1: Przykład afinicznego drzewa decyzyjnego. W wierzchołkach wewnętrznych mamy zapytanie  $(c^j, a_i^j)$ . W zależności od tego czy  $c^k + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k t_i \geq 0$  czy też nie, idziemy odpowiednio w lewo lub w prawo. Liście zawierają odpowiedź naszego algorytmu.

**Lemat 4.** *Zbiór punktów osiągających liść  $l$  w afinicznym drzewie decyzyjnym, jest zbiorem wypukłym.*

*Dowód.* Weźmy dowolne afiniczne drzewo decyzyjne i wybierzmy w nim dowolny liść  $l$ . Dobrze wiemy, że istnieje dokładnie jedna ścieżka prosta z korzenia do tego liścia. Weźmy dowolny wierzchołek wewnętrzny  $w$  na tej ścieżce i dowolne punkty  $u$  oraz  $v$ , które osiągają liść  $l$ . W końcu weźmy dowolną liczbę rzeczywistą  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Załóżmy ponadto, że ścieżka z korzenia do liścia  $l$  w wierzchołku  $w$  skręca w lewo (zatem zapytanie zadane w wierzchołku  $w$  punkty  $u$  oraz  $v$  otrzymały odpowiedź twierdzącą). Przypadek przeciwny jest analogiczny. Wiemy zatem, że

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w u_i \geq 0$$

oraz, że

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w v_i \geq 0$$

Ponieważ  $\alpha \geq 0$  możemy przemnożyć pierwsze równanie przez  $\alpha$ :

$$\alpha c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w \alpha u_i \geq 0$$

a ponieważ  $1 - \alpha \geq 0$  możemy drugie równanie przemnożyć przez  $1 - \alpha$ :

$$(1 - \alpha) c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w (1 - \alpha) v_i \geq 0$$

Teraz sumując oba równania otrzymujemy:

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w (\alpha u_i + (1 - \alpha) v_i) \geq 0$$

Zatem punkt  $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$  również w wierzchołku  $w$  skręci w tą samą stronę co punkty  $u$  oraz  $v$ . Ponieważ wybraliśmy dowolny wierzchołek  $w$ , to punkt  $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$  osiągnie liść  $l$ . Stąd zbiór wszystkich punktów, które osiągają liść  $l$  w afinicznym drzewie decyzyjnym, jest zbiorem wypukłym.  $\square$

Wyobraźmy sobie, że płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$  kładziemy półpłaszczyzny. Wtedy przecięcie dowolnej liczby półpłaszczyzn jest zbiorem wypukłym. Podobnie jeśli w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  wyznaczmy sobie półprzestrzenie, to ich przecięcie będzie tworzyło zbiór wypukły. Lemat 4 mówi, że tak samo się dzieje w każdej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Ten lemat za chwilę okaże się dla nas kluczowy, gdyż za jego pomocą udowodnimy, że jeśli afiniczne drzewo decyzyjne poprawnie rozwiązuje problem element uniqueness to musi posiadać co najmniej  $n!$  liści. Oznacza to, że wysokość takiego drzewa musi wynosić co najmniej  $(n \log n)$ .

**Lemat 5.** *Niech  $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$  będzie  $n$  elementowym zbiorem liczb rzeczywistych i niech  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  oraz  $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$  będą dwoma różnymi permutacjami liczb z tego zbioru. W każdym afinicznym drzewie decyzyjnym poprawnie rozwiązującym problem element uniqueness, punkty  $a$  oraz  $b$  osiągają różne liście w drzewie.*

*Dowód.* Dowód niewprost. Załóżmy, że  $a$  oraz  $b$  osiągają ten sam liść w drzewie. Liść ten musi odpowiadać przecząco na zadany problem, gdyż ani  $a$  ani  $b$  nie zawierają dwóch tych samych elementów. Ponieważ  $a$  oraz  $b$  składają się z tych samych liczb rzeczywistych i różnią się od siebie permutacją, to muszą istnieć takie indeksy  $i$  oraz  $j$ , że  $a_i > a_j$  oraz  $b_i < b_j$ . Weźmy następującą wartość  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{b_j - b_i}{(a_i - a_j) + (b_j - b_i)}$$

Wykonując proste przekształcenia arytmetyczne, możemy przekonać się, że  $0 < \alpha < 1$ . Oznacza to, na mocy lematu 4, że punkt  $\alpha a + (1 - \alpha)b$  również osiąga ten sam liść co punkty  $a$  i  $b$ . Ponieważ jednak zachodzi:

$$\alpha a_i + (1 - \alpha)b_i = \alpha a_j + (1 - \alpha)b_j$$

(o czym można się przekonać wykonując proste przekształcenia arytmetyczne), odpowiedź algorytmu dla tego punktu powinna być twierdząca. Zatem afiniczne drzewo decyzyjne dla tego punktu zwraca złą odpowiedź. Sprzeczność z założeniem, że drzewo rozwiązywało problem poprawnie.  $\square$

Weźmy dowolny  $n$  elementowy zbiór liczb rzeczywistych. Na mocy Lematu 5 każda permutacja tych liczb musi osiągać inny liść w afinicznym drzewie decyzyjnym poprawnie rozwiązującym problem element uniqueness. Oznacza to, że liczba liści w takim drzewie musi wynosić przynajmniej  $n!$ . Zatem wysokość takiego drzewa musi wynosić conajmniej  $\Omega(n \log n)$ .

## 1.6 Problem plecakowy

Wyobraźmy sobie, że jesteśmy złodziejem. Pod przykryciem nocy, udało nam się dotrzeć w ustalone miejsce. Wszystko idzie wyjątkowo gładko. Wpisujemy kod, który otrzymaliśmy od sprzątaczk i jesteśmy już w środku. Wtem okazuje się, że zapomnieliśmy listy przedmiotów, które mieliśmy ukraść. Próbujemy zachować zimną krew i zmaksymalizować nasz zysk. Możemy ukraść przedmioty różnego rodzaju. Dokładniej rzecz ujmując - mamy  $M$  różnych typów przedmiotów. Każdy typ przedmiotu ma swoją wielkość  $w_i > 0$  i swoją cenę u pasera  $v_i > 0$ . Wiemy, że w naszym plecaku zmieszczą się przedmioty o łącznej wielkości nie przekraczającej  $W$ . Które przedmioty mamy wybrać (i w jakiej ilości), aby zmaksymalizować nasz zysk i żeby nie przepakować naszego plecaka? Bardziej formalnie: w jaki sposób wybrać zmienne  $x_i$  tak aby zysk  $\sum_{i=1}^M x_i \cdot v_i$  był jak największy oraz aby był zachowany warunek  $\sum_{i=1}^M x_i \cdot w_i \leq W$ . W zależności od tego do jakiego sklepu się włamaliśmy, rozróżniamy następujące rodzaje problemu plecakowego:

- Galeria sztuki. W tym przypadku mamy dodatkowe ograniczenie:  $x_i \in \{0, 1\}$ . Każde dzieło sztuki jest unikalne i nie możemy z galerii wynieść dwóch takich samych waz ani obrazów. Wersję tą nazywamy czasem dyskretnym 0/1 problemem plecakowym.
- Sklep RTV. Tym razem ukraść możemy dwa takie same telewizory. Ale wciąż ilość przedmiotu danego typu jest ograniczona:  $x_i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \leq c_i$ . Problem ten nazywamy czasem ograniczonym, dyskretnym problemem plecakowym.
- Cyberprzestrzeń. W tym przypadku możemy ukraść dowolną ilość przedmiotów danego typu (np. klucza aktywacji). Wtedy  $x_i \in \mathbb{N}$ . Problem ten można znaleźć w literaturze pod hasłem: nieograniczony, dyskretny problem plecakowy.
- Laboratorium chemiczne. W tym przypadku, ilość chemikaliów, które kradniemy, jest ograniczona ( $0 \leq x_i \leq c_i$ ). Pponieważ chemikalia możemy przelewać, ilość chemikaliów nie musi wyrażać się liczbą naturalną ( $x_i \in \mathbb{R}$ ). Jest to ciągły problem plecakowy.

Najprostszym pomysłem jaki wpada do głowy, jest policzenie dla każdego przedmiotu stosunku wartości do wielkości ( $v_i/w_i$ ). Następnie wzięcie w pierwszej kolejności przedmiotów o większej wartości tego ilorazu. Taki zachłanny algorytm sprawdza się w przypadku ciągłego problemu plecakowego (TODO: dowód). Złożoność tego algorytmu to  $\Theta(n \log n)$ , gdyż potrzebujemy posortować tablicę ilorazów.

Nie jest jednak poprawnym algorytmem dla wersji dyskretnych. Kontrprzykładem będzie sytuacja, w której plecak ma wielkość  $W = 10$  i do dyspozycji

mamy  $M = 3$  przedmioty:  $v_1 = 9, v_2 = v_3 = 5, w_1 = 6, w_2 = w_3 = 5$ . W każdym z wariantów problemu postępując w sposób zachłanny, wybierzemy w pierwszym kroku przedmiot 1. Otrzymamy w ten sposób plecak o wartości 9, do którego nie jesteśmy w stanie już wstawić kolejnego przedmiotu. Wybierając przedmioty 2 i 3 otrzymując plecak o wartości 10. Zatem wybranie przedmiotu o największym stosunku wartości do wielkości było w takiej sytuacji błędem. Poprawnym rozwiązaniem wersji dyskretnych okazuje się podejście dynamiczne.

Zacznijmy od najprostszej wersji - nieograniczonej. Użyjemy tutaj tablicy  $T[0..W]$ . W komórce  $T[w]$  będziemy pamiętać optymalne rozwiązanie dla plecaka wielkości  $w$ . Rozwiązanie naszego problemu będzie znajdowało się w komórce  $T[W]$ . Wartości poszczególnych komórek liczymy według wzoru:

$$T[w] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } w = 0 \\ \max_{w_i \leq w} \{v_i + T[w - w_i]\}, & \text{wpp} \end{cases}$$

Gdy plecak jest rozmiaru 0 nie możemy zapakować do niego żadnego przedmiotu. Jeśli mamy dostępne miejsce - patrzymy na wszystkie przedmioty, które mieszczą się do plecaka i obliczamy potencjalny zysk przy wzięciu każdego z nich. Z otrzymanych wartości bierzemy maksimum. Do policzenia mamy  $\Theta(W)$  komórek. Do policzenia każdej z nich potrzebujemy  $O(M)$  operacji w najgorszym przypadku. Złożoność całego algorytmu można zatem ograniczyć przez  $O(M \cdot W)$ .

Przejdźmy teraz do nieco trudniejszego przypadku - wersji 0/1. W tym wariantcie problemu, będziemy potrzebowali tablicy dwuwymiarowej  $T[0..W][0..M]$ . W komórce  $T[w][m]$  będziemy trzymać optymalne rozwiązanie w sytuacji w którym ograniczamy się do plecaka rozmiaru  $w$  oraz rozważamy tylko  $m$  pierwszych typów przedmiotów.

$$T[w][m] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } w = 0 \text{ lub } m = 0 \\ T[w][m-1], & \text{jeśli } w_m > w \\ \max\{v_m + T[w - w_m][m-1], T[w][m-1]\}, & \text{wpp} \end{cases}$$

Pierwsza linijka wzoru to przypadek bazowy rekurencji - wtedy gdy plecak jest pusty lub nie mamy do wyboru żadnego przedmiotu. Teraz gdy wiemy, że nie jesteśmy w przypadku bazowym, bierzemy do ręki przedmiot typu  $m$  i kontemplujemy nad tym czy wziąć ten przedmiot czy nie. Linijka druga wzoru rozwiewa nasz problem w momencie w którym przedmiot ten i tak nie zmieściłby się nam do plecaka (nie bierzemy go w takiej sytuacji; duh...). Jeśli jednak by się zmieścił to liczymy potencjalną wartość plecaka wraz z tym przedmiotem oraz bez tego przedmiotu. Jako wynik bierzemy maksimum - o czym mówi linijka trzecia. Tym razem do policzenia mamy  $\Theta(W \cdot M)$  komórek. Na każdą komórkę potrzebujemy jednak tylko  $\Theta(1)$  operacji. Zatem złożoność całego algorytmu wynosi  $\Theta(W \cdot M)$ .

Ostatnim przypadkiem jest wersja ograniczona. Tak samo jak w przypadku wersji 0/1 będziemy używać tablicy  $T[0..W][0..M]$ . Dokładnie tak samo jak w poprzednim przypadku w komórce  $T[w][m]$  będziemy trzymać optymalne rozwiązanie w sytuacji w którym ograniczamy się do plecaka rozmiaru  $w$  oraz rozważamy tylko  $m$  pierwszych typów przedmiotów. Również wzór rekurencyjny będzie wyglądał bardzo podobnie.

$$T[w][m] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } w = 0 \text{ lub } m = 0 \\ \max_{0 \leq c \leq c_m, c \cdot w_m \leq w} \{c \cdot v_m + T[w - c \cdot w_m][m - 1]\}, & \text{wpp} \end{cases}$$

Tu i we wzorze  
wyżej wyjechałem  
na margines :C

Różnica polega na tym, że gdy rozważamy przedmiot typu  $m$  to rozważamy każdą jego dostępną ilość, która mieści się w plecaku. Dla każdej ilości liczymy potencjalną wartość plecaka w którym wzięliśmy daną ilość przedmiotów tego typu. Z wszystkich wartości bierzemy maksimum jako wynik. Do policzenia zostaje nam  $\Theta(W \cdot M)$  komórek. Każda komórka  $T[.][m]$  wymaga  $O(c_m)$  operacji. Zakładając, że dla każdego typu przedmiotów zachodzi  $c_m > 0$ , cały algorytm działać będzie w czasie  $O(W \cdot \sum_{m \leq M} c_m)$ .



## Rozdział 2

Under construction

## 2.1 Złożoność obliczeniowa

Todo, todo, todo...

## 2.2 Model obliczeń

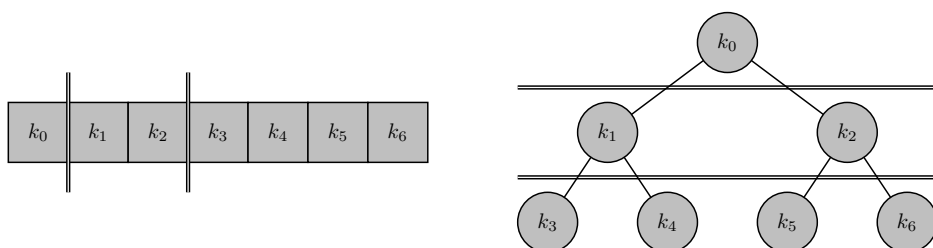
Todo, todo, todo...

## 2.3 Kopce binarne

Chciałbym, aby skrypt był skrypsem i żebyśmy tam pisali formalnie. Dlatego definicję kopca chciałbym mieć zapisaną formalnie (bez przypisów) i w znacznikach `begin{definition}` `end{definition}`. Teraz śmieszna rzecz jest taka, że kopiec trudno ładnie formalnie zdefiniować na drzewach. W sensie najpierw musielibyśmy powiedzieć co to jest poziom w drzewie, co to jest pełny poziom w drzewie a następnie .... w sumie to nawet ja nie wiem jak to ładnie zdefiniować na drzewach :P Więc zamiast mówić, że kopiec to drzewo które można reprezentować w tablicy, lepiej zdefiniować kopiec jako tablicę na którą możemy patrzeć jako na drzewo. Wtedy musimy zdefiniować co to jest lewy syn elementu w tablicy, prawy syn oraz ojciec. Na tej podstawie będzie łatwiej nam zdefiniować własność kopca jako, że dla każdego wierzchołka wartość elementu jest mniejsza od wartości elementów jego dzieci. Jeśli wolimy zamiast tego powiedzieć że ciąg elementów na ścieżce od liścia do korzenia tworzy ciąg malejący to musimy zdefiniować co to jest liść, korzeń i ścieżka. Co da się zrobić ale nie wiem czy jest to warte świeczki, gdyż to będzie badanie jedynego miejsca w których użyjemy tych definicji). Zamiast element jest fajną funkcją, ale funkcje przesun w dol i przesun w gore są ważniejsze. Ponadto nie chcemy nazywać funkcje w języku polskim.

Kopiec binarny to struktura danych, która reprezentowana jest jako prawie pełne drzewo binarne<sup>1</sup> i na której zachowana jest własność kopca. Kopiec przechowuje klucze, które tworzą ciąg uporządkowany. W przypadku kopca typu *min* ścieżka prowadząca od dowolnego liścia do korzenia tworzy ciąg malejący.

Kopce można w prosty sposób reprezentować w tablicy jednowymiarowej – kolejne poziomy drzewa zapisywane są po sobie.



Rysunek 2.1: Reprezentacja kolejnych warstw kopca w tablicy jednowymiarowej.

Warto zauważyć, że tak reprezentowane drzewo pozwala na łatwy dostęp do powiązanych węzłów. Synami węzła o indeksie  $i$  są węzły  $2i + 1$  oraz  $2i + 2$ , natomiast jego ojcem jest  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ .

Kopiec powinien udostępniać trzy podstawowe funkcje: `zamien_element`, która podmienia wartość w konkretnym węźle kopca, `przesun_w_gore` oraz `przesun_w_dol`, które zamieniają odpowiednie elementy pilnując przy tym, aby własność kopca została zachowana.

---

### Algorithm 7: Implementacja funkcji `zamien_element`

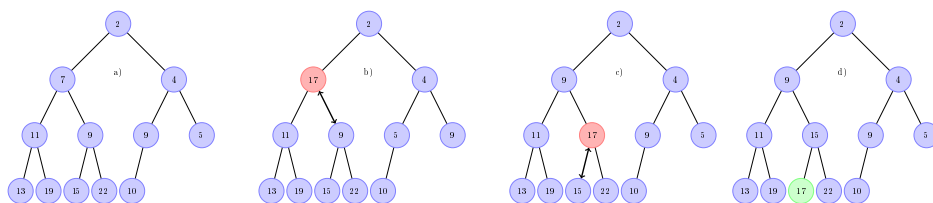
---

```

if  $k[i] < v$  then
    |  $k[i] = v$ ;
    | przesun_w_dol( $k, i$ );
end
else
    |  $k[i] = v$ ;
    | przesun_w_gore( $k, i$ );
end
```

---

<sup>1</sup>To znaczy wypełniony na wszystkich poziomach (poza, być może, ostatnim).



Rysunek 2.2: Przykład działania funkcji `zamien_element`. a) Oryginalny kopiec. b) Zmiana wartości w wyróżnionym węźle. c) Ponieważ nowa wartość jest większa od wartości swoich dzieci, należy wykonać wywołanie funkcji `przesn_w_dol`. d) Po zmianie własność kopca nie jest zachowana, dlatego należy ponownie wywołać funkcję `przesn_w_dol`. To przywraca kopcowi jego własność.

## 2.4 Algorytm rosyjskich wieśniaków

Algorytm rosyjskich wieśniaków jest przypisywany sposobowi mnożenia liczb używanemu w XIX-wiecznej Rosji. Aktualnie jest on stosowany w niektórych układach mnożących.

W celu obliczenia  $a \cdot b$  tworzymy tabelkę i liczby  $a$  i  $b$  zapisujemy w pierwszym jej wierszu. Kolumnę  $a$  wypełniamy następująco: w  $i+1$  wierszu wpisujemy wartość z wiersza  $i$  podzieloną całkowicie przez 2. W kolumnie  $b$  kolejne wiersze tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym 2. Wypełnianie tabelki kończymy wtedy, gdy w kolumnie  $a$  otrzymamy wartość 1. Na koniec sumujemy wartości w kolumnie  $b$  z tych wierszy dla których wartości w kolumnie  $a$  są nieparzyste. Uzyskany wynik to  $a \cdot b$ .

W poniższym przykładzie obliczymy  $42 \cdot 17$ .

a	b
42	17
<b>21</b>	$17 \cdot 2 = 34$
10	$17 \cdot 2^2 = 68$
<b>5</b>	$17 \cdot 2^3 = 136$
2	$17 \cdot 2^4 = 272$
<b>1</b>	$17 \cdot 2^5 = 544$

Wartości  $a$  są nieparzyste w wierszach 2, 4 oraz 6. Zatem będziemy sumować wartości  $b$  z wierszy 2, 4 i 6.

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 17 \cdot 2 + 17 \cdot 2^3 + 17 \cdot 2^5 \\
 &= 34 + 136 + 544 \\
 &= 714
 \end{aligned}$$

Faktycznie, otrzymaliśmy wynik poprawny. Spójrzmy raz jeszcze na tę sumę:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 17 \cdot 2 + 17 \cdot 2^3 + 17 \cdot 2^5 \\
 &= 17 \cdot (2^5 + 2^3 + 2) \\
 &= 17 \cdot (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \\
 &= 17_{10} \cdot 101010_2 \\
 &= 17 \cdot 42 = 714
 \end{aligned}$$

Przypomnij sobie algorytm zamiany liczby w systemie dziesiętnym na system binarny. Okazuje się, że algorytm rosyjskich wieśniaków "po cichu" wylicza tę reprezentację  $a$ .

Jak usuniecie enter po tabelce, to to zdanie nie zostanie w pdfie tabulatora. Tabulator powinien się znajdować przed akapitami. To zdanie jest częścią poprzedniego akapitu.

---

**Algorytm 8:** Algorytm rosyjskich wieśniaków

---

**Input:**  $a, b$  - liczby naturalne

**Output:**  $wynik = a \cdot b$

$a' \leftarrow a$

$b' \leftarrow b$

$wynik \leftarrow 0$

**while**  $a' > 0$  **do**

**if**  $a' \bmod 2 = 1$  **then**

$wynik \leftarrow wynik + b'$

**end**

$a' \leftarrow a' \text{ div } 2$

$b' \leftarrow b' \cdot 2$

**end**

---

W kolejnych paragrafach podamy algorytm i w celu jego udowodnienia sformułujemy *niezmiennik* oraz wykazemy jego prawdziwość.

**Twierdzenie 3.** Niech  $a'_i$  (kolejno:  $b'_i$ ,  $wynik_i$ ) będzie wartością zmiennej  $a'$  ( $b'$ ,  $wynik$ ) w  $i$ -tej iteracji pętli *while*. Zachodzi następujący niezmiennik pętli:

$$a'_i \cdot b'_i + wynik_i = a \cdot b.$$

**Lemat 6.** Przed wejściem do pętli *while* niezmiennik jest prawdziwy.

*Dowód.* Skoro przed wejściem do pętli mamy:  $a'_0 = a$ ,  $b'_0 = b$  oraz  $wynik_0 = 0$ , to oczywiście:  $a'_0 \cdot b'_0 + wynik_0 = a \cdot b + 0 = a \cdot b$ .  $\square$

**Lemat 7.** Po  $i$ -tym obrocie pętli niezmiennik jest spełniony.

*Dowód.* Załóżmy, że niezmiennik zachodzi w  $i$ -tej iteracji i sprawdźmy co dzieje się w  $i + 1$  iteracji. Rozważmy dwa przypadki.

Nie możesz czegoś takiego założyć :)

- $a'_i$  parzyste. Instrukcja **if** się nie wykona, w  $i + 1$  iteracji  $wynik_i$  pozostanie niezmienny,  $a'_i$  zmniejszy się o połowę, a  $b'_i$  zwiększy dwukrotnie.

$$wynik_{i+1} = wynik_i$$

$$a'_{i+1} = a'_i \text{ div } 2 = \frac{a'_i}{2}$$

$$b'_{i+1} = b'_i \cdot 2$$

W tym przypadku otrzymujemy:

$$a'_{i+1} \cdot b'_{i+1} + wynik_{i+1} = \frac{a'_i}{2} \cdot 2b'_i + wynik_i = a'_i \cdot b'_i + wynik_i = a \cdot b$$

- $a'_i$  nieparzyste:

$$wynik_{i+1} = wynik_i + b'_i$$

$$a'_{i+1} = a'_i \operatorname{div} 2 = \frac{a'_i - 1}{2}$$

$$b'_{i+1} = b'_i \cdot 2$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$a'_{i+1} \cdot b'_{i+1} + wynik_{i+1} = \frac{a'_i - 1}{2} \cdot 2b'_i + wynik_i + b'_i = a'_i \cdot wynik_i + b'_i = a \cdot b$$

□

**Lemat 8.** *Po zakończeniu algorytmu  $wynik = a \cdot b$*

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że tuż po wyjściu z pętli **while** wartość zmiennej  $a'$  wynosi 0. Podstawiając do niezmiennika okazuje się, że faktycznie algorytm rosyjskich wieśniaków liczy  $a \cdot b$ . □

**Lemat 9.** *Algorytm się kończy.*

*Dowód.* Skoro  $a_i \in \mathbb{N}$  oraz  $\mathbb{N}$  jest dobrze uporządkowany, to połowiąc  $a_i$  po pewnej liczbie iteracji otrzymamy 0. □

Z powyższych lematów wynika, że niezmiennik spełniony jest zarówno przed, w trakcie jak i po zakończeniu algorytmu. Algorytm rosyjskich wieśniaków jest poprawny.

**Złożoność** Z każdą iteracją połowimy  $a'$ . Biorąc pod uwagę kryterium jednorodne pozostałe instrukcje w pętli nic nie kosztują. Stąd złożoność to  $O(\log a)$ .

W kryterium logarytmicznym musimy uwzględnić czas dominującej instrukcji: dodawania  $wynik \leftarrow wynik + b'$ . W najgorszym przypadku zajmuje ono  $O(\log ab)$ . Zatem złożoność to  $O(\log a \cdot \log ab)$ .



## 2.5 Sortowanie topologiczne



Rysunek 2.3: Przykładowy graf z ubraniami dla bramkarza hokejowego. Krawędź między wierzchołkami  $a$  oraz  $b$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy gracz musi ubrać  $a$  zanim ubierze  $b$ . Pytanie o to w jakiej kolejności bramkarz powinien się ubierać, jest pytaniem o posortowanie topologiczne tego grafu.

## 2.6 Algorytmy sortowania

W tym rozdziale zapoznamy się z algorytmem sortowania przez scalanie (ang. *merge sort*). Wykorzystuje on metodę "dziel i zwyciężaj" - problem jest dzielony na kilka mniejszych podproblemów podobnych do początkowego problemu, problemy te są rozwiązywane rekurencyjnie, a następnie rozwiązania otrzymane dla podproblemów scala się, uzyskując rozwiązanie całego zadania.

**Idea.** Algorytm sortujący dzieli porządkowany  $n$ -elementowy zbiór na kolejne połowy, aż do uzyskania  $n$  jednoelementowych zbiorów - każdy taki zbiór jest już posortowany. Uzyskane w ten sposób części zbioru sortuje rekurencyjnie - posortowane części łączy ze sobą za pomocą scalania tak, aby wynikowy zbiór był posortowany.

**Scalanie.** Podstawową operacją algorytmu jest scalanie dwóch uporządkowanych zbiorów w jeden uporządkowany zbiór. W celu wykonania scalania skorzystamy z pomocniczej procedury `merge( $A, p, q, r$ )`, gdzie  $A$  jest tablicą, a  $p, q, r$  są indeksami takimi, że  $p \leq q < r$ . W procedurze zakłada się, że tablice  $A[p..q]$  oraz  $A[q + 1..r]$  (dwie przyległe połówki zbioru, który został przez ten algorytm podzielony) są posortowane. Procedura `merge` scala te tablice w jedną posortowaną tablicę  $A[p..r]$ . Ogólna zasada działania jest następująca:

1. Przygotuj pusty zbiór tymczasowy.
2. Dopóki żaden ze scalanych zbiorów nie wyczerpał elementów, porównuj ze sobą pierwsze elementy każdego z nich i w zbiorze tymczasowym umieszczaj mniejszy z elementów.
3. W zbiorze tymczasowym umieść zawartość tego scalanego zbioru, który zawiera niewykorzystane jeszcze elementy.
4. Zawartość zbioru tymczasowego przepisz do zbioru wynikowego i zakończ algorytm.

Zapis algorytmu scalania dwóch list w pseudokodzie podano niżej.

Scalanie wymaga  $O(n + m)$  operacji porównań elementów i wstawienia ich do tablicy wynikowej.

**Sortowanie.** Algorytm sortowania przez scalanie jest algorytmem rekurencyjnym. Wywołuje się go z zadanymi wartościami indeksów wskazujących na początek i koniec sortowanego zbioru, zatem początkowo indeksy obejmują cały zbiór. Algorytm wyznacza indeks elementu połowiącego przedział, a następnie sprawdza, czy połówki zbioru zawierają więcej niż jeden element. Jeśli tak, to rekurencyjnie sortuje je tym samym algorytmem. Po posortowaniu obu połówek zbioru scalamy je za pomocą opisanej wcześniej procedury scalania podzbiorów uporządkowanych i kończymy algorytm. Zbiór jest posortowany.

---

**Algorytm 9:** Procedura merge

---

**Input:** tablica  $A$ , liczby  $p, q, r$   
**Output:** posortowana tablica  $A[p..r]$   
 $C \leftarrow$  pusta tablica  
 $i \leftarrow p, j \leftarrow q + 1, k \leftarrow 0$   
**while**  $i \leq q$  oraz  $j \leq r$  **do**  
    **if**  $A[i] \leq A[j]$  **then**  
         $C[k] \leftarrow A[i], i \leftarrow i + 1$   
    **else**  
         $C[k] \leftarrow A[j], j \leftarrow j + 1$   
    **end**  
     $k \leftarrow k + 1$   
**end**  
**while**  $i \leq q$  **do**  
     $C[k] \leftarrow A[i], i \leftarrow i + 1, k \leftarrow k + 1$   
**end**  
**while**  $j \leq r$  **do**  
     $C[k] \leftarrow A[j], j \leftarrow j + 1, k \leftarrow k + 1$   
**end**

---

**Złożoność.** Chociaż algorytm sortowania przez scalanie działa poprawnie nawet wówczas, gdy  $n$  jest nieparzyste, dla uproszczenia analizy założymy, że  $n$  jest potęgą dwójki. Dzielimy wtedy problem na podproblemy rozmiaru dokładnie  $\frac{n}{2}$ . Rekurencję określającą czas  $T(n)$  sortowania przez scalanie otrzymujemy, jak następuje.

Sortowanie przez scalanie jednego elementu wykonuje się w czasie stałym. Jeśli  $n > 1$ , to czas działania zależy od trzech etapów:

**Dziel:** podczas tego etapu znajdujemy środek przedziału, co zajmuje czas stały, zatem  $D(n) = \theta(1)$ .

**Zwyciężaj:** rozwiązujemy rekurencyjnie dwa podproblemy, każdy rozmiaru  $\frac{n}{2}$ , co daje czas działania  $2T(\frac{n}{2})$ .

**Połącz:** procedura **merge**, jak wspomniano wyżej, działa w czasie liniowym, a więc  $P(n) = \theta(n)$ .

Funkcje  $D(n)$  i  $P(n)$  dają po zsumowaniu funkcję rzędu  $\theta(n)$ . Dodając do tego  $2T(\frac{n}{2})$  z etapu "zwyciężaj", otrzymujemy następującą rekurencję dla  $T(n)$ :

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + \theta(n) & n > 1 \end{cases}$$

---

**Algorytm 10:** Procedura `merge sort`

---

**Input:** tablica  $A$ , liczby  $p, r$

**Output:** posortowana tablica  $A[p..r]$

$q \leftarrow 0$

**if**  $p < r$  **then**

$q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$

`merge sort`( $A, p, q$ )

`merge sort`( $A, q + 1, r$ )

`merge`( $A, p, q, r$ )

**end**

---

Poniższy przykład ilustruje zasadę działania sortowania przez scalanie:

<tu obrazek, ale nie umiem w obrazki, na dniach ogarnę>

**Podsumowanie.** Sortowanie przez scalanie należy do algorytmów szybkich, posiada klasę złożoności równą  $\theta(n \log n)$ . Jest oparty na metodzie dziel i zwyciężaj, która powoduje podział dużego problemu na mniejsze, łatwo rozwiązywane podproblemy. Sortowanie nie odbywa się w miejscu, potrzebujemy dodatkowej struktury. Algorytm jest stabilny.

### 2.6.1 Quick sort

In progress

## 2.7 Minimalne drzewa rozpinające

Todo, todo, todo...

### 2.7.1 Cut Property i Circle Property

Udowodnijmy dwie własności, które okazują się być niezwykle przydatne w dowodach dotyczących minimalnych drzew rozpinających – MST.

### 2.7.2 Cycle property

Niech  $C$  będzie dowolnym cyklem w ważonym grafie  $G$ . Załóżmy, że wszystkie wagi są różne.

**Twierdzenie 4.** *Jeżeli krawędź  $e_k \in C$  jest najcięższą spośród krawędzi z  $C$ , to  $e \notin MST(G)$ .*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że utworzyliśmy drzewo  $MST(G)$  w którym znajduje się krawędź  $e$ . Usuńmy ją. W ten sposób otrzymaliśmy dwa rozłączne drzewa, nazwijmy je  $T_1$  i  $T_2$ .

Krawędź  $e$  należała do cyklu  $C$ . Stąd wynika, że istniała druga krawędź  $f$ , która tworzyła „most” między  $T_1$  a  $T_2$ . Ponadto, z założenia, ma ona mniejszą wagę od  $e$ .

Dodajmy krawędź  $f$  do naszego lasu  $\{T_1, T_2\}$ . Otrzymaliśmy spójne drzewo  $MST$  o koszcie mniejszym od pierwotnego drzewa  $MST$ . Sprzeczność.  $\square$

### 2.7.3 Cut property

Założenia takie same, jak w przypadku Cycle property:  $C$  – dowolny cykl w ważonym grafie  $G$  o różnych wagach.

**Twierdzenie 5.** *Podzielmy wszystkie wierzchołki cyklu na dwa rozłączne zbiory  $C_1$  i  $C_2$  (czyli dokonajmy cięcia). Jeżeli  $e$  jest najlżejszą krawędzią spośród łączących te dwa zbiory, to znajdzie się ona w  $MST(G)$ .*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że mamy drzewo  $T = MST(G)$ , które nie zawiera  $e$ . Dodanie tej krawędzi utworzy cykl. Zatem istnieje druga krawędź  $f$ , która znajduje się między podzbiorami  $C_1$  oraz  $C_2$ .

Rozważmy drzewo  $T \setminus \{f\} \cup \{e\}$ . Tym sposobem otrzymaliśmy drzewo  $MST$  o mniejszej wadze. Sprzeczność.  $\square$

2.7.4 Algorytm Prima

2.7.5 Algorytm Kruskala

2.7.6 Algorytm Borůvky

## 2.8 Algorytm Dijkstry

Powstało wiele algorytmów pozwalających wyznaczyć najkrótszą ścieżkę w grafie z krawędziami ważonymi. Wśród nich na szczególną uwagę zasługuje algorytm Dijkstry.

### 2.8.1 Działanie

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem ważonym. Dodatkowo musimy założyć, że waga  $w(u, v) \geq 0$  dla wszystkich krawędzi  $(u, v) \in E$ .

Niech  $S$  będzie takim zbiorem wierzchołków, których najkrótsza odległość od źródła  $s$  została już określona. Algorytm Dijkstry wybiera kolejne wierzchołki  $u \in V - S$  z minimalnym oszacowaniem najkrótszej ścieżki, dodaje  $u$  do  $S$ , i rozluźnia wszystkie ścieżki pozostawiając  $u$ .

**Pseudokod:** TODO

Algorytm zachowuje niezmiennik, że  $Q = V - S$  na początku każdej iteracji pętli while.

Algorytm Dijkstry stosuje zachłanne podejście zawsze wybierając najbliższy wierzchołek w  $V - S$ , który dodaje do zbioru  $S$ .

## 2.9 Dowód poprawności algorytmu

Aby dowieść poprawności algorytmu Dijkstry skorzystamy z następującego niezmiennika pętli: Na początku każdej iteracji pętli while  $d[v] = \delta(s, v)$  dla każdego wierzchołka  $v \in S$ .

Wystarczy udowodnić, że dla każdego wierzchołka  $u \in V$  mamy  $d[u] = \delta(s, u)$  w momencie kiedy  $u$  jest dodane do zbioru  $S$ . Kiedy już udowodnimy, że  $d[u] = \delta(s, u)$ , polegamy na ograniczeniu górnym własności, aby pokazać, że równość jest potem zachowana.

**Inicjalizacja:** Na samym początku,  $S$  jest zbiorem pustym, więc niezmiennik jest oczywiście zachowany.

**Utrzymanie:** Chcemy pokazać, że z każdą iteracją zachowana jest równość  $d[u] = \delta(s, u)$  dla wszystkich wierzchołków dodanych do zbioru  $S$ . Załóżmy nie wprost, że  $u$  jest pierwszym takim wierzchołkiem, że  $d[u] \neq \delta(s, u)$  w momencie go do zbioru  $S$ . Weźmy dowolny  $u \neq s$ , ponieważ  $s$  jest pierwszym wierzchołkiem dodanym do  $S$  i  $Ed[s] = \delta(s, s) = 0$ . Skoro  $u \neq s$ , to  $S$  nie jest zbiorem pustym zaraz przed dodaniem  $u$  do  $S$ . Musi istnieć ścieżka od  $s$  do  $u$  gdyż inaczej  $d[u] = \delta(s, u) = \inf$  i doszlibyśmy do sprzeczności z naszym założeniem, że  $d[u] \neq \delta(s, u)$ .

Skoro istnieje co najmniej jedna ścieżka, istnieje też ścieżka najkrótsza. Przed dodaniem  $u$  do  $S$ , ścieżka  $p$  łączy wierzchołek  $s$  z wierzchołkiem w  $V - S$ , powiedzmy  $u$ . Rozważmy pierwszy wierzchołek  $y$  należący do  $p$  t. że  $y \in V - S$  i niech  $x \in S$  będzie poprzednikiem  $y$ . Możemy podzielić ścieżkę  $p$  na dwie podścieżki,  $p_1$  łączącą  $s$  z  $x$  oraz  $p_2$  łączącą  $y$  z  $u$  (ścieżki te mogą być pozbawione krawędzi).

Chcemy udowodnić, że  $d[y] = \delta(s, y)$  gdy  $u$  jest dodane do  $S$ . Aby to zrobić zauważmy, że  $x \in S$ . Skoro  $u$  jest pierwszym wierzchołkiem, dla którego  $d[u] \neq \delta(s, u)$ , to  $d[x] \delta(s, x)$  w momencie kiedy  $x$  został dodany do  $S$ . Krawędź  $(x, y)$  została wtedy zrelaksowana, z czego wynika powyższa równość.

Możemy teraz uzyskać sprzeczność pozwalającą nam udowodnić, że  $d[u] = \delta(s, u)$ . Skoro  $y$  występuje przed  $u$  na najkrótszej ścieżce od  $s$  do  $u$ , a wszystkie wagi krawędzi są nieujemne (w szczególności krawędzi należących do  $p_2$ ). Otrzymujemy  $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$ , więc TODO

Ale skoro oba wierzchołki  $u$  i  $y$  były w  $V - S$  gdy ustaliliśmy  $u$  mamy  $d[u] \leq d[y]$ . Zatem, obie nierówności są tak na prawdę równościami, dzięki którym  $d[y] = \delta(s, y) = \delta(s, u) = d[u]$ . W rezultacie  $d[u] = \delta(s, u)$ , co przeczy naszemu wyborowi  $u$ . Wnioskujemy, że  $d[u] = \delta(s, u)$  gdy dodamy  $u$  do  $S$ , a własność ta jest zachowana od tego momentu.

**Zakończenie:** Na końcu,  $Q$  jest puste, co w połączeniu z naszym niezmiennikiem, że  $Q = V - S$  implikuje, że  $S = V$ , zatem  $d[u] = \delta(s, u)$  dla każdego wierzchołka  $u \in V$ .

## 2.10 Analiza

Skoro wiemy już jak działa algorytm Dijkstry oraz wiemy, że działa poprawie należy zastanowić się z jaką prędkością on działa. TODO

## 2.11 Problemy

TODO



## 2.12 Algorytm szeregowania

Todo, todo, todo...

## 2.13 Programowanie dynamiczne na drzewach

Todo, todo, todo...

## 2.14 Problemy NP

Na wstępie chcielibyśmy zaznaczyć że tematyka NP-zupełności nie będzie poruszana dogłębnie. Nie będziemy np. wprowadzać definicji maszyny Turinga (lub innego modelu) oraz przeprowadzać skomplikowanych dowodów, gdyż wymagałoby to wiedzy z zakresu teorii języków formalnych i złożoności obliczeniowej. Zamiast tego będziemy chcieli nabrać trochę intuicji co do tego czy w ogóle warto starać się rozwiązywać dany problem czy może jest to strata naszego czasu.

**Definicja 5.** *Problemem decyzyjnym nazywamy problem którego rozwiązanie przyjmuje jedną z dwóch wartości - TAK, NIE*

Zauważmy że problemy decyzyjne możemy utożsamiać z podzbiorami pewnego uniwersumi, w ten sposób że problem jest zbiorem wartości, dla których odpowiedź to TAK.

**PRZYKŁAD.** Problem polegający na rozstrzygnięciu czy dana liczba naturalna  $p$  jest liczbą pierwszą utożsamilibyśmy ze zbiorem liczb pierwszych.

**Definicja 6.** *Dla danej funkcji kosztu  $f$ , problemem optymalizacyjnym nazywamy problem którego rozwiązaniem jest wartość z danego uniwersum, minimalizująca wartość funkcji kosztu.*

**PRZYKŁAD.** Dla danego grafu  $G$  oraz wierzchołków  $u$  i  $v$ , wyznaczyć najkrótszą drogę między  $u$  i  $v$ . Naszą funkcją kosztu jest długość drogi, a uniwersum to wszystkie drogi łączące  $u$  i  $v$ .

**Definicja 7** (Klasa NP). *Klasą NP nazywamy zbiór problemów decyzyjnych  $L$  t. że istnieje algorytm wielomianowy  $A$  dla którego prawdziwe jest następujące zdanie:*

$$x \in L \iff \text{istnieje } y \text{ t. że } |y| < |x|^c \text{ oraz } A \text{ akceptuje } (x, y)$$

W powyższej definicji możemy myśleć o  $y$  jako o podpowiedzi dla algorytmu, lub nawet gotowym rozwiązaniu, natomiast  $A$  jest weryfikatorem, który używając podpowiedzi próbuje udzielić odpowiedzi, gdzie  $A$  akceptuje  $(x, y)$  oznacza że odpowiedź dla danych wejściowych  $x$  to TAK.

**PRZYKŁAD.** Pokażmy że problem decyzyjny, polegający na sprawdzeniu czy w grafie  $G$  istnieje cykl Hamiltona jest w NP.

*Dowód.* Najpierw musimy wymyślić weryfikator, tzn. wielomianowy algorytm sprawdzający istnienie cyklu Hamiltona w grafie. Nasz będzie dość prosty - dla danego grafu  $x$ , oraz  $y$  - pewnej drogi w  $x$ , zwyczajnie sprawdzimy czy  $y$  jest

cyklem hamiltona, a jeśli tak to zwrócimy *TAK* (to znaczy nasz algorytm będzie akceptować parę  $(x, y)$ ). Łatwo zauważyć że czas działania algorytmu jest ograniczony przez  $O(|V| + |E|)$ .

Dowód  $\Rightarrow$

Niech  $x$  będzie grafem zawierającym cykl Hamiltona. Wówczas naszym  $y$  będzie właśnie ten cykl. Wtedy  $|y|$  jest ograniczona przez  $O(|V| + |E|)$  oraz zgodnie z opisem działania naszego algorytmu,  $A$  zaakceptuje  $(x, y)$ .

Dowód w drugą stronę jest równie prosty, więc go pominiemy.  $\square$

Zauważmy że odpowiedź nie zawsze jest potrzebna. Np. w przypadku problemu polegającym na sprawdzeniu czy liczba jest podzielna przez 2, możemy wziąć jakąkolwiek odpowiedź, zignorować ją a następnie udzielić odpowiedzi w czasie wielomianowym. O takich problemach mówimy że są klasy  $P$ .

**Definicja 8** (Redukcje wielomianowe). *Mówimy że problem  $L$  jest wielomianowo redukowalny do problemu  $Q$  jeśli:*

1.  $\exists f \forall x \quad x \in L \Rightarrow f(x) \in Q$
2. *Istnieje wielomianowy algorytm obliczający funkcję  $f$*

Mimo że na pierwszy rzut oka może się to wydać niezrozumiałe, sens intuicyjny jest bardzo prosty. Chcielibyśmy "przetłumaczyć" problem  $L$  na problem  $Q$ , to znaczy użyć rozwiązania problemu  $Q$  tak abyśmy mogli za jego pomocą rozwiązać problem  $L$ . Jeśli uda nam się znaleźć taką funkcję (o której myślimy jak o algorytmie) to znaczy że znaleźliśmy redukcję problemu  $L$  do problemu  $Q$ . Aby redukcja była wielomianowa, musi być spełniony drugi warunek, tzn. musimy umieć obliczyć tę funkcję w czasie wielomianowym.

**Definicja 9** (Problem  $NP$ -zupełny). *Problem  $L$  jest problemem  $NP$ -zupełnym jeśli:*

1.  $L \in NP$
2. *Każdy problem z klasy  $NP$  jest wielomianowo redukowalny do  $L$*

O ile udowodnienie pierwszego warunku nie wydaje się specjalnie trudne (już raz to zrobiliśmy), tak drugi warunek może już sprawiać kłopoty. Zazwyczaj jednak nie dowodzi się tego bezpośrednio. Zamiast tego korzysta się z następującego faktu:

**Lemat 10.** *Jeśli  $L$ , jest problemem  $NP$ ,  $Q$  jest problemem  $NP$ -zupełnym oraz  $L$  jest redukowalny wielomianowo do  $Q$  to  $L$  jest problemem  $NP$ -zupełnym*

*Dowód.* Weźmy dowolny problem  $A \in NP$ , zredukujmy go do  $Q$  a następnie do  $L$ . Czas obliczeń jest wówczas ograniczony przez sumę wielomianów, a więc przez wielomian.  $\square$

Jednak aby skorzystać z tego lematu trzeba najpierw znaleźć problem który jest  $NP$ -zupełny. Jednym z pierwszych takich problemów którego  $NP$ -zupełność udowodniono był problem  $SAT$  (spełnialność formuł logicznych), a jak się później okazało, wiele innych problemów można do niego zredukować. My zostawimy to bez dowodu.

To czy  $P = NP$  jest wciąż otwartym, problemem milenijnym, którego rozwiązanie jest warte 1 000 000\$. Mimo że nikomu jeszcze nie udało się tego udowodnić, cały (duża większość) świat informatyki/matematyki wierzy że  $P \neq NP$ . Wiara jest na tyle mocna że wydawane są prace naukowe oraz dowodzone są twierdzenia przy założeniu że  $P \neq NP$ .

O problemach  $NP$ -zupełnych można myśleć jak o takich problemach które są co najmniej tak samo trudne jak wszystkie inne problemy z klasy  $NP$ . Ogólnie rzecz biorąc, są to problemy bardzo trudne obliczeniowo, dla których nie istnieje żaden algorytm wielomianowy rozwiązujący je, co więcej prawdopodobnie nigdy nie będzie istniał, no chyba że  $P = NP$ . Morał z tego jest taki, że jeśli wiemy że dany problem jest  $NP$ -zupełny, to raczej nie warto tracić czasu na rozwiązywanie go.

Jako dodatek, poniżej prezentujemy liste najbardziej znanych problemów  $NP$ -zupełnych (lub  $NP$ -trudnych):

1. Problem  $SAT$
2. Problem cyklu Hamiltona
3. Problem trójkolorowości grafu
4. Problem komiwojażera ( $NP$ -trudny)
5. Problem klik
6. Problem plecakowy ( $NP$ -trudny)
7. Problem sumy podzbioru
8. Problem minimalnego pokrycia zbioru ( $NP$ -trudny)

## 2.15 Sieci przełączników Benesa-Waksmana

W tym rozdziale zajmujemy się sieciami przełączników Benesa-Waksmana. Moją one zastosowanie w sieciach komputerowych.

### 2.15.1 Budowa

Sieć składa się z przełączników. Każdy z przełączników ma dwa możliwe stany.

- W stanie 1 przełącznik przesyła dane z wejścia  $i$  na wyjście  $i$  ( $i \in \{0, 1\}$ )
- W stanie 2 przełącznik przesyła dane z wejścia  $i$  na wyjście  $i + 1 \bmod 2$  ( $i \in \{0, 1\}$ )

<Tutaj wstawić obrazki ze stanami i jakąś przekładową sieć(wydaje mi się, że to lepiej objaśni, niż mój najlepszy opis)>

### 2.15.2 Kontrukcja sieci tworzącej wszystkie możliwe permutacje zbioru

Dla ułatwienia będziemy się zajmować zbiorami w postaci  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Konstrukcja będzie oparta na zasadzie dziel i zwyciężaj i będzie sprowadzała problem do rekurencyjnego zbudowania sieci wielkości  $2^{n-1}$ , a następnie odpowiedniego połączenia portów.

$n = 1$

Dla zbioru wielkości 2 jeden przełącznik generuje każdą możliwą permutację; stan 1 generuje identyczność; stan 2 drugą permutację.

$n > 1$

<Tutaj znowu wstawiłbym rysunek idei algorytmu>

### 2.15.3 Własności wygenerowanej sieci

Głębokość sieci wyraża się równaniem

$$G(2^n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ G(2^{n-1}) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

z tego wynika, że  $G(n) = 2 \log n - 1$

Ilość przełączników w sieci wyraża się równaniem

$$P(2^n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2P(2^{n-1}) + 2^n & n > 1 \end{cases}$$

Wykorzystując punkt 2. (a) z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej możemy stwierdzić, że  $P(n) = \Theta(n \log n)$ .

#### **2.15.4 Dowód poprawności konstrukcji**

TODO

#### **2.15.5 Sortowanie**

TODO

## 2.16 Pokrycie zbioru

Problem pokrycia zbioru jest problemem optymalizacyjnym związany z problemem alokacji zasobów. Przedstawimy zachłanny algorytm o logarytmicznym współczynniku aproksymacji rozwiązujący ten problem.

Dane dla problemu pokrycia zbioru to para  $(U, \mathcal{S})$  oraz funkcja kosztu  $c$ .  $U$ , zwane uniwersum, jest skończonym zbiorem elementów, a  $\mathcal{S}$  jest rodziną podzbiorów  $U$ , taką że:

$$\bigcup_{i=1}^n S_i = U$$

Mówimy, że podzbiór  $S_i \in \mathcal{S}$  pokrywa elementy należące do  $S_i$ . Z kolei  $c : S_i \rightarrow \mathbb{R}$ , każdemu podzbiorkowi  $S_i$  określa cenę pokrycia swoich elementów.

Problem polega na znalezieniu podrodziny  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ , której elementy pokrywają cały zbiór  $U$ :

$$U = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

Spośród wszystkich takich rozwiązań interesuje nas to, którego koszt  $c(\mathcal{T})$  jest minimalny:

$$\min(c(\mathcal{T})) = \sum_{T \in \mathcal{T}} c(T)$$

Mając zdefiniowaną cenę podzbiorku możemy zdefiniować cenę rynkową elementu, która będzie naszym kryterium wyboru podzbiorów. Niech  $e_1, e_2, \dots, e_n$  będą elementami  $U$  w porządku pokrycia przez algorytm. Przez cenę rynkową  $f_i$  elementu będziemy rozumieć średni koszt nowo pokrywanych elementów  $e_i$  przez rozpartywany podzbiór  $S_i$ :

$$f_i = \frac{c(S_{j_i})}{|S_{j_i} \setminus \bigcup_{j_i < k} S_k|},$$

gdzie  $S_i$  jest to  $i$ -ty zbiór wybierany przez algorytm,  $S_{j_i}$  jest pierwszym zbiorem pokrywającym  $e_i$ , czyli

$$j_i = \min \left\{ 1 \leq k < n : e_i \in S_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} S_l \right\}.$$



Mówiąc cena rynkowa zbioru mamy na myśli cenę rynkową elementów tego zbioru.

---

**Algorytm 11:** Zachłanny algorytm dla problemu pokrycia zbioru

---

**Input:**  $U$  - uniwersum,  $\mathcal{S}$  - rodzina podzbiorów  $U$

**Output:**  $\mathcal{T}$ , takie że  $c(\mathcal{T})$  jest minimalne

$\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$

**while**  $\mathcal{T} \neq U$  **do**

    Oblicz cenę rynkową dla wszystkich zbiorów

    Wybierz zbiór  $A$  o najniższej cenie rynkowej

$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} \cup A$

**end**

---

**Lemat 11.**  $f_i \leq \frac{c(OPT)}{n-i+1}$ , gdzie  $OPT$  jest rozwiązaniem optymalnym.

*Dowód.* Gdyby do pokrycia elementu  $e_i$  oraz wszystkich pozostałych elementów, czyli  $e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n$  użyłyby rodziny zbiorów  $OPT$ , to cena rynkowa dla każdego z tych elementów wyniosłaby  $\frac{c(OPT)}{\text{liczba nowo pokrytych elementów}}$ , czyli  $\frac{c(OPT)}{n-i+1}$ . W szczególności istnieje zbiór  $Y \in OPT$  taki, że cena rynkowa pokrywanych elementów jest nie większa niż dla całego  $OPT$ . Zatem algorytm zachłanny wybiera do pokrycia  $e_i$  zbiór o cenie rynkowej pokrywanych elementów  $\leq \frac{c(OPT)}{n-i+1}$ .  $\square$

Koszt algorytmu zachłannego ALG

$$\begin{aligned}
 c(ALG) &= \sum_{i=1}^n f_i \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \frac{c(OPT)}{n-i+1} \\
 &= c(OPT) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1} \\
 &= c(OPT) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\
 &= c(OPT) \cdot H_n \\
 &\leq c(OPT) \cdot \log(n+1)
 \end{aligned}$$

## 2.17 Przynależność słowa do języka

TODO: co oznacza gwiazdka nad zbiorem?

W tym rozdziale przedstawimy algorytm sprawdzające czy dane słowo należy do języka generowanego przez gramatykę bezkontekstową. Algorytm ten działa w czasie  $\Theta(n^3)$  względem długości słowa i jego idea jest oparta na technice programowania dynamicznego. Na początek wprowadźmy parę definicji i oznaczeń.

**Definicja 10.** *Gramatyka bezkontekstowa to taka czwórka  $\langle N, T, P, S \rangle$ , że:*

- $N$  i  $T$  to skończone zbiory rozłączne.  $N$  nazywamy zbiorem **nieterminali**, a  $T$  zbiorem **terminali**.
- $P$  - zbiór **produkcji** - to podzbiór  $(N \times (N \cup T))^*$
- $S$  to **symbol startowy** - wyróżniony element ze zbioru produkcji.

Będziemy przyjmować, że elementy zbioru terminali to duże litery alfabetu angielskiego, np.  $N = \{A, B, S\}$ , a elementy zbioru terminali to małe litery, np.  $T = \{a, b, c, \epsilon\}$  (z wyjątkiem epsilon - jest to *znak pusty*). Zbiór produkcji to zbiór par  $(L, R)$ , gdzie  $L$  jest terminalem, a  $R$  jest ciągiem złożonym z terminali i nieterminali. Parę  $(L, R)$  będziemy zapisywali w postaci  $L \rightarrow R$ , np.:  $A \rightarrow aAb$ ,  $A \rightarrow c$ ,  $B \rightarrow b$ ,  $A \rightarrow aSbB$ ,  $S \rightarrow A$ . Jeżeli w zbiorze produkcji jeden terminal pojawia się "po prawej strzałki" więcej niż raz, np.  $B \rightarrow ab$ ,  $B \rightarrow b$ , to zapisujemy te dwie produkcje w skrócie:  $B \rightarrow ab|b$ . Poprawną produkcją nie jest  $AB \rightarrow b$ , ponieważ z lewej strony strzałki znajdują się dwa nieterminale.

Aby wyprowadzić konkretne słowo, np.  $aacbb$ , to musimy zacząć od symbolu startowego  $S$  i kolejno "podmieniać" terminale zgodnie ze zbiorem produkcji:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAbb \Rightarrow aacbb$$

W powyższym przykładzie kolejno skorzystaliśmy z produkcji:  $S \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow aAb$  (dwukrotnie),  $A \rightarrow c$ . Słowo  $aacbb$  zostało *wyprowadzone* w gramatyce  $G$ .

**Definicja 11.** *Niech  $G = \langle N, T, P, S \rangle$ ,  $a, b, c \in (N \cup T)^*$  oraz  $A \in N$ . Ze słowa  $aAb$  można w  $G$  **wyprowadzić** słowo  $acb$  jeżeli  $A \rightarrow c$  jest produkcją z  $P$ . Zapisujemy to:  $aAb \Rightarrow acb$ .*

Jeżeli rozważymy zbiór wszystkich słów, które da się wyprowadzić gramatyce  $G$ , to zbiór ten nazywamy *językiem*  $L(G)$  *nad gramatyką*  $G$ :

**Definicja 12.** *Niech  $G = \langle N, T, P, S \rangle$ . Język  $L(G)$  generowany przez gramatykę  $G$  to:*

$$L(G) = \{w : w \in T^* \wedge S \Rightarrow^* w\}$$

$O \Rightarrow^*$ , czyli o tranzytywnym domknięciu relacji  $\Rightarrow$ , możemy myśleć jako wielokrotnym zaaplikowaniu (iterowaniu) relacji  $\Rightarrow$ .

W naszym algorytmie będziemy używać gramatyk bezkontekstowych, w których po prawej stronie każdej produkcji znajdują się albo dwa terminale albo jeden nieterminal:

**Definicja 13.** *Gramatyka jest w postaci Chomsky'ego jeżeli każda produkcja jest w jednej z poniższych postaci:*

- $A \rightarrow BC$  (typ I)
- $a$  (typ II)

gdzie  $A, B, C$  są nieterminalami i  $a$  jest terminalem.

Zauważmy, że każdą gramatykę bezkontekstową można przedstawić w postaci Chomsky'ego. Wystarczy każdą produkcję niebędącą w pożądaney postaci rozpiąć na kilka innych, poprawnych produkcji.

Mając daną gramatykę  $G$  w postaci Chomsky'ego oraz słowo  $w$  możemy zadać pytanie: czy słowo  $w = a_1a_2\dots a_n$  należy do języka generowanego przez tę gramatykę? Jeżeli  $w$  jest długości jeden, to znaczy, że  $w$  jest nieterminalem i wystarczy sprawdzić, czy w  $G$  istnieje produkcja  $S \rightarrow w$ . Jeżeli długość  $w$  jest większa od 1 i jeżeli  $w$  należałoby do języka, to ostatnia produkcja w wyprowadzeniu  $w$  musiała mieć postać  $X \rightarrow YZ$  (bo gramatyka jest w postaci Chomsky'ego). W takim razie słowo  $w$  da się podzielić na dwie części  $a_1a_2\dots a_i$  oraz  $a_{i+1}\dots a_n$ , takie, że pierwszą da się wyprowadzić z  $Y$ , a drugą z  $Z$ . Nie znamy indeksu  $i$ , więc musimy sprawdzić wszystkie możliwe jego wartości. Następnie tę procedurę powtarzamy zarówno dla  $Y$  jak i  $Z$ .

Niestety, może się okazać, że wiele takich samych fragmentów słowa  $w$  możemy obliczać wielokrotnie. Takie podejście rekurencyjne skutkuje wykładniczym czasem działania. Aby temu zapobiec zastosujemy programowanie dynamiczne. Zaczniemy analogicznie jak w algorytmie obliczania  $n$ -tej liczby Fibonacciego: rozpoczniemy od małych fragmentów, a pośrednie wyniki obliczane iteracyjne będziemy spamiętywać.

**Szkic algorytmu** Mamy daną gramatykę  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  oraz słowo  $w = a_1a_2\dots a_n$ . Chcemy się dowiedzieć czy  $w \in L(G)$ .

- Na początku przeglądamy fragmenty  $w$  długości jeden, czyli  $a_i$  dla  $i = 1..n$ . Dla każdego  $a_i$  musimy sprawdzić czy istnieje taka produkcja, w której po prawej stronie występuje  $a_i$ . Jeżeli istnieje, to zapamiętujemy nieterminal po lewej stronie produkcji.
- Teraz będziemy rozważać kolejno wszystkie fragmenty  $w$  długości 2, 3, ...,  $n$ :

- Fragmentów długości 2 jest  $n - 1$ :  $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$ .
- Fragmentów długości 3 jest  $n - 2$ :  $a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \dots, a_{n-2}a_{n-1}a_n$ ; itd.
- Będą dwa fragmenty długości  $n - 1$  ( $w$  bez kolejno: ostatniego i pierwszego znaku) oraz jeden długości  $n$  - całe słowo  $w$ .

Weźmy fragment  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ). Gdyby ten fragment należał do języka, to dało by się go wyprowadzić pewną produkcją  $X \rightarrow YZ$ . Aby to sprawdzić, musimy ciachnąć  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  na dwie niepuste połowy. Możemy to zrobić na  $j - i$  sposobów:

$$\begin{array}{cc} a_i | a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j & a_i a_{i+1} | a_{i+2} \dots a_j \\ a_i \dots a_k | a_{k+1} \dots a_j & a_i \dots a_{n-1} | a_n \end{array}$$

Dla każdego podziału sprawdzamy czy zarówno prawa strona jak i lewa strona dała się wcześniej wyprowadzić - takie sprawdzenie jest darmowe, wcześniej już to policzyliśmy (albo i nie). Jeżeli te części istnieją, to wystarczy sprawdzić czy istnieje taka produkcja  $X \rightarrow YZ$ , że z  $X$  możemy wyprowadzić pierwszą część fragmentu:  $a_i \dots a_k$ , a z  $Y$  można wyprowadzić drugą:  $a_{k+1} \dots a_j$ . Jak istnieje, to zapamiętujemy nieterminale po prawej stronie produkcji.

- $w$  należy do języka, jeżeli okaże się, że symbol startowy wyprowadza  $w$ .

Wszystkich fragmentów słowa  $w$  jest rzędu  $n^2$  i dla każdego fragmentu wykonujemy operacji proporcjonalnie do jego długości. Stąd wykonamy  $\Theta(n^3)$  operacji.

Zauważmy, że obliczenia możemy zorganizować w tabeli  $n \times n$ . W komórkach przekątnej wpisujemy wyniki kroku pierwszego: nieterminale, które wyprowadzają pojedynczy znak. W kolejnych przyprzekątnych obliczamy fragmenty długości 2, 3, ...,  $n$ . Jeżeli w komórce  $[1, n]$  znajdzie się nieterminał  $S$ , to dane słowo jest wyprowadzalne.

**Przykład** Niech dana będzie gramatyka  $G$ , w której:  $T = \{a, b\}$ ,  $N = \{S, A, B\}$ , a zbiór produkcji wygląda następująco:

$$P = \{S \rightarrow SS | AB, A \rightarrow AS | AA | a, B \rightarrow SB | BB | b\}$$

oraz dane słowo  $w = aabbab$ .

Najpierw rozważamy wszystkie fragmenty długości 1:  $a, a, b, b, a, b$ . Każdy z nich da się wyprowadzić albo z produkcji  $A \rightarrow a$  albo z  $B \rightarrow b$ . Skoro  $w_{1,1} = a$  oraz  $A \rightarrow a$ , to do komórki  $(1, 1)$  tabeli wpisujemy  $A$ . Analogicznie wypełniamy resztę przekątnej:

Teraz fragmenty długości 2:  $aa, ab, bb, ba, ab$ .

	1	2	3	4	5	6
1	{A}					
2		{A}				
3			{B}			
4				{B}		
5					{A}	
6						{B}

- Fragment  $w_{1,2} = aa$  można tylko na jeden sposób podzielić na dwie części:  $a$  oraz  $a$ . Z poprzedniego kroku wiemy, że  $a$  dało się już wyprowadzić z nie-terminala  $A$ . Istnieje produkcja  $A \rightarrow AA$ , więc do komórki (1,2) wpisujemy  $A$ .
- $w_{2,3} = ab$ . Dzielimy na pół. Z poprzedniej iteracji wiemy, że da się wyprowadzić słowo  $a$  oraz  $b$  z kolejno terminala  $A$  oraz  $B$ . Istnieje produkcja  $S \rightarrow AB$ , więc do komórki (2,3) wpisujemy  $S$ .
- Analogicznie wypełniamy resztę przyprzekątnej. Zauważmy jednak, że np. przy  $w_{4,5}$  istnieją nietermianle, z których da się wyprowadzić  $b$  oraz  $a$ , ale nie istnieje produkcja, która wyprowadza te nieterminale (nie ma produkcji postaci:  $X \rightarrow BA$ ). Zatem do komórki (4,5) nic nie wpisujemy:

	1	2	3	4	5	6
1	{A}	{A}				
2		{A}	{S}			
3			{B}	{B}		
4				{B}	-	
5					{A}	{S}
6						{B}

Teraz będziemy rozważać fragmenty długości 3:  $aab, abb, bba, bab$ .

•

## 2.18 Pokrycie wierzchołkowe

MPK Wrocław chciałoby dokonać inspekcji wszystkich torów tramwajowych w mieście (wystarczy odwiedzić przystanek by dokonać inspekcji incydentnych) torów. Podwykonawca (TOREX) żąda opłaty za każdy odwiedzony przystanek z osobna więc MPK chciałoby zminimalizować liczbę przystanków które będzie musiała odwiedzić ekipa TOREXu (zachowując przy tym podstawowe zadanie jakim jest inspekcja WSZYSTKICH torów). MPK Wrocław cannot into informatyka więc nie rozwiąże tego problemu (rozwiąże go podwyżką cen biletów). My co prawda nie potrafimy w czasie wielomianowym dostarczyć żadanego rozwiązania, ale wiemy jak się do tego zabrać.

Bardziej formalnie:

**Definicja 14.** *Pokryciem wierzchołkowym (dal. PW) grafu  $G = (V, E)$  nazywamy zbiór  $V'$  tż.:  $V' \subseteq V \wedge (\forall e \in E, \exists v \in V' : v \in e)$ .*

**Problem pokrycia wierzchołkowego** (dal. PPW) będziemy rozpatrywać na dwa sposoby: optymalizacyjnym (jakie jest najmniejsze PW) i decyzyjnym (czy istnieje PW rozmiaru  $k$ ); posiadając wszelakie zastosowania praktyczne jest oczywiście problemem NP-zupełnym.

Jeżeli przystanki tramwajowe potraktujemy jako wierzchołki a tory między nimi jako krawędzie, to PW nazwiemy taki podzbiór przystanków że wszystkie tory mają przynajmniej jeden koniec kończący się na przystanku z naszego podzbioru.

Przybliżone rozwiązanie: W dość prosty sposób możemy uzyskać przybliżone rozwiązanie (co najmniej(?) dwukrotnie gorsze od optymalnego w sensie mocy otrzymanego zbioru). Idea jest następująca: dla każdej krawędzi  $e$  w  $E'$  ( $= E$ ) weźmy dwa wierzchołki które  $e$  łączy, dodajmy je do zbioru rozwiązań i usuńmy z  $E'$  wszystkie krawędzie incydentne do nich.

---

### 12: Przybliżone rozwiązanie PPW

---

**Input:**  $G = (V, E)$  **Output:**  $S$  - pewne PW dla grafu  $G$   $E' = E$  **while**  
 $E' \neq \{\}$  **do**  
     $e'$  - dowolna krawędź łącząca wierzchołki  $(u, v)$   $S = S \cup u$   $S = S \cup v$   
     $E' = E' \setminus$  (wszystkie krawędzie incydentne do  $u$  i  $v$ )  
**end**

---

## 2.19 Algorytm znajdowania dwóch najbliższych punktów

Teraz zajmmy się problemem znalezienia pary najmniej odległych punktów w zadanym zbiorze  $Q = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ . Interesować nas będzie odległość euklidesowa, czyli szukamy takich indeksów  $i, j$ , że  $d(p_i, p_j) = \min\{d(p_k, p_l) \mid 1 \leq p < l \leq n\}$ , gdzie  $d(p_k, p_l) = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}$

### 2.19.1 Podejście siłowe

W podejściu siłowym potrzebujemy wyznaczyć i porównać wszystkie odległości pomiędzy punktami. Jest ich  $\binom{|Q|}{2}$ , czyli w taki sposób problem można rozwiązać w czasie  $O(n^2)$ . W następnym rozdziale pokażemy jak zrobić to szybciej.

### 2.19.2 Podejście Dziel i Zwyciężaj

Wiemy już, że problem ten można naiwnie rozwiązać w czasie  $O(n^2)$ . Zastanówmy się jak wykorzystując strategię Dziel i Zwyciężaj zrobić to szybciej. Już po chwili zastanowienia widać, że nie jest to takie trywialne, ponieważ po podziale zbioru na 2 części i znalezieniu dla nich rozwiązań, i tak musielibyśmy sprawdzić wszystkie odległości pomiędzy tymi zbiorami. Ale czy na pewno?

Nasz algorytm będzie wywoływał się rekurencyjnie, więc w celu uniknięcia wielokrotnego sortowania, wykorzystamy dwie tablice  $X$  i  $Y$ , które zawierać będą wszystkie punkty z  $Q$  posortowane odpowiednio po  $x$ 'owej i  $y$ 'owej współrzędnej. W tym miejscu istotnym jest, aby punkty ze wszystkich tablic były odpowiednio *połączone* między sobą. Dzięki temu przy podziale zbioru na dwie części:  $Q_L$  i  $Q_R$  odtworzenie tablic  $X_L, Y_L$  i  $X_R, Y_R$  będzie możliwe w czasie  $O(|Q|)$ . Wystarczy przeglądać po kolei elementy z tablic  $X$  oraz  $Y$  i przesuwać je do mniejszych odpowiedników, w zależności czy punkt jest w części  $L$  czy  $R$ .

---

**Algorytm 13:** Implementacja procedury NAJMNIEJ-ODLEGŁA-PARA

---

**Input:**  $Q$  - zbiór punktów,  $X, Y$   
**Output:** najmniejsza odległość między punktami  
**if**  $|Q| < 2$  **then**  
    **return**  $\infty$   
**end**  
**if**  $|Q| = 2$  **then**  
    **return**  $Q[1] - Q[2]$   
**end**  
wykorzystując tablicę  $X$  znajdź prostą  $l$  dzielącą zbiór  $Q$  na  
    dwa prawie równoliczne zbiory  
podziel  $Q$  na zbiory  $Q_L$  i  $Q_R$  względem prostej  $l$  odpowiednio po  
    jej lewej i prawej stronie  
wyznacz tablice  $X_L, Y_L$  i  $X_R, Y_R$   
 $d_L \leftarrow \text{NAJMNIEJ-ODLEGŁA-PARA}(Q_L, X_L, Y_L)$   
 $d_R \leftarrow \text{NAJMNIEJ-ODLEGŁA-PARA}(Q_R, X_R, Y_R)$   
 $d \leftarrow \min(d_L, d_R)$   
 $Y' \leftarrow$  punkty z  $Y$  odległe o co najwyżej  $d$  od prostej  $l$   
**for**  $i = 1$  **to**  $|Y'|$  **do**  
    **for**  $j = 1$  **to**  $\min(7, |Y'| - i)$  **do**  
        **if**  $P[i] - P[i + j] < d$  **then**  
             $d \leftarrow |P[i] - P[i + j]|$   
        **end**  
    **end**  
**end**  
**return**  $d$

---



## 2.20 Kopce dwumianowe w wersji leniwej

Kopce dwumianowe w wersji leniwej różnią się strukturalnie od wersji gorliwej, tym, że w danym momencie możemy mieć więcej niż jeden kopiec  $B_k$  na liście.

### 2.20.1 Różnice w implementacji

#### **insert**

Stwórz drzewo składające się wyłącznie z danego elementu a następnie wywołaj *meld* z kopcem właściwym.

#### **meld**

Operacja meld polega na połączeniu list drzew dwóch kopców.

#### **extract-min**

W wersji leniwej, podobnie jak w Kopcach Fibonacciego to tutaj będziemy wykonywać całą pracę związaną z utrzymaniem struktury kopców.

Idea algorytmu:

1. Usuń min z listy wierzchołków, a następnie dodaj do listy wierzchołków jego dzieci.
2. Stwórz pustą tablicę  $B$  wielkości największemu stopniowi drzewa niezbędnego, w kopcu o poprawnej strukturze trzymającym wszystkie elementy ( $\lceil \log n \rceil$ )
3. Iterując po każdym drzewie w kopcu sprawdź, czy to nie minimum (i ustaw wskaźnik minimum jeśli jest), a następnie sprawdź w tablicy  $B$  jest element o indeksie jego wielkości. Jeśli nie ma wstaw go do tablicy. Jeśli istnieje połącz dane drzewa i rekurencyjnie wstaw nowe drzewo do tablicy.

#### **Pozostałe operacje**

Pozostałe operacje implementujemy identycznie jak w gorliwych kopcach dwumianowych.

### 2.20.2 Analiza złożoności

Zdefiniujmy funkcję potencjału  $\Phi = \#drzew\ w\ kopcu$

### **meld**

Meld w oczywisty sposób nie zmienia sumy potencjałów kopców, jedynym kosztem będzie przepięcie wskaźników, więc złożoność tej funkcji to  $\Theta(1)$

### **insert**

Dodając drzewo zwiększamy potencjał o jeden. Następnie będziemy musieli wykonać meld, które kosztuje jedną operację.

$$\Delta(\Phi) + 1 = 1 + 1 = 2 \in \Theta(1)$$

### **extract-min**

Na początku będziemy musieli wstawić wszystkie dzieci od minimalnego elementu; zajmie to  $O(\log n)$ .

Oznaczmy  $T$  jako wszystkich drzew po tej operacji.

Dominującym kosztem rzeczywistym łączenia będzie iteracja po wszystkich drzewach (w czasie  $\Theta(T)$ ).

Niech  $\Delta(\Phi)$  oznacza różnicę potencjałów między kopcem po dodaniu dzieci minimalnego elementu, a kopcem po złączeniu drzew tego samego stopnia. Koszt amortyzowany wyrażać się więc będzie wzorem.

$$\Delta(\Phi) + O(\log n) + \Theta(T) = O(\log(n)) - T + O(\log(n)) + \Theta(T) = O(\log(n))$$



## Dodatek A

# Porównanie programów przedmiotu AiSD na różnych uczelniach

	UWr	UW	UJ	MIT	Oxford
Stosy, kolejki, listy		✓			
Dziel i zwyciężaj	✓				
Programowanie Dynamiczne	✓	✓	✓	✓	
Metoda Zachłanna	✓	✓	✓		
Koszt zamortyzowany	✓	✓			✓
NP-zupełność	✓	✓		✓	
PRAM / NC	✓				
Sortowanie	✓	✓			
Selekcja	✓	✓			
Słowniki	✓	✓	✓		✓
Kolejki priorytetowe	✓	✓			
Hashowanie	✓	✓			
Zbiory rozłączne	✓				
Algorytmy grafowe	✓	✓	✓	✓	✓
Algorytmy tekstowe	✓	✓			
Geometria obliczeniowa	✓				
FFT	✓				✓
Algorytm Karatsuby	✓			✓	
Metoda Newtona				✓	
Algorytmy randomizowane	✓				✓
Programowanie liniowe					✓
Algorytmy aproksymacyjne	✓				✓
Sieci komparatorów	✓				
Obwody logiczne	✓				