

Skrypt z Algorytmów i struktur danych

*Zbiór mniej lub bardziej ciekawych algorytmów
i struktur danych, jakie bywały omawiane na wy-
kładzie (albo i nie).*

PRACA ZBIOROWA POD REDAKCJĄ
KRZYSZTOFA PIECUCHA

Korzystać na własną odpowiedzialność.

Spis treści

1	Zrobione	5
1.1	Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej	6
1.1.1	Przykłady wykorzystania twierdzenia	7
1.2	Sortowanie bitoniczne	8
1.3	Algorytm macierzowy wyznaczania liczb Fibonacciego	13
1.4	Mnożenie macierzy	15
1.5	Model afinicznych drzew decyzyjnych	17
2	Under construction	21
2.1	Złożoność obliczeniowa	22
2.2	Model obliczeń	23
2.3	Kopce binarne	24
2.4	Algorytm rosyjskich wieśniaków	26
2.5	Sortowanie topologiczne	29
2.6	Algorytmy sortowania	30
2.6.1	Quick sort	32
2.7	Minimalne drzewa rozpinające	33
2.7.1	Cut Property i Circle Property	33
2.7.2	Algorytm Prima	33
2.7.3	Algorytm Kruskala	33
2.7.4	Algorytm Borůvky	33
2.8	Algorytm Dijkstry	34
2.9	Algorytm szeregowania	35
2.10	Programowanie dynamiczne na drzewach	36
2.11	Problem plecakowy	37
2.11.1	Ciągły problem plecakowy	37
2.11.2	Próba rozwiązania zachłannego	37
2.11.3	Rozwiązanie dynamiczne	38
2.11.4	Złożoność	39

2.12 Problemy NP	40
Dodatek A Porównanie programów przedmiotu AiSD na różnych uczelniach	43

Rozdział 1

Zrobione

1.1 Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

Popularną metodą rozwiązywania zadań jest metoda Dziel i Zwyciężaj. Polega ona na podzieleniu problemu na mniejsze, rozwiązaniu ich w sposób rekurencyjny, a następnie na scaleniu wyniku w jeden. Schemat tej metody jest przedstawiony jako Schemat 1.

Schemat 1: Procedura Dziel_i_zwyciezaj

```
if  $n \leq 1$  then
  | rozwiąż trywialny przypadek
end
Stwórz  $a$  podproblemów wielkości  $n/b$  w czasie  $D(n)$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $a$  do
  | wykonaj procedurę Dziel_i_zwyciezaj rekurencyjnie dla  $i$ -tego
  | podproblemu
end
Połącz wyniki w czasie  $P(n)$ 
```

Złożoność takiego algorytmu możemy zapisać zależnością rekurencyjną $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k \log^p n)$ przy czym $P(n) + D(n) \in \Theta(n^k \log^p n)$. Jednakże zależność rekurencyjna na czas działania algorytmu nie zawsze nas satysfakcjonuje. Zazwyczaj chcielibyśmy uzyskać wzór zwarty. Do tego celu służy poniższe twierdzenie, znane Twierdzeniem o rekurencji uniwersalnej.

Twierdzenie 1. *Niech $T(n) = aT(n/b) + \Theta(n^k \log^p n)$ oraz $a \geq 1$, $b > 1$, $k \geq 0$ oraz p liczby rzeczywiste. Wtedy*

1. jeżeli $a > b^k$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. jeżeli $a = b^k$ oraz
 - (a) $p > -1$ to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{p+1} n)$
 - (b) $p = -1$ to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log \log n)$
 - (c) $p < -1$ to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. jeżeli $a < b^k$ oraz
 - (a) $p \geq 0$ to $T(n) = \Theta(n^k \log^p n)$
 - (b) $p < 0$ to $T(n) = O(n^k)$

Dowód. TODO TODO TODO.

□

1.1.1 Przykłady wykorzystania twierdzenia

W rozdziale 2.6 zapoznamy się z algorytmem sortowania przez scalanie. Jego złożoność określona jest wzorem rekurencyjnym $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$. W tym przypadku $a = 2$, $b = 2$, $k = 1$ oraz $p = 0$. Ponieważ $a = b^k$ sprawdzamy dodatkowo, że $p > -1$ i otrzymujemy, że w naszym przypadku powinniśmy skorzystać z pkt 2a. Otrzymujemy, że złożoność naszego algorytmu jest $\Theta(n^{\log_b a} \log^{p+1} n)$ czyli $\Theta(n \log n)$.

W rozdziale 1.2 opisany został algorytm sortowania bitonicznego. Jego złożoność określona jest wzorem $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n \log n)$. W tym przypadku $a = 2$, $b = 2$, $k = 1$ i $p = 1$. Ponieważ $a = b^k$ i $p > -1$ korzystamy z punktu 2a. Otrzymujemy złożoność $\Theta(n \log^2 n)$.

W rozdziale ?? opisany jest algorytm Karatsuby. Jego złożoność opisana jest rekurencyjnym wzorem $3T(n/2) + \Theta(n)$. W tym przypadku $a = 3$, $b = 2$, $k = 1$ i $p = 0$. Ponieważ $a > b^k$ korzystamy z punktu 1. Otrzymujemy złożoność $\Theta(n^{\log_2 3}) \approx \Theta(n^{1.585})$.

Wyszukiwanie binarne to innowacyjny algorytm klasy Dziel i Zwyciężaj wyszukujący elementu w posortowanym ciągu. Ze względu na swoją złożoność obliczeniową i wydajność na współczesnych procesorach jest wykorzystywany w takich projektach jak Linux, czy WebKit. Ma złożoność opisaną rekurencyjnym wzorem $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$. Mamy więc $a = 1$, $b = 2$, $k = p = 0$. Ponieważ $a = b^k$ i $p > -1$ korzystamy z punktu 2a. Otrzymujemy złożoność $\Theta(\log n)$.

Algorytm Strassena jest opisany w rozdziale 1.4. Jego złożoność opisana jest rekurencyjnym wzorem $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$. W tym przypadku mamy $a = 7$, $b = 2$, $k = 2$, $p = 0$. Jako, że $a > b^k$ wykorzystamy punkt 1. Otrzymujemy złożoność $\Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.807})$

1.2 Sortowanie bitoniczne

W tym rozdziale przedstawimy algorytm sortowania bitonicznego. Jest to algorytm działający w czasie $O(n \log^2 n)$ czyli gorszym niż inne, znane algorytmy sortujące takie jak sortowanie przez scalanie albo sortowanie szybkie. Zaletą sortowania bitonicznego jest to, że może zostać uruchomiony równolegle na wielu procesorach. Ponadto, dzięki temu, że algorytm zawsze porównuje te same elementy bez względu na dane wejściowe, istnieje prosta implementacja fizyczna tego algorytmu (np. w postaci tzw. sieci sortujących). Algorytm będzie zakładał, że rozmiar danych n jest potęgą dwójki. Gdyby tak nie było, moglibyśmy wypełnić tablicę do posortowania nieskończonościami, tak aby uzupełnić rozmiar danych do potęgi dwójki. Rozmiar danych zwiększyłby się wtedy nie więcej niż dwukrotnie, zatem złożoność asymptotyczna pozostałaby taka sama.

Sortowanie bitoniczne posługuje się tzw. ciągami bitonicznymi, które sobie teraz zdefiniujemy.

Definicja 1. *Ciągiem bitonicznym właściwym nazywamy każdy ciąg powstały przez sklejenie ciągu niemalejącego z ciągiem nierosnącym.*

Dla przykładu ciąg 2, 2, 5, 100, 72, 69, 42, 17 jest ciągiem bitonicznym, gdyż powstał przez sklejenie ciągu niemalejącego 2, 2, 5 oraz ciągu nierosnącego 100, 72, 69, 42, 17. Ciąg 1, 0, 1, 0 nie jest ciągiem bitonicznym, gdyż nie istnieją taki ciąg niemalejący i taki ciąg nierosnący, które w wyniku sklejenia dałyby podany ciąg.

Definicja 2. *Ciągiem bitonicznym nazywamy każdy ciąg powstały przez rotację cykliczną ciągu bitonicznego właściwego.*

Ciąg 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72 jest ciągiem bitonicznym, gdyż powstał przez rotację cykliczną ciągu bitonicznego właściwego 2, 2, 5, 100, 72, 69, 42, 17.

Istnieje prosty algorytm sprawdzający, czy ciąg jest bitoniczny. Należy znaleźć element największy oraz najmniejszy. Następnie od elementu najmniejszego należy przejść cyklicznie w prawo (tj. w sytuacji gdy natrafimy na koniec ciągu, wracamy do początku) aż napotkamy element największy. Elementy, które przeszliśmy w ten sposób powinny tworzyć ciąg niemalejący. Analogicznie, idziemy od elementu największego cyklicznie w prawo aż do elementu najmniejszego. Elementy, które odwiedziliśmy powinny tworzyć ciąg nierosnący. W sytuacji w której mamy wiele elementów najmniejszych (największych), powinny one ze sobą sąsiadować (w sensie cyklicznym) i nie ma znaczenia, który z nich wybierzemy. Dla przykładu w ciągu 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72 idąc od elementu najmniejszego do największego tworzymy ciąg 2, 2, 5, 100 i jest to ciąg niemalejący. Idąc od elementu największego do najmniejszego otrzymujemy ciąg 100, 72, 69, 42, 17, 2 i jest to ciąg nierosnący.

Jedyną procedurą, która będzie przedstawiała elementy w tablicy, będzie procedura `bitonic_compare` (Algorytm 2). Jako dane wejściowe otrzymuje ona tablicę `A`, wielkość tablicy `n` oraz wartość logiczną `up`, która określa, czy ciąg będzie sortowany rosnąco czy malejąco. Procedura dzieli zadaną na wejściu tablicę na

Algorytm 2: Procedura `bitonic_compare`

```

Input:  $A[0..n-1]$ , up
for  $i \leftarrow 0$  to  $n - 1$  do
    if  $(A[i] > A[i + n/2]) = up$  then
         $A[i] \leftrightarrow A[i + n/2]$ 
    end
end

```

dwie równe części. Następnie porównuje pierwszy element z pierwszej części z pierwszym elementem z drugiej części. Jeśli te elementy nie znajdują się w pożądanym porządku, to je przestawia. Następnie powtarza tą czynność z kolejnymi elementami.

Dla przykładu, jeśli procedurę uruchomimy z tablicą $A = [2, 8, 7, 1, 4, 3, 5, 6]$, wartością $n = 8$ oraz `up = true`, w wyniku otrzymamy tablicę $A = [2, 3, 5, 1, 4, 8, 7, 6]$. W pierwszym kroku wartość 2 zostanie porównana z wartością 4. Ponieważ chcemy otrzymać porządek rosnący (wartość zmiennej `up` jest ustawiona na `true`), to zostawiamy tą parę w spokoju. W następnym kroku porównujemy wartość 8 z wartością 3. Te wartości są w złym porządku, dlatego algorytm zamienia je miejscami. Dalej porównujemy 7 z 5 i zamieniamy je miejscami i w końcu porównujemy 1 z 6 i te wartości zostawiamy w spokoju, gdyż są w dobrym porządku.

Procedura `bitonic_compare` ma bardzo ważną własność, którą teraz udowodnimy.

Twierdzenie 2. *Jeżeli elementy tablicy $A[0..n-1]$ tworzą ciąg bitoniczny, to po zakończeniu procedury `bitonic_compare` elementy tablicy $A[0..n/2-1]$ oraz tablicy $A[n/2..n-1]$ będą tworzyły ciągi bitoniczne. Ponadto jeśli wartość zmiennej `up` jest ustawiona na `true` to każdy element tablicy $A[0..n/2-1]$ będzie niewiekszy od każdego elementu tablicy $A[n/2..n-1]$. W przeciwnym przypadku będzie większy.*

Weźmy dla przykładu ciąg bitoniczny 69, 42, 17, 2, 2, 5, 100, 72. Po przejściu procedury `bitonic_compare` z ustawioną zmienną `up` na wartość `true` otrzymamy ciąg 2, 5, 17, 2, 69, 42, 100, 72. Ciągi 2, 5, 17, 2 oraz 69, 42, 100, 72 są ciągami bitonicznymi. Ponadto każdy element ciągu 2, 5, 17, 2 jest niewiekszy od każdego elementu ciągu 69, 42, 100, 72.

Przejdźmy do dowodu powyższego twierdzenia. Przyda nam się do tego poniższy lemat:

Lemat 1 (zasada zero-jeden). *Twierdzenie 2. jest prawdziwe dla dowolnych tablic wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe dla tablic zero-jedynkowych.*

Dowód. Jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla każdej tablicy to w szczególności jest prawdziwe dla tablic złożonych z zer i jedynek. Dowód w drugą stronę jest dużo ciekawszy.

Weźmy dowolną funkcję niemalejącą f . To znaczy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall_{a,b \in \mathbb{R}} a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Dla tablicy T przez $f(T)$ będziemy rozumieli tablicę powstałą przez zaaplikowanie funkcji f do każdego elementu tablicy T . Niech A oznacza tablicę wejściową do procedury `bitonic_compare` i niech B oznacza tablicę wyjściową. Udowodnimy, że karmiąc procedurę `bitonic_compare` tablicą $f(A)$ otrzymamy tablicę $f(B)$. W kroku i -tym procedura rozważa przestawienie elementów t_i oraz $t_{i+n/2}$. Jeśli $f(a_i) = f(a_{i+n/2})$ to nie ma znaczenia czy elementy zostaną przestawione. Z kolei jeśli $f(a_i) < f(a_{i+n/2})$ to $a_i < a_{i+n/2}$ zatem jeśli procedura przestawi elementy $f(a_i)$ oraz $f(a_{i+n/2})$ to również przestawi elementy a_i oraz $a_{i+n/2}$. Analogicznie gdy $f(a_i) > f(a_{i+n/2})$. Zatem istotnie: dla każdej funkcji niemalejącej f , procedura `bitonic_compare` otrzymując na wejściu tablicę $f(A)$ zwróci na wyjściu tablicę $f(B)$.

Wróćmy do dowodu lematu. Dowód nie wprost. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich tablic zero-jedynkowych i nie jest prawdziwe dla pewnej tablicy $T[0..n-1]$. Niech $S[0..n-1]$ oznacza zawartość tablicy po zakończeniu procedury `bitonic_compare`. Jeśli twierdzenie nie jest prawdziwe, oznacza to, że albo któraś z tablic $S[0..n/2-1]$, $S[n/2..n-1]$ nie jest bitoniczna albo, że elementy z jednej z nich nie są mniejsze od wszystkich elementów z drugiej tablicy. Rozważmy dwa przypadki.

Założmy, że tablica $S[0..n/2-1]$ nie jest bitoniczna (przypadek kiedy druga z tablic nie jest bitoniczna, jest analogiczny). Założmy, że ciąg powstały przez przejście od najmniejszego elementu w tej tablicy do największego nie tworzy ciągu niemalejącego (przypadek gdy ciąg powstały przez przejście od największego elementu do najmniejszego nie tworzy ciągu nierosnącego jest analogiczny). Zatem istnieje w tablicy element $S[i]$ większy od elementu $S[i+1]$. Rozważmy następującą funkcję:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \leq S[i] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że w takiej sytuacji twierdzenie nie byłoby prawdziwe dla tablicy $f(T)$, zatem dla tablicy zero-jedynkowej. Gdyż ponownie - element $f(S[i]) = 1$ byłby większy od elementu $f(S[i+1]) = 0$.

Drugi przypadek. Założmy, że zmienna `up` ustawiona jest na `true` (przypadek drugi jest analogiczny). Założmy, że element $S[i]$ jest mniejszy od elementu $S[j]$

gdzie $j < n/2$ oraz $i \geq n/2$. Rozważmy funkcję:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \leq S[j] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Wtedy twierdzenie nie byłoby prawdziwe dla tablicy $f(T)$ (zero-jedynkowej). Ponownie - element $f(S[i]) = 0$ byłby mniejszy od elementu $f(S[j]) = 1$. \square

Do pełni szczęścia potrzebujemy udowodnić, że Twierdzenie 2 jest prawdziwe dla wszystkich ciągów zero-jedynkowych.

Lemat 2. *Twierdzenie 2. jest prawdziwe dla wszystkich ciągów zero-jedynkowych.*

Dowód. Zakładać będziemy, że zmienna `up` jest ustawiona na `true` (dowód dla sytuacji przeciwnej jest analogiczny). Istnieje sześć rodzajów bitonicznych ciągów zero-jedynkowych: 0^n , $0^k 1^l$, $0^k 1^l 0^m$, 1^n , $1^k 0^l$, $1^k 0^l 1^m$ z czego trzy ostatnie są symetryczne do trzech pierwszych (więc zostaną pominięte w dowodzie). Rozważmy wszystkie interesujące nas przypadki:

Ten dowód jest nudny.

- 0^n . Po wykonaniu procedury `bitonic_compare` otrzymamy $0^{n/2}$ oraz $0^{n/2}$. Oba ciągi są bitoniczne i każdy element z pierwszego ciągu jest nie większy od każdego elementu z ciągu drugiego.
- $0^k 1^l$ oraz $k < n/2$. Wtedy po wykonaniu procedury `bitonic_compare` otrzymamy ciągi $0^k 1^{l-n/2}$ oraz $1^{n/2}$. Oba ciągi są bitoniczne i każdy element z pierwszego ciągu jest nie większy od każdego elementu z ciągu drugiego.
- $0^k 1^l$ oraz $k > n/2$. Otrzymamy ciągi $0^{n/2}$ oraz $0^{k-n/2} 1^l$. Znowu - oba są bitoniczne i każdy element z pierwszego jest nie większy od każdego z drugiego.
- $0^k 1^l 0^m$ oraz $k > n/2$. Wtedy otrzymujemy ciągi $0^{n/2}$ oraz $0^{k-n/2} 1^l 0^m$. Spełniają one tezę twierdzenia.
- $0^k 1^l 0^m$ oraz $m > n/2$. Ciągi, które otrzymamy wyglądają tak: $0^{n/2}$ oraz $0^k 1^l 0^{m-n/2}$. Są to ciągi, które nas cieszą.
- $0^k 1^l 0^m$ oraz $l > n/2$. Dostaniemy wtedy ciągi $0^k 1^{l-n/2} 0^m$ oraz $1^{n/2}$. Są to ciągi, które spełniają naszą tezę.
- $0^k 1^l 0^m$ oraz $k, l, m < n/2$. Ciągi, które uzyskamy to $0^{n/2}$ oraz $1^{n/2-m} 0^{n/2-l} 1^{n/2-k}$. Spełniają one naszą tezę.

\square

Na mocy Lematów 1 i 2 Twierdzenie 2 jest prawdziwe dla wszystkich tablic $T[0..n-1]$. Mając tak piękne twierdzenie, możemy napisać prosty algorytm sortujący ciągi bitoniczne (Algorytm 3).

Algorytm 3: Procedura `bitonic_merge`

Input: A - tablica bitoniczna, n, up
Output: A - tablica posortowana
if $n > 1$ **then**
 | `bitonic_compare`(A[0.. $n-1$], n, up)
 | `bitonic_merge`(A[0.. $n/2-1$], $n/2$, up)
 | `bitonic_merge`(A[$n/2..n-1$], $n/2$, up)
end

Algorytm zaczyna od wywołania procedury `bitonic_compare`. Dzięki niej, wszystkie elementy mniejsze wrzucane są do pierwszej połowy tablicy, a elementy większe do drugiej połowy. Ponadto `bitonic_compare` gwarantuje, że obie podtablice pozostają bitoniczne (jakie to piękne!). Możemy zatem wykonać całą procedurę ponownie na obu podtablicach rekurencyjnie.

Złożoność algorytmu wyraża się wzorem rekurencyjnym $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n)$. Rozwiązując rekurencję otrzymujemy, że złożoność algorytmu to $O(n \log n)$.

Mamy algorytm sortujący ciągi bitoniczne. Jak uzyskać algorytm sortujący dowolne ciągi? Zrealizujemy to w najprostszy możliwy sposób! Posortujemy (rekurencyjnie) pierwszą połowę tablicy rosnąco, drugą połowę tablicy malejąco (dlatego potrzebna nam była zmienna `up`!) i uzyskamy w ten sposób ciąg bitoniczny. Teraz wystarczy już uruchomić algorytm sortujący ciągi bitoniczne i voilà.

Algorytm 4: Procedura `bitonic_sort`

Input: A, n, up
Output: A - tablica posortowana
if $n > 1$ **then**
 | `bitonic_sort`(A[0.. $n/2-1$], $n/2$, true)
 | `bitonic_sort`(A[$n/2..n-1$], $n/2$, false)
 | `bitonic_merge`(A[0.. $n-1$], n, up)
end

Złożoność algorytmu wyraża się wzorem rekurencyjnym $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n \log n)$. Rozwiązaniem tej rekurencji jest $O(n \log^2 n)$.

1.3 Algorytm macierzowy wyznaczania liczb Fibonacciego

W tym rozdziale opiszemy algorytm obliczania liczb Fibonacciego, który wykorzystuje szybkie potęgowanie¹. Algorytm działa w czasie $O(\log n)$, co sprawia, że jest znacznie atrakcyjniejszy (gdy pytamy tylko o jedną liczbę) od algorytmu dynamicznego, który wymaga czasu $O(n)$.

Znajdźmy taką macierz M , która po wymnożeniu przez transponowany wektor wyrazów F_n i F_{n-1} da nam wektor, w którym otrzymamy wyrazy F_{n+1} oraz F_n . Łatwo sprawdzić, że dla ciągu Fibonacciego taka macierz ma postać:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bo:

$$M \times \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Wynika to wprost z definicji mnożenia macierzy oraz definicji ciągu Fibonacciego. Wykonajmy mnożenie z równania 1.1 n razy:

$$\underbrace{M \times \left(M \times \left(M \times \dots \left(M \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} \right) \dots \right) \right)}_{n \text{ razy}}$$

Z faktu, że mnożenie macierzy jest łączne oraz powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$M^n \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

Pokażemy, że powyższa macierz ma zastosowanie w obliczaniu n -tej liczby Fibonacciego.

Lemat 3.

$$M^n \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

Dowód przez indukcję. Sprawdźmy dla $n = 0$. Mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^0 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = I \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation_by_squaring

Algorytm szybkiego potęgowania będzie opisany w tym skrypcie, więc jak już będzie to będziemy chcieli się odwołać do odpowiedniego rozdziału a nie do wikipedii.

Rozważmy $n + 1$ zakładając poprawność dla n .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{teza}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \stackrel{1.1}{=} \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

□

Algorytm 5: Procedura `get_fibonacci`

Input: n

Output: n -ta liczba Fibonacciego

$$M \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M' \leftarrow \text{exp_by_squaring}(M, n - 1)$$

$$M'' \leftarrow M' \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

return $M''_{1,1}$

Mimo że powyższy algorytm działa w czasie $O(\log n)$, warto mieć na uwadze fakt, że liczby Fibonacciego rosną wykładniczo. W praktyce oznacza to pracę na liczbach przekraczających długość słowa maszynowego.

Zaprezentowaną metodę można uogólnić na dowolne ciągi, które zdefiniowane są przez liniową kombinację skończonej liczby poprzednich elementów. Wystarczy znaleźć odpowiednią macierz M ; dla ciągów postaci:

$$G_{n+1} = a_n G_n + a_{n-1} G_{n-1} + \dots + a_{n-k} G_{n-k}$$

wygląda ona następująco:

$$M = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-k+1} & a_{n-k} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dowód tej konstrukcji pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

1.4 Mnożenie macierzy

Z mnożeniem macierzy mieliście już prawdopodobnie do czynienia na Algebrze. Mając dane dwie macierze nad ciałem liczb rzeczywistych A (o rozmiarze $n \times m$) oraz B (o rozmiarze $m \times p$), chcemy policzyć ich iloczyn:

$$A \cdot B = C$$

gdzie elementy macierzy C (o rozmiarze $n \times p$) zadane są wzorem:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^m a_{i,r} \cdot b_{r,j}$$

Przykładowo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \\ (0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Korzystając prosto z definicji możemy napisać następujący algorytm mnożenia dwóch macierzy:

Algorytm 6: Naiwny algorytm mnożenia macierzy

Input: A, B - macierze o rozmiarach $n \times m$ oraz $m \times p$

Output: $C = A \cdot B$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** p **do**

$C[i][j] \leftarrow 0$

for $r \leftarrow 1$ **to** m **do**

$C[i][j] \leftarrow C[i][j] + A[i][r] \cdot B[r][j]$

end

end

end

Powyższy algorytm działa w czasie $O(n^3)$. Korzystając ze sprytnej sztuczki, jesteśmy w stanie zmniejszyć złożoność naszego algorytmu.

Zacznijmy od założenia, że rozmiar macierzy jest postaci $2^k \times 2^k$. Jeśli macierze nie są takiej postaci, to możemy uzupełnić brakujące wiersze i kolumny zerami. Następnie podzielimy macierze na cztery równe części:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}$$

Każda z części jest rozmiaru $2^{k-1} \times 2^{k-1}$. Ponadto wzór na każdą część macierzy C wyraża się wzorem:

$$C_{i,j} = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j}$$

Czy wzór ten umożliwia nam ułożenie efektywnego algorytmu mnożenia macierzy? Nie. W algorytmie mamy do policzenia 4 podmacierze macierzy C . Każda podmacierz wymaga 2 mnożeń oraz jednego dodawania. Dodawanie macierzy możemy w prosty sposób zrealizować w czasie $O(n^2)$. Mnożenie podmacierzy możemy wykonać rekurencyjnie. Taki algorytm będzie działał w czasie $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + O(n^2)$ czyli $O(n^3)$. Osiągnęliśmy tą samą złożoność czasową jak w przypadku algorytmu liczącego iloczyn wprost z definicji.

Algorytm Strassena osiąga lepszą złożoność asymptotyczną przez pozbycie się jednego z mnożeń. Algorytm ten liczy następujące macierze:

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2})$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1}$$

$$M_3 = A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2})$$

$$M_4 = A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1})$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2}$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2})$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2})$$

Do policzenia każdej z tych macierzy potrzebujemy jednego mnożenia i co najwyżej dwóch dodawań/odejmowań. Podmacierze macierzy C możemy policzyć teraz w następujący sposób:

$$C_{1,1} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$C_{1,2} = M_3 + M_5$$

$$C_{2,1} = M_2 + M_4$$

$$C_{2,2} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

Wykonując proste przekształcenia arytmetyczne, możemy dowieść poprawności powyższych równań.

Używając powyższych wzorów, możemy skonstruować algorytm rekurencyjny. Będzie on dzielił macierze A oraz B o rozmiarze $2^k \times 2^k$ na cztery równe części. Następnie policzy on macierze M_i . Tam, gdzie będzie musiał dodawać/odejmować użyje on algorytmu działającego w czasie $O(n^2)$. Tam, gdzie będzie musiał mnożyć - wywoła się on rekurencyjnie. Na podstawie macierzy M_i policzy macierz C . Ponieważ wykona dokładnie 7 mnożeń oraz stałą ilość dodawań, jego złożoność obliczeniowa będzie wyrażała się wzorem rekurencyjnym $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + O(n^2)$. Korzystając z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej otrzymujemy złożoność $O(n^{\log_2 7})$ czyli około $O(n^{2.81})$.

1.5 Model afinicznych drzew decyzyjnych

Zdefiniujmy następujący problem (ang. element uniqueness). Mając daną tablicę $T[0..n-1]$ liczb rzeczywistych, odpowiedzieć na pytanie czy istnieją w tablicy dwa elementy, które są sobie równe. Pierwsze rozwiązanie jakie przychodzi wielu ludziom do głowy, to posortować tablicę T a następnie sprawdzić sąsiednie elementy. Algorytm ten rozwiązuje nasz problem w czasie $\Theta(n \log n)$. Pytanie - czy da się szybciej? W niniejszym rozdziale udowodnimy, że w modelu afinicznych drzew decyzyjnych problemu nie da się rozwiązać lepiej.

W modelu afinicznych drzew decyzyjnych, w każdym zapytaniu możemy wybrać sobie $n + 1$ liczb: $c, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, a następnie zapytać czy

$$c + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t_i \geq 0$$

gdzie t_i to elementy tablicy T . Gdybyśmy użyli terminologii algebraicznej, to powiedzielibyśmy, że t jest punktem w przestrzeni \mathbb{R}^n , lewa strona powyższej nierówności to przekształcenie afiniczne, a zbiór wszystkich punktów z \mathbb{R}^n , które spełniają tę nierówność to przestrzeń afiniczna. Jeśli na Algebrze nie wyrobiliście sobie jeszcze intuicji, to w \mathbb{R}^2 przestrzeń afiniczną otrzymujemy przez narysowanie dowolnej prostej i wzięcie wszystkich elementów z jednej ze stron. Podobnie w \mathbb{R}^3 przestrzeń afiniczną otrzymujemy poprzez narysowanie dowolnej płaszczyzny, a następnie wzięcia wszystkich elementów z jednej ze stron. W wyższych wymiarach wygląda to analogicznie.

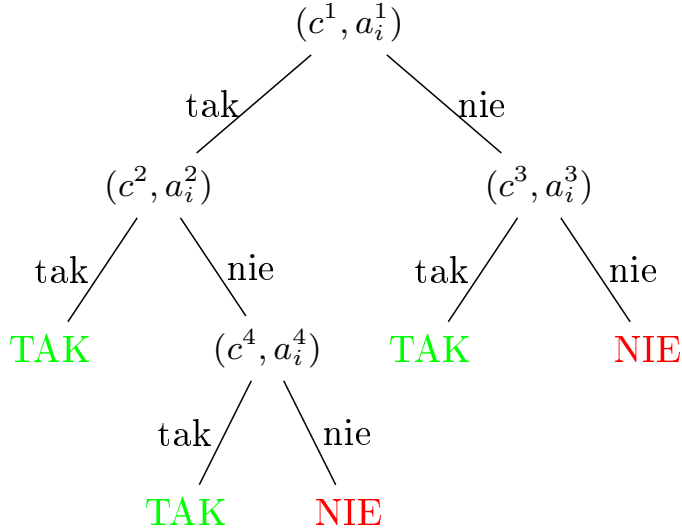
Algorytm używający tego typu porównań można zapisać za pomocą drzewa (rys. 1.5). Zaczynamy z korzenia tego drzewa. W każdym wierzchołku wewnętrznym zadajemy zapytanie. W zależności od tego czy odpowiedź na pytanie była pozytywna czy negatywna, idziemy w drzewie w lewo lub w prawo. Gdy dojdziemy do liścia w drzewie otrzymujemy nasze rozwiązanie (tak lub nie). Takie drzewo będziemy nazywać afinicznym drzewem decyzyjnym.

Aby było nam łatwiej zdefiniować główny lemat naszego rozdziału, zdefiniujemy sobie dwa pojęcia.

Definicja 3. Mówimy, że punkt $t \in \mathbb{R}^n$ *osiąga* liść l w afinicznym drzewie decyzyjnym, jeśli algorytm uruchomiony dla punktu t dochodzi do liścia l .

Definicja 4. Mówimy, że podzbiór $C \subseteq \mathbb{R}^n$ jest **zbiorem wypukłym**, jeśli dla dowolnych punktów $u, v \in C$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej $0 \leq \alpha \leq 1$ punkt $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$ także należy do C .

Pierwsza z definicji pozwala nam mówić o elementach, które trafiają do tego samego liścia, a druga to sformalizowane pojęcie wypukłości znane z liceum. Uzbrojeni w nowe definicje, możemy przejść do obiecanego lematu:



Rysunek 1.1: Przykład afinicznego drzewa decyzyjnego. W wierzchołkach wewnętrznych mamy zapytanie (c^j, a_i^j) . W zależności od tego czy $c^k + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k t_i \geq 0$ czy też nie, idziemy odpowiednio w lewo lub w prawo. Liście zawierają odpowiedź naszego algorytmu.

Lemat 4. *Zbiór punktów osiagających liść l w afinicznym drzewie decyzyjnym, jest zbiorem wypukłym.*

Dowód. Weźmy dowolne afiniczne drzewo decyzyjne i wybierzmy w nim dowolny liść l . Dobrze wiemy, że istnieje dokładnie jedna ścieżka prosta z korzenia do tego liścia. Weźmy dowolny wierzchołek wewnętrzny w na tej ścieżce i dowolne punkty u oraz v , które osiagają liść l . W końcu weźmy dowolną liczbę rzeczywistą $0 \leq \alpha \leq 1$. Załóżmy ponadto, że ścieżka z korzenia do liścia l w wierzchołku w skręca w lewo (zatem zapytanie zadane w wierzchołku w punkty u oraz v otrzymały odpowiedź twierdzącą). Przypadek przeciwny jest analogiczny. Wiemy zatem, że

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w u_i \geq 0$$

oraz, że

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w v_i \geq 0$$

Ponieważ $\alpha \geq 0$ możemy przemnożyć pierwsze równanie przez α :

$$\alpha c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w \alpha u_i \geq 0$$

a ponieważ $1 - \alpha \geq 0$ możemy drugie równanie przemnożyć przez $1 - \alpha$:

$$(1 - \alpha)c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w (1 - \alpha)v_i \geq 0$$

Teraz sumując oba równania otrzymujemy:

$$c^w + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^w (\alpha u_i + (1 - \alpha)v_i) \geq 0$$

Zatem punkt $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$ również w wierzchołku w skręci w tą samą stronę co punkty u oraz v . Ponieważ wybraliśmy dowolny wierzchołek w , to punkt $\alpha \cdot u + (1 - \alpha)v$ osiągnie liść l . Stąd zbiór wszystkich punktów, które osiągają liść l w afinicznym drzewie decyzyjnym, jest zbiorem wypukłym. \square

Wyobraźmy sobie, że płaszczyznę \mathbb{R}^2 kładziemy półpłaszczyzny. Wtedy przecięcie dowolnej liczby półpłaszczyzn jest zbiorem wypukłym. Podobnie jeśli w przestrzeni \mathbb{R}^3 wyznaczmy sobie półprzestrzenie, to ich przecięcie będzie tworzyło zbiór wypukły. Lemat 4 mówi, że tak samo się dzieje w każdej przestrzeni \mathbb{R}^n .

Ten lemat za chwilę okaże się dla nas kluczowy, gdyż za jego pomocą udowodnimy, że jeśli afiniczne drzewo decyzyjne poprawnie rozwiązuje problem element uniqueness to musi posiadać co najmniej $n!$ liści. Oznacza to, że wysokość takiego drzewa musi wynosić co najmniej $(n \log n)$.

Lemat 5. *Niech $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ będzie n elementowym zbiorem liczb rzeczywistych i niech $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ oraz $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ będą dwoma różnymi permutacjami liczb z tego zbioru. W każdym afinicznym drzewie decyzyjnym poprawnie rozwiązującym problem element uniqueness, punkty a oraz b osiągają różne liście w drzewie.*

Dowód. Dowód niewprost. Załóżmy, że a oraz b osiągają ten sam liść w drzewie. Liść ten musi odpowiadać przecząco na zadany problem, gdyż ani a ani b nie zawierają dwóch tych samych elementów. Ponieważ a oraz b składają się z tych samych liczb rzeczywistych i różnie się od siebie permutacją, to muszą istnieć takie indeksy i oraz j , że $a_i > a_j$ oraz $b_i < b_j$. Weźmy następującą wartość α :

$$\alpha = \frac{b_j - b_i}{(a_i - a_j) + (b_j - b_i)}$$

Wykonując proste przekształcenia arytmetyczne, możemy przekonać się, że $0 < \alpha < 1$. Oznacza to, na mocy lematu 4, że punkt $\alpha a + (1 - \alpha)b$ również osiąga ten sam liść co punkty a i b . Ponieważ jednak zachodzi:

$$\alpha a_i + (1 - \alpha)b_i = \alpha a_j + (1 - \alpha)b_j$$

(o czym można się przekonać wykonując proste przekształcenia arytmetyczne), odpowiedź algorytmu dla tego punktu powinna być twierdząca. Zatem afiniczne drzewo decyzyjne dla tego punktu zwraca złą odpowiedź. Sprzeczność z założeniem, że drzewo rozwiązywało problem poprawnie. \square

Weźmy dowolny n elementowy zbiór liczb rzeczywistych. Na mocy Lematu 5 każda permutacja tych liczb musi osiągać inny liść w afinicznym drzewie decyzyjnym poprawnie rozwiązującym problem element uniqueness. Oznacza to, że liczba liści w takim drzewie musi wynosić przynajmniej $n!$. Zatem wysokość takiego drzewa musi wynosić co najmniej $O(n \log n)$.

Rozdział 2

Under construction

2.1 Złożoność obliczeniowa

Todo, todo, todo...

2.2 Model obliczeń

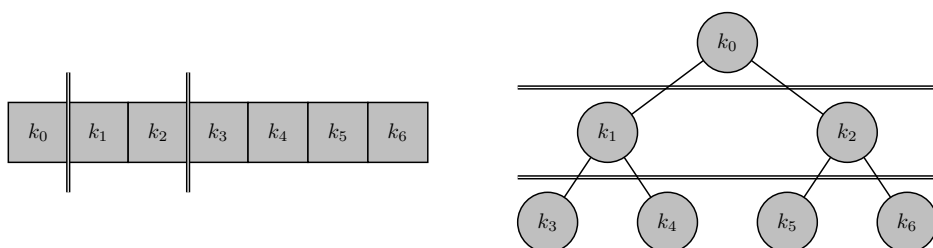
Todo, todo, todo...

2.3 Kopce binarne

Chciałbym, aby skrypt był skrytem i żebyśmy tam pisali formalnie. Dlatego definicję kopca chciałbym mieć zapisaną formalnie (bez przypisów) i w znacznikach `begin{definition}` `end{definition}`. Teraz śmieszna rzecz jest taka, że kopiec trudno ładnie formalnie zdefiniować na drzewach. W sensie najpierw musielibyśmy powiedzieć co to jest poziom w drzewie, co to jest pełny poziom w drzewie a następnie w sumie to nawet ja nie wiem jak to ładnie zdefiniować na drzewach :P Więc zamiast mówić, że kopiec to drzewo które można reprezentować w tablicy, lepiej zdefiniować kopiec jako tablicę na którą możemy patrzeć jako na drzewo. Wtedy musimy zdefiniować co to jest lewy syn elementu w tablicy, prawy syn oraz ojciec. Na tej podstawie będzie łatwiej nam zdefiniować własność kopca jako, że dla każdego wierzchołka wartość elementu jest mniejsza od wartości elementów jego dzieci. Jeśli wolimy zamiast tego powiedzieć że ciąg elementów na ścieżce od liścia do korzenia tworzy ciąg malejący to musimy zdefiniować co to jest liść, korzeń i ścieżka. Co da się zrobić ale nie wiem czy jest to warte świeczki, gdyż to będzie badanie jedynego miejsca w których użyjemy tych definicji). Zamiast element jest fajną funkcją, ale funkcje przesun w dol i przesun w gore są ważniejsze. Ponadto nie chcemy nazywać funkcje w języku polskim.

Kopiec binarny to struktura danych, która reprezentowana jest jako prawie pełne drzewo binarne¹ i na której zachowana jest własność kopca. Kopiec przechowuje klucze, które tworzą ciąg uporządkowany. W przypadku kopca typu *min* ścieżka prowadząca od dowolnego liścia do korzenia tworzy ciąg malejący.

Kopce można w prosty sposób reprezentować w tablicy jednowymiarowej – kolejne poziomy drzewa zapisywane są po sobie.



Rysunek 2.1: Reprezentacja kolejnych warstw kopca w tablicy jednowymiarowej.

Warto zauważyć, że tak reprezentowane drzewo pozwala na łatwy dostęp do powiązanych węzłów. Synami węzła o indeksie i są węzły $2i + 1$ oraz $2i + 2$, natomiast jego ojcem jest $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$.

Kopiec powinien udostępniać trzy podstawowe funkcje: `zamien_element`, która podmienia wartość w konkretnym węźle kopca, `przesun_w_gore` oraz `przesun_w_dol`, które zamieniają odpowiednie elementy pilnując przy tym, aby własność kopca została zachowana.

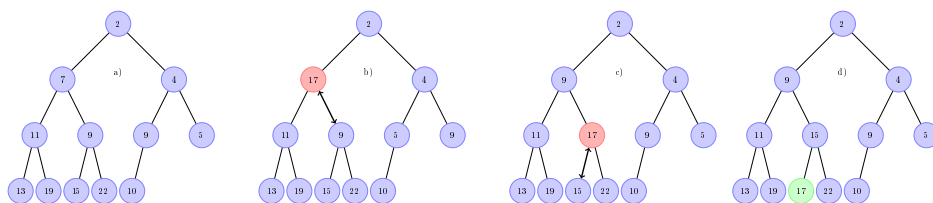
Algorithm 7: Implementacja funkcji `zamien_element`

```

if  $k[i] < v$  then
     $k[i] = v$ ;
    przesun_w_dol(k, i);
end
else
     $k[i] = v$ ;
    przesun_w_gore(k, i);
end

```

¹To znaczy wypełniony na wszystkich poziomach (poza, być może, ostatnim).



Rysunek 2.2: Przykład działania funkcji `zamien_element`. a) Oryginalny kopiec. b) Zmiana wartości w wyróżnionym węźle. c) Ponieważ nowa wartość jest większa od wartości swoich dzieci, należy wykonać wywołanie funkcji `przesn_w_dol`. d) Po zmianie własność kopca nie jest zachowana, dlatego należy ponownie wywołać funkcję `przesn_w_dol`. To przywraca kopcowi jego własność.

2.4 Algorytm rosyjskich wieśniaków

Algorytm rosyjskich wieśniaków jest przypisywany sposobowi mnożenia liczb używanemu w XIX-wiecznej Rosji. Aktualnie jest on stosowany w niektórych układach mnożących.

W celu obliczenia $a \cdot b$ tworzymy tabelkę i liczby a i b zapisujemy w pierwszym jej wierszu. Kolumnę a wypełniamy następująco: w $i+1$ wierszu wpisujemy wartość z wiersza i podzieloną całkowicie przez 2. W kolumnie b kolejne wiersze tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym 2. Wypełnianie tabelki kończymy wtedy, gdy w kolumnie a otrzymamy wartość 1. Na koniec sumujemy wartości w kolumnie b z tych wierszy dla których wartości w kolumnie a są nieparzyste. Uzyskany wynik to $a \cdot b$.

W poniższym przykładzie obliczymy $42 \cdot 17$.

a	b
42	17
21	$17 \cdot 2 = 34$
10	$17 \cdot 2^2 = 68$
5	$17 \cdot 2^3 = 136$
2	$17 \cdot 2^4 = 272$
1	$17 \cdot 2^5 = 544$

Wartości a są nieparzyste w wierszach 2, 4 oraz 6. Zatem będziemy sumować wartości b z wierszy 2, 4 i 6.

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 17 \cdot 2 + 17 \cdot 2^3 + 17 \cdot 2^5 \\
 &= 34 + 136 + 544 \\
 &= 714
 \end{aligned}$$

Faktycznie, otrzymaliśmy wynik poprawny. Spójrzmy raz jeszcze na tę sumę:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 17 \cdot 2 + 17 \cdot 2^3 + 17 \cdot 2^5 \\
 &= 17 \cdot (2^5 + 2^3 + 2) \\
 &= 17 \cdot (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \\
 &= 17_{10} \cdot 101010_2 \\
 &= 17 \cdot 42 = 714
 \end{aligned}$$

Przypomnij sobie algorytm zamiany liczby w systemie dziesiętnym na system binarny. Okazuje się, że algorytm rosyjskich wieśniaków "po cichu" wylicza tę reprezentację a .

Jak usuniecie enter po tabelce, to to zdanie nie zostanie w pdfie tabulatora. Tabulator powinien się znajdować przed akapitami. To zdanie jest częścią poprzedniego akapitu.

Algorytm 8: Algorytm rosyjskich wieśniaków

Input: a, b - liczby naturalne

Output: $wynik = a \cdot b$

$a' \leftarrow a$

$b' \leftarrow b$

$wynik \leftarrow 0$

while $a' > 0$ **do**

if $a' \bmod 2 = 1$ **then**

$wynik \leftarrow wynik + b'$

end

$a' \leftarrow a' \text{ div } 2$

$b' \leftarrow b' \cdot 2$

end

W kolejnych paragrafach podamy algorytm i w celu jego udowodnienia sformułujemy *niezmiennik* oraz wykazemy jego prawdziwość.

Twierdzenie 3. Niech a'_i (kolejno: b'_i , $wynik_i$) będzie wartością zmiennej a' (b' , $wynik$) w i -tej iteracji pętli *while*. Zachodzi następujący niezmiennik pętli:

$$a'_i \cdot b'_i + wynik_i = a \cdot b .$$

Lemat 6. Przed wejściem do pętli *while* niezmiennik jest prawdziwy.

Dowód. Skoro przed wejściem do pętli mamy: $a'_0 = a$, $b'_0 = b$ oraz $wynik_0 = 0$, to oczywiście: $a'_0 \cdot b'_0 + wynik_0 = a \cdot b + 0 = a \cdot b$. \square

Lemat 7. Po i -tym obrocie pętli niezmiennik jest spełniony.

Dowód. Załóżmy, że niezmiennik zachodzi w i -tej iteracji i sprawdźmy co dzieje się w $i + 1$ iteracji. Rozważmy dwa przypadki.

Nie możesz czegoś takiego założyć :)

- a'_i parzyste. Instrukcja **if** się nie wykona, w $i + 1$ iteracji $wynik_i$ pozostanie niezmienny, a'_i zmniejszy się o połowę, a b'_i zwiększy dwukrotnie.

$$wynik_{i+1} = wynik_i$$

$$a'_{i+1} = a'_i \text{ div } 2 = \frac{a'_i}{2}$$

$$b'_{i+1} = b'_i \cdot 2$$

W tym przypadku otrzymujemy:

$$a'_{i+1} \cdot b'_{i+1} + wynik_{i+1} = \frac{a'_i}{2} \cdot 2b'_i + wynik_i = a'_i \cdot b'_i + wynik_i = a \cdot b$$

- a'_i nieparzyste:

$$wynik_{i+1} = wynik_i + b'_i$$

$$a'_{i+1} = a'_i \operatorname{div} 2 = \frac{a'_i - 1}{2}$$

$$b'_{i+1} = b'_i \cdot 2$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$a'_{i+1} \cdot b'_{i+1} + wynik_{i+1} = \frac{a'_i - 1}{2} \cdot 2b'_i + wynik_i + b'_i = a'_i \cdot wynik_i + b'_i = a \cdot b$$

□

Lemat 8. *Po zakończeniu algorytmu $wynik = a \cdot b$*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że tuż po wyjściu z pętli **while** wartość zmiennej a' wynosi 0. Podstawiając do niezmiennika okazuje się, że faktycznie algorytm rosyjskich wieśniaków liczy $a \cdot b$. □

Lemat 9. *Algorytm się kończy.*

Dowód. Skoro $a_i \in \mathbb{N}$ oraz \mathbb{N} jest dobrze uporządkowany, to połowiąc a_i po pewnej liczbie iteracji otrzymamy 0. □

Z powyższych lematów wynika, że niezmiennik spełniony jest zarówno przed, w trakcie jak i po zakończeniu algorytmu. Algorytm rosyjskich wieśniaków jest poprawny.

Złożoność Z każdą iteracją połowimy a' . Biorąc pod uwagę kryterium jednorodne pozostałe instrukcje w pętli nic nie kosztują. Stąd złożoność to $O(\log a)$.

W kryterium logarytmicznym musimy uwzględnić czas dominującej instrukcji: dodawania $wynik \leftarrow wynik + b'$. W najgorszym przypadku zajmuje ono $O(\log ab)$. Zatem złożoność to $O(\log a \cdot \log ab)$.

2.5 Sortowanie topologiczne



Rysunek 2.3: Przykładowy graf z ubraniami dla bramkarza hokejowego. Krawędź między wierzchołkami a oraz b istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy gracz musi ubrać a zanim ubierze b . Pytanie o to w jakiej kolejności bramkarz powinien się ubierać, jest pytaniem o posortowanie topologiczne tego grafu.

2.6 Algorytmy sortowania

W tym rozdziale zapoznamy się z algorytmem sortowania przez scalanie (ang. *merge sort*). Wykorzystuje on metodę "dziel i zwyciężaj" - problem jest dzielony na kilka mniejszych podproblemów podobnych do początkowego problemu, problemy te są rozwiązywane rekurencyjnie, a następnie rozwiązania otrzymane dla podproblemów scala się, uzyskując rozwiązanie całego zadania.

Idea. Algorytm sortujący dzieli porządkowany n -elementowy zbiór na kolejne połowy, aż do uzyskania n jednoelementowych zbiorów - każdy taki zbiór jest już posortowany. Uzyskane w ten sposób części zbioru sortuje rekurencyjnie - posortowane części łączy ze sobą za pomocą scalania tak, aby wynikowy zbiór był posortowany.

Scalanie. Podstawową operacją algorytmu jest scalanie dwóch uporządkowanych zbiorów w jeden uporządkowany zbiór. W celu wykonania scalania skorzystamy z pomocniczej procedury `merge(A, p, q, r)`, gdzie A jest tablicą, a p, q, r są indeksami takimi, że $p \leq q < r$. W procedurze zakłada się, że tablice $A[p..q]$ oraz $A[q + 1..r]$ (dwie przyległe połówki zbioru, który został przez ten algorytm podzielony) są posortowane. Procedura `merge` scala te tablice w jedną posortowaną tablicę $A[p..r]$. Ogólna zasada działania jest następująca:

1. Przygotuj pusty zbiór tymczasowy.
2. Dopóki żaden ze scalanych zbiorów nie wyczerpał elementów, porównuj ze sobą pierwsze elementy każdego z nich i w zbiorze tymczasowym umieszczaj mniejszy z elementów.
3. W zbiorze tymczasowym umieść zawartość tego scalanego zbioru, który zawiera niewykorzystane jeszcze elementy.
4. Zawartość zbioru tymczasowego przepisz do zbioru wynikowego i zakończ algorytm.

Zapis algorytmu scalania dwóch list w pseudokodzie podano niżej.

Scalanie wymaga $O(n + m)$ operacji porównań elementów i wstawienia ich do tablicy wynikowej.

Sortowanie. Algorytm sortowania przez scalanie jest algorytmem rekurencyjnym. Wywołuje się go z zadanymi wartościami indeksów wskazujących na początek i koniec sortowanego zbioru, zatem początkowo indeksy obejmują cały zbiór. Algorytm wyznacza indeks elementu połowiącego przedział, a następnie sprawdza, czy połówki zbioru zawierają więcej niż jeden element. Jeśli tak, to rekurencyjnie sortuje je tym samym algorytmem. Po posortowaniu obu połówek zbioru scalamy je za pomocą opisanej wcześniej procedury scalania podzbiorów uporządkowanych i kończymy algorytm. Zbiór jest posortowany.

Algorytm 9: Procedura merge

Input: tablica A , liczby p, q, r
Output: posortowana tablica $A[p..r]$
 $C \leftarrow$ pusta tablica
 $i \leftarrow p, j \leftarrow q + 1, k \leftarrow 0$
while $i \leq q$ oraz $j \leq r$ **do**
 if $A[i] \leq A[j]$ **then**
 $C[k] \leftarrow A[i], i \leftarrow i + 1$
 else
 $C[k] \leftarrow A[j], j \leftarrow j + 1$
 end
 $k \leftarrow k + 1$
end
while $i \leq q$ **do**
 $C[k] \leftarrow A[i], i \leftarrow i + 1, k \leftarrow k + 1$
end
while $j \leq r$ **do**
 $C[k] \leftarrow A[j], j \leftarrow j + 1, k \leftarrow k + 1$
end

Złożoność. Chociaż algorytm sortowania przez scalanie działa poprawnie nawet wówczas, gdy n jest nieparzyste, dla uproszczenia analizy założymy, że n jest potęgą dwójki. Dzielimy wtedy problem na podproblemy rozmiaru dokładnie $\frac{n}{2}$. Rekurencję określającą czas $T(n)$ sortowania przez scalanie otrzymujemy, jak następuje.

Sortowanie przez scalanie jednego elementu wykonuje się w czasie stałym. Jeśli $n > 1$, to czas działania zależy od trzech etapów:

Dziel: podczas tego etapu znajdujemy środek przedziału, co zajmuje czas stały, zatem $D(n) = \theta(1)$.

Zwyciężaj: rozwiązujemy rekurencyjnie dwa podproblemy, każdy rozmiaru $\frac{n}{2}$, co daje czas działania $2T(\frac{n}{2})$.

Połącz: procedura merge, jak wspomniano wyżej, działa w czasie liniowym, a więc $P(n) = \theta(n)$.

Funkcje $D(n)$ i $P(n)$ dają po zsumowaniu funkcję rzędu $\theta(n)$. Dodając do tego $2T(\frac{n}{2})$ z etapu "zwyciężaj", otrzymujemy następującą rekurencję dla $T(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + \theta(n) & n > 1 \end{cases}$$

Algorytm 10: Procedura `merge sort`

Input: tablica A , liczby p, r

Output: posortowana tablica $A[p..r]$

$q \leftarrow 0$

if $p < r$ **then**

$q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$

`merge sort`(A, p, q)

`merge sort`($A, q + 1, r$)

`merge`(A, p, q, r)

end

Poniższy przykład ilustruje zasadę działania sortowania przez scalanie:

<tu obrazek, ale nie umiem w obrazki, na dniach ogarnę>

Podsumowanie. Sortowanie przez scalanie należy do algorytmów szybkich, posiada klasę złożoności równą $\theta(n \log n)$. Jest oparty na metodzie dziel i zwyciężaj, która powoduje podział dużego problemu na mniejsze, łatwo rozwiązywane podproblemy. Sortowanie nie odbywa się w miejscu, potrzebujemy dodatkowej struktury. Algorytm jest stabilny.

2.6.1 Quick sort

In progress

2.7 Minimalne drzewa rozpinające

Todo, todo, todo...

2.7.1 Cut Property i Circle Property

2.7.2 Algorytm Prima

2.7.3 Algorytm Kruskala

2.7.4 Algorytm Borůvky

2.8 Algorytm Dijkstry

Todo, todo, todo...

2.9 Algorytm szeregowania

Todo, todo, todo...

2.10 Programowanie dynamiczne na drzewach

Todo, todo, todo...

2.11 Problem plecakowy

W tym rozdziale opiszemy jeden z najbardziej znanych problemów optymalizacyjnych, czyli tak zwany problem plecakowy.

Założmy, że jesteśmy złodziejem, który w trakcie włamania chce wypełnić swój plecak wielkości W przedmiotami o jak największej wartości. Mamy M typów przedmiotów i plecak wielkości W . Każdy z przedmiotów typu $i \in \mathbb{N}_+$ ma swoją wartość $v_i > 0$ i wielkość $w_i > 0$. To ile przedmiotów typu i zabierzemy będziemy oznaczać przez $x_i \in \mathbb{N}$.

- 0-1 dyskretny problem plecakowy, w którym $x_i \in \{0, 1\}$. Tę wersję możemy interpretować, jako okradanie galerii sztuki.
- Ograniczony problem plecakowy, w którym, dla każdego i mamy podaną ilość przedmiotów danego typu - c_i , czyli $x_i \leq c_i$. Tę wersję możemy interpretować, jak zwykłą kradzież ze sklepu rtv.
- Nieograniczony problem plecakowy, w którym x_i nie ma górnego ograniczenia. Tę wersję możemy interpretować, jako kradzież kopii Windowsa, gdzie plecakiem będzie dysk.

2.11.1 Ciągły problem plecakowy

Problem plecakowy posiada także wersję ciągłą, w której możemy zabrać część, zamiast całości przedmiotu. Specyfikacja jest analogiczna do wariantu dyskretnego, z tą różnicą, że $x_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. O tym wariantcie możemy myśleć jak o kradzieży płynnych chemikaliów.

2.11.2 Próba rozwiązania zachłannego

Mimo, że intuicyjnym byłoby dla każdego przedmiotu wyliczyć stosunek wartości do wielkości i branie przedmiotów o najlepszym współczynniku rozwiązanie takie jest nieprawidłowe. Prosty kontrprzykładem będzie sytuacja, w której plecak ma wielkość $w = 10$ i do dyspozycji mamy 3 przedmioty; $v_1 = 9$, $v_2 = v_3 = 5$, $w_1 = 6$, $w_2 = w_3 = 5$. W każdym z wariantów problemu postępując w ten sposób zachłannie wybierzemy przedmiot 1, otrzymując plecak o wartości 9, zamiast wybierając 2 i 3 otrzymując plecak o wartości 10. Co ciekawe podejście zachłanne sprawdza się w przypadku problemu ciągłego.

2.11.3 Rozwiązanie dynamiczne

0-1

Stwórzmy dwuwymiarową tablicę A . $A[i, w]$ będzie oznaczała maksymalną wartość plecaku wielkości w , rozważając i pierwszych przedmiotów. Uznajmy przy tym, że dla indeksów ujemnych A będzie zwracać $-\infty$.

Stwórzmy zależność rekurencyjną.

$$A[0, w] = 0$$

Gdyż biorąc zero przedmiotów nie otrzymamy żadnej wartości dodanej.

$$A[i, 0] = 0$$

$$A[i, w] = \max(A[i - 1, w], A[i - 1, w - w_i] + v_i)$$

Czyli rozważając dodanie następnego przedmiotu sprawdzamy, czy najbardziej wartościowy po jego dołożeniu jest wart więcej, niż najbardziej wartościowy plecak bez tego elementu.

Wynik będzie w komórce $A[M, W]$.

Ograniczony

$$A[0, w] = 0$$

$$A[i, 0] = 0$$

$$A[i, w] = \max_{0 \leq n \leq c_i} (A[i - 1, w - w_i \cdot n] + v_i \cdot n)$$

Podobnie, do wariantu 0-1, z tym, że tutaj przy i -tym rodzaju rozważamy jego każdą możliwą ilość.

Wynik będzie w komórce $A[M, W]$.

Nieograniczony

W wariancie nieograniczonym; jako, że nie musimy kontrolować, ile elementów wzięliśmy, sytuacja się upraszcza. Wystarczy nam jednowymiarowa tablica A ; $A[w]$ będzie oznaczała wartość najcenniejszego plecaka o wielkości w .

$$A[0] = 0$$

$$A[w] = \max_{w_i \leq w} (A[w - w_i] + c_i)$$

Wynik będzie w komórce $A[W]$.

2.11.4 Złożoność

- 0-1

Złożoność pseudowielomioanowa $\Theta(M \cdot W)$.

- Ograniczony

Złożoność pseudowielomioanowa $\Theta(M \cdot W)$.

- Nieograniczony

Złożoność pseudowielomioanowa $\Theta(M \cdot W \cdot \sum_{i=1}^M c_i)$.

2.12 Problemy NP

Na wstępie chcielibyśmy zaznaczyć że tematyka NP-zupełności nie będzie poruszana dogłębnie. Nie będziemy np. wprowadzać definicji maszyny Turinga (lub innego modelu) oraz przeprowadzać skomplikowanych dowodów, gdyż wymagałoby to wiedzy z zakresu teorii języków formalnych i złożoności obliczeniowej. Zamiast tego będziemy chcieli nabrać trochę intuicji co do tego czy w ogóle warto starać się rozwiązywać dany problem czy może jest to strata naszego czasu.

Definicja 5. *Problemem decyzyjnym nazywamy problem którego rozwiązanie przyjmuje jedną z dwóch wartości - TAK, NIE*

Zauważmy że problemy decyzyjne możemy utożsamiać z podzbiorami pewnego uniwersumi, w ten sposób że problem jest zbiorem wartości, dla których odpowiedź to TAK.

PRZYKŁAD. Problem polegający na rozstrzygnięciu czy dana liczba naturalna p jest liczbą pierwszą utożsamilibyśmy ze zbiorem liczb pierwszych.

Definicja 6. *Dla danej funkcji kosztu f , problemem optymalizacyjnym nazywamy problem którego rozwiązaniem jest wartość z danego uniwersum, minimalizująca wartość funkcji kosztu.*

PRZYKŁAD. Dla danego grafu G oraz wierzchołków u i v , wyznaczyć najkrótszą drogę między u i v . Naszą funkcją kosztu jest długość drogi, a uniwersum to wszystkie drogi łączące u i v .

Definicja 7 (Klasa NP). *Klasą NP nazywamy zbiór problemów decyzyjnych L t. że istnieje algorytm wielomianowy A dla którego prawdziwe jest następujące zdanie:*

$$x \in L \iff \text{istnieje } y \text{ t. że } |y| < |x|^c \text{ oraz } A \text{ akceptuje } (x, y)$$

W powyższej definicji możemy myśleć o y jako o odpowiedzi dla algorytmu, lub nawet gotowym rozwiązaniu, natomiast A jest weryfikatorem, który używając odpowiedzi próbuje udzielić odpowiedzi, gdzie A akceptuje (x, y) oznacza że odpowiedź dla danych wejściowych x to TAK.

PRZYKŁAD. Pokażmy że problem decyzyjny, polegający na sprawdzeniu czy w grafie G istnieje cykl Hamiltona jest w NP.

Dowód. Najpierw musimy wymyślić weryfikator, tzn. wielomianowy algorytm sprawdzający istnienie cyklu Hamiltona w grafie. Nasz będzie dość prosty - dla danego grafu x , oraz y - pewnej drogi w x , zwyczajnie sprawdzimy czy y jest

cyklem hamiltona, a jeśli tak to zwrócimy *TAK* (to znaczy nasz algorytm będzie akceptować parę (x, y)). Łatwo zauważyć że czas działania algorytmu jest ograniczony przez $O(|V| + |E|)$.

Dowód \Rightarrow

Niech x będzie grafem zawierającym cykl Hamiltona. Wówczas naszym y będzie właśnie ten cykl. Wtedy $|y|$ jest ograniczona przez $O(|V| + |E|)$ oraz zgodnie z opisem działania naszego algorytmu, A zaakceptuje (x, y) .

Dowód w drugą stronę jest równie prosty, więc go pominiemy. \square

Zauważmy że odpowiedź nie zawsze jest potrzebna. Np. w przypadku problemu polegającym na sprawdzeniu czy liczba jest podzielna przez 2, możemy wziąć jakkolwiek podowiedź, zignorować ją a następnie udzielić odpowiedzi w czasie wielomianowym. O takich problemach mówimy że są klasy P .

Definicja 8 (Redukcje wielomianowe). *Mówimy że problem L jest wielomianowo redukowalny do problemu Q jeśli:*

1. $\exists f \forall x \quad x \in L \Rightarrow f(x) \in Q$
2. *Istnieje wielomianowy algorytm obliczający funkcję f*

Mimo że na pierwszy rzut oka może się to wydać niezrozumiałe, sens intuicyjny jest bardzo prosty. Chcielibyśmy "przetłumaczyć" problem L na problem Q , to znaczy użyć rozwiązania problemu Q tak abyśmy mogli za jego pomocą rozwiązać problem L . Jeśli uda nam się znaleźć taką funkcję (o której myślimy jak o algorytmie) to znaczy że znaleźliśmy redukcję problemu L do problemu Q . Aby redukcja była wielomianowa, musi być spełniony drugi warunek, tzn. musimy umieć obliczyć tę funkcję w czasie wielomianowym.

Definicja 9 (Problem NP -zupełny). *Problem L jest problemem NP -zupełnym jeśli:*

1. $L \in NP$
2. *Każdy problem z klasy NP jest wielomianowo redukowalny do L*

O ile udowodnienie pierwszego warunku nie wydaje się specjalnie trudne (już raz to zrobiliśmy), tak drugi warunek może już sprawiać kłopoty. Zazwyczaj jednak nie dowodzi się tego bezpośrednio. Zamiast tego korzysta się z następującego faktu:

Lemat 10. *Jeśli L , jest problemem NP , Q jest problemem NP -zupełnym oraz L jest redukowalny wielomianowo do Q to L jest problemem NP -zupełnym*

Dowód. Weźmy dowolny problem $A \in NP$, zredukujmy go do Q a następnie do L . Czas obliczeń jest wówczas ograniczony przez sumę wielomianów, a więc przez wielomian. \square

Jednak aby skorzystać z tego lematu trzeba najpierw znaleźć problem który jest NP -zupełny. Jednym z pierwszych takich problemów którego NP -zupełność udowodniono był problem SAT (spełnialność formuł logicznych), a jak się później okazało, wiele innych problemów można do niego zredukować. My zostawimy to bez dowodu.

To czy $P = NP$ jest wciąż otwartym, problemem milenijnym, którego rozwiązanie jest warte 1 000 000\$. Mimo że nikomu jeszcze nie udało się tego udowodnić, cały (duża większość) świat informatyki/matematyki wierzy że $P \neq NP$. Wiara jest na tyle mocna że wydawane są prace naukowe oraz dowodzone są twierdzenia przy założeniu że $P \neq NP$.

O problemach NP -zupełnych można myśleć jak o takich problemach które są co najmniej tak samo trudne jak wszystkie inne problemy z klasy NP . Ogólnie rzecz biorąc, są to problemy bardzo trudne obliczeniowo, dla których nie istnieje żaden algorytm wielomianowy rozwiązujący je, co więcej prawdopodobnie nigdy nie będzie istniał, no chyba że $P = NP$. Morał z tego jest taki, że jeśli wiemy że dany problem jest NP -zupełny, to raczej nie warto tracić czasu na rozwiązywanie go.

Jako dodatek, poniżej prezentujemy liste najbardziej znanych problemów NP -zupełnych (lub NP -trudnych):

1. Problem SAT
2. Problem cyklu Hamiltona
3. Problem trójkolorowości grafu
4. Problem komiwożacza (NP -trudny)
5. Problem klik
6. Problem plecakowy (NP -trudny)
7. Problem sumy podzbioru
8. Problem minimalnego pokrycia zbioru (NP -trudny)

Dodatek A

Porównanie programów przedmiotu AiSD na różnych uczelniach

	UWr	UW	UJ	MIT	Oxford
Stosy, kolejki, listy		✓			
Dziel i zwyciężaj	✓				
Programowanie Dynamiczne	✓	✓	✓	✓	
Metoda Zachłanna	✓	✓	✓		
Koszt zamortyzowany	✓	✓			✓
NP-zupełność	✓	✓		✓	
PRAM / NC	✓				
Sortowanie	✓	✓			
Selekcja	✓	✓			
Słowniki	✓	✓	✓		✓
Kolejki priorytetowe	✓	✓			
Hashowanie	✓	✓			
Zbiory rozłączne	✓				
Algorytmy grafowe	✓	✓	✓	✓	✓
Algorytmy tekstowe	✓	✓			
Geometria obliczeniowa	✓				
FFT	✓				✓
Algorytm Karatsuby	✓			✓	
Metoda Newtona				✓	
Algorytmy randomizowane	✓				✓
Programowanie liniowe					✓
Algorytmy aproksymacyjne	✓				✓
Sieci komparatorów	✓				
Obwody logiczne	✓				