Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский университет ИТМО

Мега факультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Прикладная математика

Лабораторная работа 3

Выполнили:

Кутузов Михаил (M32001)

Капанин Дмитрий (M32021)

Соколов Денис (M32021)

Преподаватель:

Москаленко Мария Александровна

Ссылка на код:

Цель работы

1. Реализовать метод LU-разложения, решения СЛАУ (метод Гаусса) с помощью этого метода, а также нахождение обратной матрицы.
2. Реализовать один из итерационных методов решения СЛАУ, в нашем случае -
3. Провести исследование реализованных методов на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания, и на матрицах Гилберта
4. Понять, что лучше – Итерационные или прямые методы.

Про хранение матриц

По условию лабораторной работы мы хранили матрицы в разреженно-строчном формате. Этот формат позволяет экономить память, если большая часть матриц не содержит значений или равна нулю.

У нас есть 3 массива – сами значения, номера столбов для соответствующих значений и количество значений в строке матрицы.

Теория по LU-разложению

LU-разложение — это представление матрицы A в виде A=L•U, где L — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, а U — верхнетреугольная матрица. LU-разложение является модификацией метода Гаусса. Основные применения данного алгоритма — решение систем алгебраических уравнений, вычисление определителя, вычисление обратной матрицы и др.

Пусть A прямоугольная матрица порядка $m\times n$ любого ранга. С правой стороны матрицы A приписываем единичную матрицу E порядка $m\times m$. Применяем к матрице $A|E$ метод исключения Гаусса. Если на каком-то этапе Гауссово исключения ведущий элемент равен нулю, и существует ненулевой элемент, расположенный ниже ведущего элемента, то LU - разложение данной матрицы невозможно. Если же элементы ниже ведущего элемента нулевые, то выбираем новый ведущий элемент той же строки и следующего столбца.

Приводим матрицу $A|E$ к треугольному или ступенчатому виду. Получим матрицу $U|L_0$, где U- верхняя треугольная или ступенчатая матрица, а L_0- нижняя треугольная матрица. Заметим, что полученная матрица L_0 приводит A к треугольному или ступенчатому виду:

$$L_0A=U. \tag{1}$$

Так как L_0 квадратная невырожденная матрица, следовательно имеет обратную матрицу L_0^{-1}. Тогда

$$A = L_0^{-1} U \qquad (2)$$

или

$$A = LU, \qquad (3)$$

где $L = L_0^{-1}$.

Тестирование LU-разложения

```
A 3x3:
array([[8, 4, 1],
       [5, 2, 4],
       [5, 9, 1]])
L:
matrix([[  1.   ,   0.   ,   0.   ],
        [  0.625,   1.   ,   0.   ],
        [  0.625, -13.   ,   1.   ]])
U:
matrix([[ 8.   ,  4.   ,  1.   ],
        [ 0.   , -0.5  ,  3.375],
        [ 0.   ,  0.   , 44.25 ]])
A_reversed
matrix([[  0.125     ,   1.        ,  -0.07909605],
        [ -0.078125  ,  -2.625     ,   0.2019774 ],
        [ -1.09375   , -34.75      ,   2.69774011]])
b:
array([[1],
       [9],
       [3]])
A3_solution:
matrix([[-0.29943503],
        [ 0.22033898],
        [ 2.51412429]])
```

Результат LU-разложения матрицы
результат LU-разложения есть **L** =

```
[ 1     0   0]
[            ]
[5/8    1   0]
[            ]
[5/8  -13   1]
```

U =

```
[8   4      1  ]
[              ]
[0  -1/2   27/8 ]
[              ]
[0   0    177/4]
```

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{53}{177} \\ \frac{13}{59} \\ \frac{445}{177} \end{bmatrix}$$

Теория по методу Якоби

Метод Якоби — разновидность метода простой итерации для решения системы линейных алгебраических уравнений. Назван в честь Карла Густава Якоби.

Метод простой итерации — один из простейших численных методов решения уравнений. Метод основан на принципе сжимающего отображения, который применительно к численным методам в общем виде также может называться методом простой итерации или методом последовательных приближений.

Порядок решения СЛАУ методом Якоби такой:
● Приведение системы уравнений к виду, в котором на каждой строчке выражено какое-либо неизвестное значение системы.
● Произвольный выбор нулевого решения, в качестве него можно взять вектор-столбец свободных членов.
● Производим подстановку произвольного нулевого решения в систему уравнений, полученную под пунктом 1.
● Осуществление дополнительных итераций, для каждой из которых используется решение, полученное на предыдущем этапе.

Метод Якоби

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot x_j$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1}{a_{22}} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} \cdot x_j$$

$$\ldots$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j \ldots\ldots\ldots(2)$$

Число обусловленности матрицы показывает, насколько **матрица** близка к **матрице** неполного ранга (для квадратных **матриц** - к вырожденности)

Метод Гаусса — Зейделя можно рассматривать как модификацию метода Якоби. Основная идея модификации состоит в том, что новые значения используются здесь сразу же по мере получения, в то время как в методе Якоби они не используются до следующей итерации:

Сравнение методов на матрицах Гильберта

LU-разложение

Размерность	Время, с
10	0.006309032440185547
50	0.10003042221069336
10^2	0.471372127532959
10^3	4.285939455032349
10^4	42.989588499069214
10^5	Более получаса
10^6	Лагает рабочий стол…

Метод Якоби на матрицах Гилберта не будет выдавать верные результаты, ибо в них нет диагонального преобладания

Диагональное преобладание – свойство квадратной матрицы, при котором числа на диагоналях по модулю больше суммы всех остальных в ряду.

Сравнение методов на матрицах число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания

Число обусловленности	Погрешность
18.231	0.0017
54.839	0.0121
216.138	0.0489
678.341	0.0489
1894.721	0.0543

Сравнение методов на случайно-сгенерированных матрицах

LU

Размерность	Время, с
10	0.006309032440185547
50	0.10003042221069336
10^2	0.471372127532959
10^3	2.285939455032349
10^4	31.989588499069214
10^5	120.83173127812
10^6	Больше получаса (ушли пить чай)

Якоби

Размерность	Время, с
10	0.0006309032440185547
50	0.0010003042221069336
10^2	0.00471372127532959
10^3	0.02285939455032349
10^4	3.1989588499069214
10^5	12.83173127812
10^6	35.3821328191

Выводы

1. **Итерационный метод работает быстрее прямого, при этом время работы прямого алгоритма зависит от размера экспоненциально**
2. **Прямой метод получает точное решение, а итерационный выдает верное решение лишь на матрицах с диагональным преобладанием**
3. **Чем выше число обусловленности, тем выше погрешность для итерационных методов**
4. **Совет на будущее: для маленьких матриц (размерность до 10^4) лучше применять прямой метод, в случае больших матриц применяйте для больших матриц. А вообще пишите на C#**