Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский университет ИТМО

Мега факультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Прикладная математика

Лабораторная работа 2

Выполнили:

Кутузов Михаил (M32001)

Капанин Дмитрий (M32021)

Соколов Денис (M32021)

Преподаватель:

Москаленко Мария Александровна

Ссылка на код:

Цель работы

1. Реализуйте метод градиентного спуска
2. Оцените, как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага использовать различные методы:
    a. Постоянная величина шага (в зависимости от величины)
    b. Метод дробления шага
    c. Метод золотого сечения
    d. Метод Фибоначчи
3. Проанализируйте траекторию реализованных методов для нескольких квадратичных функций: придумайте две-три квадратичные двумерные функции, на которых работа метода будет отличаться, рассмотрите различные начальные приближения, нарисуйте графики с линиями уровня функций и траекториями методов
4. Проанализируйте, зависит ли сходимость методов от выбранной точки начального приближения
5. Реализуйте метод сопряженных градиентов
6. Сравните траектории, полученные методом градиентного спуска и методом сопряженных направлений, при фиксированном начальном приближении

Описание используемых методов

Градиентный спуск

Градиентный спуск — метод нахождения *локального* минимума или максимума функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например метод золотого сечения. Также можно искать не наилучшую точку в направлении градиента, а какую-либо лучше текущей.

Наиболее простой в реализации из всех методов локальной оптимизации. Имеет довольно слабые условия сходимости, но при этом скорость сходимости достаточно мала (линейна). Шаг градиентного метода часто используется как часть других методов оптимизации, например метод Флетчера — Ривса.

$$\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F\left(\vec{x}^{[j]}\right)$$

Метод сопряжённых градиентов — метод нахождения локального экстремума функции на основе информации о её значениях и её градиенте. В случае квадратичной функции в R^n минимум находится не более чем за n шагов.

Результаты реализованных методов

Для функции $f(x, y) = x^2 + 7 * y^2 + x * y + 1$

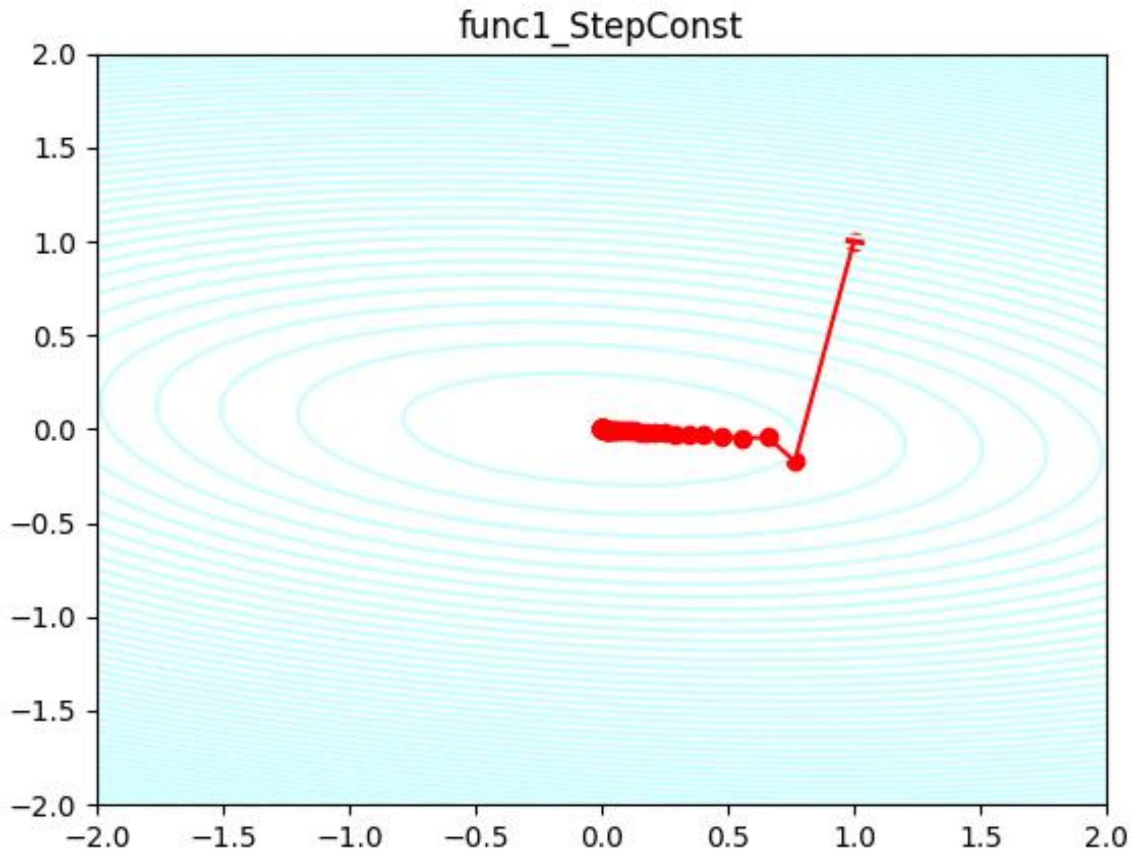
Начальный шаг = 10

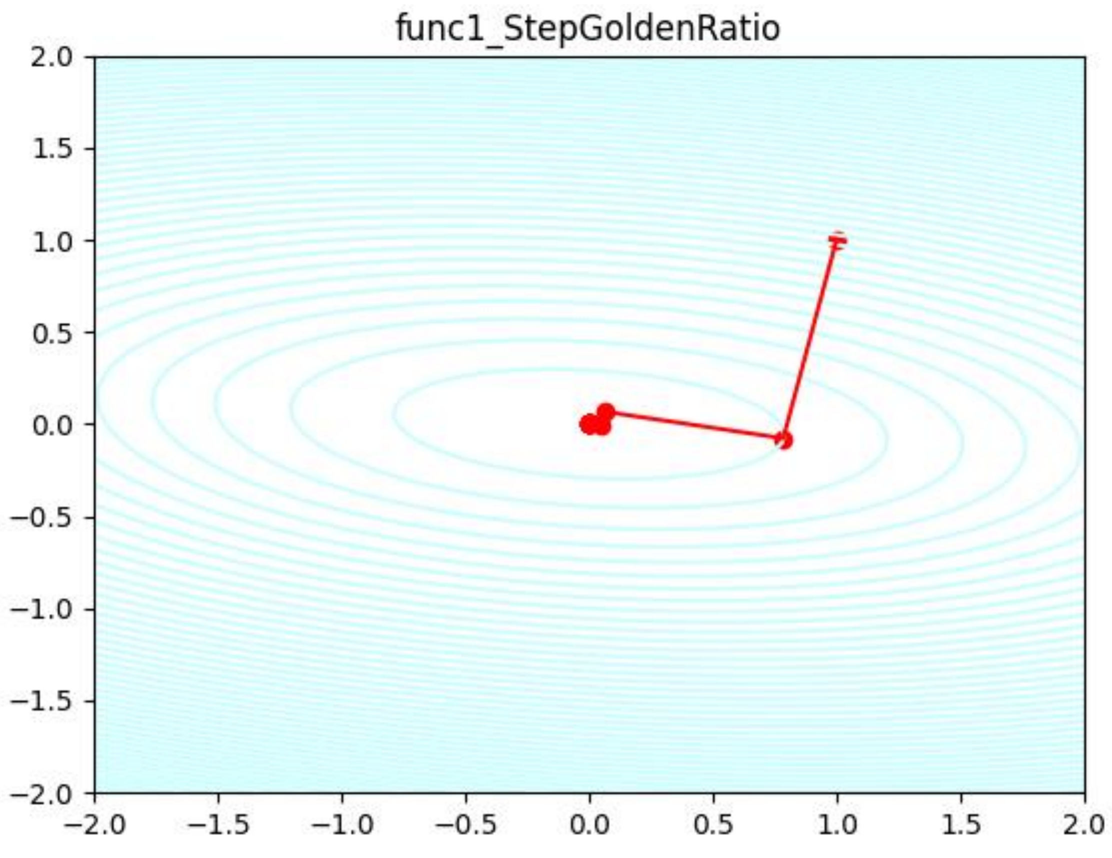
Name: func1_StepConst, Count of Steps: 88, Minimal_point: [5.46964251e-07 -9.55773247e-08]

Name: func1_StepSplit, Count of Steps: 34, Minimal_point: [-1.16167085e-08 4.63230556e-08]

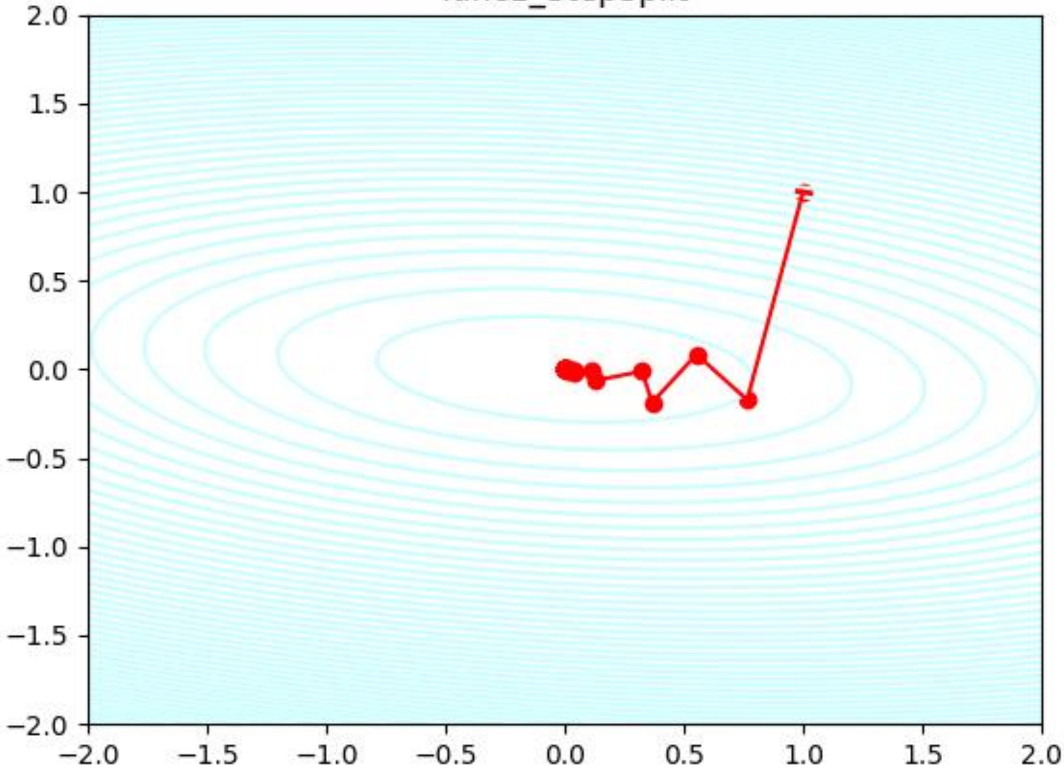
Name: func1_StepFibonacci, Count of Steps: 13, Minimal_point: [2.07214960e-07 2.54322727e-08]

Name: func1_StepGoldenRatio, Count of Steps: 13, Minimal_point: [2.44240848e-07 1.51227045e-08]

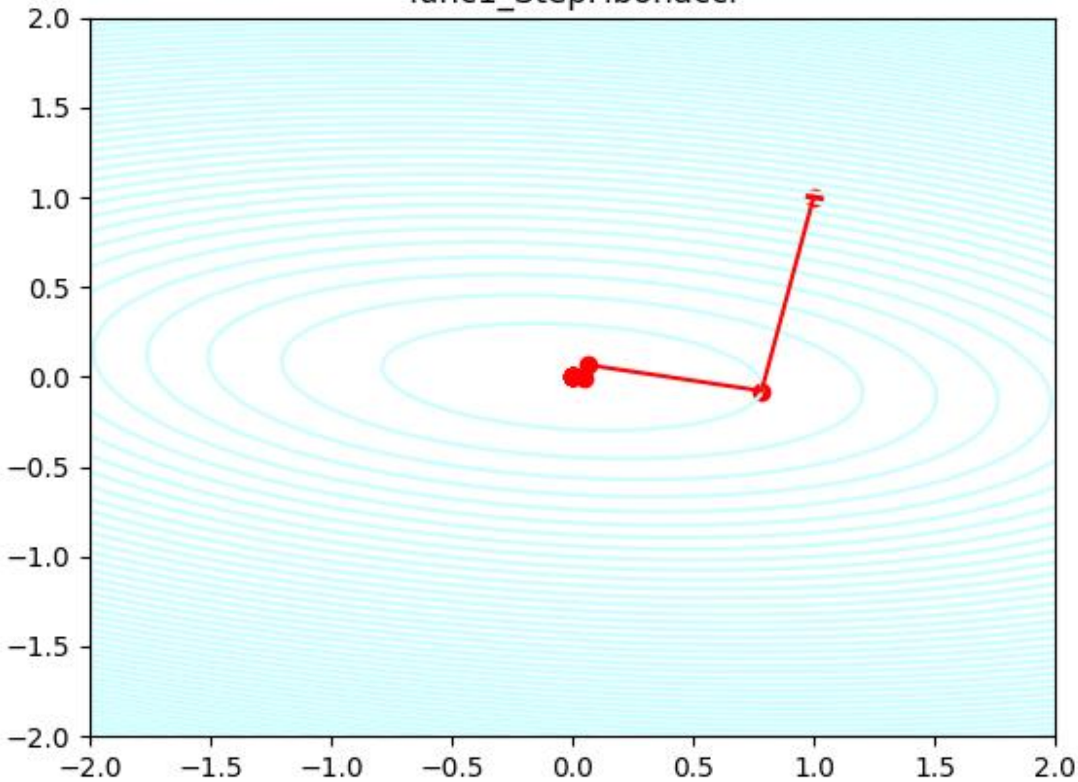

func1_StepConst
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


func1_StepGoldenRatio
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

func1_StepSplit



func1_StepFibonacci



Для функции $f(x, y) = 3 * x^2 + 13 * y^2$

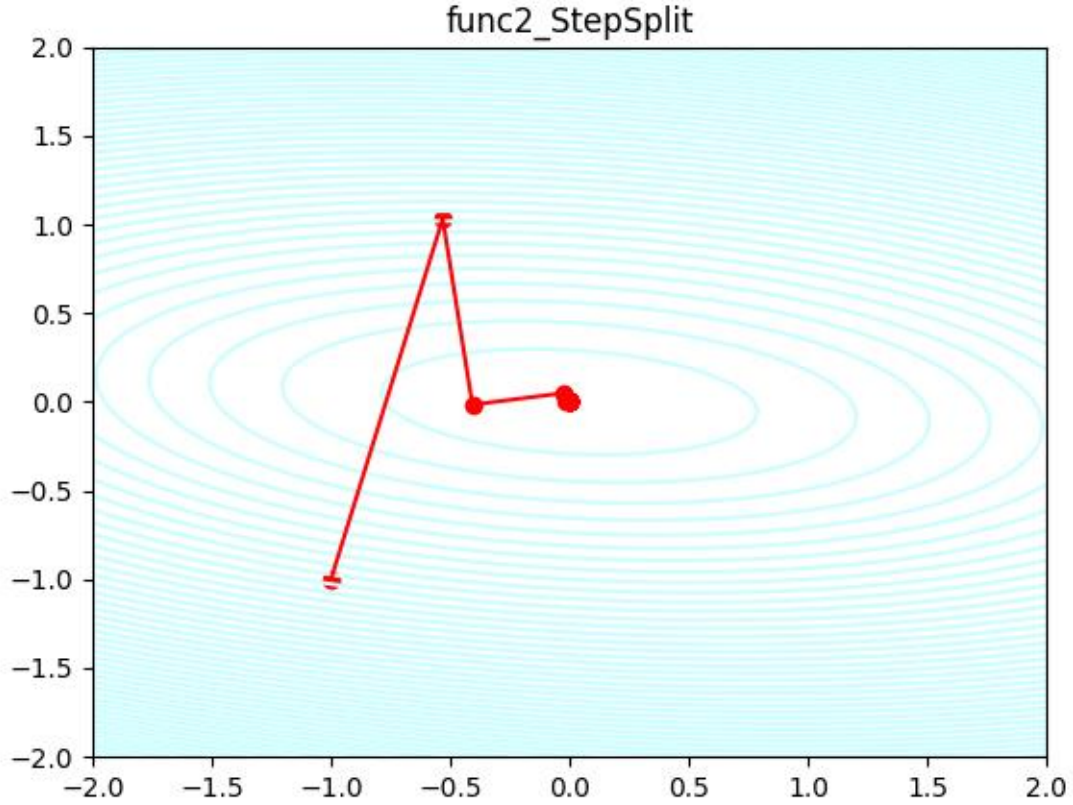
Начальный шаг = 10

Name: func2_StepConst, Count of Steps: 54, Minimal_point: [-4.28575532e-07 -5.00000000e-08]

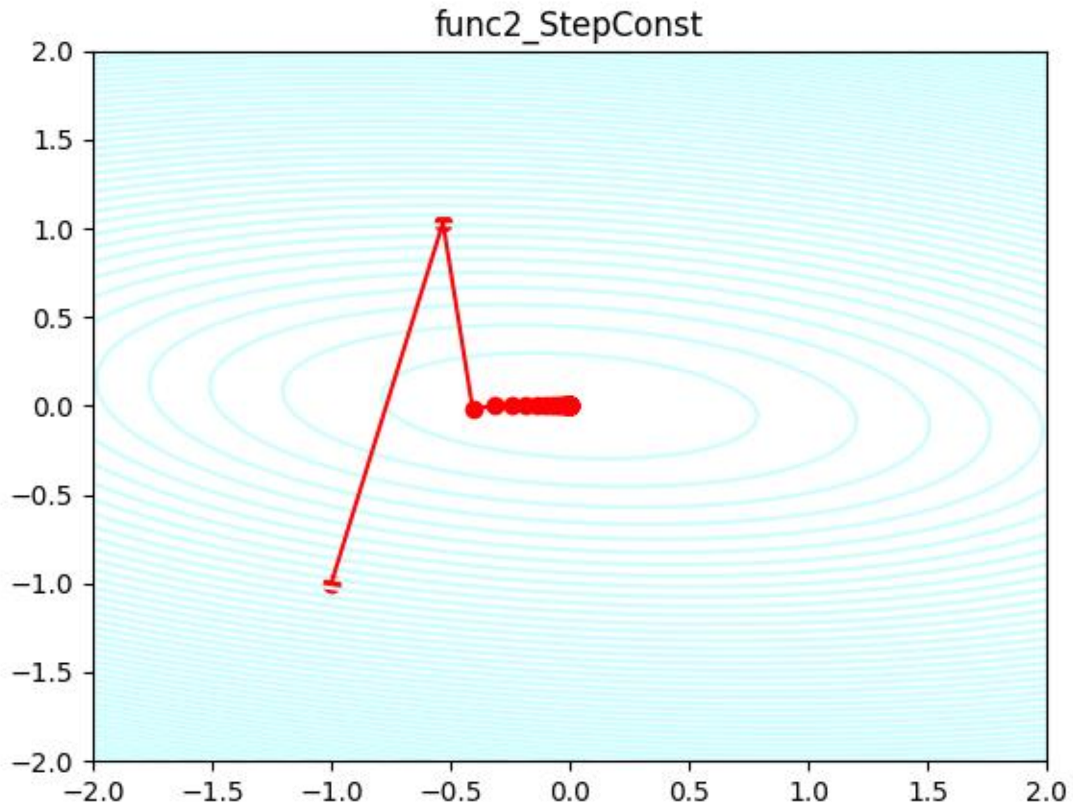
Name: func2_StepSplit, Count of Steps: 15, Minimal_point: [-2.47999394e-08 -1.93678556e-08]

Name: func2_StepFibonacci, Count of Steps: 17, Minimal_point: [-5.44889523e-09 5.49369602e-09]

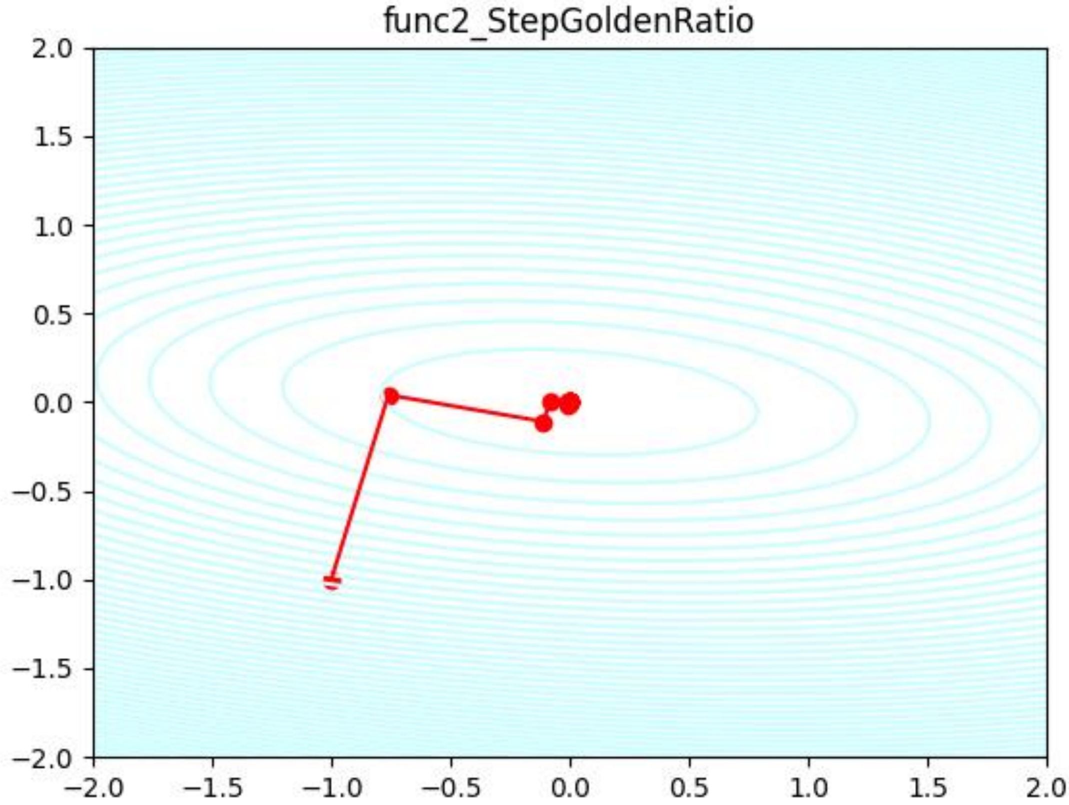
Name: func2_StepGoldenRatio, Count of Steps: 17, Minimal_point: [-5.35621374e-09 5.40958921e-09]

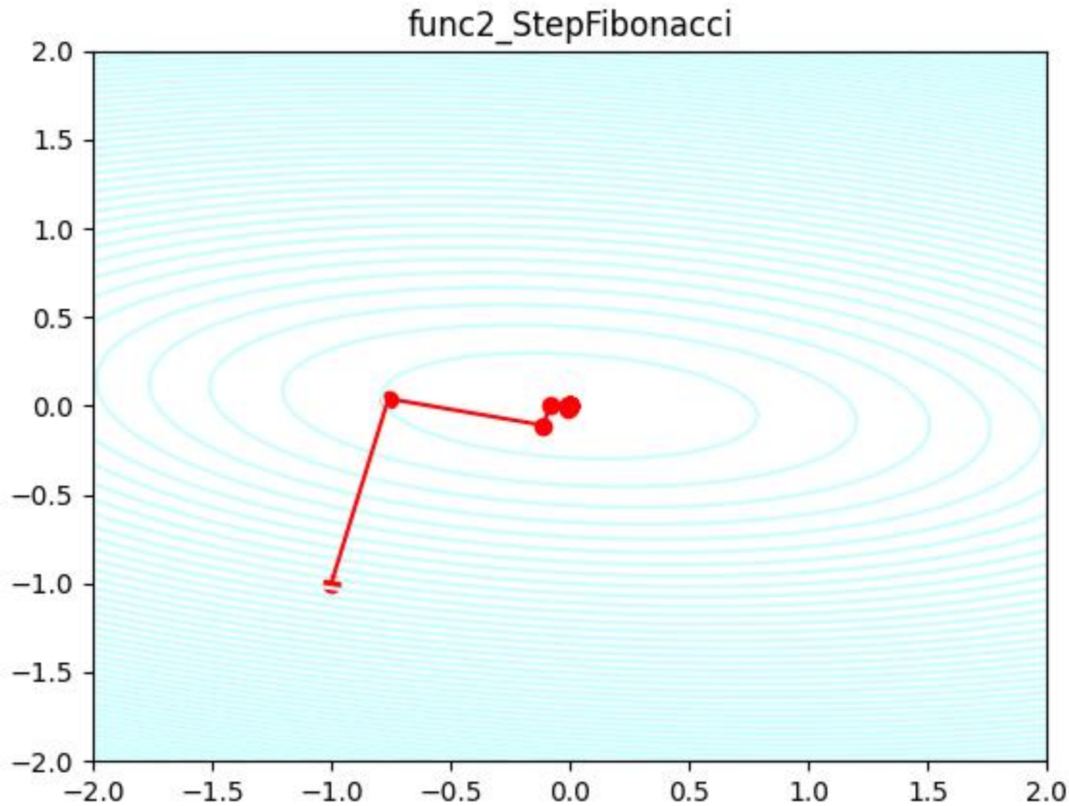


func2_StepSplit
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0



func2_StepConst
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0

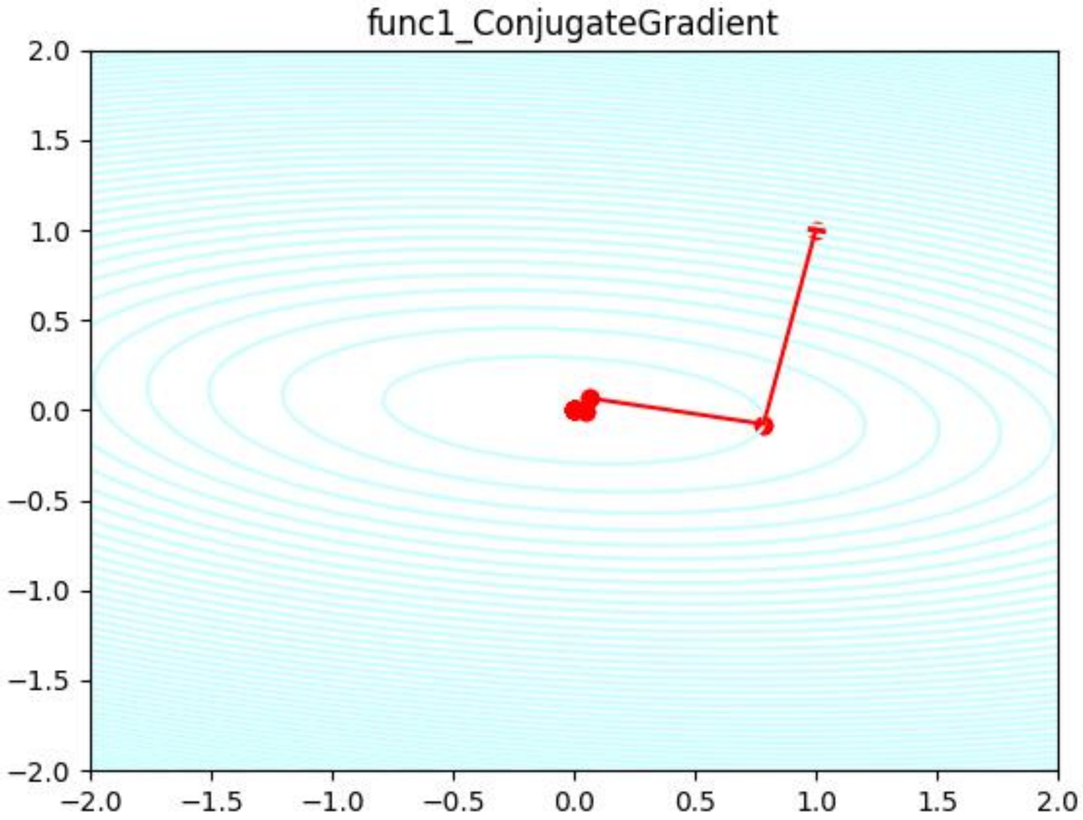

func2_StepGoldenRatio
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0


func2_StepFibonacci
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0

Результат метода работы сопряженных градиентов

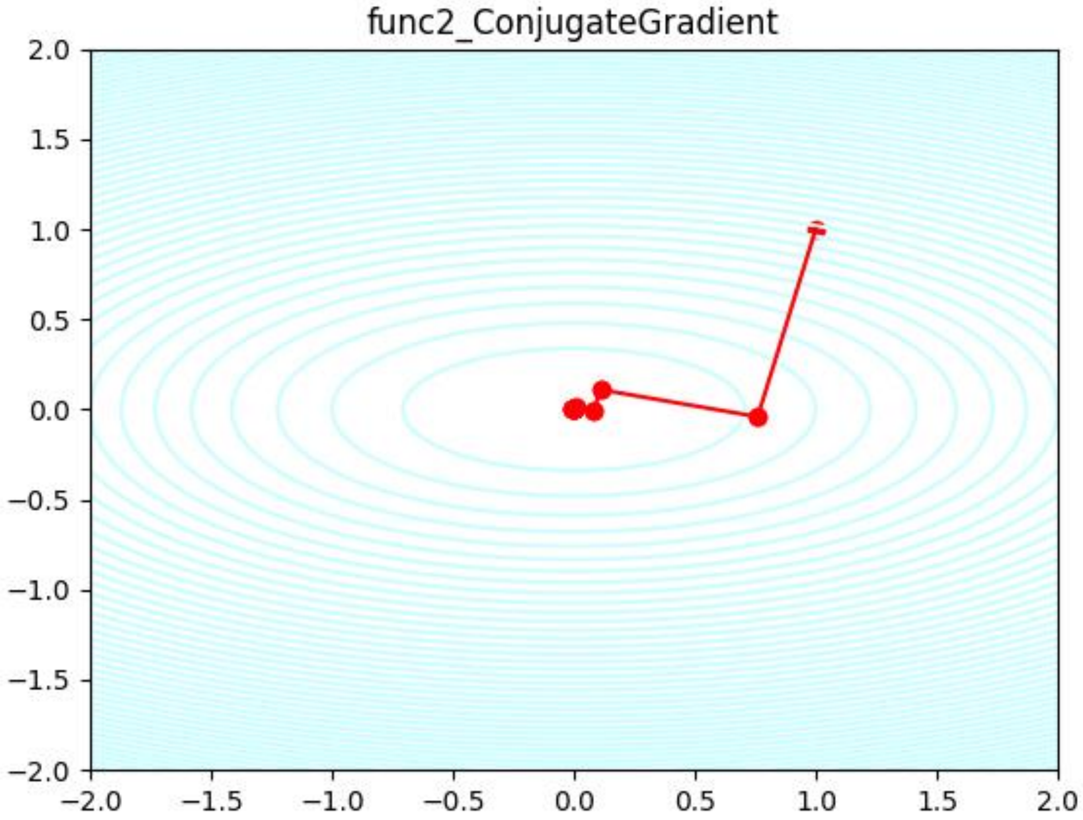
Для функции $f(x, y) = x^2 + 7 * y^2 + x * y + 1$

Name: func1_ConjugateGradient, Count of Steps: 11, Minimal_point: [-2.51927103e-04 -1.59112008e-06]



Для функции $f(x, y) = 3 * x^2 + 13 * y^2$

Name: func2_ConjugateGradient, Count of Steps: 10, Minimal_point: [5.66847195e-05 4.66433818e-06]


func2_ConjugateGradient
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0