Colle L2PR-2 A1

1 Question de cours

Donner la définition de "déterminant" d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition du "rang" d'une telle matrice.

2 Exercice

Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n^\alpha}$ Pour $\alpha > 0$ et $\theta \neq 0[2\pi]$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{\alpha n}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^8}{n!}$.

Colle L2PR-2 A2

1 Question de cours

Donner le critère de Cauchy et la règle d'Alembert pour la convergence des séries.

2 Exercice

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

b) Pour $a, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, la matrice H_n de taille n où les termes diagonaux $h_{i,i}$ sont donnés par pour $i \in (1...n)$:

$$h_{i,i} = a + \lambda_i$$

et les autres termes valent a.

c) La matrice pleine de taille n, D_n dont les éléments diagonaux valent 0, les éléments sur-diagonaux 1 et les sous-diagonaux -1.

Colle L2PR-2 B1

1 Question de cours

1. Donner la définition de suites adjacentes.

2. Énoncer le théorème d'Abel pour la convergence des séries.

2 Exercice

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

b) $A \in \mathcal{M}n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A_{i,j} = |i - j|.$$

c) $A \in \mathcal{M}n(\mathbb{R})$ telle que : $A_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $A_{i,j} = 1$ sinon.

Colle L2PR-2 B2

1 Question de cours

Donner les formules de Cramer (théorème 2.6) pour les matrices.

2 Exercice

Soient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in N, n \geqslant n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

1. Montrer que la convergence de la série des b_n entraine celle de la série des a_n.

2. Montrer que la divergence de la série des a_n entraine celle de la série des b_n.

Colle L2PR-2 C1

1 Question de cours

Donner le critère de convergence pour les séries alternées. Démontrer le.

2 Exercice

a) Donner le déterminant de la matrice suivante en un minimum de calcul.

$$\begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix}$$

b) Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la matrice M donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'application linéaire associée à M est bijective.

c) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}n(\mathbb{K})$.

i) On suppose que D est inversible et que C et D commutent, établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

ii) On suppose que A est inversible et que A et C commutent, établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Colle L2PR-2 C2

1 Question de cours

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner les formules du calcul du déterminant de la matrice A en fonction des mineurs d'indice i, j de la matrice ; préciser laquelle est liée au développement par rapport à une ligne et laquelle est liée au développement par rapport à une colonne.

2 Exercice

Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n-7}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n-7}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} sin(\frac{1}{n^2})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+12}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 2

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique tendant vers 0 et a, b et c trois réels tels que :

$$a + b + c = 0$$

On pose $\forall n \geqslant 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa limite.

Exercice 3

a) Sans calcul donner le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 32 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -32 & -3 & 0 & 32 & 4 \\ -1 & -4 & -32 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En admettant que 546,273 et 169 sont divisibles par 13. Montrer que le déterminant de la matrice suivante est divisible par 13.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$