Colle LIPR-8 A1

1 Question de cours

i) Soit A, une partie non vide de $\mathbb{R}$. Définir minorant de A et borne supérieure de A.

ii) Enoncer la propriété d'Archimède (théorème 2.4) et la prouver.

2 Exercice

i) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs entières convergente. Montrer que cette suite est constante à partir d'un certain rang.

ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

Montrer que cette suite est convergente.

iii) Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose :

$$B = \{|x-y| \;\; x, y \in A\}$$

Montrer que B possède une borne supérieure que l'on note $d(A)$ (diamètre de A). Montrer que $d(A) = sup(A) - inf(A)$.

Colle LIPR-8 A2

1 Question de cours

i) Enoncer le théorème d'encadrement pour les suites.

ii) Montrer que toute suite convergente est bornée.

2 Exercice

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x, y \in R$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On souhaite montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

ii) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $f(z) = zf(1)$.

iii) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{Q}$, $f(y) = yf(1)$.

iv) Conclure.

Colle LIPR-8 B1

1 Question de cours

i) Soit A, une partie non vide de $\mathbb{R}$. Définir majorant de A et borne inférieure de A.

ii) Définir à l'aide de quantificateur, la signification de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

iii) Définir la partie entière, peut-on dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ -E(x) = E(-x)$?

2 Exercice

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On note $f : [a, b] \to [a, b]$ une application croissante. On pose également $A = \{x \in [a, b],\ x \leq f(x)\}$

i) Justifier l'existence de $c = sup(A)$ et montrer que $c \in [a, b]$.

ii) Montrer par l'absurde que $f(c) \leq c$

iii) Montrer par l'absurde que $f(c) \geq c$

Ainsi $f(c) = c$, on dit que l'application admet un point fixe.

Colle LIPR-8 B2

1 Question de cours

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\exists x \in E, P(x)$ signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

b) La composée d'une application bijective et d'une injective est injective.

c) Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, admet une borne inférieure.

d) $\mathbb{R}$ est Archimédien, cela veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.

e) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

f) La partie réelle est toujours un entier relatif.

g) Une suite numérique peut être décroissante et croissante en même temps.

h) Toute suite convergente est bornée

2 Exercice

Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},$$

et

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

i) Montrer que pour tout n, u_n et v_n sont strictement positifs. Montrer que l'on a $u_n \leq v_n$.

ii) A n fixé, donner un encadrement de u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

iii) En déduire que les suites u_n et v_n convergent.

iv) Montrer que ces suites ont la même limite. Cette limite est en réalité la moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0. Gauss en a obtenu une formule exacte grâce à une intégrale elliptique.

Colle LIPR-8 C1

1 Question de cours

i) Définir ce qu'est une $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction injective, surjective et bijective. Dans quel(s) cas a t-on présence d'une fonction réciproque ?

ii) Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors sa limite l est unique.

2 Exercice

i) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

  a) Montrer que $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$.

  b) En déduire que $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

ii) Soient x et y deux réels positifs,

  a) On suppose $x \geq y$, comparer $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ et $\sqrt{x - y}$

  b) Dans le cas général, comparer $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ et $\sqrt{|x - y|}$.

iii) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.

iv) Déterminer l'ensemble des réels vérifiant $x(2x - 1)^2 > 1$.

Colle LIPR-8 C2

1 Question de cours

Citer trois modes de raisonnement mathématique différents pour montrer la propriété P. Les expliquer.

2 Exercice

Soit

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

i) En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leq ln(n+1) - ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

ii) Déduire que

$$ln(n+1) \leq Hn \leq ln(n) + 1.$$

iii) Déterminer la limite de Hn.

iv) Montrer que :

$$u_n = Hn - ln(n),$$

est décroissante et positive.

v) Conclure. Cette limite est en fait notée γ la constante d'Euler-Mascheroni. Elle vaut environ 0,5772.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, démontrer l'inégalité suivante :

$$|a| + |b| \leq |a - b| + |a + b|$$

L'interprété géométriquement et étudier le cas d'égalité.

Exercice 2

Traduire par des propriétés simples les assertions suivantes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $l \in \mathbb{R}$.

i) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in N \ / \ \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$

ii) $\exists N \in N \ / \ \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$

Comparer ces formulations avec celle définissant la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.

Exercice 3

Soient A et B deux parties non-vides majorées de $\mathbb{R}$. On considère la partie de R :

$$A + B = \{x + y \ x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est non-vide, majorée et que :

$$sup(A + B) = sup(A) + sup(B).$$

Exercice 4

Soit f, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Reformuler à laide des quantificateurs universels et des connecteurs logiques que vous connaissez (et, ou, $\Rightarrow$), les assertions suivantes :

i) f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

ii) f s'annule sur $\mathbb{R}$.

iii) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

iv) f est bornée.

v) f n'est pas bornée.

vi) 4 a deux antécédents par f.

vii) 3 a exactement un antécédent par f.

viii) f n'est pas monotone.