Análisis Teórico de un Sistema No Lineal Acoplado con Constantes de Resorte Diferentes

Departamento de Física Teórica y Sistemas Dinámicos No Lineales

11 de diciembre de 2025

Resumen

Este documento presenta el análisis teórico completo de un sistema mecánico no lineal compuesto por dos osciladores amortiguados acoplados mediante un resorte con constante diferente (k_c) no lineal. El sistema se caracteriza por tener constantes de resorte distintas para los resortes principales (k) y de acoplamiento (k_c). Se desarrolla la formulación matemática completa, se analizan las propiedades dinámicas y se discuten las implicaciones físicas de esta asimetría en los parámetros elásticos.

1. Introducción Física del Sistema

1.1. Descripción del Sistema Mecánico Asimétrico

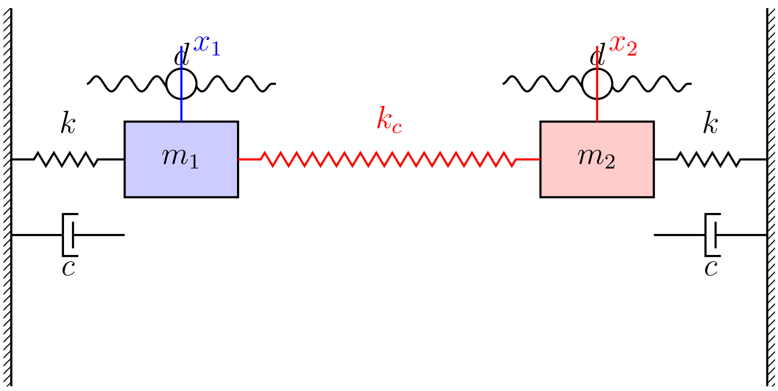

Figura 1: Sistema de dos masas acopladas con resortes de constantes diferentes: resortes principales k y resorte de acoplamiento k_c

El sistema presenta las siguientes características distintivas:

- **Resortes principales**: Constante elástica k (idéntica para ambos)
- **Resorte de acoplamiento**: Constante elástica diferente k_c
- **Amortiguamiento mixto**: Lineal (c) y cuadrático (d)
- **Masas posibles diferentes**: m_1 y m_2 pueden ser distintas

1.2. Diferencia Fundamental: $k \neq k_c$

Al plantear en el problema el hecho de que k y k_c sean diferentes conlleva consecuencias en el problema físico, como el hecho de que el sistema presentara una asímetría en la fuerza de restauración debido a que tiene componentes con diferentes constantes, el grado del acoplamiento dependera de $k; k_c$ y las frecuenciass como la eficiencia del sistema dependen de las mismas.

2. Formulación Matemática Completa

2.1. Ecuaciones Diferenciales del Sistema

Para el sistema mostrado en la Figura 1, las ecuaciones de movimiento son:
Masa m_1:

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - c\dot{x}_1 - d|\dot{x}_1|\dot{x}_1 - k_c(x_1 - x_2) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{c}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{d}{m_1}|\dot{x}_1|\dot{x}_1 - \frac{k_c}{m_1}(x_1 - x_2) \tag{2}$$

Masa m_2:

$$m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 - c\dot{x}_2 - d|\dot{x}_2|\dot{x}_2 - k_c(x_2 - x_1) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}x_2 - \frac{c}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{d}{m_2}|\dot{x}_2|\dot{x}_2 - \frac{k_c}{m_2}(x_2 - x_1) \tag{4}$$

Definiendo las variables de estado:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1 = v_1 \tag{5}$$

$$y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2 = v_2 \tag{6}$$

Obtenemos el sistema de primer orden:

$$\dot{y}_1 = y_2 \tag{7}$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{k + k_c}{m_1}y_1 + \frac{k_c}{m_1}y_3 - \frac{c}{m_1}y_2 - \frac{d}{m_1}|y_2|y_2 \tag{8}$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \tag{9}$$

$$\dot{y}_4 = \frac{k_c}{m_2}y_1 - \frac{k + k_c}{m_2}y_3 - \frac{c}{m_2}y_4 - \frac{d}{m_2}|y_4|y_4 \tag{10}$$

2.2. Formulación Matricial para la Parte Lineal

Separando las partes lineal y no lineal:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{y})$$

donde la matriz lineal $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k+k_c}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_c}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_c}{m_2} & 0 & -\frac{k+k_c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}$$

y la parte no lineal:

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{m_1}|y_2|y_2 \\ 0 \\ -\frac{d}{m_2}|y_4|y_4 \end{bmatrix}$$

3. Análisis Físico de la Diferencia $k \neq k_c$

3.1. Parámetro de Acoplamiento Efectivo

Definimos el parámetro de acoplamiento adimensional:

$$\kappa = \frac{k_c}{k}$$

Este parámetro controla la intensidad del acoplamiento relativo a la rigidez principal:

- $\kappa \ll 1$: Acoplamiento débil, comportamiento casi independiente
- $\kappa \sim 1$: Acoplamiento moderado, interacción significativa
- $\kappa \gg 1$: Acoplamiento fuerte, comportamiento colectivo dominante

3.2. Fuerzas Elásticas en Función de κ

Reescribiendo las fuerzas elásticas:

$$F_{\text{elástica},1} = -kx_1 - k_c(x_1 - x_2) = -k\left[x_1 + \kappa(x_1 - x_2)\right] \tag{11}$$
$$F_{\text{elástica},2} = -kx_2 - k_c(x_2 - x_1) = -k\left[x_2 + \kappa(x_2 - x_1)\right] \tag{12}$$

4. Modos Normales del Sistema Lineal ($d = 0$)

4.1. Ecuaciones para el Caso Lineal

Para $d = 0$, el sistema lineal es:

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k + k_c)x_1 - k_c x_2 = 0 \tag{13}$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + (k + k_c)x_2 - k_c x_1 = 0 \tag{14}$$

4.2. Frecuencias Naturales Sin Amortiguamiento ($c = 0$)

Para $c = 0$ y $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_c & -k_c \\ -k_c & k + k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Asumiendo soluciones $x_i = A_i e^{i\omega t}$:

$$\det \begin{bmatrix} k + k_c - m\omega^2 & -k_c \\ -k_c & k + k_c - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(Modo simétrico: } x_1 = x_2\text{)} \tag{15}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}} \qquad \text{(Modo antisimétrico: } x_1 = -x_2\text{)} \tag{16}$$

5. Análisis de la No Linealidad con k_c

5.1. Efecto Conjunto de k_c y d

La interacción entre la no linealidad de amortiguamiento (d) y el acoplamiento (k_c) produce efectos como lo es la disipación modulada por acoplamiento, esto debido a la transferencia de energía; El acoplamiento no lineal efectvo, esto debido a la no linealidad del sistema creo un acoplamiento dinamico y finalmente esta la dependencia de la amplitud en el acoplamiento.

5.2. Ecuaciones de Energía con k_c Explícita

La energía total del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2$$

La tasa de disipación:

$$\frac{dE}{dt} = -c(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - d(|\dot{x}_1|\dot{x}_1^2 + |\dot{x}_2|\dot{x}_2^2)$$

5.3. Balance Energético con Acoplamiento

La potencia instantánea transferida entre las masas a través del resorte k_c es:

$$P_{\text{transferencia}} = k_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(x_1 - x_2)$$

Esta potencia puede ser positiva o negativa, indicando transferencia en ambas direcciones.

6. Casos Límite de k_c

6.1. Caso 1: $k_c = 0$ (Sin Acoplamiento)

Cuando $k_c = 0$, el sistema se desacopla completamente:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{c}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{d}{m_1}|\dot{x}_1|\dot{x}_1 \tag{17}$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}x_2 - \frac{c}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{d}{m_2}|\dot{x}_2|\dot{x}_2 \tag{18}$$

Dos osciladores independientes no lineales.

6.2. Caso 2: $k_c \ll k$ (Acoplamiento Débil)

Para $\kappa \ll 1$, podemos usar teoría de perturbaciones. Las ecuaciones aproximadas:

$$\ddot{x}_1 \approx -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{c}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{d}{m_1}|\dot{x}_1|\dot{x}_1 - \epsilon\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) \tag{19}$$

$$\ddot{x}_2 \approx -\frac{k}{m_2}x_2 - \frac{c}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{d}{m_2}|\dot{x}_2|\dot{x}_2 - \epsilon\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) \tag{20}$$

con $\epsilon = \kappa \ll 1$.

6.3. Caso 3: $k_c \gg k$ (Acoplamiento Fuerte)

Cuando $\kappa \gg 1$, el resorte de acoplamiento domina. Definimos nuevas variables:

$$X_{\text{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{(Centro de masa)} \tag{21}$$

$$x_{\text{rel}} = x_1 - x_2 \qquad \text{(Coordenada relativa)} \tag{22}$$

Las ecuaciones aproximadas:

$$\ddot{X}_{\text{CM}} \approx -\frac{k}{m_1 + m_2}(x_1 + x_2) - \frac{c}{m_1 + m_2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \tag{23}$$

$$\ddot{x}_{\text{rel}} \approx -\frac{k_c}{\mu}x_{\text{rel}} - \frac{c}{\mu}\dot{x}_{\text{rel}} - \frac{d}{\mu}|\dot{x}_{\text{rel}}|\dot{x}_{\text{rel}} \tag{24}$$

donde $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida.

7. Simetría

7.1. Simetrías del Sistema

1. Simetría de intercambio: Si $m_1 = m_2$, el sistema es simétrico bajo $1 \leftrightarrow 2$
2. Invarianza temporal: Las ecuaciones son autónomas (no dependen explícitamente de t)
3. Simetría de paridad: Las ecuaciones son invariantes bajo $x_i \to -x_i$, $v_i \to -v_i$

8. Metodología Numérica Específica

8.1. Tratamiento Numérico de k_c

En la implementación numérica, k_c aparece en las ecuaciones de dos formas:

1. **Términos fuera de la diagonal**: $\frac{k_c}{m_i}x_j$
2. **Términos diagonales incrementados**: $\frac{k+k_c}{m_i}x_i$

8.2. Esquema de Integración Numérica

Para el método de Runge-Kutta de cuarto orden, los cálculos intermedios deben incluir explícitamente k_c:

$$k_1^{(v_1)} = \Delta t \left[-\frac{k + k_c}{m_1} x_1^n + \frac{k_c}{m_1} x_2^n - \frac{c}{m_1} v_1^n - \frac{d}{m_1} |v_1^n| v_1^n \right] \tag{25}$$

$$k_1^{(v_2)} = \Delta t \left[\frac{k_c}{m_2} x_1^n - \frac{k + k_c}{m_2} x_2^n - \frac{c}{m_2} v_2^n - \frac{d}{m_2} |v_2^n| v_2^n \right] \tag{26}$$

9. Conclusiones

La inclusión explícita de k_c como parámetro independiente de k es esencial para modelar sistemas reales donde los mecanismos de anclaje y acoplamiento son físicamente diferentes. Debido a la complejidad del sistema de ecuaciones se implemento metodos númericos