

# Вычислительная геометрия

Прохоров Михаил  
tg: @Aphanasiy

# Притча

Существует три способа решения геометрии

- 1) Московский - узнаем, что такое точка, вектор и прямая и будем решать все задачи, используя эти знания
- 2) Питерский - зазубрим все формулы, известные нашему тренеру и будем молиться, что они нам попались на олимпиаде
- 3) Саратовский - Фу, ёкарный бабай, это геома... Фу... Фу... Выкинь её сразу, блин, я не буду это решать...

## Притча 2

Все дороги ведут в Рим ~~Рим~~ Москву

# Тест. Задача Фрекен Бок

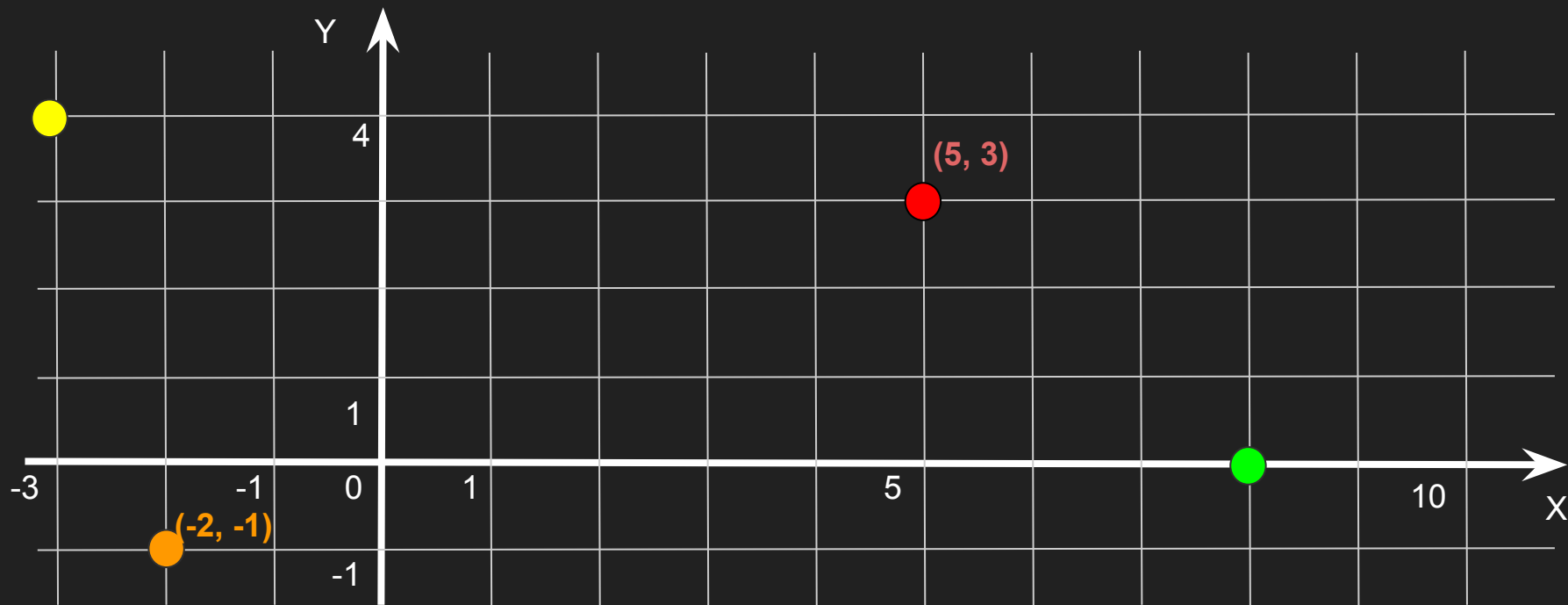
Дано три точки - Малыш, Карлсон и Фрекен Бок

Фрекен-бок смотрит на Малыша, а Карлсон летает где-то рядом и жужжит

В каком ухе жужжит больше?

Если вы умеете решать эту задачу, то можете пойти себе налить ещё чая

# Точка



# Расстояние между точками

## Применяем Теорему Пифагора!

$$A^2 + B^2 = C^2$$

$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = \text{DIST}(P_1, P_2)$$

## Притча 3

Если точки нельзя соединить -  
грош цена таким точкам



J. Statham

Доктор геометрических наук

Эксперт в области графических эффектов

# Как соединить точки?

## Отрезок

Отрезок - это две точки. Длина отрезка - это расстояние между ними

## Вектор

Вектор - это “направление”. Иными словами, стрелочка с соответствующими длинами по координатам  $x$ ,  $y$ , не привязанная ни к какой конкретной точке.

Вычисляется, как разность координат между какими-то точками

## Направленный отрезок

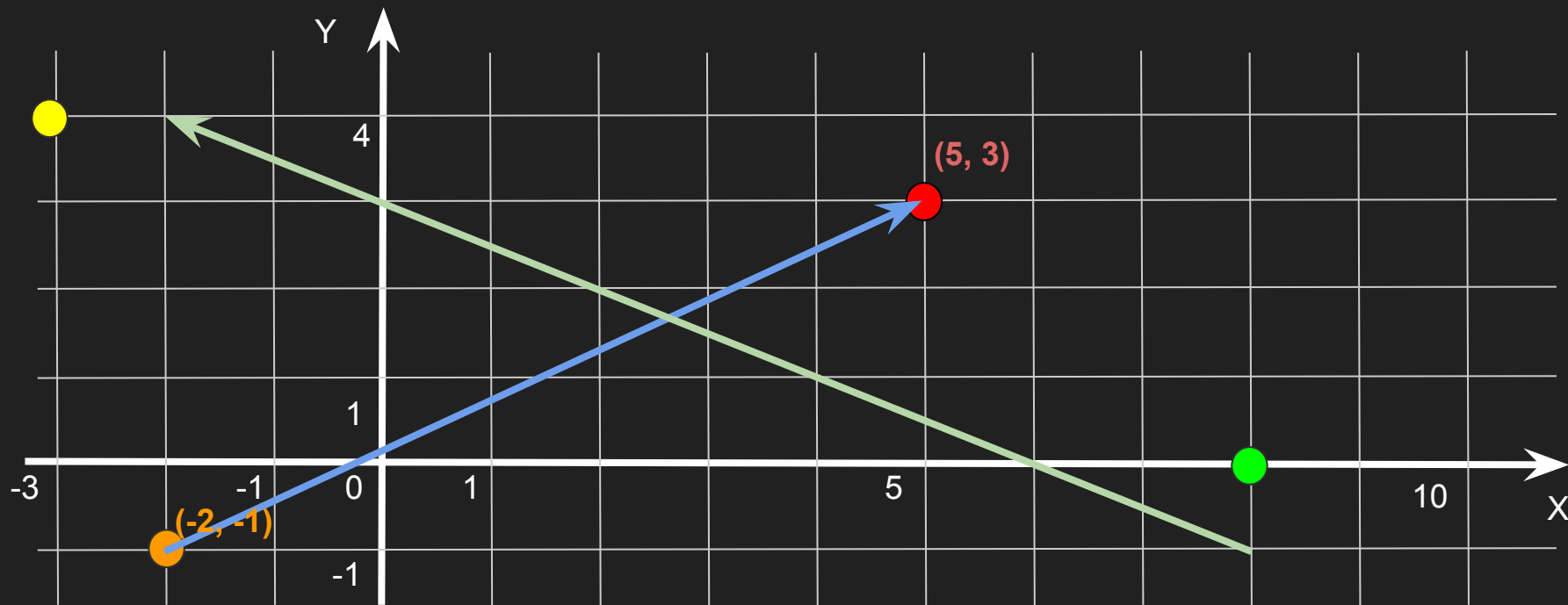
Точка + Вектор. Вторая точка вычисляется суммированием соответствующих координат.



$$X_v = X_2 - X_1 \quad | \quad Y_v = Y_2 - Y_1$$

# Вектор

Найдите синий и зелёный вектор



# Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов вычисляется как  $|a| * |b| * \cos(a, b)$

$$|a| * |b| * \cos(a, b) = |(a_x + a_y)| * |(b_x + b_y)| * \cos(a, b) =$$

$$= |a_x * b_x| * \cos(a_x, b_x) + |a_x * b_y| * \cos(a_x, b_y) + |a_y * b_x| * \cos(a_y, b_x) + |a_y * b_y| * \cos(a_y, b_y) =$$

$$= |a_x * b_x| * 1 + |a_x * b_y| * 0 + |a_y * b_x| * 0 + |a_y * b_y| * 1 = a_x * b_x + a_y * b_y$$

$$|a| * |b| * \cos(a, b) = a_x * b_x + a_y * b_y$$

Если **a** и **b** перпендикулярны (угол между векторами - 90),  
то скалярное произведение равно нулю

Определяется в тексте, как “**(a, b)**”

# Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов вычисляется как  $|a| * |b| * \sin(a, b)$

$$|a| * |b| * \sin(a, b) = |(a_x + a_y)| * |(b_x + b_y)| * \sin(a, b) =$$

$$= |a_x * b_x| * \sin(a_x, b_x) + |a_x * b_y| * \sin(a_x, b_y) + |a_y * b_x| * \sin(a_y, b_x) + |a_y * b_y| * \sin(a_y, b_y) =$$

$$= |a_x * b_x| * 0 + |a_x * b_y| * 1 + |a_y * b_x| * (-1) + |a_y * b_y| * 0 = a_x * b_y - a_y * b_x$$

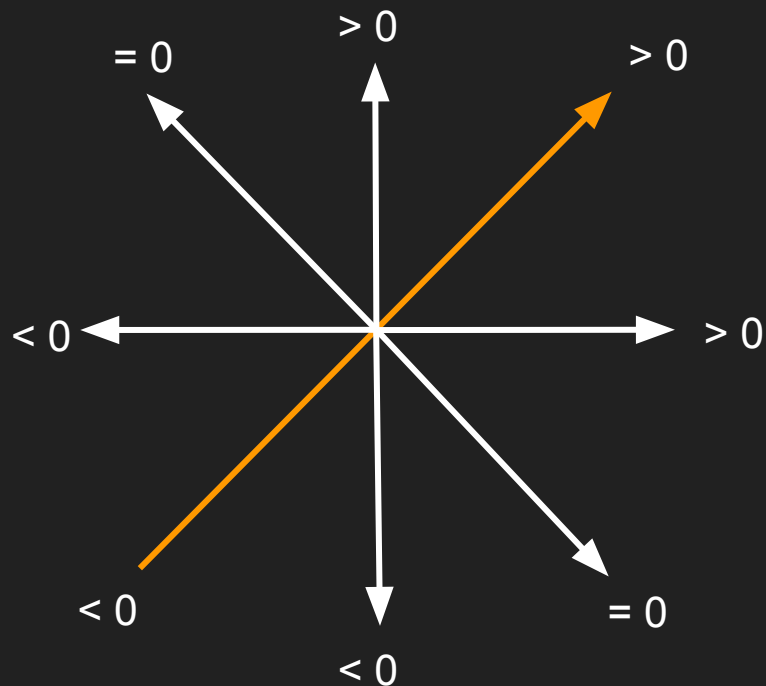
$$|a| * |b| * \sin(a, b) = a_x * b_y - a_y * b_x$$

Если  $a$  и  $b$  сонаправлены (коллинеарны, угол между векторами - 0),  
то векторное произведение равно нулю

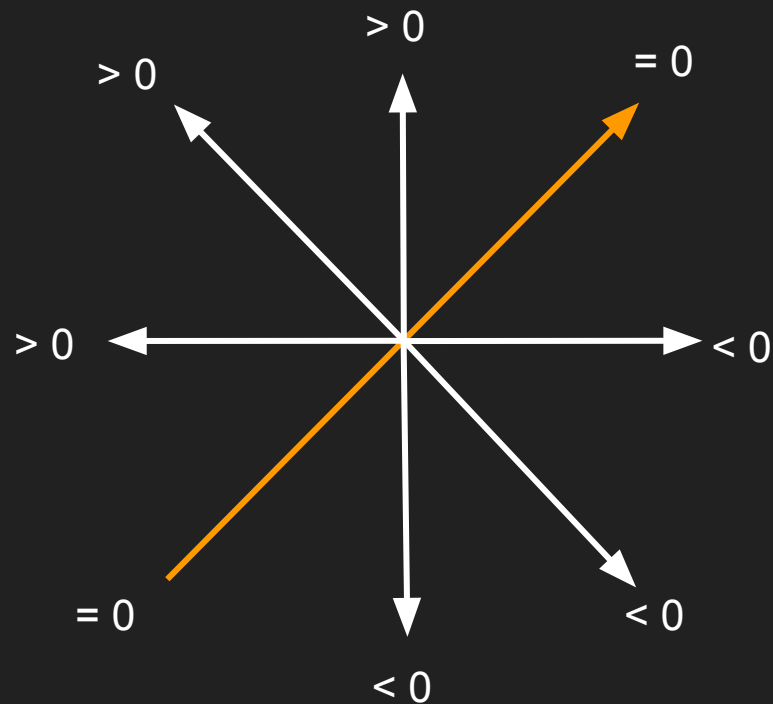
Определяется в тексте, как “[ $a, b$ ]”

А ещё половина векторного произведения - это площадь треугольника, образованного векторами  
 *$\sin(a, b)$  - это синус угла от первого вектора ко второму против часовой стрелки*

# Геометрический смысл произведений



Скалярное произведение



Векторное произведение

## Угол между векторами

- ~~X~~  $\text{asin}([a, b])$
- ~~X~~  $\text{acos}(a, b)$
- ~~X~~  $\text{atan}([a, b] / (a, b)) = \text{atan}(\sin(a, b) / \cos(a, b))$
- ~~V~~  $\text{atan2}([a, b], (a, b))$

# Поворот на угол

$$x = r \cos(a)$$

$$y = r \sin(a)$$

~ ~ ~ синус суммы, косинус суммы ~ ~ ~

$$x' = r \sin(a + b) = r \cos(a) \sin(b) + r \sin(a) \cos(b) = x \sin(b) + y \cos(b)$$

$$y' = r \cos(a + b) = r \cos(a) \cos(b) - r \sin(a) \sin(b) = x \cos(b) - y \sin(b)$$

# Прямая

- Классическое уравнение  $Ax + By + C = 0$

$$A = P_2y - P_1y; \quad B = P_2x - P_1x; \quad -C = Ax + By$$

- По двум точкам
- По точке и вектору

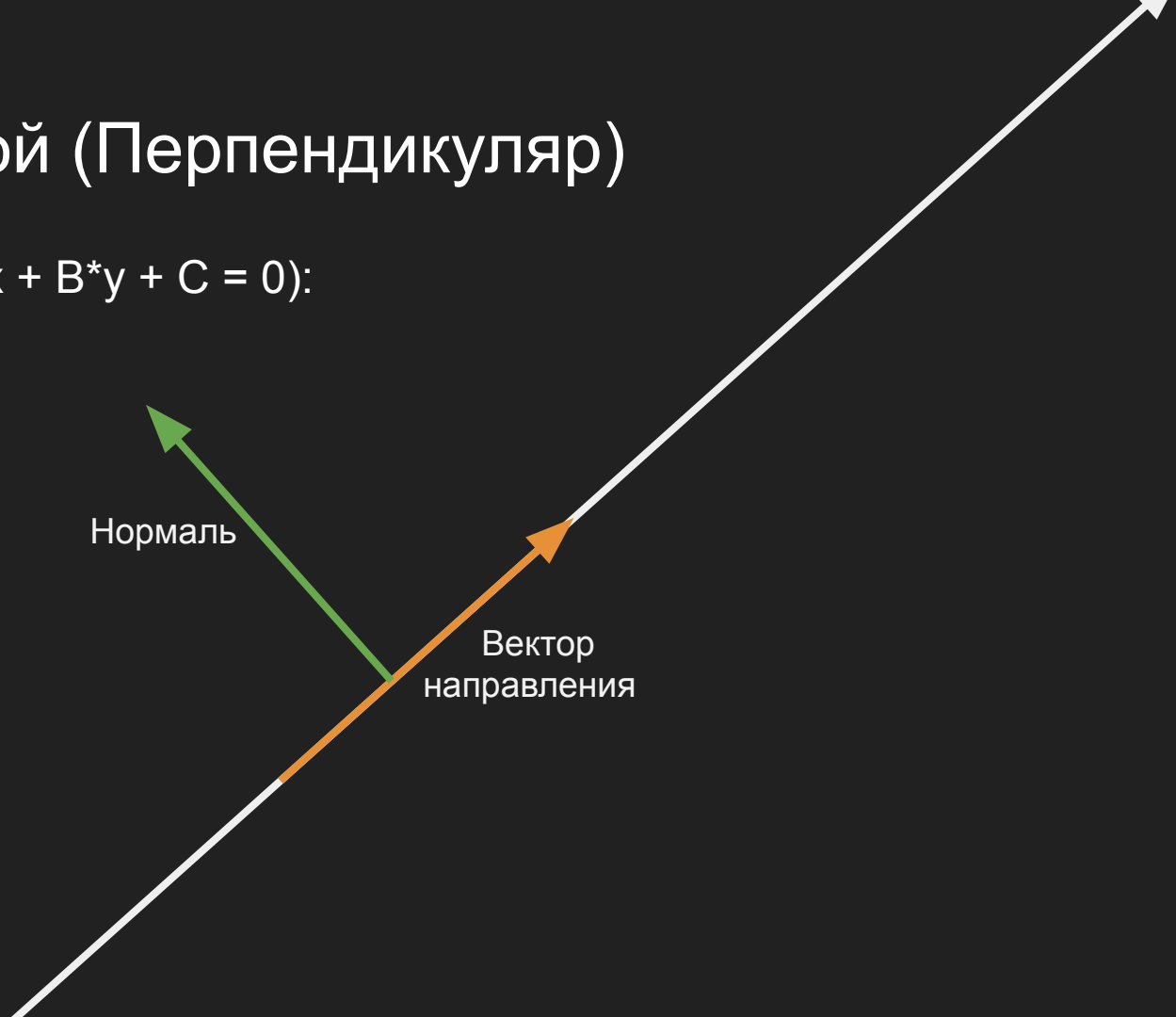
# Нормаль к прямой (Перпендикуляр)

Классический вариант ( $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ ):

–  $(A, B)$

Вектор + Точка:

–  $(-B_v, A_v)$





# Расстояние от точки до прямой

$$P' = (n_x * t + P_x, n_y * t + P_y)$$

$$A * P'_x + B * P'_y + C = 0$$

Остаётся решить уравнение  
для  $t$

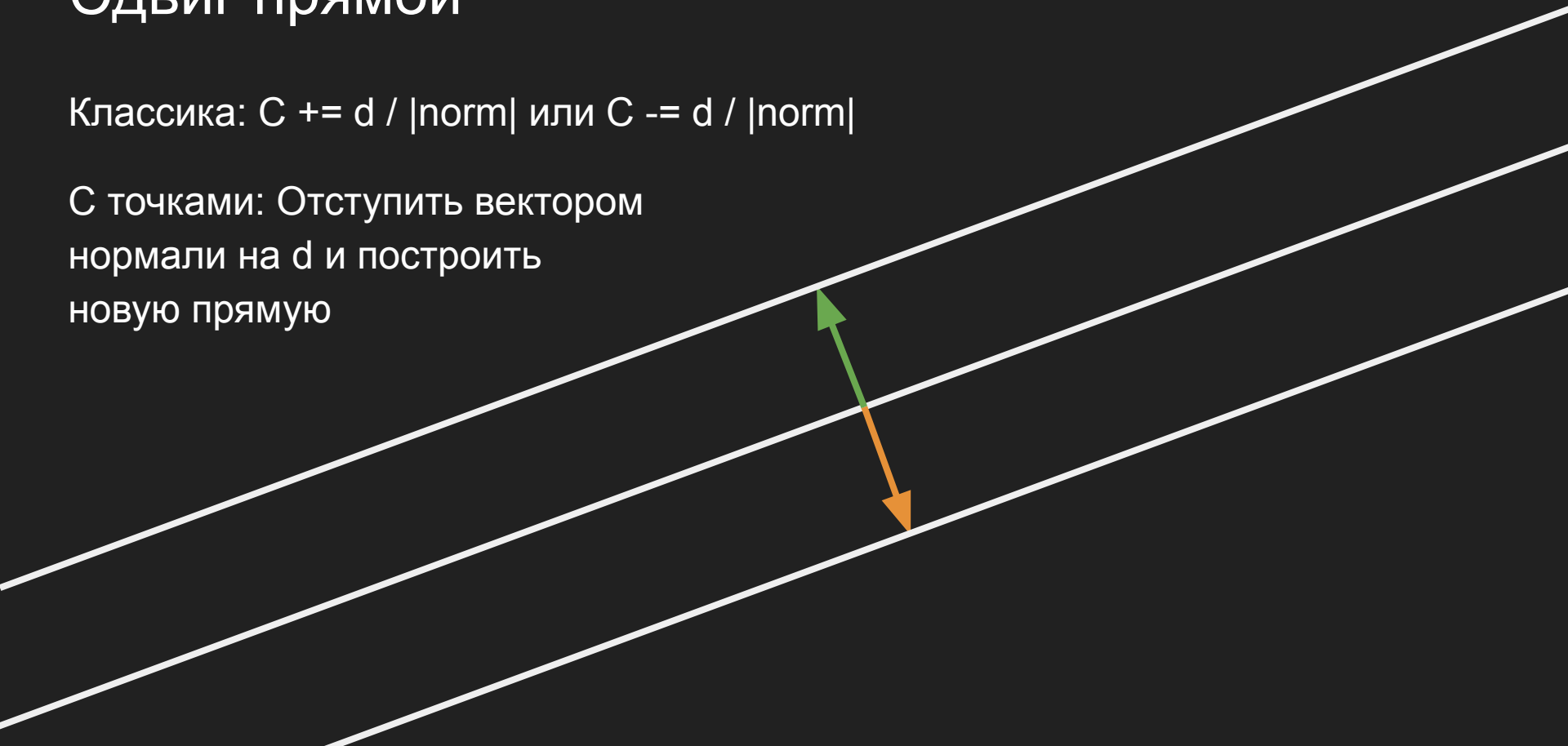


TODO: Уравнение подстановки точки в нормальную форму

# Сдвиг прямой

Классика:  $C += d / |norm|$  или  $C -= d / |norm|$

С точками: Отступить вектором нормали на  $d$  и построить новую прямую



# Пересечение прямых

Классика:

Решаем уравнение

$$| \quad A1 * x + B1 * y + C = 0$$

$$| \quad A2 * x + B2 * y + C = 0$$

Параметрически:

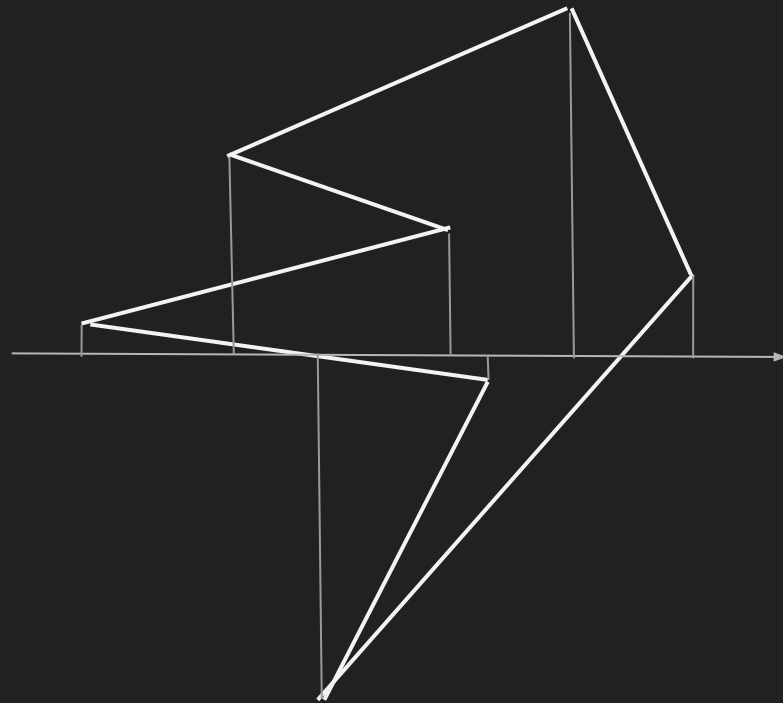
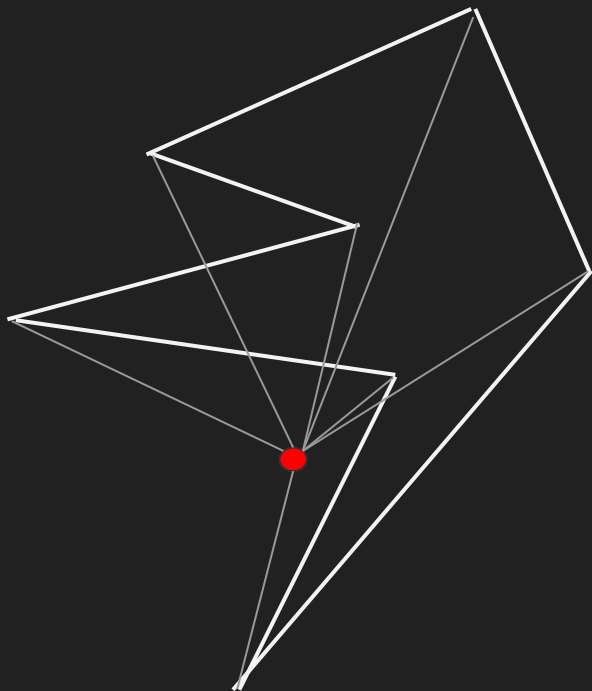
Решаем уравнение

$$| \quad P1.x + B1 * t1 = P2.x + B2 * t2$$

$$| \quad P1.y + A1 * t1 = P2.y + A2 * t2$$

Решение этих систем - упражнение для читателя

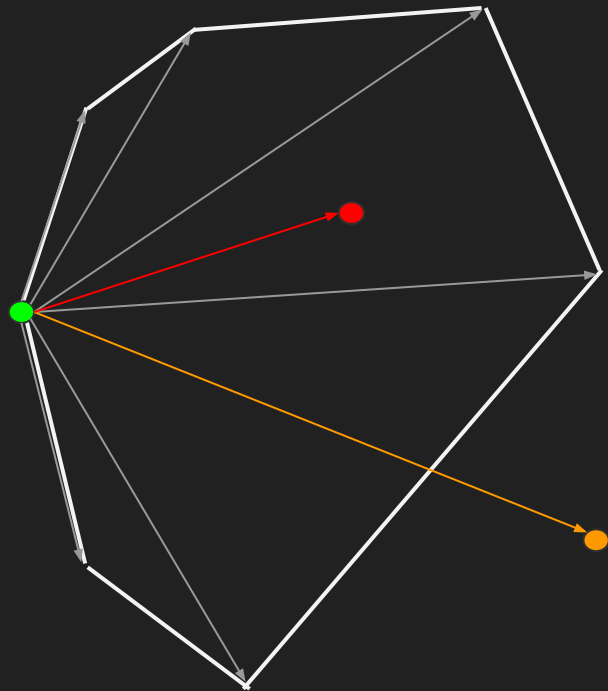
# Площадь многоугольника



# Нахождение точки в любом многоугольнике

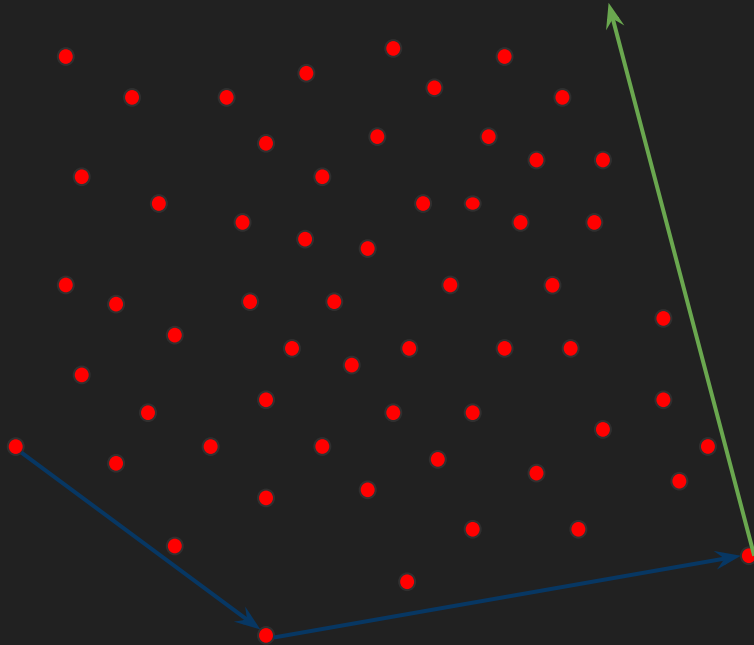


# Нахождение точки в выпуклом многоугольнике



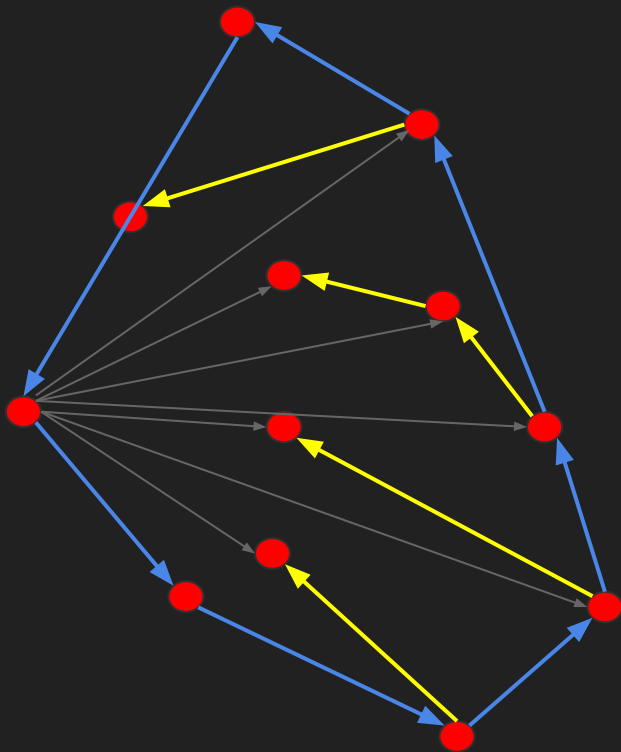
Ищем бинпоиском, в каком секторе лежит точка. Далее проверяем, что точка лежит в том треугольнике, который образуется сектором и другим краем многоугольника

# Выпуклая оболочка методом заворачивания подарка (Джарвис)



Асимптотика:  $O(N * k)$

# Алгоритм Грэхема



Сортируем точки по полярному углу от самой левой нижней.

Сравнение по полярному углу происходит при помощи векторного произведения

Дальше обходим точки в порядке сортировки. Если в какой-то момент повернули слишком сильно, убираем лишние грани. Проверка на “слишком сильный заворот” происходит векторным произведением (другой знак)



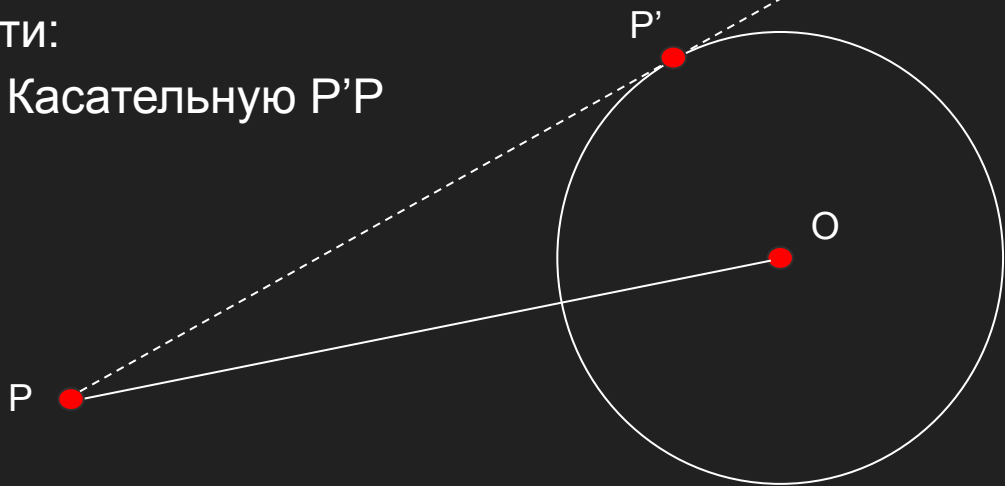
# Касательная к окружности

Дано:

- Точка  $P$
- Окружность  $O$

Найти:

- Касательную  $P'P$



TODO: Доделать слайд

Что мы опустили:

- 1) Пересечение прямой и окружности
- 2) Пересечение окружностей

# Кодинг тайм!

Переносимся в sublime...

Примеры задач:

- 1) Положение двух отрезков (пересекаются / не пересекаются)
- 2) Где находится точка относительно треугольника (внутри/снаружи/на границе)
- 3) Пересекаются ли отрезок и горизонтальный луч?