气体动力学

流体力学

> ✎ **Note**
>
> 内容源自吴望一的《流体力学》（因为边老师这节内容开始用板书然后有几节课前面在做展示~~我翘掉了~~，所以我根本不知道他讲了什么😅😅😅）
> 但是这一章应该不会考大题，所以要看的话就看一些结论
> 如果上过工程热力学的话会发现里面有很多定义与工程热力学相似却不同，从物理的角度来说他们是同一个东西，只是切入点不同，一个是流体力学一个是热力学
> ~~事实证明我热力学学的真的很烂，给库老师磕头~~

气体动力学基本方程组

我们做出几个假设

1. 忽略粘性作用（雷诺数很大）
2. 忽略热传导作用 绝热过程
3. 忽略重力作用
4. 完全气体，比热为常数 满足方程 $p = \rho RT$

经典理想气体动力学基本方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\rho} \nabla p \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

在直角坐标系中可展开为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0;
\end{aligned}
$$

定常流动

我们考虑定常运动，流动是绝热等熵的，对于可压缩流体，Bernoulli 方程写作

$$
\frac{V^{\,2}}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+gz=C(\psi)
$$

对于等熵过程有

$$
\frac{p}{\rho^\gamma}=C
$$

其中 $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$ 则

$$
\int\frac{dp}{\rho}=\int\frac{C^{1/\gamma}}{p^{1/\gamma}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}
$$

所以对于可压缩 Bernoulli 方程，考虑忽略 z 变化影响也就是将其归入右侧常数想，则写作

$$
\frac{V^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C(\psi)
$$

热力学给出动能和表征内能的焓之和为常数（能量守恒），所以上式又可以写作

$$
\frac{V^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{V^2}{2}+h=C(\psi)
$$

假定速度为零时，给出滞止焓 h_0，那么当焓为零时，给出最大速度满足

$$
V_{\max}=\sqrt{h_0}
$$

根据焓的定义 $h=C_pT$，利用 Bernoulli 积分，给出剩下滞止参数所满足表达式

$$
\begin{aligned}
T_0&=T+\frac{V^2}{2C_p}\\
p+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\rho V^2&=p_0\frac{\rho}{\rho_0}
\end{aligned}
$$

给出声速的定义：

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$

表示微弱扰动在可压缩介质的传播速度。根据 $\frac{p}{\rho^\gamma} = C$ 可以求得

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

根据 Bernoulli 积分同样能求出滞止声速 a_0。(其实根据上式，我们可以计算出热力学中对于声速的定义 $a = \sqrt{\gamma RT}$)

牛顿与声速 >

牛顿是最早计算声速的人，但是他采用的是等温过程，计算出声速 $a = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ 求出空气中的声速约为 $280m/s$ ，存在 20% 牛顿通过测量出声速的速度为 $330m/s$ 但认为实验误差比较大，自己的理论是正确的（但是在牛顿时代还没有热力学这门学科呢）

对于 Bernoulli 积分可以写成

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0}{\gamma - 1} = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

左右两边除以任意一个常数，并将另一个常数代入可得

$$\frac{V^2}{V_{\max}^2} + \frac{a^2}{a_0^2} = 1$$

在 Va 平面上表征一个椭圆在第一象限的部分，因为其一定存在流速等于声速的部分，则称此时速度和声速为 **临界速度** 及 **临界声速**，即

$$a_* = V_*$$

对应的热力学参数可称为临界参数。

定义马赫数

$$Ma = \frac{V}{a}$$

$Ma > 1, Ma = 1, Ma < 1$ 这三种情况分别称为超声速、声速和亚声速

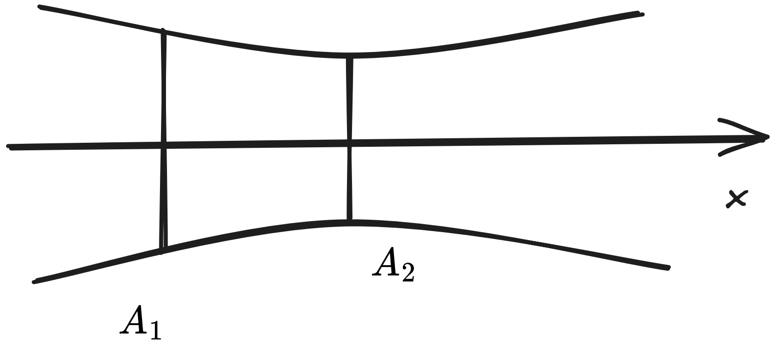
管道中的准一维定常流动

讲管内缓变的定常流动看成是一维定常运动，这样的管道内的定常流动称为准一维定常流动，管内流动满足

$$
\begin{cases}
u(x,y,z) = \bar{u}(x) + u'(x,y,z) \\
\rho(x,y,z) = \bar{\rho}(x) + \rho'(x,y,z) \\
p(x,y,z) = \bar{p}(x) + p'(x,y,z)
\end{cases}
$$

其中 $\bar{u}, \bar{\rho}, \bar{p}$ 称为横截面上的平均速度、平均压强和平均密度， u', ρ', p' 为平均量上的微小扰动，都是小量可以为忽略。

考虑管道两个相距为 dx 的横截面 A_1, A_2



质量守恒定律给出(注：下面的物理量均为平均量)

$$
\int_{A_2} \rho u \, \mathrm{d}A - \int_{A_1} \rho u \, \mathrm{d}A = 0
$$

所以

$$
\frac{d}{dx} \int_A \rho u \, \mathrm{d}A \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u A) = 0
$$

x 方向上的动量方程给出

$$
\int_{A_2} \rho u^2 \, \mathrm{d}A - \int_{A_1} \rho u^2 \, \mathrm{d}A = -\int_{A_2} p \, \mathrm{d}A + \int_{A_1} p \, \mathrm{d}A
$$

所以

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_A \rho u^2 \, \mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_A p \, \mathrm{d}A + p \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \implies \rho u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}
$$

最后，能量方程给出：

$$
\int_{A_2} \rho u \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \mathrm{d}A - \int_{A_1} \rho u \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \mathrm{d}A = 0
$$

所以

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_F \rho u \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \mathrm{d}A = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\rho u \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) A \right] = 0
$$

考虑到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u A) = 0$ 所以表达又可以写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0$$

所以我们给出准一维定常运动的基本方程组

$$\begin{cases}\rho u A=\mathrm{Const}\\ \rho u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0\end{cases}$$

取 $\rho u\triangleq j$ 称为密度因子，则其满足下述关系式：

$$\frac{dj}{j}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}$$

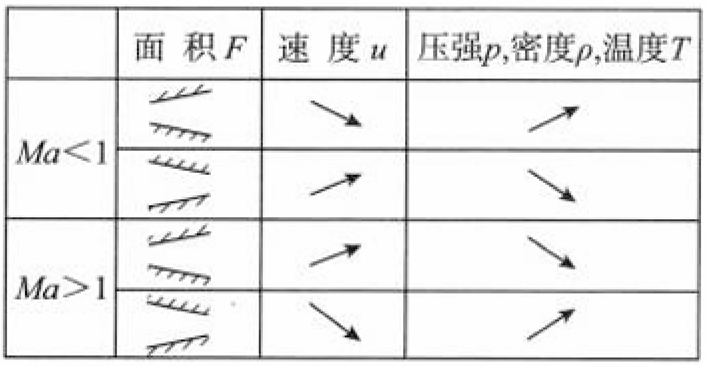
动量方程给出

$$\rho u du=-dp=-a^2 d\rho \implies \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-Ma^2\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

同时，又连续性方程又有：$\frac{\mathrm{d}j}{j}=-\frac{\mathrm{d}A}{A}$，所以

$$(1-Ma^2)\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{\mathrm{d}A}{A}\ \text{or}\ \frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{1-Ma^2}\frac{\mathrm{d}A}{A}$$

1. 当 $Ma=0$ 时，对应不可压缩流体。
2. 当 $0<Ma<1$ 时，气流称为亚声速，面积减小或增大都会导致速度的增加或减少
3. 当 $Ma>1$ 时，气流称为超声速，速度和面积具有相同的变化规律



在亚声速下有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}A>0\quad \mathrm{d}j<0\quad \mathrm{d}u<0\\ &\mathrm{d}A<0\quad \mathrm{d}j>0\quad \mathrm{d}u>0\end{aligned}$$

在超声速下有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}A>0\quad \mathrm{d}j<0\quad \mathrm{d}u>0\\ &\mathrm{d}A<0\quad \mathrm{d}j>0\quad \mathrm{d}u>0\end{aligned}$$

当 $Ma=1$ 时，可以推出 $\mathrm{d}A=0$ 说明声速只能在管道的最大或最小截面达到。显然在最大截面上是不能获得声速的。为了得到超声速气流，应当左乘先收缩后扩张的形式。

孔口出流

考虑一个可压缩气体从大容器经收缩管道流出，大容器物理参数满足 $v=0,p=p_0,T=T_0$ ，所以管道截面相关物理参数 v_1,p_1,T_1 满足

$$\frac{p_1}{p_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$Ma=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\quad\frac{T_1}{T_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)^{-1}$$

对于出口处流量变化率满足

$$\dot{m}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho_0a_0A_1\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}$$

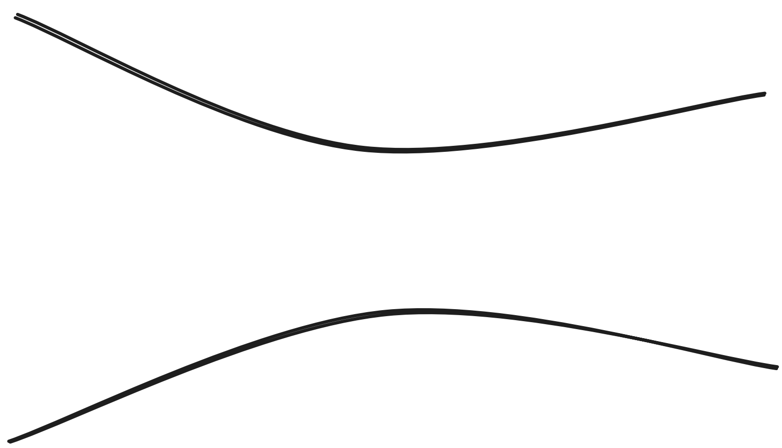
即 $P=\frac{p_1}{p_0}$ 所以可以求得最大值满足

$$\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

此时最大流量变化率的出口压强刚好是临阶压强，出口速度达到声速。

当 $P=1$ 显然管内无流动。当 P 从 1 逐渐减少时，$\dot{m}$ 应当是先增加后减少。但是当 P 到达极值后，压强达到临界压强，如果 p_1 再减小，此时管外变成了超声速流，对管内流动不再有影响。

拉瓦尔管和激波



拉瓦尔管是指先收缩后扩大的管道，这种管道可以得到超声速气流。现在给定拉瓦尔管横截面随 x 的变化规律，大容器内 p_0, T_0, ρ_0 以及出口截面的压强 p_E ，求不同 p_E/p_0 是管内流通状态以及不同流动状况下管内流动的解

设 p_0 固定不变，调节 p_E 使其从 p_0 降到 0 ， p_E 在 $[p_0, 0]$ 间隔内有如下几个特征压强：

1. p_0 此时管内无流动，流体静止。
2. 0 这是出口处能达到的最低压强
3. 不断降低 p_E 使管喉部出现声速，喉部处 p_*, ρ_*, T_* 可按如下公式求出

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_*}{T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\gamma/\gamma-1}$$

   这样临界截面上的物理量都是已知的。

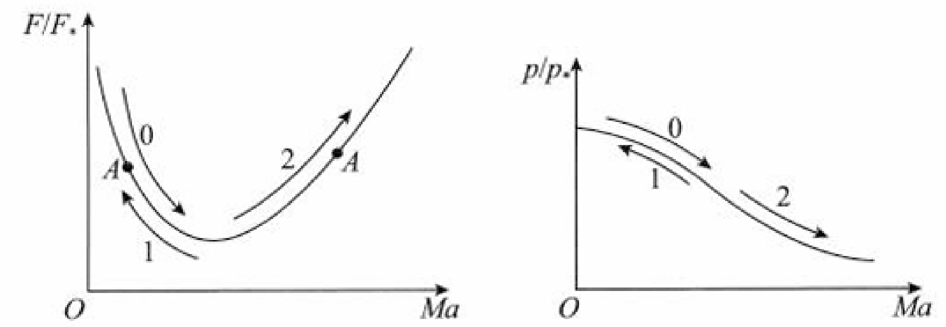


图 10.7.8

以 p_*, ρ_*, T_*, A_* 为参考值，我们可以求出拉瓦尔管内每一截面上等熵流动的解。收缩段内的气流一定是亚声速的，因为这是从静止气体逐渐加速得来的，对应上图曲线 0 。气流通过喉部进入喷管后存在着两种可能等熵流动，一种是亚声速流动对应曲线 1 ；一种是超声速流动对应曲线 2

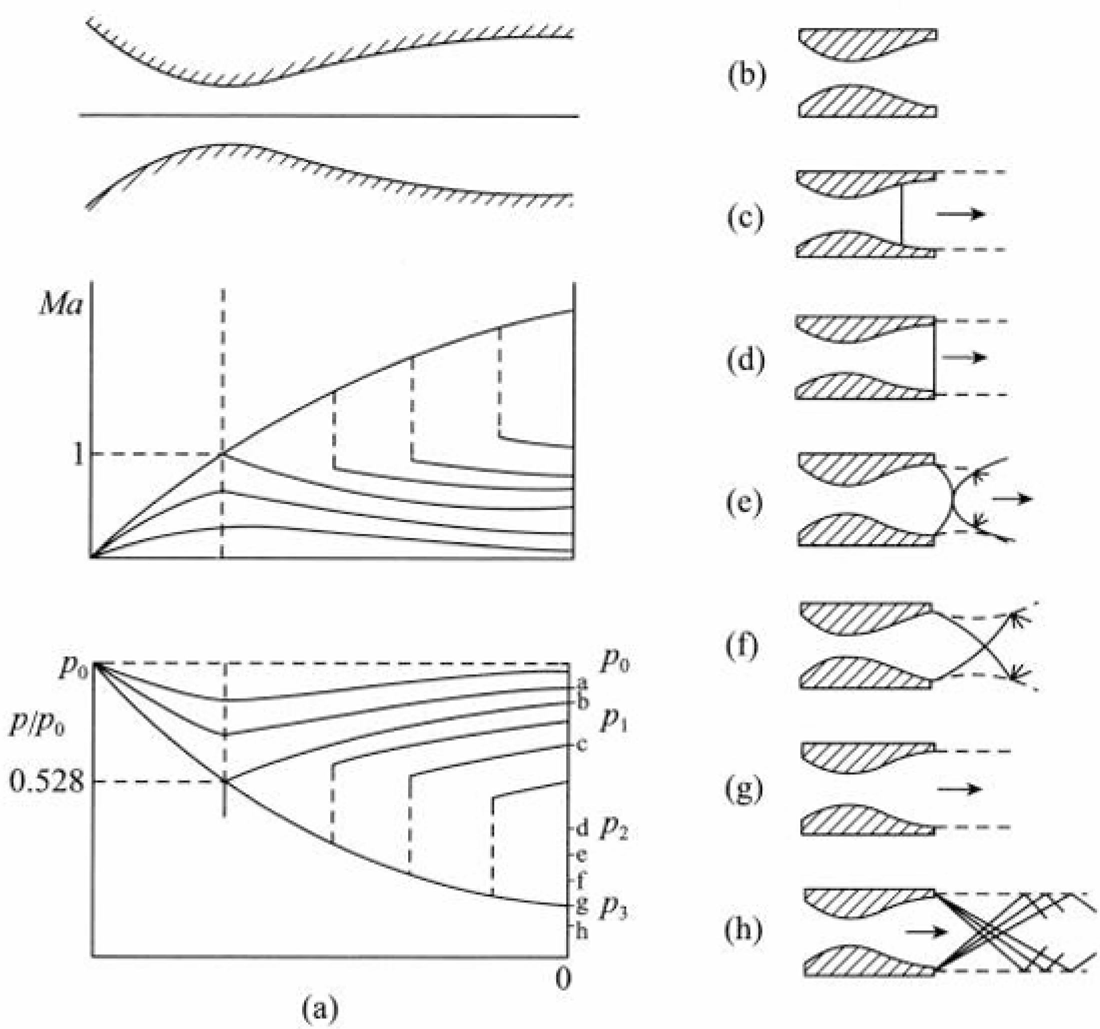


图 10.7.9

定义两个特征压强 p_1, p_3 分别代表最小截面处到声速后，喷管出现亚声速等熵气流或超声速等熵气流时出口压强，沿喷管压强分布如下图 b, g 所示。分如下三类讨论

- $p_0 \geq p_E \geq p_1$

对应上图曲线 a 此时整条管道内全是亚声速流。当反压不断降低时，管内速度不断提高，压强降低，流量增加。$p_E = p_1$ 时，管道喉部出现声速，流量达到最大值，对应曲线 (b) 和图 (b)

- $p_1 \geq p_E \geq p_3$

收缩段内气流总是维持 p_1 状态不变，这是因为喉部出现声速，拉瓦尔管内流量达到极大值，我们无法降低反压来增大流量使收缩段流动。另一方面，喷管内的某一个截面将出现非等熵流动，这是因为气流的等熵流动只能沿上图曲线 b 和 g，非等熵流动会出现速度突变，导致出现激波现象，如上图曲线 c 虚线所示，这表明速度发生了突变，但是在激波前后气体仍做等熵流动。

激波可以理解为气体发生了速度阶段间断面，可以理解为速度突然减小，发生在拉瓦尔管的扩张段中。亚声速气流是无法产生激波的

Note >

> 吴老师书中有一个非常形象的例子：在车水马龙的繁华街道中，当十字路口亮出红灯时，前面的车辆（气体）率先停下（速度减小），后面的车辆也一个紧挨着一个停下，从而形成了车辆高度密集的“激波层”

所以整个过程可以这样描述：声速截面后、激波截面前，气流沿着朝声速的曲线 g 走，但是为了适应管口的反压需要，在管内某处产生激波，超声速气流变成亚声速气流。压强突跃升高，而后沿扩散管道流动，速度继续减小，压强不断增加。

- $p_3 \geq p_E \geq 0$

此时气流沿曲线 g 流至管口，达到压强 p_3 ，为了继续降低压强，从管口发生膨胀。