单自由度振动 II

振动力学

Laplace 变换

我们尝试用Laplace变换求解单自由度振动系统，考虑

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 x + w_0^2 x = f(t)$$

作Laplace变换

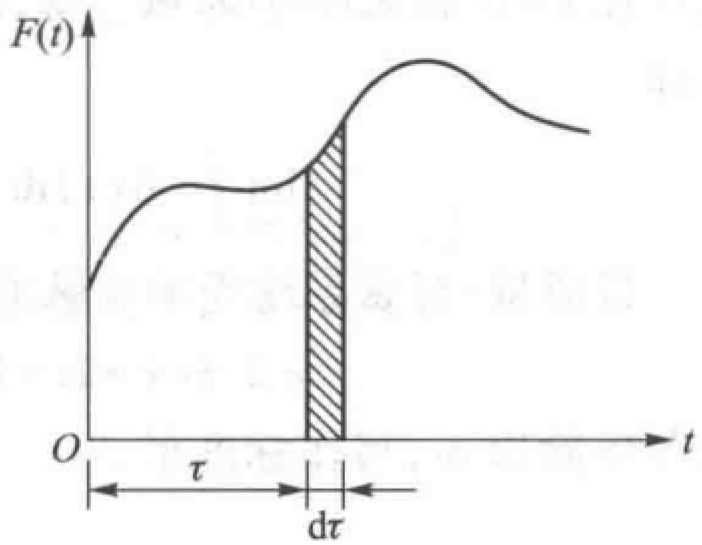
$$\left[p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right]\mathcal{L}[x] - 2\xi\omega_0 x(0) - px(0) - \dot{x}(0) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} + \frac{2\xi\omega_0 x(0) + px(0) + \dot{x}(0)}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

作反演即可得到结果
我们来研究第一项的反演结果，我们先给出反演结果

$$x(t) = \int^t h(\tau - t)f(\tau)d\tau$$

其中 $h(t)$是我们所讨论过的单位脉冲载荷。



让我们考虑 τ 时刻 $d\tau$所给出的冲量 $f(\tau)d\tau$。如果我们只考虑此时施加的冲量对 t 时刻产生的影响，即如下运动方程

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 x + w_0^2 x = \delta(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

由单位脉冲响应可以给出解

$$x(t)_\tau = h(t-\tau)f(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{1-\xi^2 w_0}} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0(t-\tau))$$

叠加起来就是（线性系统）

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

这个也称杜哈梅积分

实际上，第二项的反演结果是一个指数衰减的波，我们可以不考虑他的作用，同时，当我们的初始条件为静止时，第二项就会自动消失。

Fourier 变换

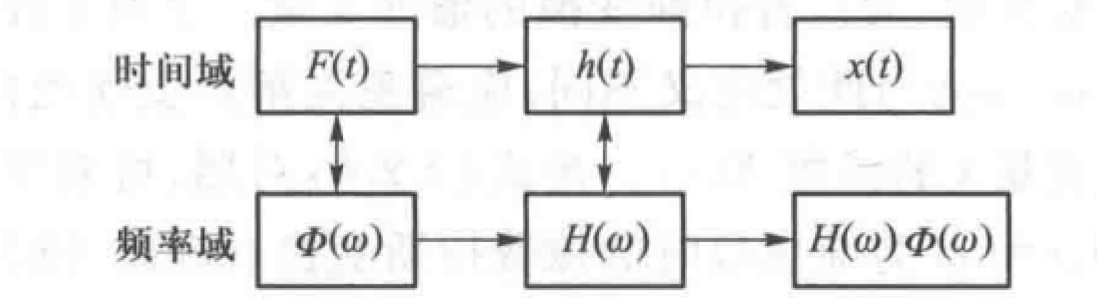


图 3.7 傅里叶变换对表示的激励与响应关系

我们也可以用Fourier 变换求解系统运动状态方程
我们已知 $x(t) = h(t) * f(t)$（卷积），则可以给出Fourier 变换后位移表达式

$$X(\omega) = 2\pi H(\omega)\Phi(w)$$

其中 $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)), \Phi(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$

如果我们只考虑单位脉冲载荷，也即是方程：

$$\mathcal{F}[\ddot{h}(t) + 2\xi\omega_0\ \dot{h}(t) + \omega_0^2] = 1$$

所以我们可以得到

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_0\omega\mathrm{i}}$$

响应谱

如果我们只考虑运动过程中最大振幅，将其与静扰度进行比较我们可以得出位移响应谱

用一个例题讲解，例题细节见教材P76例3.1.2
设质量-弹簧系统在 $(0, t_1)$时间间隔内受到的矩形脉冲力激励

$$F(t)=\begin{cases}F_0 & (0\le t\le t_1)\\ 0 & (t>t_1)\end{cases}$$

我们给出解

$$x(t)=\begin{cases}\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)(0\le t\le t_1)\\ \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n t](t>t_1)\end{cases}$$

我们可以看出最大振幅响应与 t_1的选取有关，当 t_1 比较小时，最大振幅出现在 t_1 附近，当 t_1 比较小时，最大振幅出现在 $\frac{T}{2}$（半个周期）

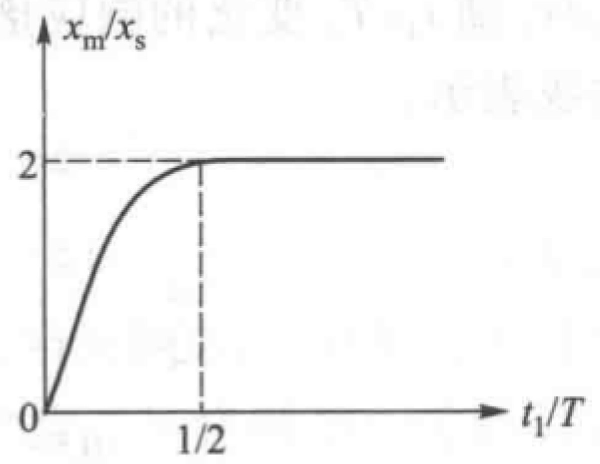


图 3.12 矩形脉冲的响应谱

同理我们可以给出速度响应谱和加速度响应谱

随机激励

高斯分布

$$p(x)=ce^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}$$

因为能够用相关函数来处理随机激励问题
我们给出位移的自相关函数

$$R_{xx}[t_1,t_2]=E[x(t_1),x(t_2)]$$

也可以改写成

$$R_{xx}[t,\tau]=E[x(t),x(t-\tau)]$$

显然这个自相关函数跟初始时间点t和时间差τ有关。但是对于平稳随机过程，我们可以认为自相关函数只与时间差有关，也就是

$$R(\tau)=E[x(t),x(t+\tau)]$$

我们计算自相关函数的傅里叶变换对可以得到功率谱

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

两个不同平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间的相关性由互相关函数描述

$$R_{xy}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

考虑平稳响应 $x(t) = h(t) * f(t)$
位移自相关函数:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t_1)x(t_1+\tau)] = E[\int_0^{t_1} h(\tau_1) f(t_1-\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_1+\tau} h(\tau_2) f(t_1+\tau-\tau_2) d\tau_2]$$

可以得到位移功率谱与激励功率谱关系

$$S_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega t} d\tau = H(\omega) H^*(\omega) S_{ff}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega)$$

高斯白噪声：空间域上符合高斯分布，白噪声：相关函数为0（不相关）