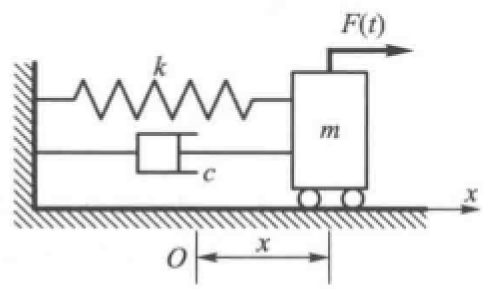
自由振动

振动力学

自由振动

对于以一个实际自由振动系统，可以简化成一个包含恢复力$k(x)x$、激励 $F(t)$、阻尼力$c(x,\dot{x})\dot{x}$的运动模型。



单自由系统的运动方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

恢复力$k(x)x$可表示成：

$$g(x)=k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\cdots$$

非线性阻尼 $c(x,\dot{x})\dot{x}$

$$c(x,\dot{x})\dot{x}=(c_0+c_1x^2+c_2\dot{x}^2)\dot{x}$$

含有上述非线性阻力的系统称为W VanderPol振子

当只含有线性刚度k_1和三次刚度k_3的系统称为W Duffing振子。

Duffing和VanderPol的组合称为Van der Pol oscillator

激励类型：

- 外加激励:
  1. 直接施加
  2. 基础运动，如相对运动。 当 $F(t)=0, m(\ddot{x}+\ddot{x}_g(t))+c\dot{x}+kx=0 \Rightarrow m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{x}_g(t)$
- 参数激励 $m\ddot{x}+c_0\dot{x}+k_0x=-g_1(t)x-g_2(t)\dot{x}-g_3(t)\ddot{x}$

激励$F(t)$

- 谐和激励 $F(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i sin(w_it+\varphi_i)$

- 周期激励 $F(t+\tau)=F(t)$，对激励进行傅里叶展开得：
  $F(t)=A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos(\frac{2\pi i}{T}t+\varphi_i)$
- 任意激励 满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|dt<\infty$ 频谱连续
- 随机激励

随机激励是非定则（他的规律无法用时间的确定函数来描述）的激励，他无法用时间确定函数来描述，但具有一定的统计规律性，可以将随机激励转换成相关函数处理。
自相关函数 $R_x(\tau)$：随机变量$X(t_1)$与$X(t_2)$乘积的集合平均，描述随机变量的“平均功率”随时差的变化，

$$R_x(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2$$

功率谱密度 S_x 描述随机变量的“平均功率”按频率的分布

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-2\pi i/\tau}d\tau$$

也可以这样定义：

$$S_x(f)=\lim_{T\to\infty}\left\{E\left[\frac{1}{T}|X_T(t)|^2\right]\right\}$$

在随机振动理论中，功率谱法占有极为重要的地位。

对

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

化作阻尼自由振动的标准形式：

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0x+\omega_0^2x=f(t)$$

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$称为固有频率
$\xi=\frac{c}{2m\omega_0}$称为阻尼系数，这是一个无量纲常数
求解特征方程可得

$$\lambda_{1,2}=-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}w_0$$

阻尼比	特征值	解
$\xi<1$	$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_0\pm i\sqrt{1-\xi^2}w_0$	$e^{-\xi\omega_0t}(C_1\sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_0t+C_2\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_0t)$
$\xi=1$	$\lambda_{1,2}=\omega_0$	$C_1e^{-\omega_0t}+C_2te^{-\omega_0t}$
$\xi>1$	$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_0\pm\sqrt{\xi^2-1}w_0$	$e^{-\xi\omega_0}(C_1e^{\sqrt{\xi^2-1}t}+C_2e^{\sqrt{\xi^2+1}t})$

只有当$\xi < 1$时称自由振动，一般只考虑这种情况

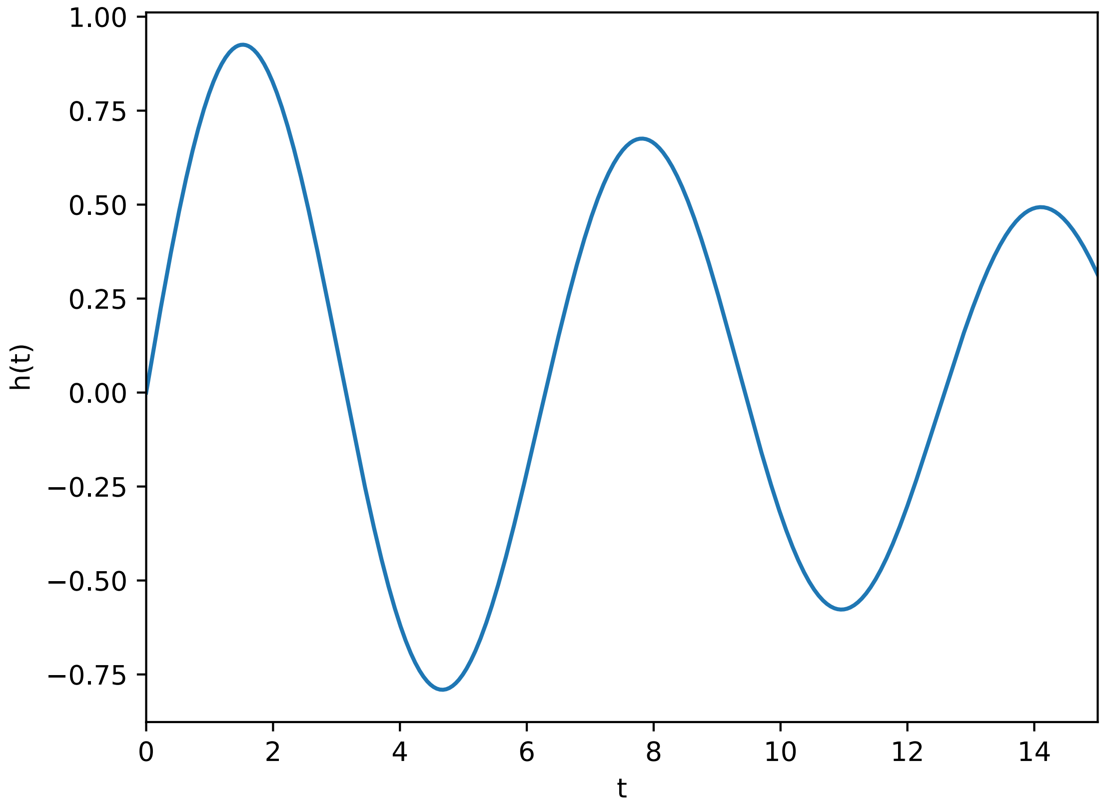
单位脉冲响应

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

对应解

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}w_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t)$$

大概运动图像:



周期: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_0}$
赋值衰减: $e^{-\xi\omega_0 T}$
于是对于任意脉冲函数 $f(t)\delta(t)$
我们可以给出解

$$x(t) = f(t)h(t)$$

计算ξ
当ξ较小时
取

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

则取两个赋值，可得衰减值

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\xi\omega_0 T}$$

取对数后变换得

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{A_1}{A_2}$$

也可以选定特定的幅值来计算