柱形杆的扭转和弯曲

弹性力学

扭转问题解法

位移解法

设有横截面为任意形状的柱形杆，不计其体力，在两端面上受有大小相等面转向相反的扭矩M 作用。取杆的一端面为 Oxy 平面，z 轴沿杆的轴向。采用位移解法，这里使用半逆解法，设 x 方向和 y 方向的位移分量与圆柱体扭转一样，即

$$
\begin{aligned}
u &= -\alpha yz \\
v &= \alpha xz
\end{aligned}
$$

对于非圆柱截面，由于扭转变形后，横截面发生了翘曲，所以假定 z 方向上的位移分量

$$
w = \alpha\varphi(x, y)
$$

其中 α 为单位长度的扭转角， $\varphi(x, y)$ 称为圣维南扭转函数，反映了横截面翘曲情况

将上述表达式带入由位移表示的平衡微分方程中，可得

$$
\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0
$$

也就是说，扭转函数是一个调和函数

利用位移表达式求出对应的应力分量可得

$$
\begin{aligned}
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \alpha G(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y) \\
\tau_{zy} &= \tau_{yz} = \alpha G(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)
\end{aligned}
$$

也就是说，在我们假定的情况下，横截面内只有切应力 τ_{zx} 和 τ_{zy} ，其余应力分量皆为0，且与坐标 z 轴无关。如果 φ 为零，则退化为经典扭转理论解

考虑边界条件，由于侧面不受外力作用（也就是自由条件），于是有

$$
(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)l + (\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)m = 0
$$

利用

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial x}l + \frac{\partial\varphi}{\partial y}m = \frac{d\varphi}{dv}
$$

上式可变为

$$\frac{d\varphi}{dv}=yl-xm$$

这就是扭转函数所要满足的边界条件。

考察端面处条件:

$$\iint_R \tau_{zx}dxdy=0$$
$$\iint_R \tau_{zy}dxdy=0$$
$$\iint_R (x\tau_{zy}-y\tau_{zx})dxdy=M$$

可证明前两式恒成立

而对于最后一项，将应力分量带入式中可得

$$M=\alpha G\iint_R (x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x})dxdy\triangleq\alpha GD$$

GD 称作抗扭刚度， D 表示截面的几何特性，可以证明 D 恒为正数。

如果我们采用共轭调和函数的方法来表示 z 方向上的位移，即 $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，由柯西黎曼条件可以得出 $\nabla^2\psi=0$ 通过边界条件可以导出在边界上， ψ 满足

$$\psi-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=C$$

也就是将第二边界条件改成了第三边界条件。

应力解法

假设

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$$

所以平衡微分方程给出

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0,\quad\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0$$

引入函数 $\Phi(x,y)$ 使

$$\tau_{xz}=\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y},\tau_{yz}=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

考虑简化后的协调方程

$$\nabla^2\tau_{xz}=0,\quad \nabla^2\tau_{yz}=0$$

所以可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Phi=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Phi=0$$

所以有微分理论可得

$$\nabla^2\Phi=C$$

可以证明 $C=-2$ 所以这就化成了一个泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-2$$

函数 $\Phi(x,y)$ 称作普朗特应力函数。

考虑边界条件，在边界上仍有应力为0，所以

$$l(\tau_{xz})_s+m(\tau_{yz})_s=0$$

由于

$$l=\frac{dy}{ds},m=-\frac{dx}{ds}$$

将其与切应力表达式带入得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{d\Phi}{ds}=0$$

也就是说在横截面周界 s 上积分结果为常数

$$\Phi=k$$

在截面为单连通区域（实心杆）的情况下，可取 $k=0$，对于多连通区域，只能将其中一个 Φ 取零，其他边界上的 Φ 则根据位移单值条件确定

给出 M 和 D 的表达式:

- 单连通区域

$$M=2\alpha G\iint_R\Phi dxdy$$
$$D=2\iint_R\Phi dxdy$$

- 多连通区域

$$M=2\alpha G\iint_R\Phi dxdy+2\alpha G\sum_{i=1}^{n}k_iA_i$$
$$D=2\iint_R\Phi+\sum_{i=1}^{n}k_iA_idxdy$$

k_i 表示应力函数 Φ 在内边界 s_i 对应的值，A_i 表示内边界 s_i 围成的区域。

扭转问题的薄膜比拟法

普朗特指出：薄膜在均匀压力下的垂度，与等截面直杆扭转问题中的应力函数，在数学上是相似的。

设一块均匀的薄膜，张在一个与受扭杆横截面形状相似的水平边界上。当薄膜承受微小的均匀压力 q 作用时，薄膜上各点将产生微小垂度。将边界所在水平面作 Oxy 平面，z 轴垂直向下，假定其只受均匀张力，设单位宽度张力为 F_T

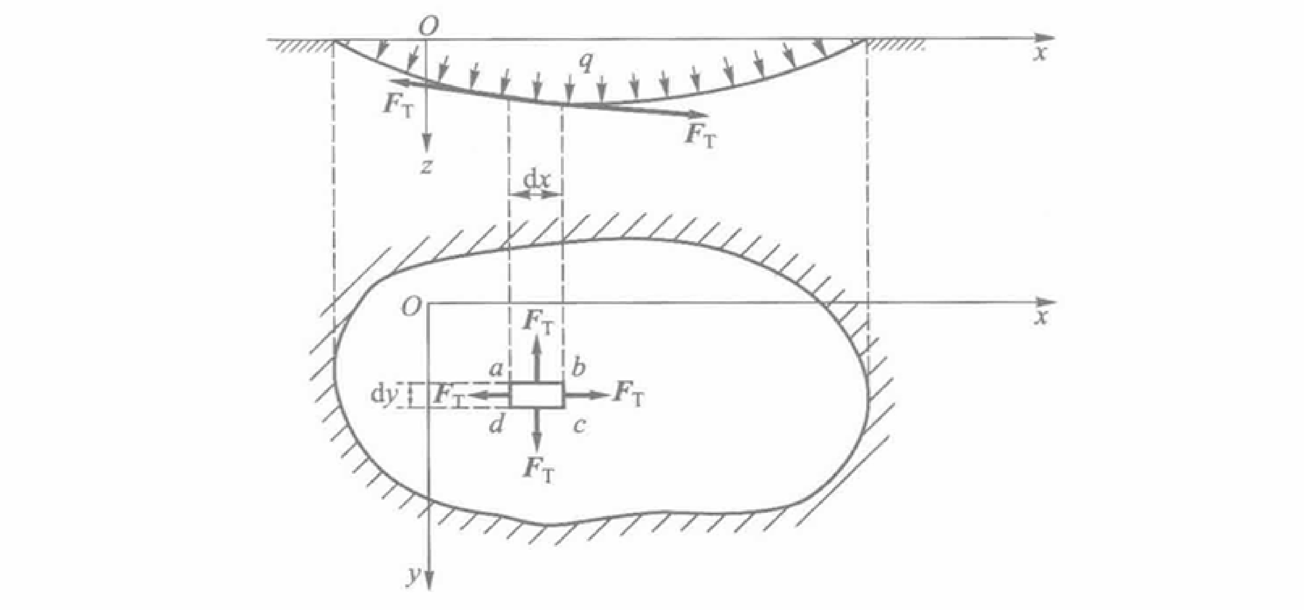


图 9-3

用 Z 表示薄膜的垂度，利用 z 轴上的受力平衡，可以得出薄膜平衡时垂度满足的微分方程：

$$\nabla^2Z=-\frac{q}{F_T}$$

因为 Oxy 平面和薄膜之间的体积 V 满足

$$2V=2\iint_R Zdxdy$$

因为垂度与应力函数相似，回忆 M 的表达式，取数量上 $2V=M$ ，所以数量上就有

$$Z=\alpha G\Phi$$

所以就有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-\frac{q}{\alpha G F_t}$$

引用应力函数所满足的表达式 $\nabla^2\Phi=-2$ 得

$$F_T=\frac{q}{2\alpha G}$$

用一系列和 Oxy 平面平行的平面与薄膜曲面相截，得到一些曲线，称为等高线。 Z 在等高线切线方向的方向导数为0

$$\frac{\partial Z}{\partial s}=0$$

对应应力函数有

$$\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0$$

所以切应力沿等高线上的法向分量为零，切向分量方向

$$\tau_s=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

考虑薄膜平衡

$$-\oint_s F_T\frac{\partial Z}{\partial v}ds=qA$$

所以有

$$\oint_s \tau_s ds=2\alpha GA$$

上式称为应力环量。也就是说，切应力沿周线 s 的回路积分值等于该轴线所包围的面积与常数 $2\alpha G$ 的乘积。

Note

1.扭杆的应力函数等于该薄膜的垂度。我们可以根据这个关系确定应力函数的边界条件2.该扭杆所受的扭矩，等于该薄膜及其边界平面之间的体积的两倍。3. 该扭杆横截上某一点处的切应力等于该薄膜上对应点处的的斜率。

柱形杆扭转

Note

理解应力函数应与周界方程有关，因为在周界上薄膜垂度为零，其应力函数也为零。

椭圆截面杆的扭转

我们知道对于椭圆横截面，周界方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

所以我们大胆假设应力函数满足

$$\Phi(x,y)=B\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

带入控制方程可得

$$B=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

对应应力分量

$$\tau_{xz}=\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\alpha Gy$$
$$\tau_{xz}=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}\alpha Gy$$

对应扭转刚度系数

$$D=\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$$

对应单位长度扭转角

$$\alpha=\frac{M}{GD}=\frac{a^2+b^2}{\pi Ga^3b^3}M$$

剪应力

$$\tau_{xz}=-\frac{2M}{\pi ab^3}y,\tau_yz=\frac{2M}{\pi a^3b}x$$

最大切应力 出现在短轴上

$$\tau_{\max}=\frac{2M}{\pi ab^2}$$

最小切应力 出现在长轴上

$$\tau_{\min} = \frac{2M}{\pi a^2 b}$$

轴向位移

$$w = -\frac{a^2 - b^2}{\pi G a^3 b^3} Mxy$$

带半圆形槽的圆柱的扭转

边界条件

$$\begin{aligned} f_1(\rho, \phi) &= \rho^2 - b^2 = 0 \\ f_2(\rho, \phi) &= \rho - 2a\cos\phi = 0 \end{aligned}$$

假定应力函数

$$\Phi(\rho, \phi) = B\frac{f_1 f_2}{\rho}$$

由泊松方程解得

$$B = -\frac{1}{2}$$

应力分量

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z} &= \alpha G \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\alpha G a \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2}\right)\sin\phi \\ \tau_{\phi z} &= -\alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \alpha G \left[\rho - a\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2}\right)\cos\phi\right] \end{aligned}$$

最大切应力

$$\rho = b, \phi = 0, \tau_{\max} = \left| (\tau_{\phi z})_{\substack{\phi=0 \\ \rho=b}} \right| = \alpha G(2a - b)$$

应力集中

厚壁圆筒的扭转

应力函数

$$\Phi = B(x^2 + y^2 - b^2) = B(\rho^2 - b^2)$$

可解得

$$B = -\frac{1}{2}$$

矩形杆截面杆的扭转

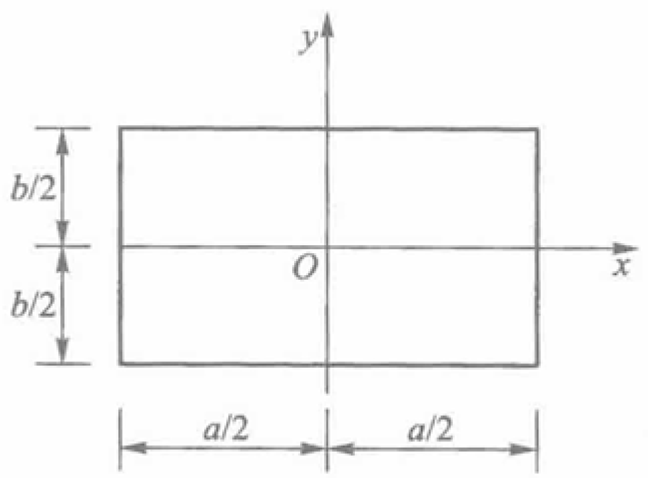
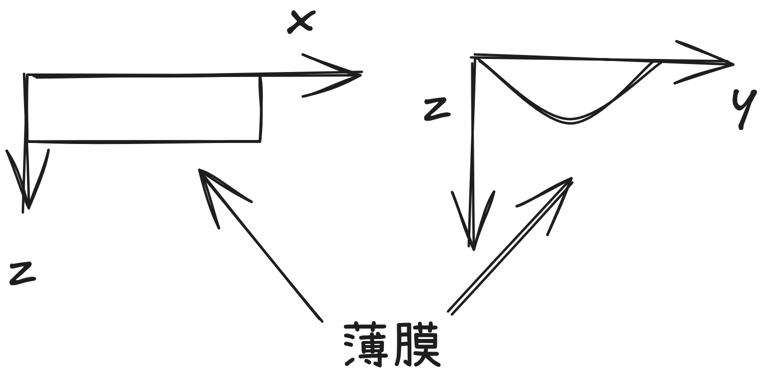


图 9-9

先考虑一个很狭长的矩形杆，即 a/b 的值很大，此时应力函数 Φ 在横截面的绝大部分几乎与坐标 x 无关，也就是不受短边约束的影响。于是取

$$\Phi = \Phi(y)$$



(大概这样子)

带入泊松方程，利用边界条件

$$\Phi\left(\pm\frac{b}{2}\right) = 0$$

可解得

$$\Phi = -\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)$$
$$D = \frac{ab^3}{3}$$
$$\alpha = \frac{3M}{Gab^3}$$

及应力分量

$$\tau_{zx} = \alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{6M}{ab^3} y$$
$$\tau_{xy} = 0$$

现在分析任意矩形杆，求解应力函数 Φ 以狭长矩形截面的解为基础，加上修正项 Φ_1，即

$$\Phi(x,y) = \frac{b^2}{4} - y^2 + \Phi_1(x,y)$$

根据泊松方程和边界条件可以导出 Φ_1 满足的方程和边界条件:

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0$$
$$\Phi_1\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = y^2 - \frac{b^2}{4}$$
$$\Phi_1\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = 0$$

采用分离变量法求解

$$\Phi_1(x,y) = X(x)Y(y)$$

可解得应力函数

$$\Phi = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3 \cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} + \frac{b^2}{4} - y^2$$

相关参数都可以求出来。

Note

这个思路其实就是数理方法中求解非齐次方程的思路，也就是特解+本征函数解。只不过是我们取得特解具有物理上的意义。

薄壁杆的扭转

薄膜比拟法告诉我们，一个直的狭长矩形和一个曲的狭长矩形，如果具有相同的长度 a 和宽度 b，则当张在这两个狭长矩形上的薄膜受有相同的压力 q 和张力 F_T 是，两个薄膜与各自边界平面所占的体积和它们的斜率大体是相同的。因此，一个曲的狭长矩形截面扭杆，可以用一个同一种材料制成的、同宽同长的直的矩形截面杆来替代，而不致引起多大的误差。

由于每个狭长矩形的宽度和长度不同，我们用 a_i, b_i, M_i 表示其长度、宽度和承受的扭矩。于是矩形长边中点附近的切应力 τ_i 和单位长度的扭转角满足 α

$$\alpha = \frac{3M_i}{Ga_ib_i^3}$$
$$\tau_i = \frac{3M}{a_ib^2}$$

所以整个截面上的扭矩为

$$M = \frac{G\alpha}{3}\sum a_ib_i^3$$

带回式中有

$$\alpha = \frac{3M}{G\sum a_ib_i^3}$$
$$\tau_i = \frac{3Mb_i}{\sum a_ib_i^3}$$

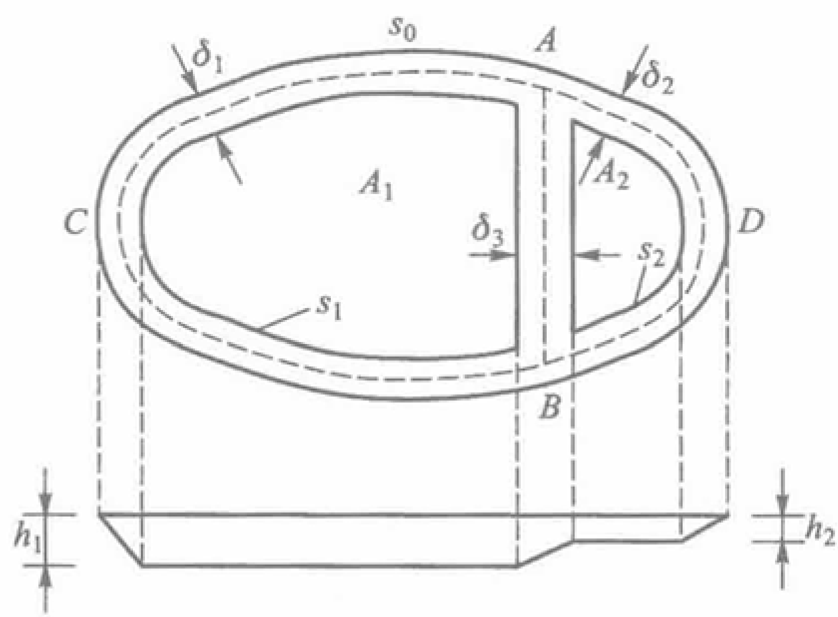


图 9-15

考虑多孔薄壁杆扭转，由于杆壁厚度 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 很小，所以满足

$$\tau_1 = \frac{h_1}{\delta_1} \quad \tau_2 = \frac{h_2}{\delta_2} \quad \tau_e = \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1\delta_1 - \tau_2\delta_2}{\delta_3}$$

在薄膜比拟法中我们可以用体积表示扭矩，于是有

$$M = 2(A_1h_1 + A_2h_2) = 2A_1\delta_1\tau_1 + 2A_2\delta_2\tau_2$$

应力环量给出（假定逆时针为正）

$$
\begin{aligned}
\int_{ACB} \tau_1 ds + \int_{BA} \tau_3 ds = \tau_1 l_1 + \tau_3 l_3 = 2G\alpha A_1 \\
\int_{BDA} \tau_2 ds - \int_{BA} \tau_3 ds = \tau_2 l_2 - \tau_3 l_3 = 2G\alpha A_2
\end{aligned}
$$

可解的切应力和单位长度的扭转角

柱形杆的弯曲

假定轴向正应力同材料力学结果一样，而纵向纤维无挤压

$$
\sigma_z = \frac{M_y}{I_y}x = -\frac{F}{I_y}(L-z)x, \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0
$$

由平衡微分方程给出

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{F}{2I_y}x^2 + f(y) \\
\tau_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}
\end{aligned}
$$

$f(y)$ 是任意函数，可由边界条件确认

在周界上，杆的周侧不受外力作用，所以有 $\overline{f}_x = \overline{f}_y = \overline{f}_z = 0$，也就是

$$
\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{F}{2I_y}x^2 + f(y)\right]l - \frac{\partial \Phi}{\partial x}m = 0
$$

由于

$$
l = \frac{dy}{ds} \quad m = -\frac{dx}{ds}
$$

带入上式中

$$
\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left[\frac{Fx^2}{2I_y} - f(y)\right]\frac{dy}{ds}
$$

在封闭的周界上，我们总能找到垂直 y 轴的一点，$\frac{dy}{ds} = 0$ 因此 $\frac{d\Phi}{ds} = 0$，也就是说应力函数 Φ 为常数，我们取 $\Phi = 0$ 所以在不垂直y轴的周边上，可以选择 $f(y)$，使得

$$
\frac{F}{2I_y}x^2 - f(y) = 0
$$

应变协调方程给出

$$
\nabla^2 \tau_{yz} = 0 \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{F}{(1+\nu)I_y}
$$

所以应力函数满足

$$\nabla^2\Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y - f'(y) + k$$

可证明 $k=0$

利用边界条件 $\Phi=0$可得

$$\frac{F}{2I_y}x^2 - f(y) = 0$$

也就是说，我们将柱形杆弯曲问题归结于，在周界上 $\Phi=0$ 的条件下求解函数

$$\nabla^2\Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y - f'(y)$$

其中 $f'(y)$ 可由

$$\frac{F}{2I_y}x^2 - f(y) = 0$$

给出

> **Note**
>
> 因为 Φ 周界上取常数，如果 $\nabla\Phi=0$， 可以直接取 $\Phi=0$ （比如说作业某道很神奇的题目，我研究了半天不如直接取零哈哈哈）

椭圆截面杆的弯曲

椭圆的周界方程给出

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$$

所以可以求得任意函数 $f(y)$ 的表达式：

$$f(y) = \frac{F}{2I_y}x^2 = \frac{F}{2I_y}\left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right)$$

所以应力函数满足方程

$$\nabla^2\Phi = \frac{F}{I_y}\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\right)y$$

上述方程告诉我们，应力函数中至少有 y^3 或 x^2y 项，又因为应力函数在周界上应满足 $\Phi=0$ 所以取应力函数

$$\Phi = B\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)y$$

带入回到方程即可求解。

$$B = \frac{\frac{F}{2I_y}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}}$$

矩形截面杆的弯曲

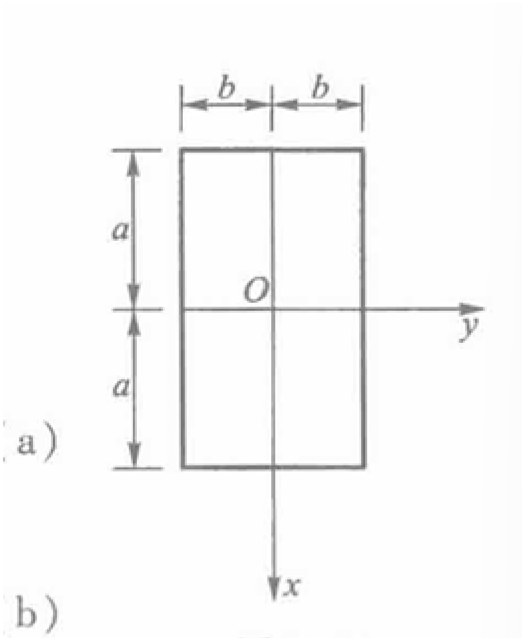


图 9-18

假定悬臂柱形杆的横截面长宽分别为 $2a$ 和 $2b$，在左右边界上有

$$\frac{dy}{ds}=0$$

在上下边界上有

$$x^2=a^2$$

于是任意函数 $f(y)$

$$f(y)=\frac{Fa^2}{2I_y}$$

所以应力函数满足

$$\nabla^2\Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y$$

$$(\Phi)_{x=\pm a}=0 \quad (\Phi)_{y=\pm b}=0$$

这是一个二阶线性非齐次偏微分方程，其通解为考虑对称性，切应力 τ_{zx} 是 x 和 y 的偶函数，因此 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 是 x 和 y 的偶函数，则 Φ 为 x 的偶函数， y 的奇函数。利用边界条件，取非齐次特解

$$\Phi_1 = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{F}{6I_y} (y^2 - b^2) y$$

其次通解

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cosh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

具体系数可用边界条件求出

$$A_m = (-1)^{m+1} \frac{2\nu F b^3}{(1+\nu) I_y \pi^3 m^3 \cosh \frac{m\pi a}{b}}$$