连续系统振动 III

振动力学

主振型叠加法

我们将振动方程简写成线性算子情况：

$$L[u] = f(x,t)$$

> ✎ **Note**
>
> 很多时候，我们的研究对象是小变形，而当发生大变形时，有可能发生非线性线性，比如说弹簧出现三次刚度。我们将非线性情况分为两种：一种是非线性方程（比如说 N-S 方程），一种是非线性边界条件（比如说出现三次刚度）

根据分量变量法，我们知道振动函数可以分解为时间函数和空间函数的叠加

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\Phi_i(x)$$

我们可以利用之前导出的正交性对方程进行解耦。

$$\int_0^L \Phi_i(x)L[u]dx = \int_0^L f(x,t)\Phi_i(x)dx$$

假定 $f(x,t) = p(x)F(t)$ 是可分离的可得

$$\overline{M}_i\ddot{q}_j(t) + \overline{K}_i q(t) = \mathscr{F}_i F(t)$$

其中 $\mathscr{F} = \int_0^l p(x)\Phi(x)dx$, 除以 $\overline{M}_i$ 可将方程简化为

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q(t) = \frac{\mathscr{F}_i}{\overline{M}_i}F(t)$$

同时我们对于初始条件进行处理

$$q_i(0) = \frac{\int_0^L \rho(x)A(x)\varphi(x)\Phi_i(x)}{\overline{M}_i}$$

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\int_0^L \rho(x)A(x)\psi(x)\Phi_j(x)}{\overline{M}_i}$$

通过求解上述二次微分方程，就可以确定时间函数，我们采用杜哈梅积分可得

$$q_i(t) = q_i(0)\cos\omega_i + \frac{1}{\omega_i}\dot{q}_i(0)\sin\omega_i + \frac{\mathscr{F}_i}{\overline{M}_i\omega_i}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi$$

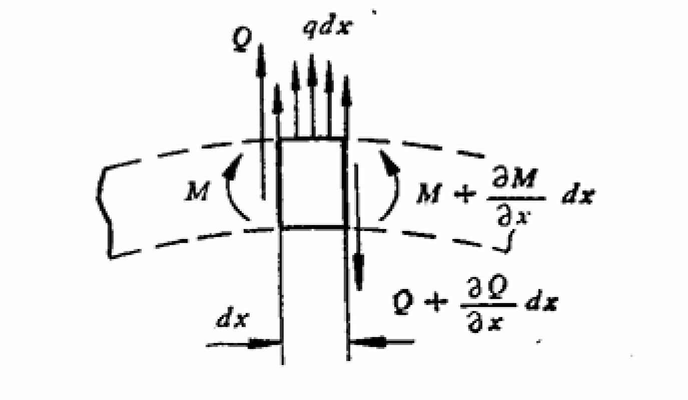
将其叠加就得到我们想要的结果

梁的弯曲振动

回忆我们在材料力学对于杆弯曲所做的假设，现在我们假定梁未变形时各截面形心的连线是直线，假设梁具有对称平面，且在弯曲振动中的轴线始终保持在一对称平面内。

所以，梁的弯曲振动可表示为

$$w(x,t)$$



根据材料力学理论，我们可以列出描述梁弯曲振动的表达式：

- 挠曲线： $w(x,t)$
- 转角：$\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$
- 弯矩： $M(x,t) = E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}$
- 剪力：$P(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x}$
- 分布力：$f(x,t) = \frac{\partial P}{\partial x}$

通过达朗贝尔原理，可以导出描述梁振动的方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w] + \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t)$$

梁弯曲振动的边界条件和之前讨论的类似，常见的边界条件有：

固支端：挠度和转角都为零

$$w(x_0,t)=0,\quad \theta(x_0,t)=0$$

简支端：挠度和弯矩都为零

$$w(x_0,t)=0\quad M(x_0,t)=0$$

自由端：弯矩和剪力都为零

$$M(x_0,t)=0\quad P(x_0,t)=0$$

夹支端：转角和剪力都为零

$$\theta(x_0,t)=0\quad P(x_0,t)=0$$

弹性支撑：弹性支撑有两种，一种是影响剪力的弹簧，一种是影响弯矩的扭簧

$$M(x_0,t)=k_1\theta_1(x_0,t)\quad P(x_0,t)=k_2w(x_0,t)$$

集中质量：集中质量只影响剪力，不影响弯矩

$$P(x_0,t)=M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\quad M(x_0,t)=0$$

Note

我们引入了四个物理量描述杆的振动，所以两两组合理论上可以给出 6 种边界条件组合，但实际上只有四种，这是因为 弯矩和转角、剪力和位移 之间存在一定关系（参考能量）而无法给出边界条件

同样的，我们采用分离变量法来求解这个四阶偏微分方程。取

$$w(x,y)=\Phi(x)T(t)$$

现在只考虑常系数方程以及没有外加激励，所以对于振型函数有：

$$\frac{d^4\Phi}{dx^4}-\beta^4\Phi=0\quad \beta^2\equiv\frac{\rho A}{EI}\omega^2$$

这是一个四阶常系数线性常微分方程，它的特征方程为

$$\lambda^4-\beta^4=0$$

对应特征根为

$$\lambda_1=\beta\quad \lambda_2=-\beta\quad \lambda_3=i\beta\quad \lambda=-i\beta$$

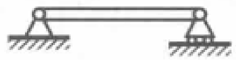
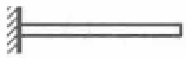
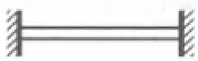
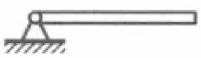
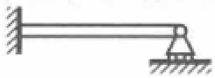
所以常微分方程的通解为

$$\Phi(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x$$

我们可以利用边界条件确定任意常数的相对比值和频率方程来导出固有频率和振型函数。我们将边界条件中要用到的 $\Phi(x)$ 的各阶导数列出如下：

$$\Phi'(x) = \beta[C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x - C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x]$$
$$\Phi''(x) = \beta^2[C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x - C_3 \cos \beta x - C_4 \sin \beta x]$$
$$\Phi''(x) = \beta^3[C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x]$$

表 7.1　等截面梁的弯曲振动

边界条件		频率方程	$\beta_i l$ 的特征值	振型函数 $\phi_i(x)$
简支-简支		$\sin \beta l = 0$	$\beta_i l = i\pi$	$\sin \beta_i x$
固定-自由		$\cos \beta l \mathrm{ch}\, \beta l + 1 = 0$	$\beta_i l \approx (i-1/2)\pi$ $(i \geqslant 3)$	$\cos \beta_i x - \mathrm{ch}\, \beta_i x + \xi_i(\sin \beta_i x - \mathrm{sh}\, \beta_i x)$
自由-自由		$\cos \beta l \mathrm{ch}\, \beta l - 1 = 0$	$\beta_i l \approx (i+1/2)\pi$ $(i \geqslant 2)$	$\cos \beta_i x + \mathrm{ch}\, \beta_i x + \eta_i(\sin \beta_i x + \mathrm{sh}\, \beta_i x)$
固定-固定		$\cos \beta l \mathrm{ch}\, \beta l - 1 = 0$	$\beta_i l \approx (i+1/2)\pi$ $(i \geqslant 2)$	$\cos \beta_i x - \mathrm{ch}\, \beta_i x + \eta_i(\sin \beta_i x - \mathrm{sh}\, \beta_i x)$
简支-自由		$\tan \beta l - \mathrm{th}\, \beta l = 0$	$\beta_i l \approx (i+1/4)\pi$ $(i \geqslant 1)$	$\mathrm{sh}\, \beta_i x + \zeta_i \sin \beta_i x$
固定-简支		$\tan \beta l - \mathrm{th}\, \beta l = 0$	$\beta_i l \approx (i+1/4)\pi$ $(i \geqslant 1)$	$\mathrm{sh}\, \beta_i x - \zeta_i \sin \beta_i x$

（注：对于 $X=0$ 的边界条件，可以导出四个任意常数之间的关系； 对于 $X=L$ 的边界条件，利用行列式为零）