粘性不可压缩流体的一维流动

流体力学

量纲数为 1 的 N-S 方程及流动相似律

N-S 的张量形式:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=g_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

我们引入特征速度 v_0 、特征时间 t_0 、特征压力 p_0，特征尺度 L_0 这些特征量视具体流动情况而选取，我们定义量纲数为 1 的量

$$v_i^0=\frac{v_i}{v_0}\quad x_i^0=\frac{x_i}{L_0}\quad t^0=\frac{t}{t_0}\quad p^0=\frac{p}{p_0}$$

带入 N-S 方程得

$$\frac{v_0}{t_0}\frac{\partial v_i^0}{\partial t^0}+\frac{v_0^2}{L_0}v_j^0\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j^0}=g_i-\frac{p_0}{\rho L_0}\frac{\partial p^0}{\partial x_i^0}+\frac{\mu v_0}{\rho L_0^2}\frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^0\partial x_j^0}$$

两边除以 $\frac{v_0^2}{L_0}$ 得无量纲化的 N-S 方程

$$\frac{L_0}{v_0t_0}\frac{\partial v_i^0}{\partial t^0}+v_j^0\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j^0}=\frac{1}{\frac{v_0^2}{g_iL_0}}-\frac{p_0}{\rho v_0^2}\frac{\partial p^0}{\partial x_i^0}+\frac{1}{\frac{v_0\rho L_0}{\mu}}\frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^0\partial x_j^0}$$

我们先介绍一些量纲为 1 的参数

- 斯特劳哈尔 (Strouhal) 数，表征非定常项与惯性项之比

$$Sr=\frac{L_0}{v_0t_0}$$

- 弗劳德 (Froude) 数，表征惯性力与重力之比

$$Fr=\sqrt{\frac{v_0^2}{gL_0}}$$

- 欧拉 (Euler) 数，表征压力和惯性力之比

$$Eu=\frac{p_0}{\rho v_0^2}$$

- 雷诺 (Reynolds)数，表征惯性力与粘性力之比

$$
Re = \frac{v_0 \rho L}{\mu}
$$

- 克努森 (Knudsen) 数，用来判断流体是否能被当作连续介质

$$
Kn = \frac{l}{L_\infty}
$$

- 马赫 (Mach) 数，用来判断流体是否可压缩

$$
Ma = \frac{v}{c}
$$

- 韦伯 (Weber) 数，用来表征惯性力和表面张力效应之比

$$
We = \frac{\rho v^2 L}{\gamma}
$$

- 普朗特 (Prandtl) 数，用来表示动量传输及热量传输速率之比

$$
Pr = \frac{\mu C_p}{k}
$$

所以我们可以将无量纲化的N-S 方程化成带有无量纲数的 N-S 方程

$$
Sr \frac{\partial v_i^0}{\partial t^0} + v_j^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j^0} = \frac{1}{Fr^2} - Eu \frac{\partial p^0}{\partial x_i^0} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial x_j^0 \partial x_j^0}
$$

层流和湍流

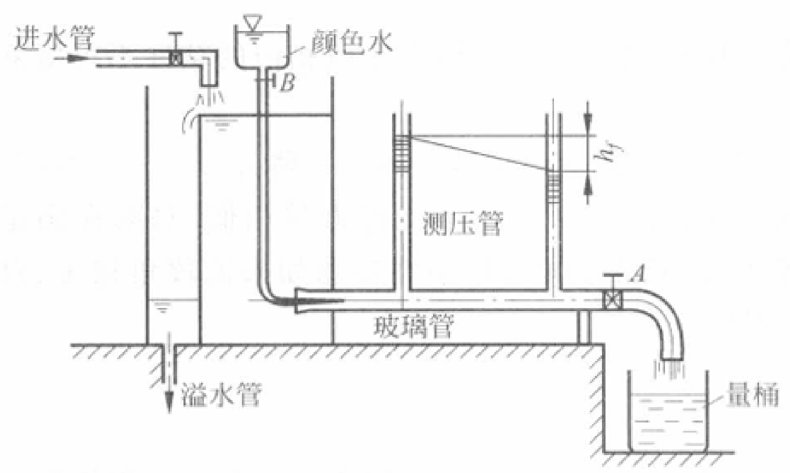


图 6-1　雷诺实验

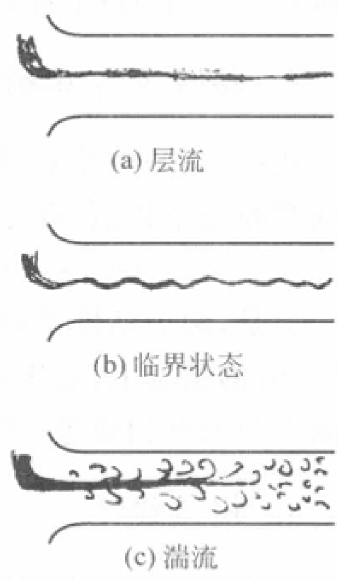


图 6-2　层流与湍流

雷诺实验表明，随着雷诺数的增加，层流逐渐转变成湍流，其中存在一种临界状态。

层流： 当流速很小时，流体分层流动，互不混合或很少部分混合。

湍流： 流体作复杂、无规则、随机的不定常运动。

我们通过计算雷诺数 Re 来判断流体为层流还是湍流。

$$Re = \frac{v_0 \rho L}{\mu}$$

L 为特征尺度，对于圆筒为直径 d 。有些时候会将 $\frac{\mu}{\rho}$ 记作 ν ，称为动力粘度

上临界数 Re_c'： 从层流变成湍流的数，对于圆形截面管道一般为 13800 (一般没什么意义)

下临界数 Re_c：从湍流变成层流的数，对于圆形截面管道一般为 2000

一般只用下临界数判断湍流还是层流

对于不规则截面管道特征尺度 L，取过流面积 A ，过流截面上流体与固体壁面接触的周界长度 χ 我们定义水力直径 d_H 为

$$d_H = \frac{4A}{\chi}$$

现在对于湍流的观点普遍为：湍流场由各种大小和涡量不同的涡旋叠加而成，其中最大涡尺度与流动环境密切相关，最小涡尺度则由粘性确定；流体在运动过程中，涡旋不断破碎、合并，流体质点轨迹不断变化;在某些情况下，流场做完全随机的运动，在另一些情况下，流场随机运动和拟序运动并存。

因为湍流是一种完全不规则的随机运动，湍流场中的物理量在时间和空间上呈随机分布，我们才用统计平均方法来描述湍流的随机运动。记物理量的瞬时值为 A ，平均值为 $\overline{A}$

- 时间平均

  $$\overline{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(x,y,z,t')d'$$

  它既要求比湍流的脉动周期大得多，以保证得到稳定的平均值，又要求比流体作不定常运动的特征时间小得多。
- 空间平均

  $$\overline{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{\tau}\iiint A(x',y',z',t')dx'dy'dz'$$

  τ 为体积
- 系综平均

$$\overline{A}(x,y,z,t)=\int_{\Omega}A(x,y,z,t,\omega)P(\omega)d\omega$$

ω 为随机参数，Ω 是 ω 的空间，$P(\omega)$ 为概率密度函数

一般而言，系综平均最严格（反复实验叠加作用结果），空间平均最方便。

有了平均量，瞬时量可以表示为

$$A=\overline{A}+A'$$

A' 为脉动量。

平均量和脉动量的运算法则满足：

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\overline{A}}=\overline{A},\quad \overline{A'}=0,\quad \overline{cA}=c\overline{A},\quad \overline{A'\overline{A}}=\overline{A'}\,\overline{A}=0,\\
&\overline{\overline{A}B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B},\\
&\overline{\frac{\partial A}{\partial x}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial x},\quad \overline{\frac{\partial A}{\partial y}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial y},\quad \overline{\frac{\partial A}{\partial z}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial z},\quad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial t},\\
&\overline{AB}=\overline{(\overline{A}+A')(\overline{B}+B')}=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{\overline{A}B'}+\overline{A'\overline{B}}+\overline{A'B'}\equiv\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A'B'},\\
&\overline{\int A\mathrm{d}s}=\int\overline{A}\mathrm{d}s.
\end{aligned}\right\}\tag{6-17}$$

我们可以将瞬时速度分解为平均速度和脉动速度：

$$v_i=\overline{v}_i+v_i'$$

带入到连续性方程取平均得

$$\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_i}=0$$

> ✎ **Note**
>
> ~~我自己是没搞懂上面的~~

将瞬时压力 p 分解成平均值和脉动值可得

$$\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{v_i}}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(-\rho\overline{v_i'v_j'})}{\partial x_j}$$

该式就是湍流的雷诺平均方程。$-\rho\overline{v_i'v_j'}$ 称为雷诺应力，是唯一的脉动量项，可认为脉动量是通过雷诺应力来影响平均运动。

圆管中充分发展层流与湍流

层流

我们先研究层流作用：假定圆管层流中流体质点只有沿轴向的流动 u，没有横向运动 （$v=w=0$），管中具有一定的压力，忽略重力影响，有 N-S 方程可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u\\
&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
$$

由此可见，压力只是 x 的函数，对于横截面恒定流动管道，则 u 不随 x 和 t 而变化，只是 y 和 z 的函数，所以改写成

$$
\frac{dp}{dx}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)
$$

所以，这要求等式两边等于常数才能成立，考虑长度 l 水平管上的水平压降 Δp,所以上式可改写成

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{\Delta p}{\mu l}
$$

改用极坐标形式求解上述偏微分方程，考虑速度分布式轴对称的，可得

$$
\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{\Delta p}{\mu l}=0
$$

改写成

$$
\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)+\frac{\Delta p r}{\mu l}=0
$$

考虑边界条件：当 $r=0$ 时，u 有限；当 $r=\frac{d}{2}, u=0$ 可得解：

$$
u=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right)
$$

流量（也称哈根-泊肃叶定律）

$$
Q=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{\pi\Delta p}{2\mu l}\left(\frac{d^2}{4}-r^2\right)rdr=\frac{\pi d^4\Delta p}{128\mu l}
$$

最大流速

$$u_{\max} = \frac{\Delta p d^2}{16\mu l}$$

平均流速

$$U = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{\Delta p d^2}{32\mu l}$$

切应力:

$$\tau = -\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{\Delta p r}{2l}$$

动能修正系数 α 和动量修正系数 β 是截面上实际动能和动量与按平均流速计算的动能和动量之比:

$$\alpha = \frac{\int_A \frac{u^2}{2} \rho dQ}{\frac{U^2}{2}\rho Q} = 2$$

$$\beta = \frac{\int_A \rho u \mathrm{d}Q}{\rho U Q} = \frac{4}{3}$$

为了保持管内流动，必须存在轴向静压差来克服壁面的摩擦力，此静压差称为沿程压力损失，单位流体的沿程压力损失称为沿程水头损失

$$h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu l U}{\rho g d^2} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{l}{d} \frac{U^2}{2g} \triangleq \lambda \frac{l}{d} \frac{U^2}{2g}$$

湍流

湍流场中任一空间点的运动参数的时均值不随时间变化时，称为定常湍流流动（准定常湍流），否则称为非定常湍流。时均法只能用于描述对时均值而言的定常湍流流动。

在湍流运动中，流体质点的大小和方向都在不停地变化，流体质点除主流方向运动外，还存在着沿不同方向的脉动，使得流层之间发生了质点交换，质点的动量也随之变化，从而引起了附加的切应力，这种切应力随着脉动增强而占据主动地位。

假定时均流动中存在 a、b 两层流体，时均速度分别为 $U, U + l\frac{dU}{dy}$，U 表示 x 方向的时均速度分布，y 方向的时均流速为零。l 为两层流体之间的距离。

假定 a 层流体质点在 dt 时间内，经微元面积 dA 以 v' 的脉动速度沿 y 轴流入 b 层，我们给出质量

$$\Delta m = \rho v' dA dt$$

该流体质点混合到 b 层后在 x 方向上产生了一个动量变化 $\rho v' dA dt u'$，有动量定理和牛顿第三定理的，该质点对 b 层流体的脉动切向力为

$$F' = -\rho v' dA u'$$

对应切应力

$$\tau_t' = -\rho u' v'$$

该应力纯粹由于脉动原因引起的附加切应力，也称雷诺切应力，考虑时均值

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$$

可以证明雷诺切应力永远大于零。

所以在湍流运动，除平均运动的粘性切应力外，还多了一项由脉动引起的附加切应力，总应力为

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$

借鉴粘性切应力表示形式，将附加切应力表示成时均速度形式：

$$\tau_t = \mu_t \frac{dU}{dy}$$

假定在 l 距离内，流体质点部与其他质点碰撞，因而能保持动量不变。

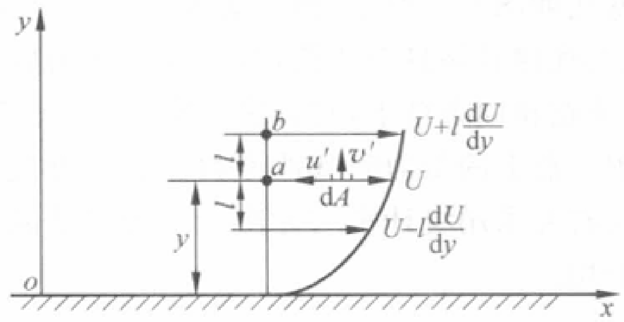


图 6-8 混合长度理论

考虑上图流动，可得导出上下两层流体质点到中间那层流体质点所产生的速度差在数值上均为

$$l \frac{dU}{dy}$$

普朗特混合理论假定：在 y 层处，流体质点横向运动所引起的 x 方向湍流脉动速度 u' 大小为

$$|u'| = l \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

有流体连续性原理可得，当流体质点离开原有流层时，其所空出来的空间位置由其相邻的流体质点来补充，于是引起流体的横向脉动 v'，两者相互关联，可表示为

$$|v'| = c|u'|$$

横向脉动 v' 与纵向脉动 u' 的符号相反，即

$$\overline{u'v'} = -\overline{|u'||v'|}$$

所以有:

$$\overline{|u'||v'|} = -cl^2\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

将 c 修正到 l （尚未确定）中，带入雷诺切应力的表达式中，写作带有符号形式，可得

$$\tau_t = \rho l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dU}{dy}$$

与之前我们所想要得到的切应力形式比较，我们可以得出湍流流动的粘性系数

$$\mu_t = \rho l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right|$$

l 称为混合长度，通常不是常数。

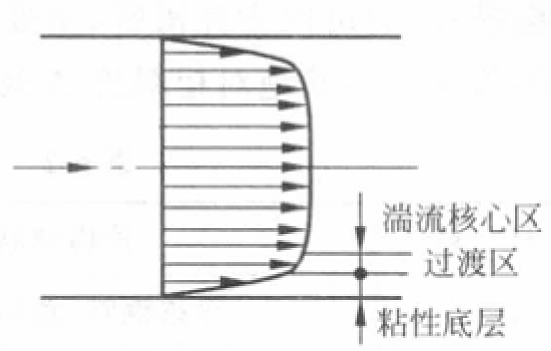


图 6-9 湍流的速度结构

湍流过流断面的速度分布可分为三个区域:

1. 粘性底层：流动呈层流，粘性起主导作用
2. 湍流核心区：流体处于湍流状态，流速分布均匀
3. 过渡区域：将起并作湍流核心区来处理

定义粘性底层的厚度

$$\delta \approx 30\frac{d}{Re\sqrt{\lambda}}$$

其中 d 为管道厚度，λ 为管道摩擦因子。粘性底层的厚度很小。

用 Δ 表示管道表面凹凸不平的平均尺寸，用来描述粗糙程度，称为绝对粗糙度

当 $\delta > \Delta$ ，粗糙度对湍流核心没有影响，称为水力光滑管

当 $\delta < \Delta$ ，粗糙度对湍流核心有影响，称为水力粗糙管

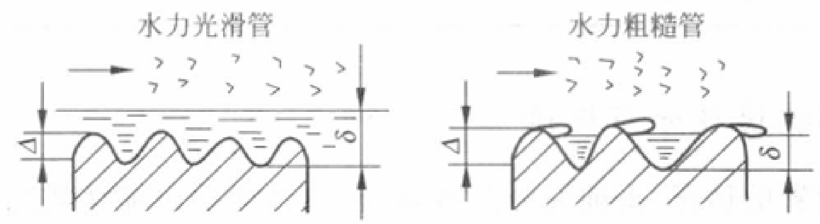


图 6-10 水力光滑管与水力粗糙管

我们推导湍流速度分布，对于光滑管的粘性底层内流体质点，此时质点没有混杂，故切应力主要为粘性切应力，附加切应力近似为零，由于粘性底层很薄，所以将其速度梯度近似为常数可得切应力

$$\tau = \mu \frac{U}{y}$$

我们用 τ_w 表示壁面处的切应力，他和粘性底层内部的切应力大小相同，定义壁摩擦速度 $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = v*$ ，可得如下关系式：

$$\frac{U}{v^*} = \frac{\rho v^* y}{\mu}$$

在粘性底层外的区域，湍流剧烈，忽略粘性切应力影响，则

$$\tau \approx \rho l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2$$

这边做两个强假设：假定 $l = ky, k$ 为常数，且湍流区切应力仍为常数 τ_w 则

$$\frac{dU}{v^*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

考虑 $y = \delta, U = U_\delta$

$$\frac{U}{v^*} = \frac{1}{k} \ln y + \frac{\rho v^* \delta}{\mu} - \frac{1}{k} \ln \delta$$

考虑采用雷诺数，取 $Re_\delta = \frac{\rho v^* \delta}{\mu}$ ，所以上式可以成

$$\frac{U}{v^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\rho v^* y}{\mu} + Re_\delta - \frac{1}{k} \ln Re_\delta$$

设 $A = Re_\delta - \frac{1}{k}\ln Re_\delta$ ，可以得出 $k = 0.4, A = 5.5$

最大流速

$$\frac{U_{\max}}{v^*} = 2.5\ln\frac{\rho v^* r_0}{\mu} + 5.5$$

平均速度

$$\frac{U_{av}}{v^*} = 2.5\ln\frac{\rho v^* r_0}{\mu} + 1.75$$

所以可用 U_{av} 表示 U

$$\frac{U}{v^*} = \frac{U_{av}}{v^*} + 2.5\ln\frac{y}{r_0} + 3.75$$

如果是粗造管，考虑粗糙度 Δ，得

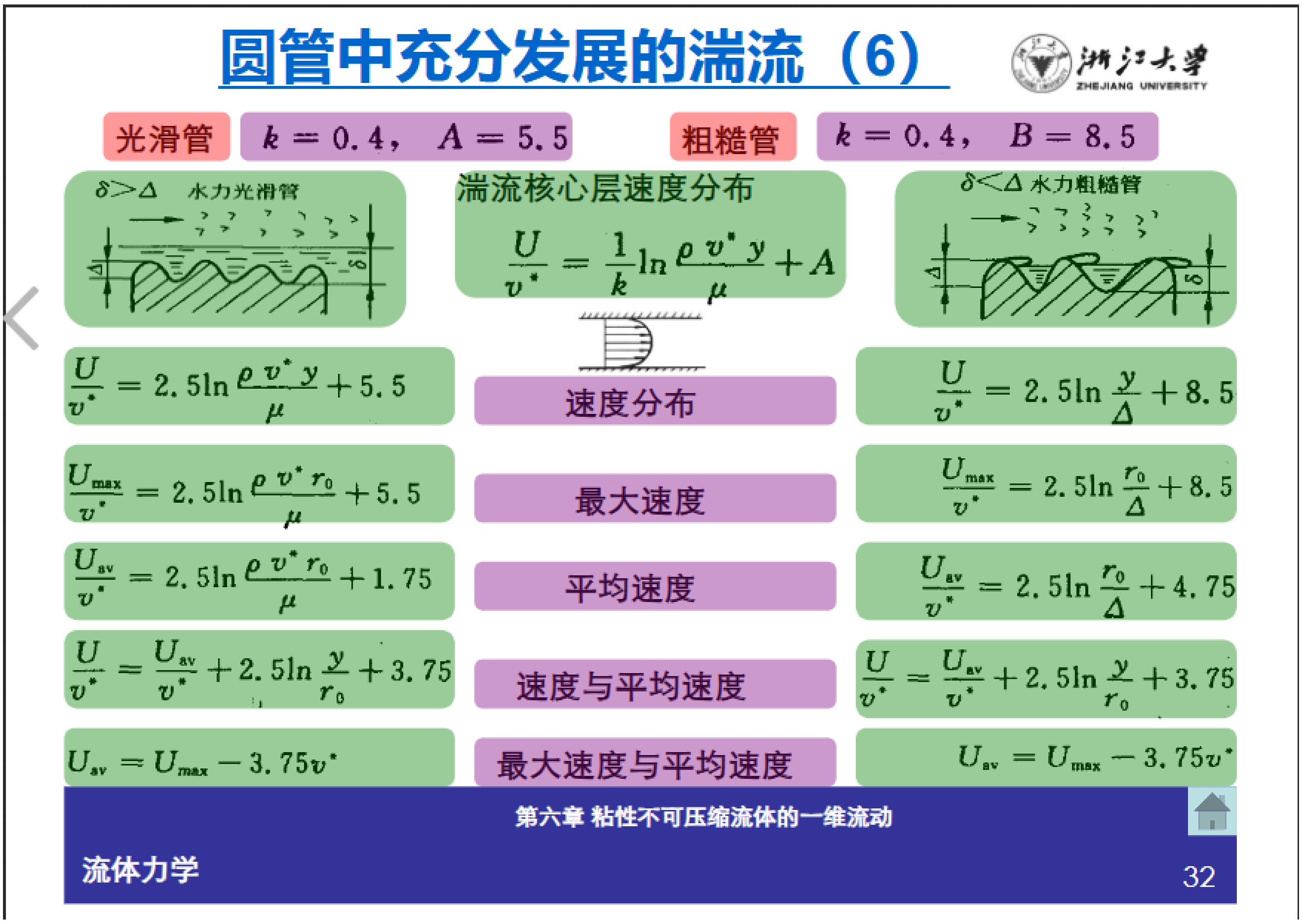
$$\frac{U}{v^*} = 2.5\ln\frac{y}{\Delta} + 8.5$$

最大流速和平均流速

$$\frac{U_{\max}}{v^*} = 2.5\ln\frac{r_0}{\Delta} + 8.5$$
$$\frac{U_{av}}{v^*} = 2.5\ln\frac{r_0}{\Delta} + 4.75$$

用 U_{av} 表示 U

$$\frac{U}{v^*} = \frac{U_{av}}{v^*} + 2.5\ln\frac{r_0}{\Delta} + 3.75$$



管流的沿程压力损失和局部阻力损失

> ✎ 碎碎念
>
> 笔记（x） 公式汇总（√）原理没什么意思

粘性流体的能量损失由两部分组成：沿程压力损失 h_l 和局部阻力损失 h_m

$$h_f=\sum h_l+\sum h_m$$

沿程压力损失

由量纲分析法可得，沿程损失与管长、管径、平均流速有关，即

$$h_l=\frac{\Delta p}{\rho g}=\lambda\frac{l}{d}\frac{U^2}{2g}$$

称为达西公式。 λ 为沿程阻力系数，他是雷诺数和管道相对粗糙度的函数。

由力的平衡可得

$$\tau_w=\frac{\Delta pd}{4l}$$

所以有

$$\lambda=\frac{8\tau_w}{\rho U^2}=8\left(\frac{v^*}{U}\right)^2$$

对于层流管

$$\lambda=\frac{64}{Re}$$

对于湍流光滑管

$$\lambda=\frac{8}{\left(2.5\ln\frac{\rho v^* r_0}{\mu}+1.75\right)^2}$$

由于

$$\frac{\rho v^* r_0}{\mu}=\frac{2\rho U r_0}{\mu}\frac{v^*}{2U}=Re\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}$$

所以有

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.035\lg(Re\sqrt{\lambda})-0.91$$

实验修正后，称为卡门-普朗特阻力系数公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.\lg(Re\sqrt{\lambda})-0.8$$

利用布拉修斯 1/7 次方速度分布可得

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{1/4}}$$

对于完全粗糙管

$$\lambda=\frac{8}{\left(2.5\ln\frac{r_0}{\Delta}+4.75\right)^2}$$

实验修正

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.0\lg\frac{d}{2\Delta}+1.74$$

过渡区 柯罗布鲁克公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2.0\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

局部阻力损失

$$h_m = \xi \frac{U^2}{2g}$$

其中 ξ 为局部阻力损失

对于管突然扩大问题

$$h_m = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \xi_1 \frac{U_1^2}{2g} = \xi_2 \frac{U_2^2}{2g}$$

其中

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$
$$\xi_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)$$

渐扩管

$$h_m = k \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

突然缩小

$$h_m = \xi \frac{U^2}{2g}$$

其中

$$\xi = 1 + \frac{1}{C_v^2 C_c^2} - \frac{2}{C_c}$$

$C_c = \frac{A_2}{A_1}$ 称为收缩系数，$C_v = \frac{U_c}{U_0}$ 称为流速系数

表 6-3　截面突然收缩流道的 C_c、C_v 及 ζ 值

A_2/A_1	0.01	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
C_c	0.618	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.00
C_v	0.98	0.982	0.984	0.986	0.988	0.990	0.992	0.994	0.996	0.998	1.00
ζ	0.49	0.458	0.421	0.377	0.324	0.264	0.195	0.126	0.065	0.02	0

渐缩管

$$
\xi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{8\sin(\theta/2)}\left[1-\left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^2\right] & \theta < 30^\circ \\ \dfrac{\lambda}{8\sin(\theta/2)}\left[1-\left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^2\right] + \dfrac{\theta}{1000} & 30^\circ < \theta < 90^\circ \end{cases}
$$

弯管压力损失

$$
\xi = \left[0.131 + 0.163\left(\frac{d}{D}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta}{90^\circ}
$$

表 6-4　90°弯管的局部阻力系数

d/R	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ζ	0.13	0.14	0.15	0.16	0.18	0.21	0.24	0.29	0.44	0.66	0.98	1.41	1.98

折角弯管：

$$
\xi = 0.946\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2.05\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)
$$

粘性总流的伯努利方程

有能量守恒定律可得，对于重力作用下的不可压缩流体定常流，在运动过程中单位质量流体的位能、压能、动能及损失的能量之和，等于在运动开始时单位质量流体的位能、压能和动能之和，即：

$$
gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gh'_f
$$

其中 gh'_f为单位质量流体的机械能损失，h'_f 也称能头损失或水头损失。该式就是粘性流体沿流线的伯努利方程。

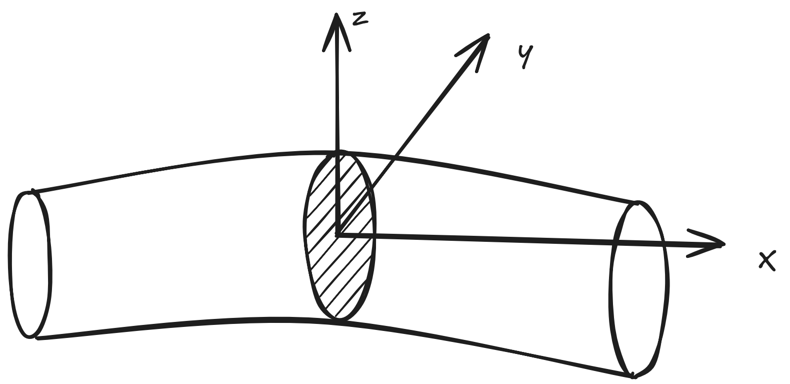
我们将这个方程推广到沿总流形式：

$$
\int_{A_1}\left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\rho dQ = \int_{A_2}\left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)dQ + \int_A gh'_f\rho dQ
$$

(这个式子其实有点语焉不详)

我们来简化这个表达式

$\int_A\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)\rho dQ$ 表示单位时间通过截面的势能总和。我们引入缓变流动假设，满足：1. 流线几乎相互平行 2.流线几乎是直线。于是在这两个假设下，质量力几乎是重力，过流截面可近似认为是一个平面，且与流线速度方向成正交关系，故没有其他速度分量。令 x 轴与过流截面相垂直：



则满足

$$u \neq 0, \quad v = w \approx 0$$

N-S 方程给出

$$\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u &= \frac{du}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

有2、3式可得，在缓变流时，yz 截面保持流体静力学规律。于是可将原有积分式子改写成

$$\int_A \left(\frac{p}{\rho} + gz\right)\rho dQ = \left(\frac{p}{\rho} + gz\right)\rho Q$$

(下面的讨论并不严谨)

讨论 $\int_A \frac{V^2}{2}\rho dQ$ ，将速度以平均速度形式表示 $V = V_{av} + \Delta v$ ，所以

$$Q = \int_A V dA = \int_A V_{av} dA + \int_A \Delta v dA = Q + \int_A \Delta v dA$$

（相当于用平均流速所产生的流量表示总体流量，但是这个并不严谨，多少有左手倒右手的味道）

于是有 $\int_A \Delta v dA = 0$，引用 $dQ = (V_{av} + \Delta v)$ 所以可将截面 A 动能展开成

$$\begin{aligned} \int_A \frac{V^2}{2}\rho dQ &= \frac{\rho}{2}\int_A (V_{av} + \Delta v)^3 dA \\ &= \frac{\rho}{2}\left(\int_A V_{av}^3 dA + 3V_{av}^2\int_A \Delta v dA + 3V_{av}\int_A \Delta v^2 dA + \int_A \Delta v^3 dA\right) \\ &= \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{3V_{av}\int_A \Delta v^2 dA}{V_{av}^3 A}\right)V_{av}^2 Q \end{aligned}$$

（此时假定 $\int_A \Delta v^3 dA \approx 0$,因为 Δv 有正有负）记作

$$\frac{aV_{av}^2}{2}\rho Q$$

其中 a 称为动能修正系数，显然它大于1，流速分布越不均匀，a 越大；流速分布较均匀，a越接近于1.

对于最后一项，我们不好直接用积分确定，于是做一个平均化处理

$$\int_A gh'_f \rho dQ = gh_f \rho Q$$

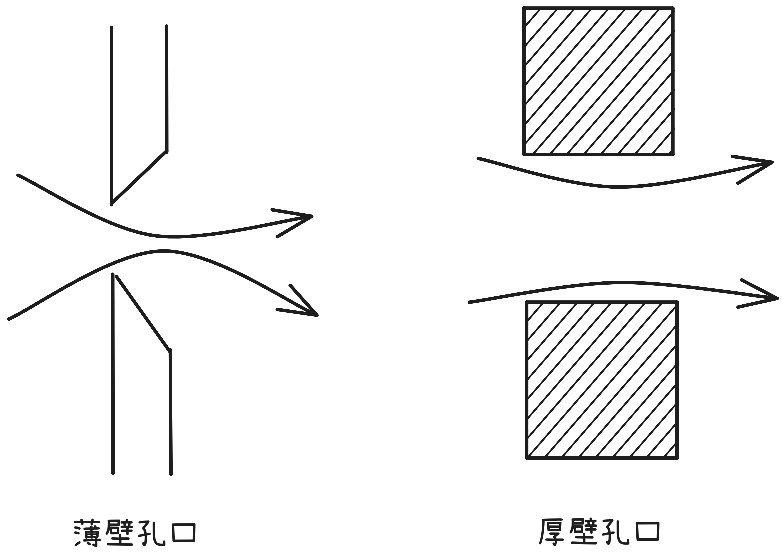
h_f 为单位质量流体平均消耗的能量。

将得到的结果除以 ρQ，可得重力场实际不可压缩流体定常流动总流的伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{aV_{av1}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{aV_{av2}^2}{2} + gh_f$$

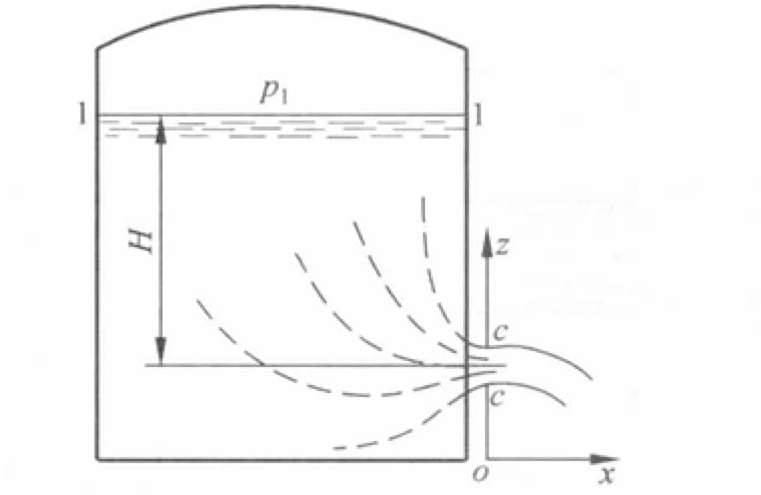
孔口出流

我们利用伯努利方程讨论两种孔口的自由出流问题



薄壁孔口

对于薄壁孔口，如果出流液体具有一定流速，壁厚不影响射流的形状，液体从薄壁孔口出流时没有沿程压力损失，只有因收缩引起的局部压力损失。



对1-1 和压缩截面 c-c 列伯努利方程

$$\frac{p_1}{g\rho}+H+\frac{aV_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{aV_c^2}{2g}+\xi_c\frac{V_c^2}{2g}$$

ξ_c 为孔口出流局部阻力系数，将连续性方程带入的得 $V_1=\frac{A_c}{A_1}V_c$，可得出流速度表达式：

$$V_c=\frac{1}{\sqrt{a_c-a_1\left(\frac{A_c}{A_1}\right)^2+\xi_c}}\sqrt{2\left(gH+\frac{p_1-p_c}{\rho}\right)}$$

考虑 $A_1>>A_c$ ，此时 $a_c\approx 1$，定义流速系数 $C_v=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_c}}$

$$V_c=C_v\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

定义收缩系数 $C_c=A_c/A_0$，流量系数 $C_d=C_cC_v$，可得通过孔口的流量

$$Q=V_cA_c=C_cA_0V_c=C_dA_0\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

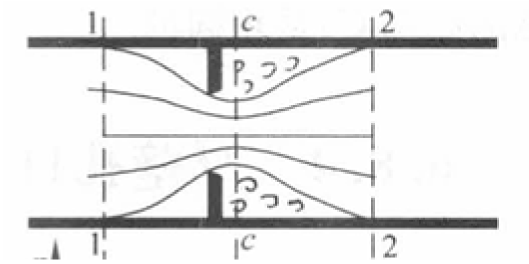
如果对于敞口容器，有 $\Delta p=0$（都为大气压），则可简化成

$$Q=C_dA_0\sqrt{2gh}$$

如果 $\frac{\Delta p}{\rho}>>gH$，则可简化成

$$Q=C_dA_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

接下来讨论薄壁孔口淹没出流



对截面 1-1 和 c-c 列伯努利方程

$$\frac{p_1}{g\rho}+\frac{aV_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{aV_c^2}{2g}+\xi_c\frac{V_c^2}{2g}$$

利用连续性方程，我们依旧可得

$$V_c=\frac{1}{\sqrt{a_c-a_1\left(\frac{C_cA_0}{A_1}\right)^2+\xi_c}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

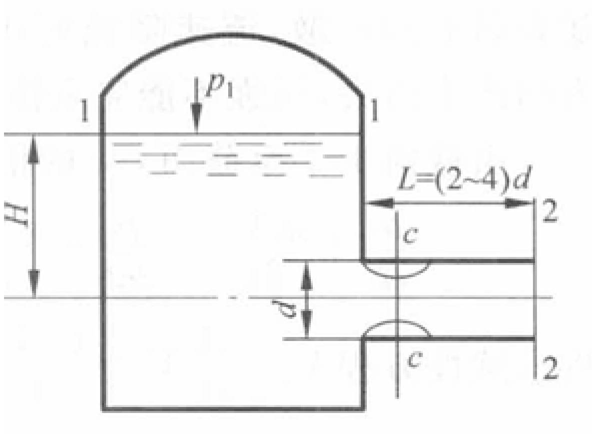
在工程中 $a_1\left(\frac{C_cA_0}{A_1}\right)^2$ 与 $a_c+\xi_c$ 相比可以忽略，此时 $a_c\approx1$，则

$$V_c=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

$$Q=C_dA_0\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

厚壁孔口

厚壁孔口出流时，不仅要考虑收缩的局部损失，而且要考虑沿程损失



对截面 1-1 和 2-2 列伯努利方程

$$\frac{p_1}{g\rho}+H+\frac{aV_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{aV_c^2}{2g}+\sum\xi_c\frac{V_c^2}{2g}$$

如果容器截面相对孔口截面很大，$V_1\approx0,a_2\approx1$，则

$$V_2=\frac{1}{\sqrt{1+\sum\xi}}\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

定义流速系数 $C_v=\frac{1}{\sqrt{1+\sum\xi}}$

$$Q=C_dA_0\sqrt{2\left(gH+\frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

流量系数 $C_d=C_v$

气穴

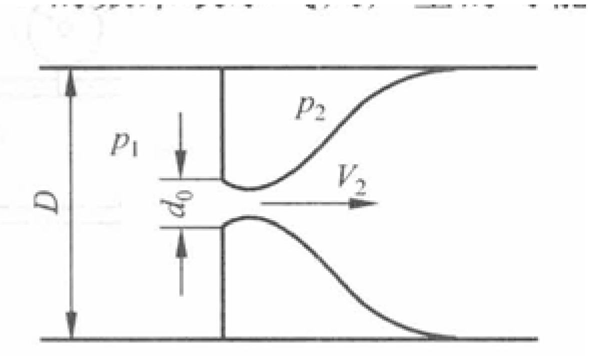


图 6-55　管内节流孔

当液体通过节流装置时，速度很高，压强很低，溶解在液体中的空气里气泡形式逸出，当压强继续降低，本身也要汽化而形成大量气泡，这种产生气泡的现象称为节流气穴。

对于上图，假定前后压强为 p_1 和 p_2，射出流速为 V_2，当 $d_0<<D$ 时，节流孔前后压差为

$$p_1-p_2\approx\frac{\rho V_2^2}{2}$$

定义一个量纲为 1 的数来表示气穴产生的可能性，称为节流气穴系数，定义为

$$\sigma=\frac{p_2-p_v}{\frac{\rho V_2^2}{2}}$$

p_v 称为液体的空气分离压，这是一个常数；上式也可以改写成

$$\sigma=\frac{p_2-p_v}{p_1-p_2}$$

理论上 $p_2=p_v,\sigma=0$ 时发生气穴，但是经验给出 $\sigma=0.4$ 时就可以产生气穴现象。

但是实际中很难测量 p_v。由于 p_v 一般是一个相较于 p_1,p_2 很小的数，所以可以忽略不记，于是可以将其记作

$$\sigma=\frac{p_2}{p_1-p_2}=\frac{1}{p_1/p_2-1}$$

将 0.4 带入，可得

$$\frac{p_1}{p_2} = 3.5$$

管道流动

长管： 只有沿程压力损失

短管： 沿程压力损失+局部阻力损失(局部阻力损失多)

管道内流量满足

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 V$$

V 为推荐流速

表 6-7　推荐流速

项　　目	平均流速 m/s	项　　目	平均流速 m/s
液压泵吸油管道	小于 1～2，一般常取 1 以下	液压系统回油管道	小于 1.5～2.6
液压系统压油管道	小于 3～6，压力高，管道短粘度小，取大值	给水系统市内总管 给水系统室内管道	1～1.5 1～2

> **Note**
>
> 短管和长管的分析见书本P252-P257，非！常！繁！琐！基本上综合了这章所学的东西。（

对于短管流动，我们利用伯努利方程和连续性方程可以导出一个简单能量损失关系。对于一个短管组合，考虑两端高度差和流速差可以忽略不计，可得

$$\Delta p = \xi_c \frac{\rho}{2A^2} Q^2$$

$Q = AV$ 和选定管道流速与对应截面有关，ξ_c 称为管道综合阻力系数，他与管道**沿程压力损失、局部阻力损失系数**有关，注意对于不同直径管道，要用连续性方程与我们选定的管道流速建立联系。系数中出现沿程阻力系数与雷诺数有关。

对于长管流动，局部阻力损失与沿程压力损失相比可以忽略不计。利用达西公式，我们改写一下沿程压力损失表达式（课本有误捏）

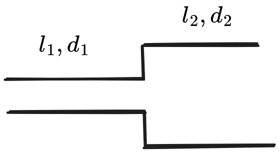
$$h_l = \sum \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5} l Q^2 \triangleq \sum B l Q^2$$

如果我们考虑水的流动，阻力系数与雷诺数无关，只决定于管径 d 与粗糙度 Δ 有关。

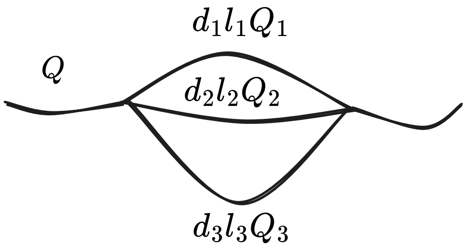
表 6-8 铸铁管 B 值

d/mm	洁净管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$	正常管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$	污垢管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$	d/mm	洁净管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$	正常管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$	污垢管 B/ $B/(s^2 \cdot m^{-6})$
40	20830	32260	50920	350	0.24	0.33	0.453
50	6390	9709	15190	400	0.12	0.16	0.223
75	751.9	1124	1709	450	0.064	0.088	0.119
100	166.1	244.4	265	500	0.037	0.051	0.0684
125	51.6	75.0	110.8	600	0.014	0.02	0.0260
150	19.8	28.6	41.85	700	0.0064	0.0087	0.0115
200	4.4	6.2	9.029	800	0.0032	0.0043	0.00567
250	1.4	1.9	2.752	900	0.0017	0.0023	0.00303
300	0.53	0.74	1.025	1000	0.0010	0.0014	0.00173

可以利用插值



串联管道



并联管道

串联管路:

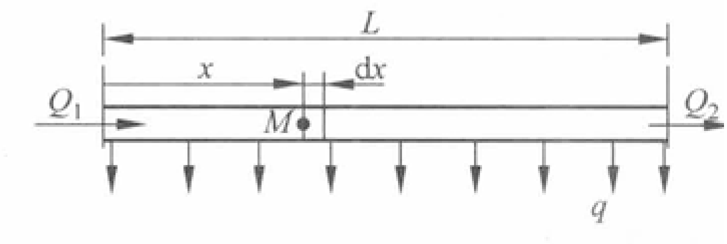
1. 流量相同 $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q$
2. 总能量为各损失之和 $H = \sum h_{li}$

并联管路

1. 总流量为各流量之和 $Q = \sum Q_i$
2. 能量损失相同（可利用伯努利方程推导） $h_{l1} = h_{l2} = \ldots h_{li}$

分支管路实际上是串联管路和并联管路的叠加（根据上面两个关系了求解 ~~电工电子学警告~~
)

沿途均匀泄流



管道直径为 D，输入流量为 Q 沿途作均匀泄流，泄流率为 q，再离进口 x 处取 dx 段，流量 $Q-qx$，流速 $\frac{Q-qx}{A}$ 由达西公式可得 dx 段压降

$$dp=\rho\lambda\frac{dx}{D}\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1-qx}{A}\right)^2=\frac{8\rho\lambda}{\pi^2D^5}(Q_1-qx)^2dx$$

积分得

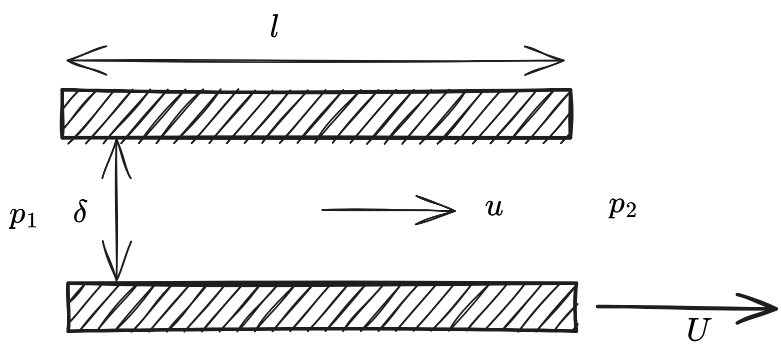
$$\Delta p=\frac{8\rho\lambda}{\pi^2D^5}(Q_1^2L-Q_1qL^2+\frac{q^2L^3}{3})$$

如果末端流量为 Q_2，则 $q=\frac{Q_1-Q_2}{L}$

$$\Delta p=\frac{8\rho\lambda L}{3\pi^2D^5}[3Q_1Q_2+(Q_1-Q_2)^2]$$

缝隙中的流动

由于缝隙水力直径（相当于圆截面的直径）较小，工作液体具有一定粘度，因此缝隙流动时雷诺数较小，一般属于层流范围，缝隙中液体产生运动的原因有二：一种时由于存在压差而产生流动，这种流动称为压差流；另一种是由于组成缝隙的壁面具有相对运动二使缝隙中液体流动，称为剪切流，两者的叠加称为压差-剪切流。



考虑两平板层流流体运动速度为 $u,v=w=0$，由于流体有粘性，缝隙尺度小，所以存在较大的速度梯度 $\partial u/\partial z$，连续性方程给出 $\partial u/\partial x=0,\partial u/\partial y$ 忽略不计，对于不可压缩流体，忽略质量力 N-S 方程简化为

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0
\end{aligned}
$$

所以 p 仅沿 x 方向变化，u 为 z 的函数，p 在 x 方向变化率时均匀的，于是

$$
\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\Delta p}{l} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{du^2}{dz^2}
$$

带入第一式积分，并且利用边界条件得

$$
u=\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-z)z\pm U\left(1-\frac{z}{\delta}\right)
$$

第一项式由于压强差造成的流动，称为压差流；第二项是下平板运动造成的流动，称为剪切流，当下平板运动方向向右时取正。如果是上平板运动，则流速公式为

$$
u=\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-z)z\pm U\left(\frac{z}{\delta}\right)
$$

依旧是向右移动时取正。

流量 Q

$$
Q=\int_0^\delta ubdz
$$

同心圆柱环形缝隙流动

$$
u=\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta-z)z+\pm U(1-\frac{z}{\delta})
$$

偏心圆柱环形缝隙流动

倾斜平板缝隙流动