张量分析

弹性力学

张量描述了矢量空间相关的代数对象之间的多重线性映射。张量可以作为不同对象之间的映射，例如矢量、标量，甚至其他张量。张量的定义独立于任何基，尽管他们通常由与特定坐标系相关的基中的分量来表示；这些分量形成一个数组，可以将其是为高维矩阵。n维空间上的r阶张量有n^r个分量，r也称为该张量的秩。

指标符号与求和约定

Einstein 约定求和就是略去求和式中的求和号，在此规则中两个相同指标就是表示求和，也称为“哑指标”。

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- 哑标采用不同字母不影响结果
- 两对哑标都服从求和约定，需采用不同字母
- 同一项中不同的自由下标应采用不同的符号
- 指标集合应加以标注，但对三维空间可忽略
- 同一项中有三个或三个以上的相同指标要在相同的集合中遍历求和，则需保留求和号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots + a_n b_n c_n$$

求导符号的简写

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \square_{,i}$$

Kronecker delta

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

替换性质

$$\delta_{ij} A_i = A_j$$

缩并

$$\delta_{ii} = 3$$

其他性质

$$
\begin{aligned}
&\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}\\
&\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}=\delta_{jj}=3\\
&\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}=\delta_{il}\\
&a_{ij}\delta_{ij}=a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\
&\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

排列置换符号

Permutation tensor(Levi-Civita symbol)

$$
e_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)}\\ -1 & \text{(i,j,k)=(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)}\\ 0, & \text{others}\end{cases}
$$

Kronecker标识法

$$
e_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1}\\ \delta_{i1} & \delta_{j2} & \delta_{k2}\\ \delta_{i1} & \delta_{j3} & \delta_{k3}\end{vmatrix}
$$

其他

$$
e_{ijk}e_{kqr}=\delta_{iq}\delta_{jr}-\delta_{ir}\delta_{jq}
$$

> 前前后后-内内外外（有够绕的

行列式计算

$$
a=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}=\frac{1}{6}e_{ijk}e_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}
$$

$$
e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}
$$

矢量

运算

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_iB_j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=A_iB_i\delta_{ij}\\
&\mathbf{D}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=A_iB_j\mathbf{e_i}\times\mathbf{e}_j=A_iB_je_{ijk}\mathbf{e}_k=D_k\mathbf{e}_k\\
&(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}\\
&\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}
\end{aligned}
$$

坐标变换

张量定义之一
在两个坐标基下的同一个向量满足

$$x_i \mathbf{e}_i = x_{i'} \mathbf{e}_{i'}$$

则坐标变换满足

$$x_{k'} = x_i a_{ik'}$$

其中 $a_{ik'} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{k'})$

于是，对于 $\mathbf{e}_{j'} = a_{ij'} \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j = a_{ij} \mathbf{e}_{i'}$

$$\delta_{i'j'} = a_{pi'} a_{pj'}$$

张量

按照出现的指标做矢量变换
笛卡尔张量:
矢量变换的推广：张量

表 1　前四阶笛卡尔张量

张量的阶数 n	分量的数目 3^n	变换规则
0	1	$T' = T$
1	3	$T_{p'} = a_{p'i} T_i$
2	9	$T_{p'q'} = a_{p'i} a_{q'j} T_{ij}$
3	27	$T_{p'q'r'} = a_{p'i} a_{q'j} a_{r'k} T_{ijk}$
4	81	$T_{p'q'r's'} = a_{p'i} a_{q'j} a_{r'k} a_{s'l} T_{ijkl}$
…	…	…

仅限用于直角坐标系

- 克罗内克尔符号是二阶张量
- 排列符号是三阶张量

作用

- 坐标无关性 形式不变
- 客观性

对称性

- 指标的对称性：$s_{ijk\ldots} = s_{jik\ldots}$
- 一个张量在某个坐标系中是对称的（或反对称的），则在其他坐标系中也是堆成（或反对称的）
- 各向同性张量 在不同坐标系下表示方式不变：标量，δ_{ij}，e_{ijk}

运算

- 相等

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}, T_{ij\ldots}=S_{ij\ldots}$$

- 加减法

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\quad C_{ik}=A_{ik}+B_{ik}\\&C_{i'k'}=A_{i'k'}+B_{i'k'}=a_{i'l}a_{l'm}(A_{lm}+B_{lm})=a_{i'l}a_{k'm}C_{lm}\end{aligned}$$

- 乘法

$$\mathbf{U}=k\mathbf{T}, U_{ij\ldots}=kT_{ij\ldots}$$

- 并乘

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}, C_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$$

  两个二阶张量并乘生成四阶张量
  不满足交换律 $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$，但满足分配律和结合律
- 缩并
  对 n 阶张量进行缩并，其实就是对其中两两相同的指标按求和约定求和

$$\begin{aligned}&A_{ijk}=A_{11l}+A_{22k}+A_{33k}\\&A_{p'q'r'}=a_{p'i}a_{q'j}a_{r'k}A_{ijk}\\&A_{p'p'r'}=a_{p'i}a_{p'j}a_{r'k}A_{ijk}=\delta_{ij}a_{r'k}A_{ijk}=a_{r'k}A_{iik}\end{aligned}$$

  张量缩并一次，其阶数就降低二阶
  最简单的例子是矩阵，矩阵是一个二阶张量，我们可以用一个数 b_r 表示其中一个张量 a_{ij}，也就是将一个二阶张量缩并成一个零阶张量（实数）
- 内积

$$T_{ijk}S_{jm}=U_{ikm}, U_{ikm}=\sum_{j=1}^{3}A_{ijk}B_{jm}$$

  张量的内积兼有并乘和缩并的特点，在运算中既要区分前后两个张量的次序，又要注意是那一对指标进行缩并
- 微分

$$\begin{aligned}&A_{j_1'j_2'\cdots j_n'}=a_{j_1'p_1}a_{j_2'p_2}\cdots a_{j_n'p_n}A_{p_1p_2\cdots p_n}\\&\frac{\partial}{\partial x_i'}=a_{i'l}\frac{\partial}{\partial x_l}\\&A_{j_1'j_2'\cdots j_n',i'}=a_{j_1'p_1}a_{j_2'p_2}\cdots a_{j_n'p_n}a_{i'l}A_{p_1p_2\cdots p_n,l}\end{aligned}$$

  张量对坐标的一阶偏导数是比原张量高一阶的张量
  材料力学中，对位移（矢量）求导得到应变（二阶张量）。

笛卡尔张量

定义

$$T_{p'q'} = a_{p'i}a_{q'j}T_{ij}; T_{ij} = a_{ip'}a_{jq'}T_{p'q'}$$

商定律：如果有一个由 n 个指标符号代表的量与任意一个矢量的内积得到一个$(n-1)$阶张量，则该指标符号所代表的量就是一个n阶张量。

如果为 ξ, η 矢量，且以下双一次形在坐标变换时保持不变：

$$F = a_{ij}\xi_i\eta_j$$

则由9个分量a_{ij}组成的集合被称为此张量的分量。

二阶张量

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

对称

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

反对称

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

分解

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}$$

主方向

$$T_{ij}A_j = \lambda A_i$$

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

场

梯度

$$\nabla\varphi = (\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi$$

梯度算子： $\nabla = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$

散度

$$\text{div}A = \nabla\cdot\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_k\frac{\partial}{\partial x_1} = A_{i,i}$$

旋度

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = e_{ijk}A_{k,j}\mathbf{e}_i$$

Laplace 算子

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i}$$

一些常用公式

$\nabla(\varphi+\psi) = \nabla\varphi+\nabla\psi$ $\quad((\varphi+\psi)_{,i} = \varphi_{,i}+\psi_{,i})$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ $\quad((A_i+B_i)_{,i} = A_{i,i}+B_{i,i})$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$ $\quad(e_{ijk}(A_k+B_k)_{,j} = e_{ijk}A_{k,j}+e_{ijk}B_{k,j})$

$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$ $\quad((\varphi\psi)_{,i} = \varphi\psi_{,i}+\psi\varphi_{,i})$

$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv div\ curl\boldsymbol{A} = 0$ $\quad(e_{ijk}(A_{k,j})_{,i} = 0)$

$\nabla\times(\nabla\varphi) \equiv curl\ grad\varphi = 0$ $\quad(e_{ijk}(\varphi_{,k})_{,j} = 0)$

$\nabla\cdot(\nabla\varphi) \equiv div\ grad\varphi \equiv \nabla^2\varphi$ $\quad((\varphi_{,i})_{,i} = \varphi_{,ii})$

$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}$ $\quad((\varphi A_i)_{,i} = \varphi_{,i}A_i+\varphi A_{i,i})$

$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\nabla\varphi = \varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$

$(e_{ijk}(\varphi A_k)_{,j} = \varphi e_{ijk}A_{k,j}+e_{ijk}\varphi_{,j}A_k)$

$\nabla\cdot(\nabla\varphi_1\times\nabla\varphi_2) \equiv 0$ $\quad((e_{ijk}\varphi_{1,j}\varphi_{2,j})_{,k} = 0)$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$ $\quad((e_{ijk}A_jB_k)_{,i} = e_{kij}B_kA_{j,i}-e_{jik}A_jB_{k,i})$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$

$(e_{ijk}(e_{kpq}A_pB_q)_{,j} = (A_{p,j}B_q+A_pB_{q,j})(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})$

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ $\quad(e_{ijk}(e_{kpq}\cdot A_{q,p})_{,j} = A_{q,pj}(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}))$

$\nabla\cdot(\nabla^2\boldsymbol{A}) = \nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ $\quad((A_{i,jj})_{,i} = A_{i,ijj})$

$\nabla^2(\nabla\varphi) = \nabla(\nabla^2\varphi)$ $\quad((\varphi_{,i})_{,jj} = (\varphi_{,jj})_{,i})$

高斯公式:

$$\int_R \text{div}\mathbf{A}dv = \int_S a_in_ids$$

斯托克斯公式:

$$\int_S \text{curl}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}ds = \oint_L \mathbf{A}d\mathbf{L}$$