流体复习整理

流体力学

流体物理性质与运动描述

1. 稀疏性 克努森数 $Kn = \frac{\lambda}{L}$ 用来判断流体是否能被当作连续介质
2. 可压缩性 $\frac{1}{K} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$
   - 不可压缩流体： ρ 为常数
   - 不可压缩流动： $\frac{\Delta \rho}{\rho} < 0.05$ 不可压缩流体一定发生不可压缩流动

不可压缩流体满足 $\nabla \cdot V = 0$

3. 粘性
   - 牛顿流体 ： 满足 $\tau = \mu\frac{du}{dy}$
   - 非牛顿流体
4. 导热性

Lagranian 描述和 Eulerian 描述

Larangian to Eulerian

已知运动规律

$$r = r(a, b, c, t)$$

则直接求导

$$v = \frac{\partial r}{\partial t}$$

Eulerian to Larangian

求解常微分方程组

$$\frac{dr}{dt} = v(r, t)$$

Eulerian 描述中的随体导数

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + v_j\frac{\partial B}{\partial x_j}$$

- 迹线：流体质点在流场中运动的轨迹

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dz}{dt} = w \end{cases}$$

- 流线：位于该曲线上的所有流体质点的运动方向都与这条曲线相切

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

- 脉线：经过同一空间固定点的不同流体质点，在某一瞬时将这些质点所处位置点光滑连结而成的曲线

当流动为定常流动时迹线与流线重合

流体静压学

- 平衡微分方程

$$f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

  在运动坐标系中需要考虑惯性力的影响
- 压强

$$p = p_a + \rho g y$$

  相对压力/表压：$p - p_a$
  真空度：$p_v = p_a - p$
- 压力

$$F = \int pdA$$

- 压力中心（作用中心）

$$y_c = \frac{\int ypdA}{F}$$

运动基本方程

Tip

感觉这章概念性的东西很多，但是能直接考的东西很少

柱坐标（极坐标）的 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

球坐标的 Laplace 方程

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

连续性方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho d\tau + \oint_A \rho(V\cdot n)dA = 0$$

当流体不可压缩时应有

$$\nabla\cdot V = 0$$

极坐标形式:

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0$$

N-S 方程

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

正压流体 $\rho = \rho(p)$ 正压流体是一种力学特征与热力学特征无关的流体，正压流体运动速度的求解不需要用能量方程

如何根据边界条件/速度分布判断有无粘性:

在固面边界上满足 $v_{流} = v_{固}$ 特别是对于固壁静止时有 $v = 0$。如果固面运动方程为 $F(x, y, z, t) = 0$ 则满足

$$\frac{\partial F}{\partial t} + x_j\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$$

一维流动

不可压缩流体定常流动

- 连续性方程

$$V_1A_1 = V_2A_2$$

- 定常伯努利方程

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

准定常流动在微小时间段 dt 内视为定常流动

不可压缩流体非定常流动

- 连续性方程

$$V_1A_1 = V_2A_2$$

- 非定常伯努利方程

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds$$

分流和汇流问题

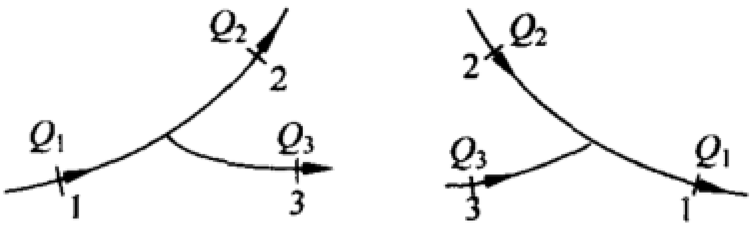


图 4-10　一维分流与汇流

- 伯努利方程

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3$$

- 连续性方程

$$V_1A_1 = V_2A_2 + V_3A_3$$

> **Tip**
>
> 动量定理和动量矩定理最好找两道例题感受一下，单纯公式没有意义

动量定理：

$$\oint_A \rho V(V\cdot n)dA=\sum F$$

一般用来计算反作用力

动量矩定理：

$$\oint_A (r\times V)(\rho V\cdot n)dA=\sum M$$

一般用来计算作用力的作用中心

对于非惯性系，我们的速度为相对速度

二维流动

涡旋理论

有旋无旋的定义是看流体微团本身是否是绕着自身轴线旋转；无旋流动：流体微元的角速度为零的流动

无旋场：

$$\nabla\times V=0$$

二维形式：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

涡管强度：用来描述涡通量

$$J=\iint_A \omega\cdot n\,dA=2\iint_A \Omega_n\,dA$$

速度环量：速度在某一封闭周线切线上的分量沿该封闭周线的线积分

$$\Gamma=\oint V\cdot ds=\oint(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$$

斯托克斯定理：当单连通有限封闭周线内有涡束时，则沿封闭周线的速度环量等于该封闭周线内所有涡束的涡通量之和。即 $\Gamma=J$

汤姆孙定理：无粘性、正压流体在有势质量力作用下，沿任何封闭的流体质点线的速度环量在运动过程中不随时间变化，即速度环量关于时间的变化率为零。

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint V\cdot ds=0$$

有旋流动永远保持为相同涡旋强度的有旋流动，无旋流动则永远保持无旋流动。

- Helmholtz 定理：
  1. Helmholtz 第一定理： 在同一瞬间，涡管各截面上的涡通量都相同。
  2. Helmholtz 第二定理： 无粘性、正压流体在有势质量力的作用下，涡管在运动过程中永远由相同的流体质点组成。
  3. Helmholtz 第三定理： 无粘性、正压流体在有势质量力的作用下，涡管的强度不随时间变化。

涡量方程 （课本上没有，复习PPT上有）

$$\frac{d\omega}{dt} - (\omega\cdot\nabla)V = \nu\nabla\omega^2$$

粘性、卸压（压力降低）和外力无势（能量耗散）是 Γ or J 变化的原因。

二维平面流动

无旋流动等同于有势流动。

速度势：

$$\nabla\varphi = V$$

如果速度势是的单值和连续的，则沿任一封闭周线速度环量等于零。

流函数 ψ： 二维流动中两条流线间单位厚度通过的体积流量等于两条流线上的流函数常数之差。

二维平面流动：

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

几种常见的二维流动：

- 平行流

  速度势： $\varphi = u_0x + v_0y$

  流函数： $\psi = -v_0x + u_0y$
- 点源和点汇： 流出为正

  速度势： $\varphi = \pm\frac{q_v}{2\pi}\ln r$

  流函数： $\psi = \pm\frac{q_v}{2\pi}\theta$
- 点涡

速度势：$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

流函数：$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$

压强： $p = p_\infty - \frac{\rho v_\theta^2}{2} = p_\infty - \frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2}\frac{1}{r^2}$

涡核半径：$r_b = \sqrt{\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2}\frac{1}{p_\infty - p_b}}$

二维流动的简单叠加

- **螺旋流**：点汇与点涡的叠加

  速度势：$\varphi = -\frac{1}{2\pi}(q_V \ln r - \Gamma\theta)$

  流函数：$\psi = -\frac{1}{2\pi}(q_V\theta + \Gamma \ln r)$
- 平行流和点源流动的叠加

  速度势：$\varphi = u_\infty r\cos\theta + \frac{q_V}{2\pi}\ln r$

  流函数：$\psi = u_\infty r\sin\theta + \frac{q_V}{2\pi}\theta$
- 点源和点汇的叠加

  速度势：$\varphi = \frac{q_{VA}}{2\pi}\ln r_A - \frac{q_{VB}}{2\pi}\ln r_B$

  流函数：$\psi = \frac{q_{VA}}{2\pi}\theta_A - \frac{q_{VB}}{2\pi}\theta_B$
- **偶极流**： 点源点汇流量相同且逐渐靠近，$M = q_V 2a$

  速度势：$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$

  流函数：$\psi = \frac{q_V}{2\pi}\arctan\left(\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}\right) \approx -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$

两种绕圆柱流动：

无环量绕圆柱流动： 偶极流与平行流的叠加

流函数

$$\psi = u_\infty y\left(1 - \frac{M}{2\pi u_\infty}\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

等效圆柱半径

$$r_0^2 = \frac{M}{2\pi u_\infty}$$

我们给出圆柱表面上极坐标形式的速度分布

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= -2u_\infty \sin\theta \end{aligned}$$

所以圆柱表面上只有切向速度，与流体绕圆柱体不发生脱离的边界条件相符。我们将满足 $v_\theta = 0$ 点称为驻点， $v_\theta = 2u_\infty$（不考虑方向）的点称为舷点。

我们可以得到沿圆柱体轴线速度环量

$$\Gamma = \oint v_\theta ds = 0$$

也就是说平行流绕过圆柱体的二维流动的速度环量为零。

对于圆柱体表面上的压强，用 p_∞ 表示无穷远处流体的压强可得$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)$

也就是说驻点处压强最大，舷点处压强最小（这很容易理解）。我们定义压力系数 C_p

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 1 - (\frac{V}{u_\infty})^2$$

这是是一个量纲为 1 的压力系数。在圆柱体面上有$C_p = 1 - 4\sin^2\theta$也就是说圆柱体表面上的压力系数只是极角 θ 的函数。

达朗贝尔佯谬：当理想流体平行流无环量绕圆柱体时，圆柱体既不受阻力作用也不受升力作用，这一结论可以推广到理想流体平行绕过任意形状柱体无环量无分离的二维流动。不受升力符合实际，但是不受阻力与实际不符。理论：边界层

有环量的绕圆柱流动： 绕圆柱无环量与点涡叠加

速度势函数

$$\varphi = u_\infty(1 + \frac{r_0^2}{r^2})r\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

升力公式

$$F_L = -\rho u_\infty \Gamma$$

kutta-Joukowsky 公式：

$$F = -\rho\Gamma u_\infty$$

绕儒科夫斯基翼型的速度环量：

$$\Gamma = \pi u_\infty b\sin(a - a_0)$$

其中 b 为翼型弦长，所以可得流体作用在儒科夫斯基翼型上的升力

$$F_L = \rho\pi u_\infty^2 b\sin(a - a_0)$$

定义升力系数 C_L

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A}$$

对于单位长度的翼型而言，升力系数可简化成

$$C_L = 2\pi\sin(\alpha - \alpha_0)$$

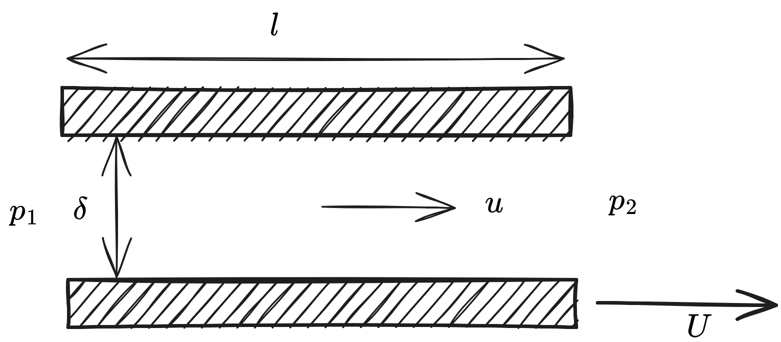
量纲分析

- 量纲：物理量的种类属性
- 单位：物理量的度量基准
- 量纲和谐原理：凡是正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲都必须是一致的。
- 白金汉Pi 定理：一个物理上有意义的方程，其中有 n 个物理量，而这些物理量共有 k 个独立的量纲，则原方程式可以写成由 $p = n - k$ 个无量纲的参数 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ 组成的方程式
- 相似原理：对于两个具有相似单值条件（几何形状、初始状态、边界条件）的同类物理现象体系，其中一个体系中的所有参数可以从另一体系中相应的参数乘以一定的换算系数（相似系数）而得到的原理。

粘性流动

- 粘性流体特点
  - 有旋性
  - 耗散性
  - 扩散性

二维平板流



控制方程

$$\frac{du^2}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

二重积分，由边界条件确定系数

- 库尔特流：没有压差作用 $\frac{dp}{dx} = 0$ 又称拖曳流
- 泊肃叶流：有压差，边界固定。

对于圆管退化成极坐标下的一维管道流动，控制方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

粘性环形库尔特流动

简化的N-S方程

$$\left(\frac{d^2u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) = 0$$

边界条件：$(u_\theta)_{r=R_1} = \omega_1 R_1, (u_\theta)_{r=R_2} = \omega_2 R_2$，对应解

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, B = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

绕圆球的小 Re 解

核心是分离变量法求解

1. Stokes 解

$$v_r(r,\theta) = V_\infty \cos\theta\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right]$$
$$v_\theta(r,\theta) = -V_\infty \sin\theta\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right]$$
$$p(r,\theta) = -\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty a}{r^2}\cos\theta + p_\infty.$$

阻力：

$$D = 6\pi\mu V_\infty$$

阻力系数：

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re}$$

2. 奥森解

阻力：

$$D = 6\pi\mu V_\infty a\left(1 + \frac{3aV_\infty}{8\nu}\right)$$

阻力系数：

$$C_D = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}Re\right)$$

圆柱绕流现象（没有Stokes 解）

1. $Re < 5$ 没有分离
2. $5 < Re < 40$ 有分离，出现对称涡
3. $40 < Re < 150$ 出现卡门涡街
4. $150 < Re < 300$ 出现转捩流动
5. $300 < Re < 3 \times 10^5$ 出现湍流
6. $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^6$ 流动不规则
7. $3.5 \times 10^6 < Re$ 湍流边界层

分离理论：粘性作用+逆压

有逆压不一定有边界层的分离，逆压越大，越容易发生分离。

分离越早，压差阻力越大，严重分离时，压差阻力远大于摩擦阻力

- 边界层的控制
  - 减少压差阻力
    - 形状：设计流线型
    - 吹流：补充动能
    - 抽能：抽走动能较低的流体
    - 转捩：提早进入湍流
    - 制造漩涡：涡流发生器
  - 减少摩擦阻力
    - 延缓转捩，维持层流
    - 开流向沟槽
    - 添加聚合物

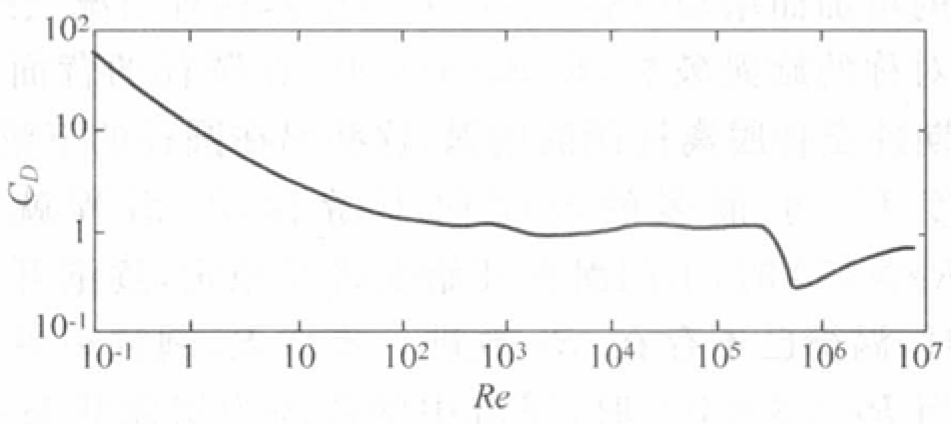


图 8-18　不同 Re 数下圆柱绕流的阻力系数

阻力系数下降的原因是边界层层流变成湍流，推迟分离现象的发生

流动状态判断：如何判断湍流和层流 对于圆形截面管道，按 $Re = 2000$ 判断湍流层流

不规则截面的水利直径(A 为面积，χ 为周长)

$$d_H = \frac{4A}{\chi}$$

边界层厚度 边界层满足 $u = 0.99U$ 以内的部分，很薄

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} \text{ or } \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

- 名义厚度：δ
- 位移厚度：描述流线因粘性作用而向外偏移的距离

$$\delta^* = \int_0^{\infty,\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

- 动量损失厚度：描述总阻力的影响

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty,\delta} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

  通常情况下：$\delta > \delta^* > \delta^{**}$
- 形状因子 $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$
- 卡门动量积分方程

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

相同 Re 情况下，湍流边界层比层流边界层厚

层流

二维层流边界层方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

对于层流边界层，自相似解的存在条件是外流速度 $U(x)$ 为 x 的幂函数.

布拉修斯相似解

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

板上的局部阻力

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332\mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}$$

局部阻力系数

$$C_x = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.664\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \triangleq \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

长为 L，宽为 b且两边浸润在流体中的平板所受总摩擦阻力为

$$D = 2b\int_0^L \tau\, dx = 1.328b\sqrt{\mu\rho U^3 L}$$

总的阻力系数

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$$

郭永怀的修正

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} + \frac{4.12}{Re}$$

湍流

雷诺平均运动方程

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(-\rho\overline{v_i' v_j'})}{\partial x_j}$$

湍流模拟方法

- 直接模拟 DNS
- 雷诺平均模拟 RANS
- 大涡模拟 LES

效率：RANS > LES > DNS
精度：RANS < LES < DNS

普朗特混合长度：引入混合长度，描述湍流流动

- 粘性系数 $\mu_t = \rho l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right|$

- 混合长度 $l = \kappa y$ κ 称为冯卡门常数，取 0.41

湍流边界层

- 结构
  1. 线性层：也称粘性层，流速呈线性分布
  2. 过渡层：比较复杂，归入对数层分析
  3. 对数层：湍流效应占主导作用
- 摩擦速度

$$u = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

湍流管道

$$\frac{u}{U^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\rho U^* y}{\mu} + A$$

- 光滑管道：$k = 0.4 A = 5.5$
  - 速度分布：$\frac{u}{U^*} = 2.5 \ln \frac{\rho U^* y}{\mu} + 5.5$
  - 最大速度：$\frac{u_{max}}{U^*} = 2.5 \ln \frac{\rho U^* r_0}{\mu} + 5.5$
  - 平均速度：$\frac{u_{av}}{U^*} = 2.5 \ln \frac{\rho U^* r_0}{\mu} + 1.75$
- 粗糙管道：$k = 0.4 A = 8.5$
  - 速度分布：$\frac{u}{U^*} = 2.5 \ln \frac{y}{\Delta} + 8.5$
  - 最大速度：$\frac{u_{max}}{U^*} = 2.5 \ln \frac{r_0}{\Delta} + 8.5$
  - 平均速度：$\frac{u_{av}}{U^*} = 2.5 \ln \frac{r_0}{\Delta} + 4.75$
- 损失：

$$h_f = \sum h_l + \sum h_m$$

- 达西公式：

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{U^2}{2g}$$

层流：$\lambda = \frac{64}{Re}$
湍流：$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0.91$ 普朗特修正 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0.8$

- 局部损失系数

$$h_m = \xi \frac{U^2}{2g}$$

~~湍流应该有一坨雷诺应为方程和湍动能方程，因为不是人能背的所以我不整~~

空气动力学

- 马赫数

$$Ma = \frac{V}{a}$$

  $Ma < 0.3$ 称为不可压缩流体

- 完全气体：其行为符合压强、体积、温度之间的理想关系可用理想气体状态方程来描述
- 等熵过程的伯努利方程

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + h = const$$

- 滞止参数
  - 滞止焓 h_0
  - 滞止速度 $\sqrt{2h_0}$
  - 滞止温度 $T_0 = T + \frac{V^2}{2C_p}$
  - 滞止压强 $p + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\rho V^2 = p_0\frac{\rho}{\rho_0}$
- 声速 $Ma = 1$

$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$$

  声音的传播过程是一个绝热过程，不一定需要等熵过程

- 临界参数
  - 临界速度 $V_* = a_*$
  - 伯努利常数 $C = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2$
- 变截面等熵流动

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A}\frac{1}{Ma^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho V^2}$$

  最大流量必须在喉管处于声速条件下才能实现，除非扩张喉管面积，否则管道流量不能再增加，这一现象称为壅塞现象