

# 粘性不可压缩流体运动

## 流体力学

### ✍ Note

这章内容源于吴望一老师的《流体力学》，吴老师的《流体力学》理论性强，但是粘性流体讲的不多。因为教材实在是太烂子，所以找这一本稍微过一下比较重要的理论。因为之前的几章笔记已经包含大部分理论的一些推导，所以写的比较简单。

## 基本理论

列出不可压缩粘性流体的基本方程组：

$$\text{连续性方程: } \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

$$N-S \text{ 方程: } \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

一般性质：

1. 运动的有旋性
2. 能量的耗散性
3. 涡旋的扩散性

这三条其实很好理解：粘性力的存在使得流体的运动有旋；粘性力也是一个耗散项，将动能转化成一部分热能；涡旋会从强度高的地方向强度低的地方输送涡量（想象热对流）

因为粘性不可压缩流体的运动很复杂，所以我们希望能从一个比较小的模型推出实际模型的运动情况，那么就要模型与实际在某些条件上是相似的。连接其模型与实际的桥梁就是量纲分析法，也就是引入无量纲参数。如果两个几何相似的流场中无量纲力学量都相等，则称这两个流动为力学相似。

在粘性不可压流体中，我们所需要用的无量纲数只有四个：

- 斯特劳哈尔 (Strouhal) 数，表征非定常项与惯性项之比

$$St = \frac{L}{V_{\infty} T}$$

- 欧拉 (Euler) 数，表征压力和惯性力之比

$$Eu = \frac{P}{\rho V_{\infty}^2}$$

- 雷诺 (Reynolds) 数, 表征惯性力与粘性力之比

$$Re = \frac{V_{\infty} \rho L}{\mu} = \frac{V_{\infty} L}{\nu}$$

- 弗劳德 (Froude) 数, 表征惯性力与重力之比

$$Fr = \sqrt{\frac{V_{\infty}^2}{gL}}$$

所以这四个数相同可以推出两个几何相似的流场力学相似（当然还要满足一定的边界条件和初始条件）

在流场中, 阻力系数只和雷诺数有关

$$C_x = f(Re)$$

因此, 我们可以通过求阻力系数的方式求得阻力即

$$W = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 f\left(\frac{LV_{\infty}}{\nu}\right)$$

雷诺数是用来表征惯性力和粘性力之比的, 所以当雷诺数比较大时, 惯性力大于粘性力, 此时流动极不稳定, 容易发展成湍流; 当雷诺数比较小的时候, 粘性力大于惯性力, 此时为层流。层流和湍流的判断标准为  $Re = 2000$ 。尽管层流和湍流之间存在一定过渡阶段, 我们可以暂时不去处理。

## 层流

### 精确解

在无限长柱形管道的定常运动中,  $y, z$  方向没有流体的运动, 因此这两个方向上的惯性力和粘性力皆为零, 压强梯度也为零, 压强变化只与  $x$  方向上的压强分布有关;  $x$  方向上的速度  $u$  不依赖于  $x$ 。速度  $u(y, z)$  满足

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \nu \nabla^2 u(y, z)$$

我们假定压强是均匀减小的, 即梯度  $\frac{dp}{dx} = -\frac{p_a - p_b}{l}$ , 我们的问题就转化成了在给定边界条件, 求解泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{p_a - p_b}{\mu l}$$


---

对于泊肃叶流动（定常圆管流动），上述方程又可以写作

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{p_a - p_b}{\mu l}$$

那么泊肃叶流动的解为

$$u = \frac{p_a - p_b}{4\mu l} (a^2 - r^2)$$

在圆管流动中，平均速度是最大速度的一半，阻力系数  $\lambda = \frac{8}{\text{Re}}$

---

在两个无穷长平行平板组成的二维渠道中，泊松方程写为

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

如果边界条件为  $u_{y=\pm h} = 0$  则

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2)$$

平均速度  $u_{av} = \frac{2}{3} u_{\max}$  阻力系数  $\lambda = \frac{6}{\text{Re}}$

如果假设下平板不同，上平板以常速  $U$  沿  $x$  轴运动，若  $\frac{dp}{dx} = 0$  也就是说流体因上平板拖动而流动则可解得

$$u = \frac{y}{h} U$$

此为均匀剪切流的速度分布，称为平面库埃特流动。

如果将均匀剪切流动和平面泊肃叶叠加起来，就可得到既有压差作用又有上平板拖动的库埃特流

## 近似解

粘性不可压缩流体方程组的复杂性源自于非线性的惯性力项，因此不是总可以给出精确解。但是在小雷诺数的情况下，由于粘性力大于惯性力，我们可以给出两个近似解法。

如果将惯性项全部略去，则方程简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned}$$

我们考虑一个流体绕圆球运动的定常流动，给出定解条件

1. 连续性方程：

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0$$

2. 动量方程：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right)$$

3. 角动量方程：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

边界条件：

$$(v_r)_{r=a} = 0 \quad (v_\theta)_{r=a} = 0$$

$$(v_r)_{r=\infty} = V_\infty \cos \theta \quad (v_\theta)_{r=\infty} = -V_\infty \sin \theta$$

分离变量法给出解

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= V_\infty \cos \theta \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right] \\ v_\theta(r, \theta) &= -V_\infty \sin \theta \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right] \\ p(r, \theta) &= -\frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty a}{r^2} \cos \theta + p_\infty. \end{aligned}$$

阻力

$$W = 6\pi\mu V_\infty a$$

阻力系数

$$C_x = \frac{24}{\text{Re}}$$

其中  $\text{Re} = \frac{2aV_\infty}{\nu}$

这个近似解是由斯托克斯给出的。

奥森在此基础上给出另一个近似解：

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$W = 6\pi\mu V_{\infty} a \left( 1 + \frac{3aV_{\infty}}{8\nu} \right)$$

$$C_x = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

斯托克斯解适用于  $Re < 1$ ，奥森解适用  $Re \leq 5$

## 普朗特边界层方程

注意此时我们的讨论范围仍在层流。

边界层理论最主要的任务是计算物体在流体中运动时摩擦阻力和热传递，同时附带阐明理想流体所不能解释的一些现象，如分离，以及理想流体理论在压强分布、速度分布及升力等方面为什么和实验结果相当符合等问题。

我们采用  $\delta$  描述边界层厚度。其满足关系

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$$

令  $x = L$  也就是物体后缘处，边界层厚度约为

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}}$$

即

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

这说明当雷诺数很大时，边界层厚度与特征长度相比是一个非常小的量。

在大  $Re$  情形下，边界层流动由两个主要性质

1.  $\frac{\delta}{L}$  是一个小量
2. 粘性力和惯性力同阶

边界层方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

同时还可以得到压强数值穿过边界层并不改变

由于边界层压力  $p$  与  $y$  无关，取外部势流交界处的压力，则该处压力可以通过外部势流的伯努利方程得到：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

所以可得不可压缩二维层流边界微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

做一个简单的归纳：

边界层厚度	$\delta' = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$
速度及其导数	$u' = O(1)$ $u' = O(\delta')$ $\frac{\partial}{\partial x'} = O(1), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = O\left(\frac{1}{\delta'}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} \gg \frac{\partial}{\partial x'}$
压强及其导数	穿过边界层压强不变 $\frac{\partial}{\partial y'} = O(\delta'), \quad \frac{\partial}{\partial x'} = O(1), \quad \frac{\partial}{\partial x'} \gg \frac{\partial}{\partial y'}$
惯性力和黏性力	同阶

边界层分离是逆压和壁面附近粘性摩擦综合作用的结果。

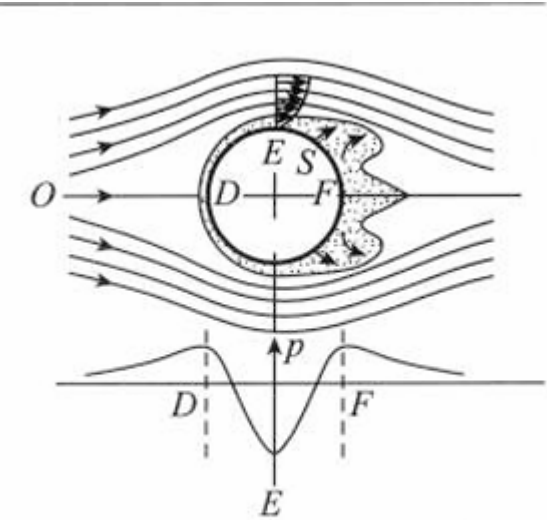


图 9.8.3

对于上述的一个圆柱非流线型物体，在上游 DE 段，流体质点的速度由 D 点的零值加速至 E 点的最大值，压强逐渐减小，称为顺压区。顺压区的压强梯度推动流体质点前进，尽管受到粘性滞止作用，但是压强梯度的作用强于滞止作用，流体质点最终还是克服了阻力加速向 E 点流动；在下游 EF 段，流体质点的速度由 E 点的最大值减速到 D 点的零值，压强逐渐增大，称为逆压区。因此此时压强梯度和粘性滞止阻碍物体运动。当惯性力无法克服相反阻力时，流体质点便在驻点停下，称为分离点，此时速度为零。下游的流体在逆压的作用下倒流过来，又

在来流的冲击下顺流回来，最终形成大漩涡，将边界层与物体分离开，边界层形成了一条分界线，分界线内的区域称为尾涡区，尾涡区由涡旋耗散动能，产生了尾涡阻力。边界层方程只是适用于分离点之前。

当然，有逆压不一定有边界层的分离，逆压越大，越容易发生分离。

## 布拉修斯相似解

考虑无限空间中一均匀气流以速度  $U$  沿板面方向定常地向一半无穷长且厚度为零地平板流来。

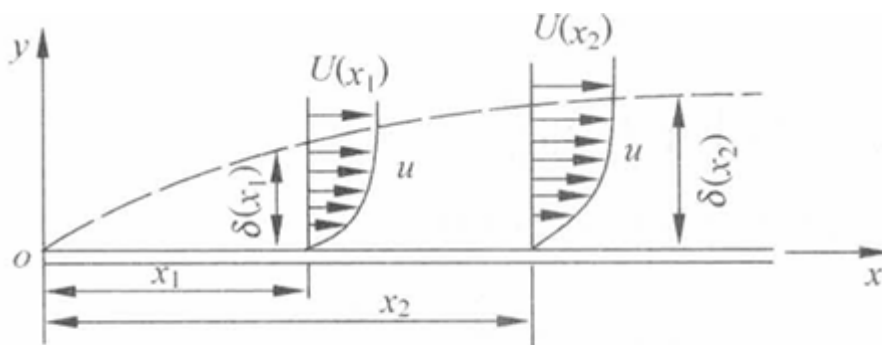


图 7-8 边界层速度剖面的相似性

我们用一个流函数  $\psi$  描述边界层流体运动情况。流函数  $\psi$  满足

$$\psi = \sqrt{\nu U x} f(\eta) \quad \eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

层流相似解问题就化作了求解非线性三阶常微分方程：

$$2f''' + ff'' = 0$$

布拉修斯假定边界层厚度满足

$$\delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

板上的局部阻力

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.332 \mu \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}$$

局部阻力系数

$$C_x = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{U x}} \triangleq \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

长为  $L$ ，宽为  $b$  且两边浸润在流体中的平板所受总摩擦阻力为

$$D = 2b \int_0^L \tau \, dx = 1.328b \sqrt{\mu \rho U^3 L}$$

总的阻力系数

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}}$$

### 动量积分方法

动量积分方法是一种近似计算方法。动量积分关系式方法包括如下几个主要步骤

- 导出卡门动量积分
- 研究近似速度剖面应该满足的边界条件。

我们定义两个长度量纲的物理量，位移厚度：

$$\delta^* = \int_0^{\delta,\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy$$

表示理想流体的流线在边界层外部边界由于粘性作用向外偏移的距离

动量损失厚度：

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta,\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy$$

用来表述用于粘性作用而造成的动量损失

参数	定义	物理意义	典型值
名义厚度 $\delta$	从表面到 $u = 0.99U$ 处的距离	直观表示边界层的“厚度”	最大，通常为几毫米到几厘米
位移厚度 $\delta^*$	$\delta^* = \int_0^{\delta,\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy$	表示边界层对自由流流线的“排挤效应”	小于名义厚度，通常为名义厚度的1/3到1/2
动量厚度 $\delta^{**}$	$\delta^{**} = \int_0^{\delta,\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy$	表示边界层对流动动量的损失量，与阻力相关	最小，通常为名义厚度的1/6到1/4

当速度分布  $u(x,y)$  给定后， $\delta^*$  和  $\delta^{**}$  是数学上完全给定的物理量。当考虑边界层对外流的干扰作用时，须要用到位移厚度  $\delta^*$ ，而物体所遭受的阻力常和动量损失厚度  $\delta^{**}$  联系在一起

卡门动量积分方程：

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$



也可以写作：

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U}\delta^{**}(2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

其中  $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

在边界层外部边界  $y = \delta, \infty$  时，粘性流体的速度分量  $u(x, y)$  满足如下关系：

$$u = U, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$$

而在壁面上，速度剖面满足：

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{UU'}{\nu} \quad \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) = 0$$

卡门动量方程给出了平板边界层的近似解解法

由于平板边界层具有相似性解，因此  $\frac{u}{U}$  只依赖于变数组合  $\eta = \frac{y}{\delta}$ ，即

$$\frac{u}{U} = f(\eta)$$

可以通过边界条件给出  $f(\eta)$  的多项式逼近解：

1. 线性多项式：  $f(\eta) = \eta$
2. 二次多项式：  $f(\eta) = 2\eta - \eta^2$
3. 三次多项式：  $f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$
4. 四次多项式：  $f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$

尽管选定了  $f(\eta)$  的逼近函数，但是速度剖面并没有完全确定，因为其包含边界层厚度  $\delta$ ，这是一个  $x$  的函数。

卡门动量方程给出

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

我们选取二次多项式为已知函数，即  $f(\eta) = 2\eta - \eta^2$ ，所以可以给出相关参数

$$\begin{aligned}\delta^* &= \delta \int_0^1 (1-f) d\eta = \frac{\delta}{3} \\ \delta^{**} &= \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta = \frac{2}{15}\delta \\ \frac{\tau_w}{\rho} &= \frac{\nu U}{\delta} f'(0) = 2\frac{\nu U}{\delta}\end{aligned}$$

有卡门动量方程可得边界层厚度  $\delta$  满足

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = 15 \frac{\nu}{U}$$

积分解得边界层厚度

$$\delta = \sqrt{30} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

我们可以确定所有感兴趣的物理量

## 湍流

我们将流场中任一点的瞬时物理量看作是平均值和脉动值之和，然后应用统计平均方法从N-S方程出发，研究平均运动的变化规律。

所以对于任意物理量  $f(x, y, z, t)$ ，我们可以将其写平均值和脉动值的叠加

$$f = \bar{f} + f'$$

平均化运算满足如下法则：

1.  $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$
2.  $\overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$
3.  $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$
4.  $\overline{f'} = 0$
5.  $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f'g'}$
6.  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}$  表示关于空间求导
7.  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$

## 普朗特混合长理论

雷诺平均湍流方程：

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (-\overline{\rho v'_i v'_j})}{\partial x_j}$$

考虑湍流的平均运动是平面平行定常运动的情形。

湍应力的表达式子

$$\tau'_{xy} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

其中  $\mu_t = \overline{\rho v' l'}$  是人为引进的一个系数，依赖于流体的运动，称为湍流粘度， $\nu_t$  称为运动湍流粘度。在一般情形下湍应力起主导作用。普朗特假定  $u'$  和  $v'$  同阶，这两个脉动速度应满足

$$v' \sim l' \frac{d\bar{u}}{dy}$$

因此湍应力可以写做

$$\tau'_{xy} = \rho \beta \overline{l'^2} \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \triangleq \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

其中  $\beta$  是比例常数， $l$  是混合长。如果考虑符号则

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$


---

我们来处理无界固壁附近的定常湍流运动，雷诺平均方程满足

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d\tau'_{xy}}{dy} = 0$$

先做一次积分，因为在板面  $y = 0$  处有  $u' = v' = 0$ ，切应力  $\tau = \tau_w$ ，所以一次积分结果给出

$$\mu \frac{du}{dy} + \tau'_{xy} = \tau_w$$

1. 在固壁附近的区域  $\tau'_{xy}$  很小，而  $\tau_w$  很大，所以粘性应力起主导作用，这个区域称为粘性底层，尺度非常小，也称为线性层
2. 在粘性底层外部区域  $\tau'_{xy}$  比  $\tau_w$  大很多，所以可以完全忽略粘性应力作用。称为湍流核心区。也成为对数层
3. 粘性底层和湍流核心区之间存在一个过渡区，可以忽略不计。

在粘性底层忽略湍应力影响，可得速度分布满足

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y$$

取无量纲数

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad l_* = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$$

则可改写成无量纲形式

$$\frac{u}{U_*} = \frac{y}{l_*}$$

我们给出给出了满足粘性底层和湍流核心区的连续条件：

$$\frac{u_e}{U_*} = \frac{\delta_e}{l_*} = \alpha$$

对于湍流核心区

$$\rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w \quad l \frac{du}{dy} = U_*$$

普朗特假设  $l$  不受粘性影响，区

$$l = \chi y$$

$\chi$  为比例常数因此可以解出

$$u - \alpha U_* = \frac{U_*}{\chi} \ln \frac{y}{\delta_e}$$

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y U_*}{\nu} + \alpha - \frac{1}{\chi} \ln \alpha$$

$\alpha$  和  $\chi$  为未知常数，可由实验确定

## 管道流动问题

我们先考虑光滑圆管内的流动。根据实验现象上述方程给出解此时速度剖面为 ( $\chi = 0.4, \alpha = 11.5$ )

$$\frac{u}{U_*} = 5.75 \lg \frac{y U_*}{\nu} + 5.5 \quad (1)$$

根据平均速度的定义

$$u_{av} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u \cdot 2\pi(a-y) dy = \int_0^a 2u \left(1 - \frac{y}{a}\right) d\left(\frac{y}{a}\right)$$

我们采用对数剖面来求取平均速度，可得

$$\frac{u_{av}}{U_*} = 5.75 \lg \frac{a U_*}{\nu} + 1.75$$

则

$$\frac{u_{\max} - u_{av}}{U_*} = 3.75$$

最后求解圆管阻力，我们引入阻力系数满足

$$\lambda = \frac{\Delta p}{l} \frac{2d}{\rho u_{av}^2}$$

力的平衡条件给出

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau_w}{a}$$

所以

$$\lambda = \frac{8\tau_*}{\rho u_{av}^2} = 8 \frac{U_*^2}{u_{av}^2} \text{ or } \frac{u_{av}}{U_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \quad (2)$$

可得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.91$$

$\text{Re} = \frac{du_{av}}{\nu}$  实验结果给出

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8$$

该式称为普朗特公式。此外还有尼库拉泽经验公式：

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{\text{Re}^{0.237}}$$

所以对于光滑湍流管，我们的求解思路如下：

1. 根据体积流量  $Q$  计算出平均速度，从而计算出雷诺数  $\text{Re} = \frac{u_{av}d}{\nu}$
2. 我们利用普朗特公式或者尼库拉泽公式计算出阻力系数  $\lambda$
3. 知道  $u_{av}$  和  $\lambda$  后，我们可以利用式 (2) 计算出特征速度  $U_*$  进而利用式 (1) 求出速度剖面
4. 最后我们可以求出压降

除了式 (1) 我们还能采用如下幂次公式计算速度剖面

$$\frac{u}{U_*} = 8.74 \left( \frac{yU_*}{\nu} \right)^{1/7}$$

对应的阻力公式满足

$$\tau_w = 0.0225 \rho u^2 \left( \frac{\nu}{uy} \right)^{1/4} \text{ or } \frac{\tau_w}{\rho u_{\max}^2} = 0.0225 \text{Re}_{\max}^{1/4}$$

接下来讨论粗糙管的影响。

我们定义两种粗糙度：一种是绝对粗糙度  $k$ ；另一种绝对粗糙度与管径  $a$  的比相对粗糙度  $k/a$ 。

1. 在层流区，粗糙圆管和光滑圆管的阻力系数相同

2. 在转捩区，临界雷诺数与粗糙度无关，过渡状态也和相对粗糙度无关。
3. 在湍流区，每一个相对粗糙度，在小雷诺数区域，阻力系数只和雷诺数有关；当雷诺数增大后，阻力系数既与雷诺数有关，也有相对粗糙度有关，当雷诺数超过某一数值后，阻力系数变成常数，只和相对粗糙度有关。

我们根据湍流区的阻力系数和粗糙度的关系将圆管分成三种不同的类型：

1. 流体动力光滑圆管：  $0 \leq \frac{kU_s}{\nu} \leq 5$  阻力系数只与雷诺数有关：  $\lambda = \lambda(\text{Re})$
2. 完全粗糙管：  $\frac{kU_*}{\nu} > 70$  阻力系数只和相对粗糙度有关：  $\lambda = \lambda\left(\frac{k}{a}\right)$
3. 过渡型圆管：  $5 \leq \frac{kU_*}{\nu} \leq 70$  阻力系数和雷诺数、相对粗糙度都有关：  $\lambda = \lambda\left(\frac{k}{a}, \text{Re}\right)$

考虑粗糙度，我们将对数形式的速度剖面的修改成

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{k} + B \quad \chi = 0.4$$

那么在流体动力光滑管中，速度分布应该和纯粹的光滑管中的速度分布相同，即式 (1)。对于完全粗糙管，实验结果给出  $B = 8.5$ ，即

$$\frac{u}{U_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k} + 8.5$$

平均速度满足

$$\frac{u_{av}}{U_*} = 2.5 \ln \frac{a}{k} + 4.75$$

所以阻力系数(修正后)

$$\lambda = \left(2 \lg \frac{a}{k} + 1.74\right)$$

## 平板湍流边界层

在平板湍流边界层中，平均运动应满足的边界层方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \tau &= (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

我们采用动量积分关系式来近似求取摩擦阻力

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

实验给出了速度剖面

$$\frac{u}{U_*} = f\left(\frac{yU_*}{\nu}\right)$$

采用对数剖面来作为近似剖面

$$\frac{u}{U_*} = 5.6 \lg \frac{yU_*}{\nu} + 4.9$$

我们先利用1/7幂次的速度剖面来计算平板阻力，1/7幂次公式  $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$  给出

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta$$

将其与动量积分表示式一起带入到布拉修斯阻力公式可得

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

引进两个雷诺数：

$$\text{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu}, \quad \text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$$

代入上式积分可的

$$\text{Re}_\delta = 0.37 \text{Re}^{5/4}$$

说明湍流边界层比层流边界层厚得多。对于阻力系数也可以表示为

$$C_f = 0.0578 \text{Re}_x^{-1/5}$$

对于一块长为  $L$  宽为 1 的平板所受的阻力系数为

$$C_F = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = 0.072 \text{Re}_L^{-1/5}$$

一般而言，湍流边界层的摩擦阻力要比层流的大。

现在求取通用阻力公式，利用对数速度剖面

$$\frac{U-u}{U_*} = -\frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{\delta}$$

因为阻力系数满足

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2 \frac{U_*^2}{U^2}$$

可得

$$\frac{U}{U_*} = \sqrt{\frac{2}{C_f}}$$

经验公式

$$\frac{1}{2}C_f = 0.00655\mathrm{Re}_{\delta^{**}}^{-1/6}$$

总的阻力系数

$$C_F = 0.0307\mathrm{Re}_L^{-1/7}$$