流体力学

- 普适特性的基本定律
  - 质量守恒定律
  - 牛顿运动定律
  - 能量守恒定律
- 流体特性的基本定律
  - 流体的本构方程
  - 流体的状态方程

这章方程打到想三，突然觉得优化第一篇真的不算什么东西了

~~老师的PPT虽然很简洁但是思路很乱的，更像是一块一块组合起来，所以这章我打的非常不满意~~
最后选择运动方程→连续性方程→雷诺输运方程，也就是课本上的顺序

Momentum Equation

我们先来推导微分形式的运动方程
有动量守恒定理得

对一个微元控制体，单位时间控制体内动量的变化= 单位时间内通过微元体边界的迁移动量之和+力的总和

我们列出单位时间内通过微元体边界的迁移动量：

Faces	Inlet momentum flux	Outlet momentum flux
x	$\rho u\mathbf{V}dydz$	$\left[\rho u\mathbf{V}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V})dx\right]dydz$
y	$\rho v\mathbf{V}dxdz$	$\left[\rho v\mathbf{V}+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V})dy\right]dxdz$
z	$\rho w\mathbf{V}dxdy$	$\left[\rho w\mathbf{V}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})dz\right]dxdy$

$\rho udydz$表示单位时间沿 x 轴方向流入的微元体质量，其他同

所以得到如下表达式(注意迁移动量为减少量)

$$\sum F=dxdydz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V})+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})\right]$$

其中，方框内第一项表示单位控制体内的动量变化。

考虑将 $\rho\mathbf{V}$ 分别微分 方框内也可进一步化简得

$$\mathbf{V}[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})]+\rho(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z})$$

如果密度不发生变化，所以上式左项为0，而右项实际上是一个关于速度的全微分展开式(欧拉场)，所以有：

$$\sum F=\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}dxdydz$$

所以可得分量

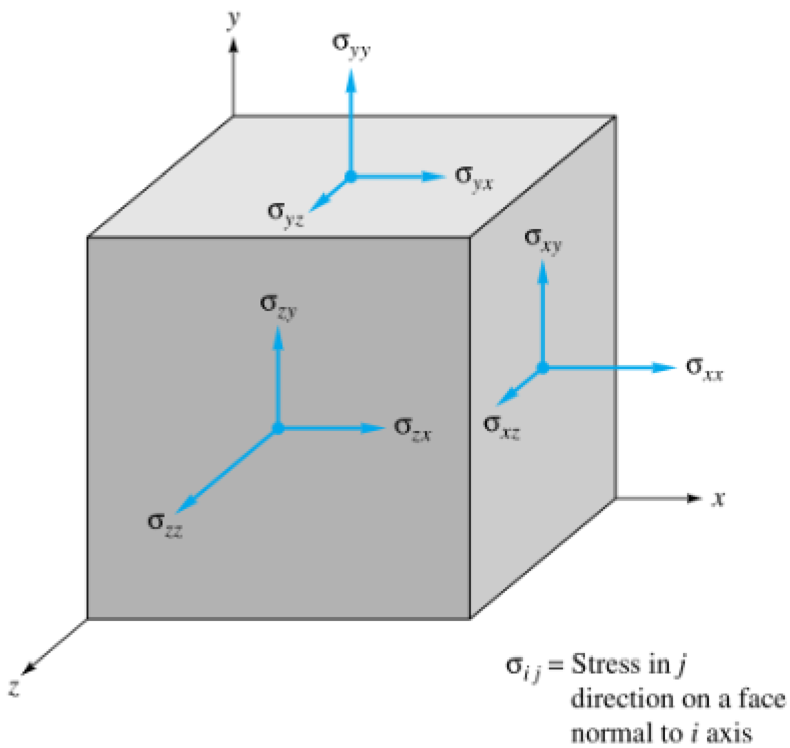
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)=\sum dF_x\\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho vw)=\sum dF_y\\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho wu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho wv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\sum dF_z
\end{aligned}$$

我们来分析力，这些力由面力和体力两种力组成

对于流场的控制而言，体力也就是自身重力作用结果，也就是：

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}}=\rho\mathbf{g}dxdydz$$

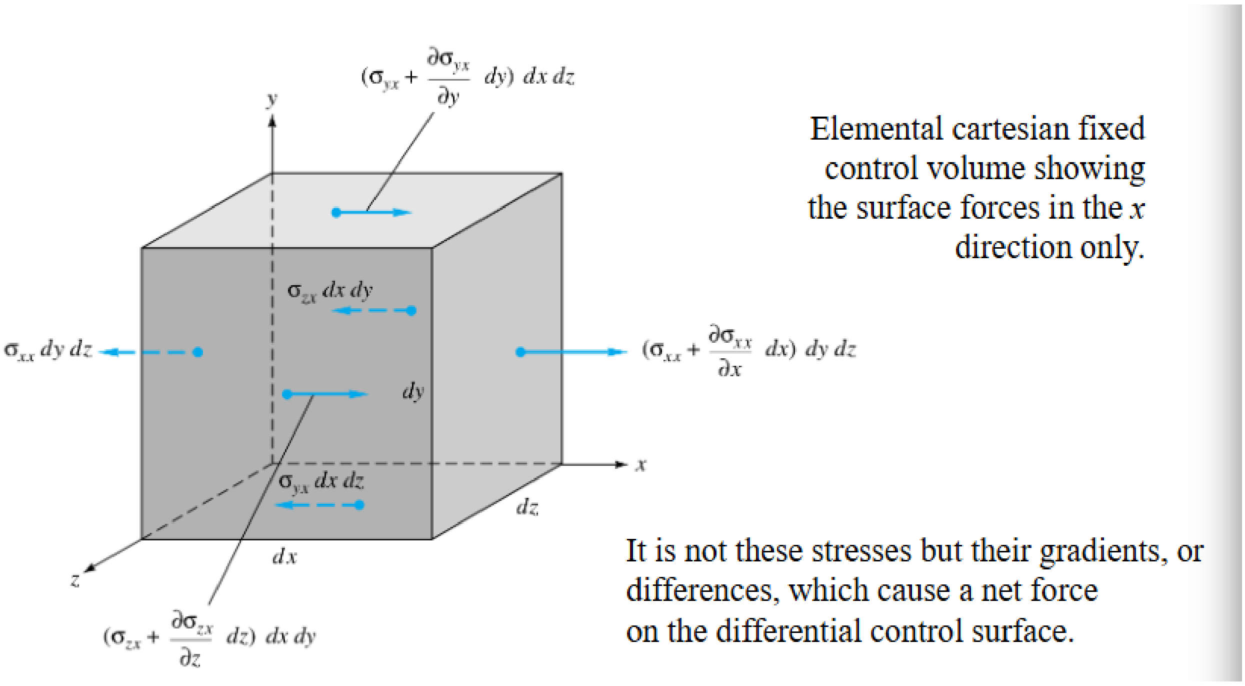
而面力是由应力分量与压力作用合成
我们来推导面力表达式，取一个微元六面体，他的受力情况如下图



面上应力张量表达式:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}-p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz}\end{bmatrix}$$

由于压力指向微元体内部，所以取负号。



我们计算面力表达式，先考虑x轴上的力可得:

$$dF_{x,surf}=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx})\right]dxdydz$$

其他方向上的面力也可得到

将应力张量表达式带入，取 $dxdydz=dv$ 也就是体积的微元体 可得

$$\begin{aligned}\frac{dF_x}{dv}&=-\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx})\\ \frac{dF_y}{dv}&=-\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zy})\\ \frac{dF_z}{dv}&=-\frac{\partial \rho}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xz})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yz})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz})\end{aligned}$$

简写成

$$\left(\frac{d\mathbf{F}}{dv}\right)_{\text{surf}}=-\nabla p+\left(\frac{d\mathbf{F}}{dv}\right)_{\text{viscous}}$$

其中粘滞力:

$$\left(\frac{dF}{dv}\right)_{\text{viscous}} = \nabla \cdot \ \sigma_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

现在，我们有了面力和体力的表达式，将表达式带入我们所研究的方程 $\sum \frac{F}{dv} = \rho \frac{dV}{dt}$ 可以得出如下表达式：

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \sigma_{ij} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

其中

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

这是对任意流体通用表达式。对于对流项：$u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$，这些表达式都是非线性的，而这些非线性项使得对于流体的研究变得复杂。

在直角坐标系中，也可以以展开成如下形式

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \rho F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}, \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \rho F_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}, \\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

从原来微分形式的动量守恒

$$\frac{D}{Dt}\int(\rho \mathbf{V} d\tau) = \sum \mathbf{F}$$

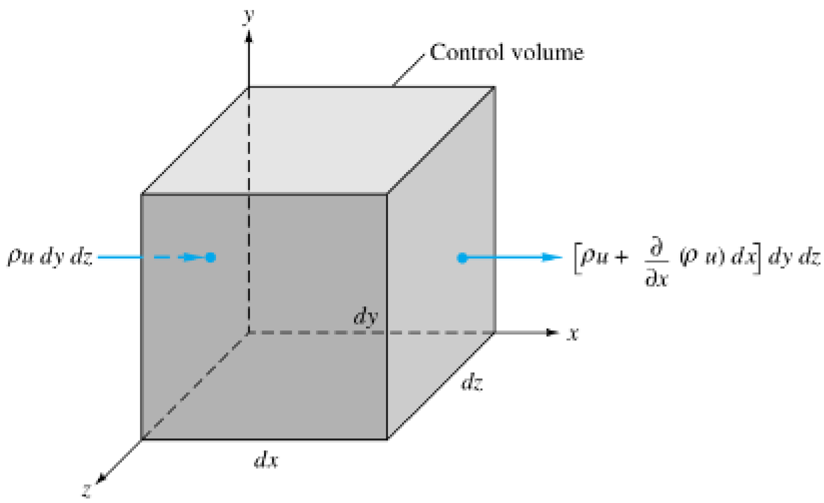
因为力为体力和面力作用的结果

$$\sum F = \int_\tau \rho \mathbf{g} d\tau + \oint_A (\sigma \cdot \mathbf{n}) dA$$

可得积分形式的动量守恒定律

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)} \rho \mathbf{V} d\tau) = \int_\tau \rho \mathbf{g} d\tau + \oint_A (\sigma \cdot \mathbf{n}) dA$$

Continuity Equation



我们假定流场中流体物理量处处连续可微
对于一个微元控制体，由质量守恒定理得
单位时间控制体内质量的增量 = 单位时间内流入控制体的质量 - 单位时间内流出控制体的质量 = 单位时间内净流入控制体的质量

因此，单位时间控制体内质量的增量应为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

净流入：

$$-[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dxdydz]$$

所以有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

这个也就是微分形式的连续性方程，它适用于任何流体的三维非定常压缩。
也可以写作

- 张量模式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

- 向量模式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

对于一个任意时刻的控制体有

$$m = \int_{\tau(t)} \rho d\tau$$

有质量守恒得 $\frac{Dm}{Dt} = 0$，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau} \rho d\tau) + \oint_{A} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

即 控制体内流体质量随时间的局部减少率等于净流出包围面的质量流量。
也就是积分形式的连续性方程，在具体应用时，还可以根据实际流动情况作一些简化：

- 对于定常流动（steady flow）：

  $$\oint_{A} \rho(V \cdot n) dA = 0$$

- 对于管道流动：

  $$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau} \rho d\tau) = \oint_{A_1} \rho_1(V_1 \cdot n_1) dA - \oint_{A_2} \rho_2(V_2 \cdot n_2) dA = Qm_1 - Qm_2$$

  Q 为流量
- 对于定常管道流动我们可以推出

  $$Qm_1 = Qm_2$$

回到连续性方程，应用高斯定理，我们可以改写上述方程得

$$\int_{\tau} [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V)] d\tau = 0$$

所以可以得出连续介质方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

拆分第二项有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot V + V \cdot \nabla \rho = 0$$

因为第一项和第三位为对密度的全导数，所以有

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0$$

对于不可压缩流动，即 ρ 为常数有

$$\rho \nabla \cdot V = 0$$

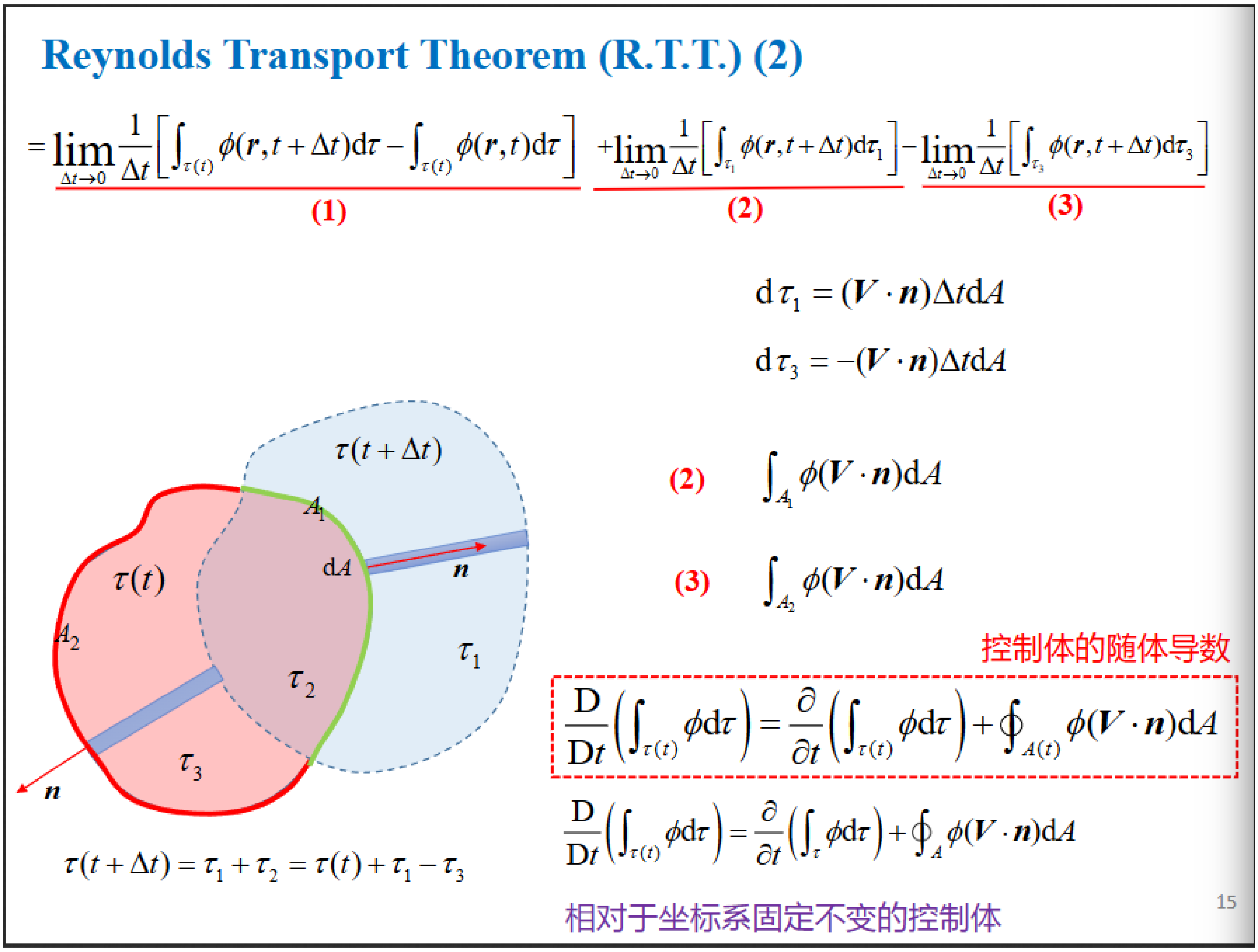
这也是用来判断不可压缩流动的条件之一。

Reynolds Transport Theorem

设某时刻 t，取出一个流体系统（流体团），其有限体积为 $\tau(t)$，界面为 $A(t)$，可定义该系统中流体的某个物理量 ϕ 的总量为

$$I(t) = \int_{\tau(t)} \phi(r, t) d\tau$$

其中 ϕ是单位体积流体的某个物理量分布，使用欧拉变量描述的物理量



假定 t 时刻，系统的体积为 $\tau(t) = \tau_2 + \tau_3$，$t + \Delta t$ 时刻，系统的体积为 $\tau(t) = \tau_2 + \tau_1$ (系统随流体运动，体积在不断变化)

所以对于随体导数有

$$
\begin{aligned}
\frac{DI}{Dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\tau(t+\Delta t)}\phi(r,t+\Delta t)d\tau-\int_{\tau(t)}\phi(r,t)d\tau) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\tau(t+\tau_1-\tau_3)}\phi(r,t+\Delta t)d\tau-\int_{\tau(t)}\phi(r,t)d\tau) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\tau(t)}\phi(r,t+\Delta t)d\tau-\int_{\tau(t)}\phi(r,t)d\tau) \\
&+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\tau_1}\phi(r,t+\Delta t)d\tau)-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_3}\phi(r,t+\Delta t)d\tau)
\end{aligned}
$$

可将第一项合并积分化简成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau(t)}\phi d\tau)$$

对于第二项，假定 t 时刻控制体的面积为 A， 体积为 τ , $t+\Delta t$ 时刻，控制体的面积为 $A+\Delta A$，体积为 $\tau+\Delta\tau$，当 Δt 足够小时，我们可以近似认为体积变化是由面的微小变化量 ΔA 沿法线方向 n 以速度 V 变化， 即$\Delta\tau_1=(V\cdot n)\Delta t\Delta A$，取微分形式就是 $d\tau_1=(V\cdot n)\Delta t dA$，其中 dA 为 A_1 界面上的面元， V 和 n 分别为此面元上的速度和外法线方向矢量， 因此， $d\tau$ 就是在 Δt 时间内由于 dA 面随流体运动而产生的系统体积变化。$\phi d\tau_1$ 就是在 Δt 时间内 ϕ 从 dA 面流出的通量。

第三项可由相同方法处理，所以分别为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{A_1}\phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA),\frac{\partial}{\partial t}(\int_{A_2}\phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA)$$

整理得

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\phi d\tau)=\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau(t)}\phi d\tau)+\oint_{A(t)}\phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA$$

这个就是体积分的随体导数公式，也称雷诺输运方程。在左边求导数时，$\tau(t)$是指一个系统的体积，它是随流动而变的。在右边的积分中， τ 和 A 则为控制体的体积和控制面。物理意义是， 在 t 时刻流场中，某控制体 τ 内流体系统的某一物理量 φ 总量的随体导数由两部分组成：一部分是控制体 τ 内该物理量随时间的局部变化率， 它是由于流场的非定常性所引起的；另一方面则是单位时间内越过控制面 A 净流出的流体物理量， 它是由于流场的不均匀性引起的。

Reynolds Second Transport Equation

我们接下来推导第二类雷诺运输方程，对于原来的雷诺运输方程， 由于 ρ 不发生变化， 左右两边同乘 ρ 得

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\rho\phi d\tau)=\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau(t)}\rho\phi d\tau)+\oint_{A(t)}\rho\phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA$$

对于该表达式，积分微分交换次序不影响结果（时间域和空间域的作用结果相同），右边第一项可写成

$$\int_{\tau(t)}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)d\tau$$

由高斯定理得，右边第二项可写成

$$\int_{\tau(t)}\nabla\cdot(\rho\phi\mathbf{V})d\tau$$

于是合并这两项并改写体积分，对体积分内部的项分析有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\nabla\cdot(\rho\phi\mathbf{V})=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\rho\phi\nabla\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot\nabla(\rho\phi)$$

第一项和第三项是对 $\rho\phi$ 的随体导数（全微分），合并后展开全微分 $\frac{D}{Dt}(\rho\phi)=\rho\frac{D\phi}{Dt}+\phi\frac{D\rho}{Dt}$，由连续性方程 $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ 得

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\rho\phi d\tau)=\int_{\tau}\rho\frac{D\phi}{Dt}d\tau$$

也就是雷诺第二运输方程

对积分形式的运动方程引入雷诺第二输运方程 $\frac{D}{Dt}\int_{\tau(t)}\rho\mathbf{V}d\tau=\int_{\tau}\frac{D\mathbf{V}}{Dt}d\tau$ 和高斯定理
$\oint_A(\sigma\cdot\mathbf{n})dA=\int_\tau\nabla\cdot\sigma d\tau$
得

$$\int_\tau(\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}-\rho\mathbf{g}-\nabla\cdot\sigma)d\tau=0$$

即

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}-\rho\mathbf{g}-\nabla\cdot\sigma=0$$

也称欧拉运动方程

Constitutive Equation

应变：

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

应力：

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

回到简单的一维平行剪切流动，牛顿粘性定理：$\tau=\mu\frac{du}{dy}$，根据应力张量和应变率张量表达方式，令 $\tau=\sigma_{yx}$，$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\varepsilon_{yx}$，有

$$\sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{yx}$$

也就是说，在牛顿流体的运动流场中，一点上的切应力与切应力率成正比，比例系数为 2μ
但是对于粘性流体做任意运动的情况，要得到 σ 与 $\mathbf{E}$ 的一般关系难度很大，所以斯托克斯引入了三个假设：

1. 应力张量与应变率张量成线性关系，即应力与变形速度之间成线性关系；
2. 这种线性关系在流体中式各向同性的；
3. 当流体静止时，应变率为零，流体中的应力就是各向等值的静压强。
   于是我们可以写出牛顿流体的本构关系：

   $$\mathbf{P}=a\mathbf{E}+b\mathbf{I}$$

   其中 $\mathbf{I}$ 为二阶单位张量（单位对角矩阵）
   于是从一维的平行剪切流动中，我们可以得出 $a=2\mu$。
   我们现在来求解 b

考虑对角线上的元素可得

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=2\mu(\nabla\cdot\mathbf{V})+3b$$

当流体静止时，流体中只有正应力，且为各向等值的静压强（方向指向流体内部），即

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=p$$

所以可以解得

$$b=-p-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V}$$

现在我们可以写出本构方程：

$$\sigma=-p\mathbf{I}+2\mu\mathbf{E}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{V})\mathbf{I}$$

该方程也称广义牛顿粘性定律，该方程对于多数常见流体是适用的。
该方程也可以改写成

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$$
$$\tau = 2\mu\mathbf{E} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{V})\mathbf{I}$$

τ也被称为粘性切应力张量，也就是只考虑静压与切应力的作用。

把应力的表示式带回方程 $\rho\frac{DV}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\sigma$中有

$$\rho\frac{DV}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + 2\nabla\cdot(\mu\mathbf{E}) - \frac{2}{3}\nabla(\mu\nabla\cdot\mathbf{V})$$

如果流体中的动力粘度为常数或空间上均匀式有

$$\rho\frac{DV}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \mu\nabla^2(\mathbf{V}) + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$$

这个方程称为可压缩的纳维斯托克斯（Navier-Stokes）方程，适合于可压缩粘性流动的运动。

当流体不可压缩时，$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$，假定 μ 为常数，有

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V}$$

也就是不可压缩的纳维斯托克斯方程（N-S方程）

在直角坐标系有

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),
\end{aligned}$$

写成张量形式为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

Energy Equation

有能量守恒定律得，对于确定得流体，其总能量的时间变化率应等于单位时间内外力对它所做的功和传给它的热量之和，即

$$\frac{DE}{Dt} = \sum Q_h + \sum W$$

对于控制体 τ，微元体积 $d\tau$ 内单位质量流体所具有的能量为 $e + (v^2/2)$，其中 e 为热力学内能；$v^2/2$为动能，则在 t 时刻，τ 内流体所具有的总量为

$$E=\int_{\tau(t)}\rho(e+\frac{v^2}{2})d\tau$$

对于热量 $\sum Q_h$，其包括辐射热和传导热，也就是

$$\sum Q_h=\int_\tau \rho q d\tau+\int_A k\nabla T\cdot\mathbf{n}dA$$

式中右边第一项中的 q 是由于热辐射或流动伴随有燃烧、化学反应等，在单位时间内传给 τ 内单位质量流体的热量，也称为热源项；右边第二项是由于越过 A 面的热传导传给 τ 内流体的热量，以流体吸热为正，遵循傅里叶热传导定律，k 为流体的导热系数。

$\sum W$ 是单位时间内由外力对 τ 内流体所做的功，如果 τ 内没有其他物体，则 $\sum N$ 包括体积力和表面力

$$\sum W=\int_\tau \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}d\tau+\oint_A \sigma\cdot\mathbf{V}dA$$

带入求解得积分形式的能量方程

$$\frac{D}{Dt}\int_{\tau(t)}\rho(e+\frac{v^2}{2})d\tau=\int_\tau\rho q d\tau+\oint_A k\nabla T\cdot\mathbf{n}dA+\int_\tau\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}d\tau+\oint_A\sigma\cdot\mathbf{V}dA$$

使用雷诺第二运输方程 $\frac{D}{Dt}\int_{\tau(t)}\rho(e+\frac{v^2}{2})d\tau=\int_\tau\rho\frac{D}{Dt}(e+\frac{v^2}{2})d\tau$和高斯定理 $\oint_A k\nabla T\cdot\mathbf{n}dA=\int_\tau\nabla\cdot(k\nabla T)d\tau,\oint_A\sigma\cdot\mathbf{V}dA=\int_\tau\nabla\cdot(\sigma\cdot\mathbf{V})d\tau$可得微分形式的能量方程

$$\rho\frac{D}{Dt}(e+\frac{v^2}{2})=\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}+\nabla\cdot(\sigma\cdot\mathbf{V})$$

由于运动方程:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\sigma$$

若方程两边同时点乘 $\mathbf{V}$ 则有

$$\rho\frac{D}{Dt}(\frac{v^2}{2})=\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot(\nabla\cdot\sigma)$$

也就是运动流体中的一般动能方程

将该式带入到微分形式的能量方程可得

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)+\nabla\cdot(\sigma\cdot\mathbf{V})-\mathbf{V}\cdot(\nabla\cdot\sigma)$$

引用一些张量运算[1]得到（~~懒得打子~~）

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)+\sigma:\mathbf{E}$$

这是对任何流体的任意运动都适用的用内能表示的能量方程，简称内能方程
考虑牛顿流体的本构方程，我们可以得出

$$\sigma : \mathbf{E} = -p\mathbf{I} : \mathbf{E} + \tau : \mathbf{E} = -p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \Phi$$

其中

$$\Phi = \tau : \mathbf{E} = 2\mu\mathbf{E}^2 - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V})^2$$

上式适用于粘性的可压缩流动，具体说，它适用于那些粘性影响不能忽略的高速流体

Φ称为粘性耗散函数，表示由于粘性力作功所造成的能量耗散。在直角坐标系中，将 $\mathbf{E}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{V}$的表达式带入可得

$$\Phi \geq 0$$

也就是说，牛顿流体在运动过程中，粘性力作功总是不断地被转换成热能，然后由热能转换成内能，这种转换过程是不可逆地，也就是能量的损耗。

~~我崩溃了怎么还有~~

考虑不可压缩流体，并且假定比定容热容为常数的气体，我们可以将方程改写成

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = \rho q + k\nabla^2 T + \Phi$$

此时 $\Phi = 2\mu\mathbf{E}^2$
这也是粘性不可压缩流动的用热力学温度表示的能量方程，可用于求解流场中的温度分布

如果流动可压缩，但忽略粘性，有没有传热，则流动是等熵的，能量方程是用等熵过程方程来替代，如果流动不可压缩，又忽略粘性和传热，则能量方程给出全流畅 T 为常数的结果。

State Equation

斜压流体： $\rho = \rho(p, T)$
正压流体： $\rho = \rho(p)$
正压流体是一种力学特征与热力学特征无关的流体，正压流体运动速度的求解不需要用能量方程

1. 不可压缩流动： ρ 为常数
2. 等温流动 $p = C\rho$
3. 绝热流动 $p = C\rho^\gamma$

Fluid Flow Analysis

General Process of fluid flow analysis

1. Physical model describing the fluid flow

2. Mathematical models, including PDEs and their I.B.C.
3. Solving PDEs
    1. Analytic method
    2. Numerical method (Finite Difference, Finite Element, Finite Volume)
4. Comparison to Experiments

我们在上面推导了很多方程，但实际上能用到的也并不多，我们根据不同的流体情形划分不同方程组用于分析。

- 粘性正压流体

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0\\&\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})\\&\rho=\rho(p)\end{aligned}$$

- 粘性不可压缩流体

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{V}=0\\&\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}\end{aligned}$$

- 无粘性不可压缩流体

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{V}=0\\&\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{f}-\nabla p\end{aligned}$$

- 气体动力学

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0\\&\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla p\\&\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho^\gamma})=0\end{aligned}$$

Summary

这章是流体运动学分析的基础，虽然有很多方程，但都是对特定情况所进行的简化分析，上面给出了四种情况流体满足的方程，我总结一下我认为比较常使用的方程

运动方程：

$$\rho g-\nabla p+\nabla\cdot\sigma_{ij}=\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\rho\mathbf{V}d\tau)=\int_{\tau}\rho\mathbf{g}d\tau+\oint_{A}(\sigma\cdot\mathbf{n})dA$$

连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho V)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau}\rho d\tau)+\oint_{A}\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA=0$$

当物体定常流动时应满足 $\nabla V=0$
雷诺输运方程

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\phi d\tau)=\frac{\partial}{\partial t}(\int_{\tau(t)}\phi d\tau)+\oint_{A(t)}\phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA$$

雷诺第二输运方程

$$\frac{D}{Dt}(\int_{\tau(t)}\rho\phi d\tau)=\int_{\tau}\rho\frac{D\phi}{Dt}d\tau$$

欧拉运动方程

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}-\rho\mathbf{g}-\nabla\cdot\sigma=0$$