Dimensional Analysis

流体力学

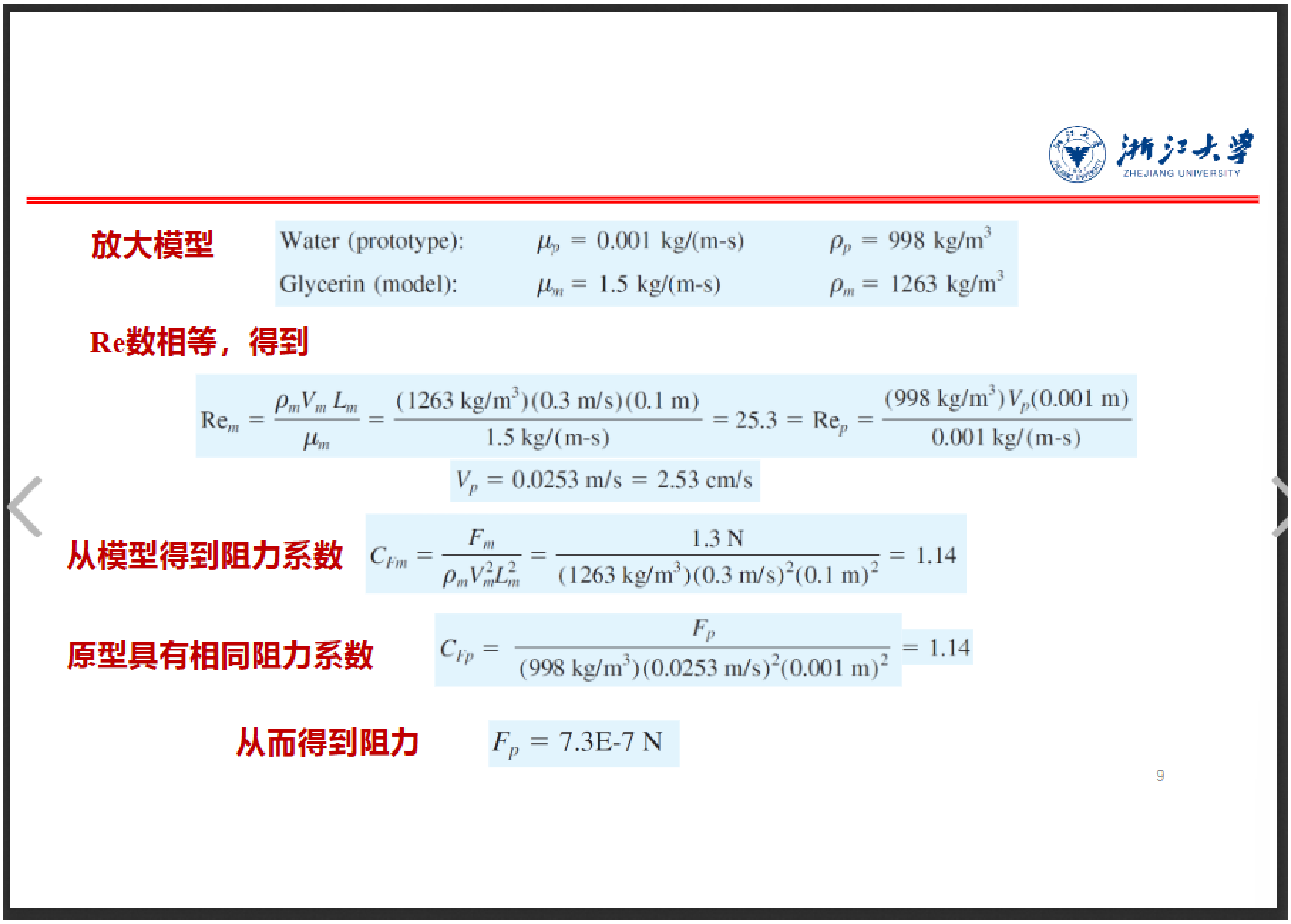
> Basically, dimensional analysis is a method for reducing the number and complexity of experimental variables that affect a given physical phenomenon, by using a sort of compacting technique —— White

W [Dimensional analysis - Wikipedia]

Side Benefit:

1. 降低时间和经济成本
2. 帮助思考和计划实验和理论
3. 通过标度律（scaling law）将实验模型获得的数据推广到实际原型上

也就是说我们选取两个模型，在这两个模型中，同一个无量纲常数的数值应该相同，于是，假定在实际中，我们无法测量某一个物理量，但是它和其他物理量构成了一个无量纲常数（比如说阻力系数），我们就可以在实验中测量并计算出这个无量纲数。进而计算未知的物理量



量纲和谐原理(PDH)

凡是正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲都必须是一致的。

重要性：

1. 一个方程式在量纲上是和谐的，则方程的形式不随量度单位的改变而变化。
2. 可用来确定公式中物理量的指数
3. 可用来建立物理方程式

- 表达式的组成：
  - 有量纲的变量
  - 有量纲的常数
  - 无量纲的常数
    - 角度/转数
    - 无量纲物理量

一个方程的积分和微分可以改变量纲，但不能改变方程的齐次性。

如何选取作为标度的变量：

1. 标度量本身不能组合成无量纲量，但加上一个变量能组成无量纲参数
2. 不要选择要输出的量
3. 选择常见变量而不是抽象变量

- 国际单位制（SI）
  - 基本单位
    1. 长度 米
    2. 质量 千克
    3. 时间 秒
    4. 热力学温度 开尔文
    5. 电流 安培
    6. 物质的量 摩尔
    7. 发光强度 坎德拉
  - 辅助单位
    1. 角 弧度
    2. 立体角 球面度

白金汉Pi（π）定理

瑞利法： 适用于和不超过3个未知数有关的情况

1. 确定影响某一物理过程的影响因素 $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$
2. 假定其中一个物理量 x_i，可以表达为其他物理量的指数乘积i形式 $x_i = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}\ldots x_n^{a_n}$
3. 根据量纲和谐原理，求出各物理量的指数

4. 分析系数 k

白金汉Pi（π）定理（Buckingham Pi Theorem）：一个物理上有意义的方程，其中有 n 个物理量，而这些物理量共有 k 个独立的量纲，则原方程式可以写成由 $p=n-k$ 个无量纲的参数 $\pi_1,\pi_2,...,\pi_p$ 组成的方程式

白金汉π定理提供方式可以针对一些物理现象的物理量计算无量纲量，就算还不知方程式的具体形式也没关系。不过无量纲量的选择不是唯一的，白金汉π定理只提供一个方式找出一组无量纲量，不表示这些无量纲量是“物理上最有意义”的。一般我们从我们所学的知识确定这一无量纲数。

考虑单摆在小幅度振动情形下的周期 T，假设周期式长度L、质量M及地表加速度g的函数，模型如下：

$$f(T,M,L,g)=0$$

此处写成四个物理量之间的关系，不是直接将周期T写成M, L及g的函数

因为只有三个基本物理量：时间、质量、长度以及四个由量纲的物质量，因此有 $4-3=1$ 个无量纲量，称为 π，模型可改写为

$$f(\pi)=0$$

其中 π 为

$$\pi=T^{\alpha_1}M^{\alpha_2}L^{\alpha_3}g^{\alpha_4}$$

其中 $\alpha_1,...,\alpha_4$ 为待确定的数值

上述物理量的量纲为

$$T=t,M=m,L=l,g=l/t^2$$

量纲矩阵

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

（行表示基本量纲 t,m,l，列表示物理量）

无量纲数满足变量个数减去量纲矩阵的秩，用量纲矩阵的秩来确定基本变量的个数是一个更方便的选择。

计算的目的是要找核向量 $a=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 使得矩阵 M 和向量 a 的乘积为零向量，且上述的量纲矩阵为列规范形矩阵，核向量如下：

$$
a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

因此无量纲量为

$$
\pi = T^2 M^0 L^{-1} g^1
$$

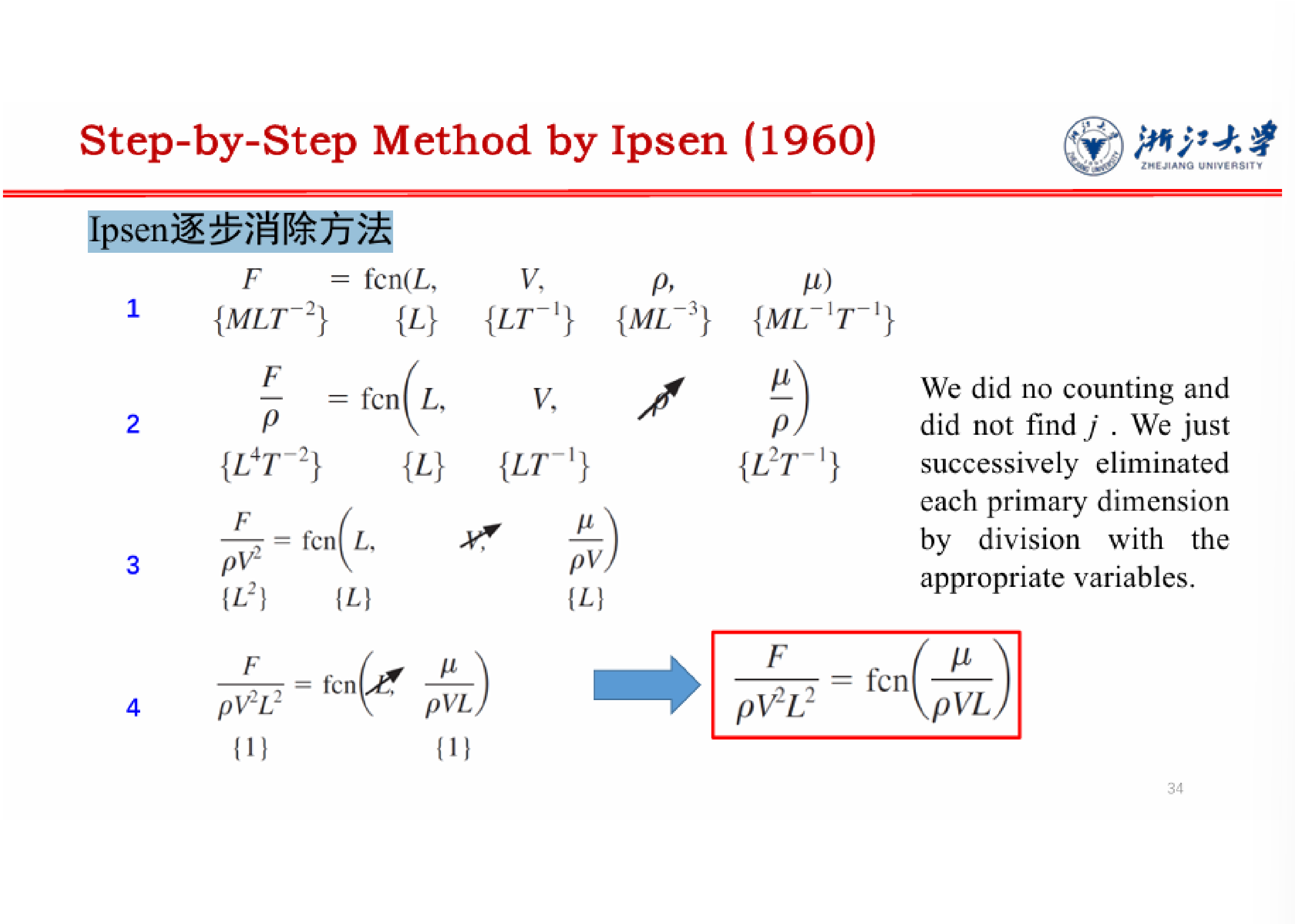
这个例子比较简单，因为四个物理量中有三个是基本单位，需要指出的是量纲分析允许单摆的周期不是质量的函数。

如果我们求得多个无量纲常数，那么可以将其中一个无量纲常数表示为关于剩下的无量纲常数的函数，即

$$
\pi_1 = f(\pi_2, \ldots, \pi_n)
$$

Ipsen逐步消除法

~~(不会打)~~



相似原理(Modeling and Similarity)

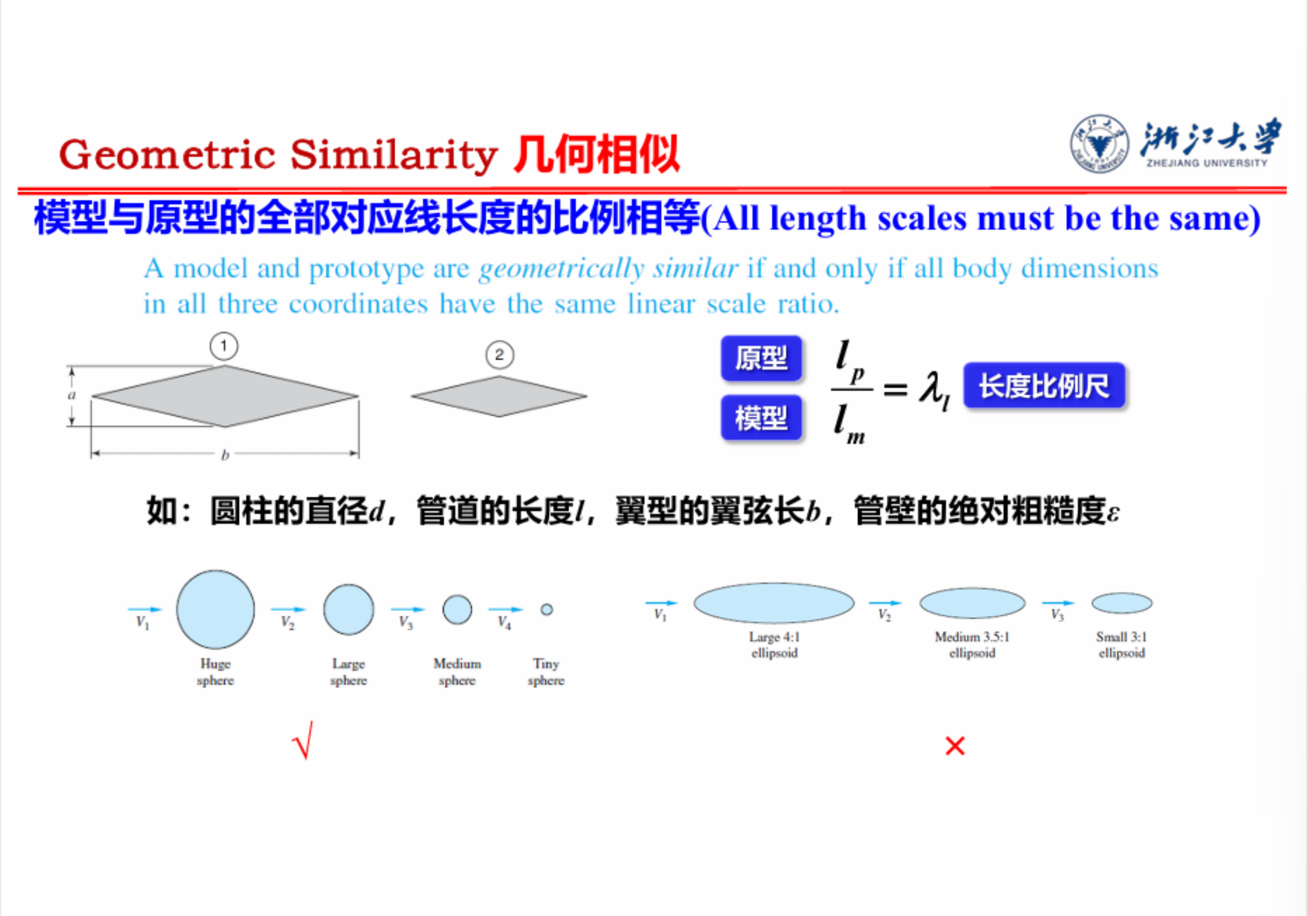
相似原理：对于两个具有相似单值条件（几何形状、初始状态、边界条件）的同类物理现象体系，其中一个体系中的所有参数可以从另一体系中相应的参数乘以一定的换算系数（相似系数）而得到的原理。

- 力学相似
  - 几何相似：表征流场几何形状
  - 运动相似：表征流体微团运动状态
  - 动力相似：表征流体微团动力性质

几何相似（Geometric Similarity）：模型与原型的全部对应线长度的比例相等。

$$\frac{I_p}{I_m} = \lambda_l$$

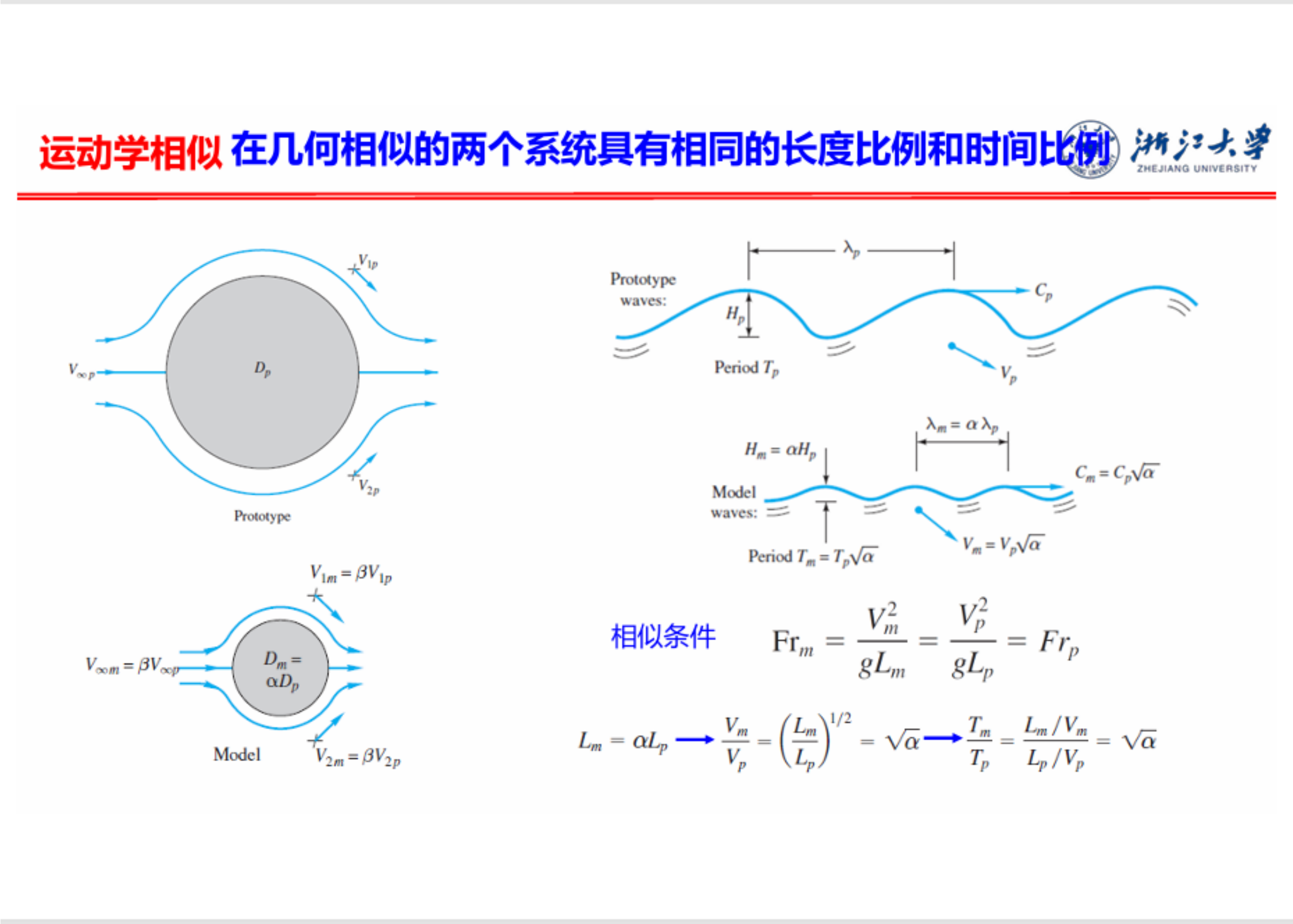
m 表示模型，p 表示原型



长度比例尺
当这一比例尺满足时，模型与实际的流场中的各对应长度成同一比例
对应基本量纲中的长度 L，称此时称模型与实际有**几何相似性**

运动学相似：在几何相似的两个系统具有相同的长度比例和时间比

速度比例尺
当这一比例尺满足时，模型与实际的流场中的各对应速度方向相同，且成同一比例
对应基本量纲中的时间 T，称此时称模型与实际有**运动相似性**



动力学相似：在运动学相似的两个系统中，对应点的受力比例相等