流体物理性质

连续介质假定与稀疏性

流体是一种有无限多连续分布的流体质点所组成的物质。

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

$\delta V \approx 10^{-9} mm^3$ 过小受微观不确定度影响，过大受宏观不确定度影响。

Knudsen number (克努森数)

$$K_n = \frac{\lambda}{L}$$

λ: mean freepath
L: representattive physical length scale
它用于确定流体的稀疏性

- $Kn < 0.01$: Continuum flow
- $0.01 < Kn < 0.1$: Slip flow
- $0.1 < Kn < 10$: Transitional flow
- $Kn > 10$: Free molecular flow

可压缩性和热膨胀性

- 可压缩性：流体在外力作用下，其体积或密度发生变化的性质。
- 热膨胀性：流体的体积或密度随温度改变的性质。

因此密度是关于外力和温度的函数，即$\rho = \rho(p, T)$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT = \rho B dp - \rho \beta dT$$

热膨胀系数：$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$
等温压缩系数：$B = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$
弹性体积模量：$K = \frac{1}{B}$ 越大越不容易压缩

不可压缩流体: ρ为常数
不可压缩流动:满足$\frac{\Delta \rho}{\rho} < 0.05$
由于

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\Delta p}{K}$$

满足不可压缩流动的条件有：

1. K值很大（大多数液体）
2. Δp很小（气体低速流动）

粘性

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

τ 是作用在单位接触面积流体上的内摩擦力，称为粘性切应力
$\frac{du}{dy}$称为速度梯度
μ称为动力粘度

当两板间流体速度分布可以近似假定为线性分布时，$\tau = F/A, du/dy = U/h$，其中U为平移速度，A为平板表面积，h为两板间距

符合线性关系的流体称为牛顿流体，有粘性但是不服从牛顿粘性定律的流体称为非牛顿流体

导热性

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

- Adiabatic Flow： 忽略热传导的流动
- Isentropic Flow：无粘绝热流动，称为等熵流动

运动描述方法

Lagrangian 描述

着眼于流体质点，通过对各流体质点的运动规律的观察来确定整个流场的运动规律

流体质点所处的空间坐标 (a, b, c)作为区分不同流体质点的标号参数，在人为选定的某种空间坐标系中，一个流体质点只有一组固定不变的 (a, b, c)值，即不同的 (a, b, c)值代表不同的流体质点，于是运动规律则为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$$

或者

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

初始时刻有 $(x, y, z) = (a, b, c)$

Eulerian 描述

着眼于流场空间点的描述，通过在流场中各个固定空间点上对流动的观察，来确定流体质点经过该空间点时期物理量的变化规律。（场论，注重对流体场的观察）

物理量B都将表示为空间坐标和时间的函数：

$$B = B(\mathbf{r}, t) = B(q_1, q_2, q_3, t)$$

在直角坐标系的速度场

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

随体导数

随体导数就是跟随流体一起运动时观察到的流体物理量随时间的变化率】

Lagrangian

流体速度是质点位置矢径对时间的偏导数

$$\mathbf{V}(a, b, c, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(a, b, c, t)$$

流体加速度是流体速度对时间的偏导数

$$\mathbf{a}(a, b, c, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}(a, b, c, t)$$

Eulerian

$$\frac{DB(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

可改写成

$$\frac{DB}{Dt} = u\frac{\partial B}{\partial x} + v\frac{\partial B}{\partial y} + w\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

可写成与坐标系无关的矢量表达式

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)B$$

描述法的互相转换

Lagrangian to Eulerian
已知流体质点运动规律以及流体物理量的拉格朗日描述，若

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a}\\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b}\\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}$$

则可以反解得

$$\begin{cases}a=a(x,y,z)\\ b=b(x,y,z)\\ c=c(x,y,z)\end{cases}$$

把该式带入 $B=B(a,b,c,t)$即完成了转换

Eulerian to Lagrangian
因为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)\\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t)\\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)\end{cases}$$

在u,v,w已知得情况下，该式可构成一个一阶常微分方程组

迹线、流线、脉线

- 迹线：流体质点在流场中运动的轨迹
- 脉线：经过同一空间固定点的不同流体质点，在某一瞬时将这些质点所处位置点光滑连结而成的曲线
- 流线：位于该曲线上的所有流体质点的运动方向都与这条曲线相切

流动为定常时，脉线、迹线、流线三者重合

迹线

Lagrange 表达式

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(a,b,c,t)$$

Euler 表达式

$$d\mathbf{r}=\mathbf{V}dt$$

在直角坐标系也有

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}=dt$$

把 x,y,z 看成是 t 的函数，通过求解常微分方程组就可以得到迹线的代数表达式

流线

满足

$$d\mathbf{r}\times\mathbf{V}=0$$

在直角坐标系中有

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

Helmholtz 速度分解定理

流体微团：由足够多的连续分布的流体质点所组成、具有线形尺度效应的流体团
对于t时刻，在$M_0(x,y,z)$处取一流体微团，于是M_0处附近的$M(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$点的速度可表示为

$$V(M)=V(M_0)+\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta x=V(M_0)+\delta V$$

由于V可表示成关于u,w,v的函数

$$\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}$$

可改写成一个对称方阵和反对称方阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0\end{bmatrix}$$

定义符号

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})\\ \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Omega_x=\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\\ \Omega_y=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\\ \Omega_z=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\end{cases}$$

则可改写成表达式

$$\delta\mathbf{V}=\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{r}+\mathbf{\Omega}\times\delta\mathbf{r}$$

于是

$$\mathbf{V}(M)=\mathbf{V}_0(M_0)+\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{r}+\mathbf{\Omega}\times\delta\mathbf{r}$$

在直角坐标系中有

$$\mathbf{\Omega}=\Omega_x\mathbf{i}+\Omega_y\mathbf{j}+\Omega_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}&\varepsilon_{xy}&\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx}&\varepsilon_{yy}&\varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}&\varepsilon_{zy}&\varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

流体微团运动分析

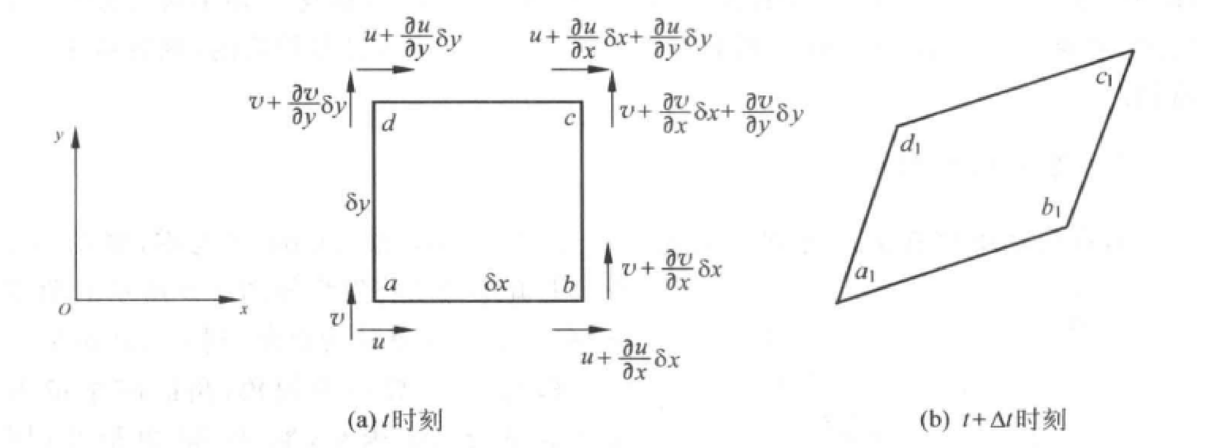

图 1-7　流体微团的运动分析

线变形

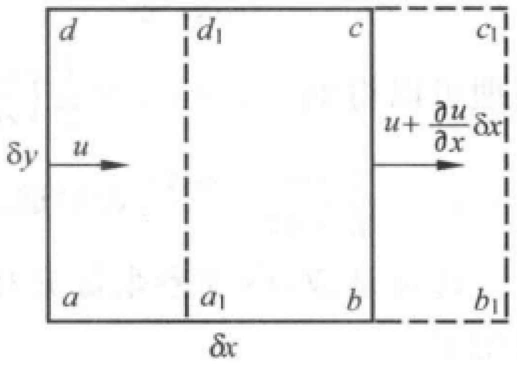

图 1-8 线变形分析

线应变率

$$\frac{a_1b_1-ab}{ab\Delta T}=\frac{bb_1-aa_1}{ab\Delta T}=\frac{(u+\frac{\partial u}{\partial t}\delta x)\Delta t-u\Delta t}{\delta x\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_{xx}$$

类似的可以推出其他方向上的线应变率

相对体积膨胀率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta x_1\delta y_1\delta z_1-\delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z}\approx\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

速度梯度

$$\mathrm{div}V=\nabla\cdot V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

如果 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$，则表示相对体积膨胀率为零，就是一种不可压缩流动；反之，如果流动是不可压缩的，则必有 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$，如果流体又是均质的，则等价于 ρ =常数

角变形

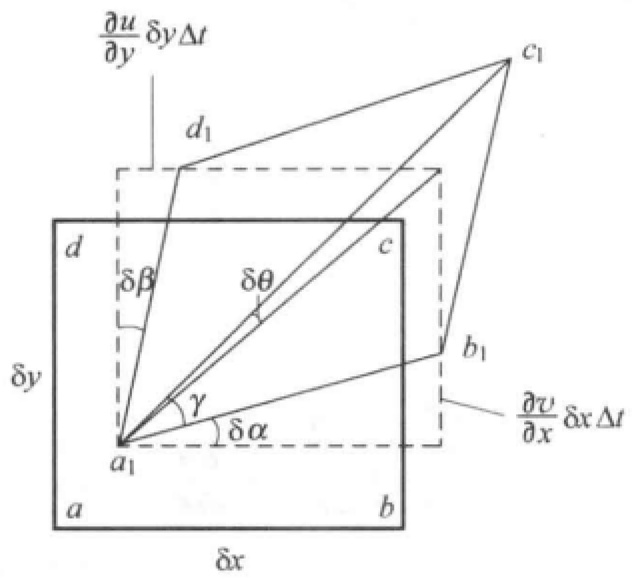

图 1-9　角变形与旋转分析

$$\delta\alpha \approx \tan(\delta\alpha) = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\Delta t/\delta x = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$$
$$\delta\beta \approx \tan(\delta\beta) = \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\Delta t/\delta y = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t$$

xoy平面上的剪切应变率

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}(\delta\alpha+\delta\beta)/\Delta t = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

yoz平面上的剪切应变率

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})$$

zox平面上的剪切应变率

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})$$

旋转分析

取 Δt时间内转角为： $\delta\theta = \gamma + \delta\alpha - 45^\circ$
因为$a_1b_1c_1d_1$近似为菱形，则有

$$2\gamma + \delta\alpha + \delta\beta = 90^\circ$$

从而

$$\delta\theta = \frac{\delta\alpha - \delta\beta}{2} \approx \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\Delta t}{2}$$

于是定义转动角速度分量 Ω_z为

$$\Omega_z = \lim_{\Delta t \to} \frac{\delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$$

类似的可得另外两个转动角速度分量

$$\Omega_y = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})$$
$$\Omega_x = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})$$

旋度

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$$

引入$\omega = (\nabla \times \mathbf{V}) = 2\Omega$，并把$\omega$称为涡量，它是表征流体运动有旋的一个非常重要的物理量

运动分类

1. 不可压缩流动和可压缩流动
2. 粘性流体流动和无粘性流体流动
3. 定常流动和非定常流动
4. 一、二、三维流动
5. 有旋流动与无旋流动

作用力

体积力

体积力又称质量力，他是作用在每一个流体质点上的力，如重力、惯性力、电磁力等，体积力的大小与流体的体积或质量成正比，与该体积或质量之外的流体存在与否无关，因此体积力是一种非接触力、具有外力的性质

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\tau}$$

表面力

表面力是外界作用在所考察流体接触界面上的力，这个界面可以是流体与流体的接触面，也可以是流体与固体的接触节面，正是由于面的接触才会有力的相互作用，而且力的大小与接触免得大小成正比，与流体质量无关。

$$\mathbf{p}_n = lim_{\Delta a \to 0} = \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

$\mathbf{p}_n$称为表面应力矢量。

- $\mathbf{p}_n$的下标n表示所考察流体免得外法线方向，因此作用在与之接触的面上的应力表示为 $\mathbf{p}_{-n}$，且满足 $\mathbf{p}_n = -\mathbf{p}_{-n}$
- 在粘性不能忽略的运动流体中， $\mathbf{p}_n$的作用方向并不与考察面相垂直，此时可将 $\mathbf{p}_n$分解成垂直于作用面的法向分量 p_{nn}以及与作用面相切的分量 p_{nt}，满足 $\mathbf{p}_n = p_{nn}\mathbf{n} + p_{nt}\mathbf{t}$

应力张量

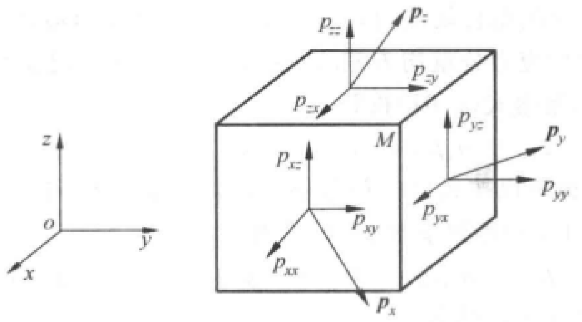

图 1-12　一点上的应力状态

$$
\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}
$$

第1个下标表示应力作用面的外法线方向，第2个下标表示应力的投影方向，投影方向与外法线方向一致的为正应力，与之垂直的为切应力

任意方向 $\mathbf{n}(a, b, c)$ 上的应力

$$
\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \sigma
$$

左乘算子，行向量的线性叠加