无粘性流体的一维流动

流体力学

对于变截面管道或槽道的一维流动，要考虑到沿流动方向过流截面变化的影响。

Basic Equations for one-dimensional inviscid flows

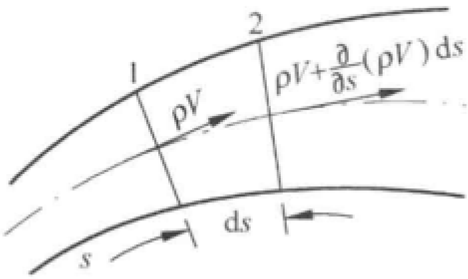


图 4-2　一维管流

连续性方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho d\tau+\oint_A \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA=0$$

在一维管流情况下有 $d\tau=Ads, \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=V$，截面上的 ρ, V均匀分布，于是上式可改写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}Ads+(\rho VA)_2-(\rho VA)_1=0$$

由于 ds 很小，由泰勒展开得 $(\rho VA)_2=(\rho VA)_1+\frac{\partial}{\partial s}(\rho VA)ds$ 且 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 可视为一个常数（在一个很小控制体内我们可以认为密度是均匀变化的），所以得

$$A\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}(\rho VA)=0$$

我们可以根据不同情况做如下分类

1. 对于不可压缩流动有

$$\frac{\partial}{\partial s}(VA)=0$$

2. 对于可压缩流体的一维定常流动 $\frac{\partial}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho VA)=0$$

3. 当管道为等截面时

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}(\rho V)=0$$

连续性方程与流体粘性无关

考虑运动方程，利用积分形式的运动方程，其中

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho\mathbf{V}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho V)ds$$
$$\oint\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA=(\rho V^2A)_2-(\rho V^2A)_1=\frac{\partial}{\partial s}(\rho VA)ds$$

于是在一维流动中，物体的运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V)Ads+\frac{\partial}{\partial s}(\rho V^2A)ds=\sum F_s$$

$\sum F_s$ 表示外力在轴线s方向上的合力，由于 ds 很小，如图简化力后可得

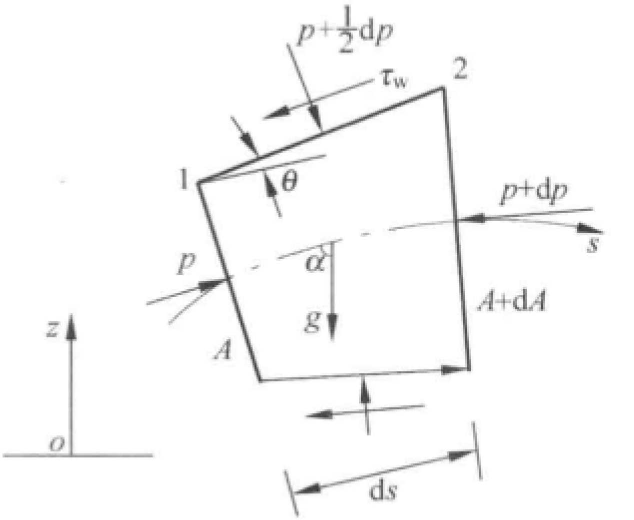


图 4-3　微元管段受力分析

$$\sum F_s=-\rho gAds\cos\alpha-A\frac{\partial\rho}{\partial s}ds-\tau_w dA\cot\theta$$

式中已取体积力为重力，作用在控制体侧表面的压力取平均值 $p+dp/2$，粘性切应力的平均值为 τ_w；α 是重力方向与管轴线方向 ds 的交角；θ 为 ds 段内管壁的扩张角。
对于 $\tau_w=0$，有

$$A\frac{\partial}{\partial t}(\rho V)+\frac{\partial}{\partial s}(\rho V^2A)=-\rho gA\cos\alpha-A\frac{\partial p}{\partial s}$$

在某些特定的应用条件下，可简化成

1. 定常流动

$$VdV+\frac{dp}{\rho}=0$$

2. 等截面，记$-g\cos\alpha=f_s$

$$\rho(\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s})=\rho f_s-\frac{\partial p}{\partial s}$$

最后，我们来看能量方程式，忽略热源影响，用 Q_h 表示单位时间内通过控制面传给流体的热流量，设体积力只有重力 取 z 轴向上，且忽略粘性

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]Ads+\frac{\partial}{\partial s}\left[\rho VA\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]Ads\\&+\rho VA\frac{\partial}{\partial s}(gz)ds+\frac{\partial}{\partial s}(\rho VA)ds=Q_h\end{aligned}$$

我们依旧可以在某些特定的应用条件下化简能量方程式

1. 定常流动

$$d(e+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz)=\frac{Q_h}{\rho VA}$$

2. 定常流动，绝热，忽略重力，取 $e+\frac{p}{\rho}=h$

$$h+\frac{V^2}{2}=Const$$

   称为可压缩流动伯努利方程
3. 无粘性不可压缩流体的定常流动

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=Const$$

   不可压缩流动的伯努利方程

Bernoulli Equation

回忆 Lamb Gromico Equation

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{V^2}{2})+\omega\times\mathbf{V}=\mathbf{f}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{P}$$

对于非粘性流体 $\mathbf{P}=-p\mathbf{I}$

我们引入两种假设

1. 作用在流体上的体积力有势，$\mathbf{f}=-\nabla U$
2. 运动流体的密度只是压力的函数， $\nabla P=\frac{\nabla p}{\rho}$ $P=\int\frac{dp}{\rho}$

所以有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{V^2}{2}+U+P)+(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}=0$$

Steady

如果流动是定常的则有

$$\nabla(\frac{V^2}{2}+U+P)+(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}=0$$

我们可以沿一条流线积分，因为在定常流场中的流线形状和位置是不随时间的变化，所以取一条流线，假定微元弧长矢量为 ds，有

$$\nabla(\frac{V^2}{2}+U+P)\cdot ds+[(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}]\cdot ds=0$$

由于 $ds//V$ ，$[(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}]\cdot ds=0$，所以有

$$\nabla(\frac{V^2}{2}+U+P)\cdot ds=d(\frac{V^2}{2}+U+P)=0$$

所以积分可得

$$\frac{V^2}{2}+U+P=C(\Psi)$$

这就是伯努利方程，他是一种对运动微分方程的首次积分，他的条件是：流体无粘性，体积力有势，流场正压，流动定常，沿一条流线。

对于粘性不可压缩流动，ρ为常数，则 $P=\frac{p}{\rho}$，体积力为重力 $\mathbf{f}=-\nabla U$，取z轴竖直向上，有

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C(\Psi)$$

或

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z=C_1(\Psi)$$

也就是不可压缩流动的伯努利方程。第一项是伯努利方程的物理意义（能量守恒），第二项是伯努利方程的几何意义

对于无粘性可压缩流体，我们假定比热容为常数，且流动绝热，则有$P=\int\frac{dp}{\rho}=e+\frac{p}{\rho}$则对伯努利方程有

$$\frac{V^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+gz=h+\frac{V^2}{2}+gz=C(\Psi)$$

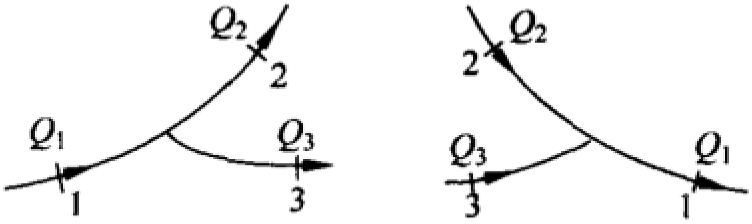


图 4-10 一维分流与汇流

对于一维分流和汇流情况，我们先列出两个流体所满足的方程

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2$$
$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{V_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3$$

所以有

$$\rho g Q_1\left(\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)=\rho g Q_2\left(\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)+\rho g Q_3\left(\frac{V_3^2}{2g}+\frac{p_3}{\rho g}+z_3\right)$$

流量满足

$$Q_1=Q_2+Q_3$$

如果存在能量的输入与输出

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\pm H=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2$$

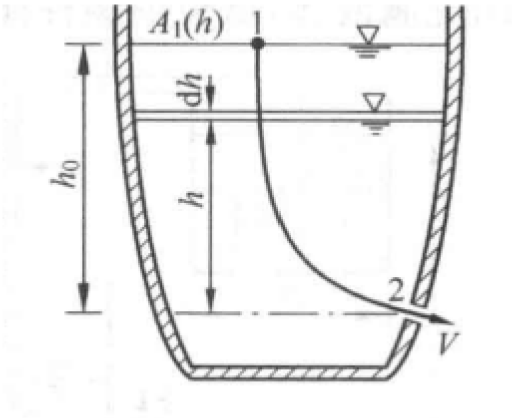
其中，能量输入为正，输出为负

如果存在因摩擦而产生的能量损失，则可继续改写成

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1\pm H=\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2+h_{w_{1-2}}$$

α称为动能修正系数，通常取1 $h_{w_{1-2}}$为单位重量流体的能量损失，这个方程可以用二位或三维的流动，特别是用于瞬时流线都来自或通过某个均匀区域的流动，也常用于处理在管道或槽道中的非定常一维流动。

我们分析一维准定常流动情况的伯努利方程。何为准定常呢？



考虑上图的容器，大容器液体通过小孔出流，假定容器内自由液面位置水头恒定，也就是定常流动，但实际上，自由液面位置发生变化，流动是非定常的，但是当孔口过流截面面积远小于容器的横截面积时，自由液面下降速度很小，可以将出流过程划分成多个dt的小时段，在小时段内的流动按定常流出来，也就是准定常流动。

此时满足的伯努利方程:

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_a}{\rho g}+h=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_a}{\rho g}$$

由于 $A_1V_1=A_2V_2$，孔口面积A_2远小于横截面积A_1得到速度表达式

$$V_2=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-(\frac{A_2}{A_1})^2}}\approx\sqrt{2gh}$$

在 dt 时间内，孔口流出的流量伪 $A_2\sqrt{2gh}dt$ 则液面下降 $-dh$ $(dh<0)$由质量守恒得

$$-A_1dh=A_2\sqrt{2gh}dt$$

$$dt=\frac{-A_1dh}{A_2\sqrt{2gh}}$$

考虑横截面积为常数的容器，积分可得

$$t=\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h})$$

Unsteady

上面讨论的都是定常流动，如果流动非定常呢?

我们依旧对流线积分，此时速度仍与流线方向微元矢量平行，所以有

$$\int_1^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}ds+\int_1^2d(\frac{V^2}{2}+U+P)=0$$

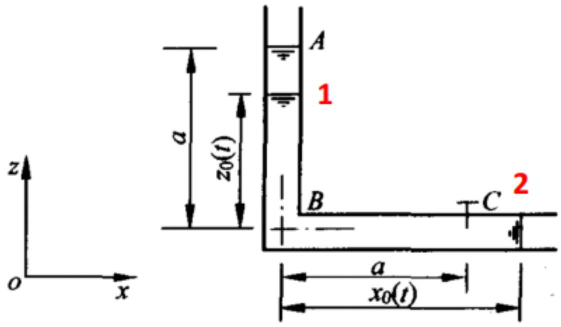
限制流体不可压缩，体积力只有重力

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}ds=C(\phi,t)$$

对于在变截面管道或槽道中的无粘性不可压缩流体的一维非定常流动，基本方程组为

$$\begin{aligned}&AV=Q(t)\\&\frac{V_1^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz_1=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}ds\end{aligned}$$

Unsteady Bernoulli Equation (3)



回头再看例 4.1

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+gh=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+0+\int_1^2\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$V_1=V_2=V$$

$$\int_1^2\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{dV}{dt}2a$$

$$gz_0=-\frac{dV}{dt}2a$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2}=-\frac{g}{2a}z_0$$

与二维计算相比，简单了很多

23

上图的符号可以从物理意义上理解，当你速度增加的时候，意味着你的势能减少（势能转换成动能），二者是负相关的。此时 $V=\frac{dz}{dt}$ 是正的，所以需要增加一个负号项。

自己的理解(推导过程参考P140 例4.9)

考虑从图中 1 处到 2 处做非定常伯努利积分可得

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+gh=\frac{V_2^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+\int_1^2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,\mathrm{ds}$$

由于该管道为等截面管道，所以连续性方程给出

$$V_1=V_2=V$$

沿流线 $1 \to 2$ 实际上是从 $z \to x$ 处整个液体以相同的 $\frac{\partial V}{\partial t}$ 下降

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} 2a$$

所以可得方程

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{h} z$$

由于速度是沿 z 轴下降的

$$V_1 = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2a} z$$

Non-inertia Coordinate

以上讨论的都是在惯性坐标系中，在运动坐标系中流体满足运动方程

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_r}{Dt} = \rho(\mathbf{f} - a_e - 2\Omega \times \mathbf{V}_r) + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

所以对于无粘性液体中有

$$\frac{D\mathbf{V}_r}{Dt} = \mathbf{f} - \mathbf{a}_0 - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} - 2\omega \times \mathbf{V}_r - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

其中 a_0和ω分别为运动坐标系中的平移加速度和转动角度 $\mathbf{V}_r$为相对速度 $\mathbf{r}$式运动坐标系中空间坐标矢径。它们分别是平移加速度、向心加速度、切向加速度、科氏加速度。

我们将根据不同的简化条件下对上述伯努利方程进行简化。

首先我们先考虑最简单的等加速直线坐标系中的伯努利方程，此时没有转动，方程可以简化成

$$\frac{D\mathbf{V}_r}{Dt} = \mathbf{f} - \mathbf{a}_0 - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

将随体导数展开

$$\frac{D\mathbf{V}_r}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_r}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla)\mathbf{V}_r$$

并利用矢量场论基本运算公式

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=\nabla(\frac{V^2}{2})+(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}\\
&\mathbf{a}_0=\nabla(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

带入简化方程并沿一条流线积分得

$$
\frac{V_{r1}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz_1+(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{r})_1=\frac{V_{r2}^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{r})_2+\int_1^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}ds
$$

当相对运动定常时有

$$
\frac{V_r^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz+(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{r})=C(\Psi)
$$

接下来我们考虑等角速度旋转坐标系中的伯努利方程，我们假定坐标系仅绕z轴等角速度旋转，方程可变为

$$
\frac{D\mathbf{V}_r}{Dt}=\mathbf{f}-\omega\times(\omega\times\mathbf{r})--2\omega\times\mathbf{V}_r-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{P}
$$

因为

$$
\omega\times(\omega\times\mathbf{r})=-\nabla(\omega^2\frac{x^2+y^2}{2})
$$

于是有

$$
\frac{\partial\mathbf{V}_r}{\partial t}+\nabla[\frac{V_r^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz-\omega^2\frac{(x^2+y^2)}{2}]+(\nabla\times\mathbf{V}_r)\times\mathbf{V}_r+2\omega\times\mathbf{V}_r=0
$$

相对运动定常且沿一条流线积分时有

$$
\frac{V_r^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz-\omega^2\frac{(x^2+y^2)}{2}=C(\Psi)
$$

Theorem of momentum

在工程中，常常遇到这样一类流体力学问题：它不需要计算流场内每点或管道每个截面上的压力分布，而仅仅需要计算流体与物体之间总的相互作用力或作用力矩，那么此时直接使用积分形式的动量定理或动量矩定理就比较方便。

考虑原有的动量定理

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\rho\mathbf{V}d\tau+\oint_A\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA=\sum F
$$

我们重新认识这个方程：这个方程只对惯性坐标系成立，对流体有无粘性都成立。我们来讨论 $\sum F$

当 τ 内只有流体时

$$\int_{\tau}\rho\mathbf{f}d\tau+\oint_{A}p_{n}dA$$

当 τ 内含有其他物体时时

$$\int_{\tau}\rho\mathbf{f}d\tau+\oint_{A}p_{n}dA+\mathbf{R}$$

$\mathbf{R}$ 是物体对流体的总作用力（反作用力）

我们对方程进行简化，首先对于流动定常状况时

$$\oint_{A}\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA=\sum F$$

如果此时是管道流动（一个面流入，另一个面流出）

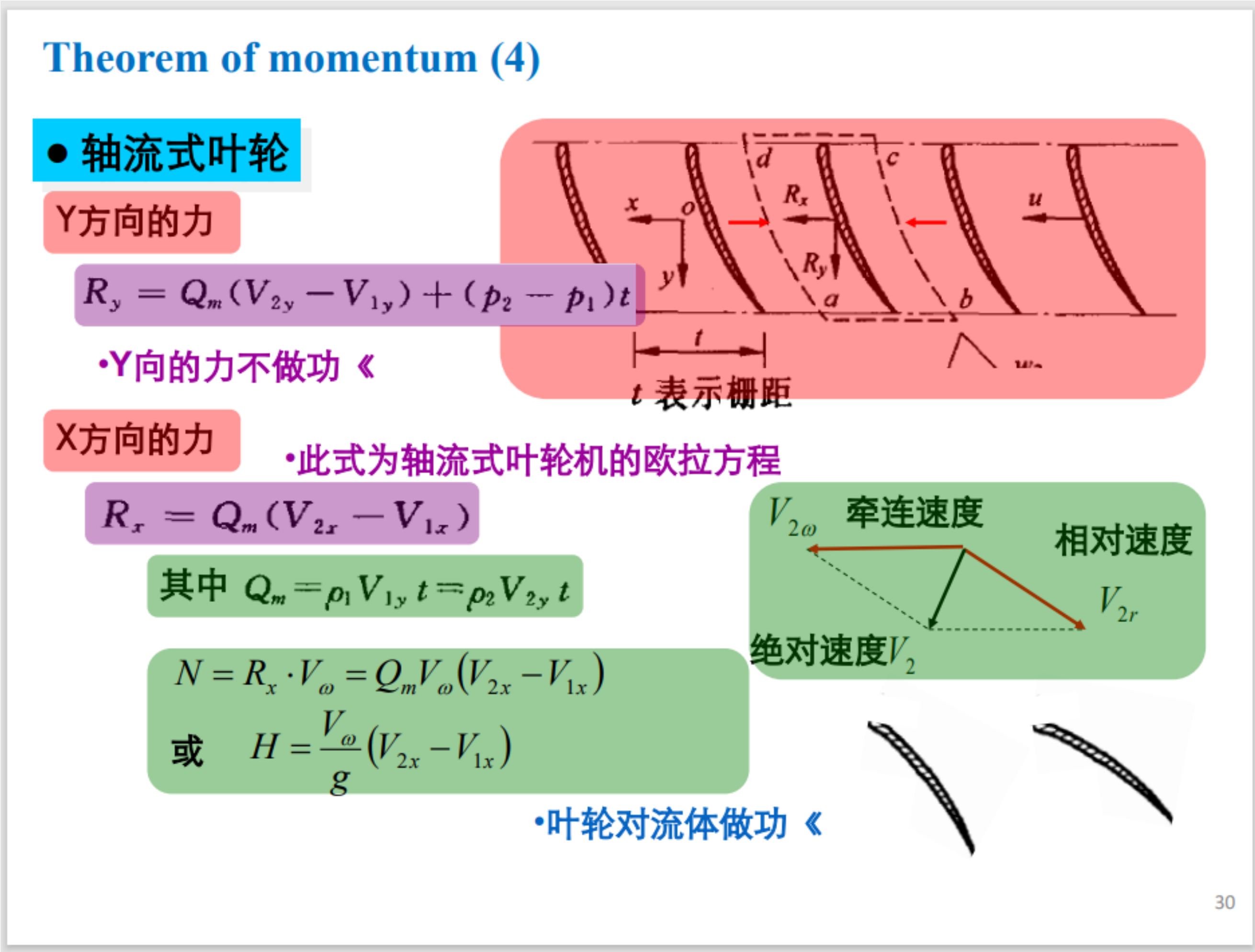
$$\int_{A_2}\rho_2\mathbf{V}_2(\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{n}_2)dA_2-\int_{A_1}\rho_1\mathbf{V}_1(\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{n}_1)dA_1=\sum F$$

如果此时在附加额外条件 A_1和A_2面上的流动物理量均匀或按截面平均量计算，则有

$$Q_{m_2}\mathbf{V}_2-Q_{m_1}\mathbf{V}_1=\sum F$$

当没有质量变化时有

$$Q_m(\mathbf{V}_2-\mathbf{V_1})=\sum F$$



现在我们来研究非惯性坐标系中的动量定理，直接给出公式得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \mathbf{V}_\tau d\tau + \oint_A \rho \mathbf{V}_\tau (\mathbf{V}_\tau \cdot \mathbf{n}) dA \\
&= \int_\tau \rho (f - a_0 - \omega \times (\omega \times r) - \frac{d\omega}{dt} \times r - 2\omega \times \mathbf{V}_\tau) d\tau + \oint_A p_n dA
\end{aligned}
$$

Theorem of moment of momentum

我们给出积分形式得动量矩方程

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) d\tau + \oint_A (\mathbf{r} \times \mathbf{V})(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum \mathbf{M}
$$

同样的，在此方程中只对惯性坐标系成立，目前的形式与流体粘性无关，外加动力矩

$$
\sum \mathbf{M} = \begin{cases} \int_\tau (\mathbf{r} \times \mathbf{f}\rho) d\tau + \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dA & \text{控制体只有流体} \\ \int_\tau (\mathbf{r} \times \mathbf{f}\rho) d\tau + \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dA + \mathbf{M}_0 & \text{控制体还有其他物体} \end{cases}
$$

同样的我们有如下简化

定常流动:

$$\oint_A (\mathbf{r} \times \mathbf{V})(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum \mathbf{M}$$

控制面只有一个进口截面和出口截面

$$Q_{m_2}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{V}_2) - Q_{m_1}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{V}_1) = \sum \mathbf{M}$$

非惯性坐标系

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{V}) d\tau + \oint_A (\mathbf{r} \times \mathbf{V})(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum \mathbf{M} \\
&= \int_\tau \mathbf{r} \times [\mathbf{f} - a_0 - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} - \mathbf{2}\omega \times \mathbf{V_r}] \rho d\tau + \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dA
\end{aligned}$$