平面问题的极坐标系解答

弹性力学

极坐标方程

直角坐标系向极坐标系的坐标变换式:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\
\sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\
\tau_{\rho\varphi} &= (\sigma_y - \sigma_x)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)
\end{aligned}
$$

我们给出极坐标形式的平衡微分方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + F_\rho = 0 \\
\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + F_\varphi = 0
\end{aligned}
$$

极坐标的几何方程

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \\
\gamma_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}
\end{aligned}
$$

本构方程（这里运用了各向同性的性质）

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \nu\sigma_\varphi) \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_\rho) \\
\gamma_{\rho\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\rho\varphi}
\end{aligned}
$$

对于平面应变问题 $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$

极坐标系的 Laplace 算子:

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
$$

不计体力时，应力表达式:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\
\sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \\
\tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

双调和方程:

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) = 0
$$

轴对称应力

当应力函数 U 与 φ 无关时，双调和方程变为

$$
\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)\left(\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}\right) = 0
$$

展开并同乘 ρ^4 得

$$
\rho^4\frac{d^4 U}{d\rho^4} + 2\rho^3\frac{d^3 U}{d\rho^3} - \rho^2\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \rho\frac{dU}{d\rho} = 0
$$

取 $\rho = e^t$ 可以解得

$$
U = A\ln\rho + B\rho^2\ln\rho + C\rho^2 + D
$$

应力表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2\ln\rho) + 2C \\
\sigma_\varphi &= -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2\ln\rho) + 2C \\
\tau_{\rho\varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

应变分量:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{A}{\rho^2} + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)B\ln\rho + 2(1-\nu)C\right] \\
\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho^2} + (3-\nu)B + 2(1-\nu)B\ln\rho + 2(1-\nu)C\right] \\
\gamma_{\rho\varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

位移分量:

$$
\begin{aligned}
u_\rho = & \frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho}+2(1-\nu)B\rho(\ln\rho-1)+(1-3\nu)B\rho+2(1-\nu)C\rho\right] \\
& +I\cos\varphi+K\sin\varphi \\
u_\varphi = & \frac{4B\rho\varphi}{E}+H\rho-I\sin\varphi+K\cos\varphi
\end{aligned}
$$

应力轴对称并不表示位移也是轴对称，但在轴对称应力情况，如果物体的几何形状和受力（或几何约束）也是轴对称，则位移也是轴对称，此时有 $u_\varphi=0$,即

$$
B=H=I=K=0
$$

厚壁圆筒受均匀分布压力

边界条件

$$
\begin{aligned}
& (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a}=0,(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b}=0 \\
& (\sigma_\rho)_{\rho=a}=-q_1,(\sigma_\rho)_{\rho=b}=-q_2,
\end{aligned}
$$

由于应力轴对称，给出拉梅解答

$$
\begin{aligned}
& \sigma_\rho=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}+\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2} \\
& \sigma_\varphi=-\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}+\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2} \\
& \tau_{\rho\varphi}=0
\end{aligned}
$$

曲梁的纯弯曲

边界条件

$$
\begin{aligned}
& (\sigma_\rho)_{\rho=a}=0,(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a}=0 \\
& (\sigma_\rho)_{\rho=b}=0,(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b}=0 \\
& \int_a^b\sigma_\varphi d\rho=0,\int_a^b\rho\sigma_\varphi d\rho=-M
\end{aligned}
$$

求得

$$
\begin{aligned}
& \sigma_\rho=-\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}-b^2\ln\frac{b}{\rho}+a^2\ln\frac{a}{\rho}\right) \\
& \sigma_\varphi=-\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}-b^2\ln\frac{b}{\rho}+a^2\ln\frac{a}{\rho}+b^2-a^2\right) \\
& \tau_{\rho\varphi}=0
\end{aligned}
$$

其中

$$
N=(b^2-a^2)-4a^2b^2(\ln\frac{b}{a})^2
$$

我们可以根据曲梁的约束条件求得位移分量。

现在考虑环向位移分量

$$u_\varphi=\frac{4B\rho\varphi}{E}-K\sin\varphi$$

这显然是一个多值函数，但是在完整圆环中这是不合理的，所以有 $B=0$，但是在不完整圆环中，多值是有可能的。

曲梁一端受径向集中力作用

设有一内半径为 a 外半径为 b 的矩形截面曲梁，一个端面固定，另一个端面受径向力

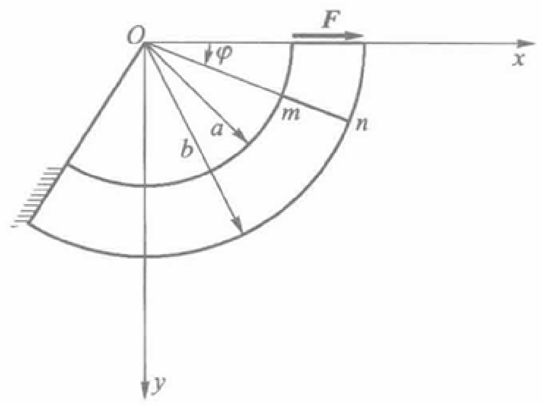


图 7-9

我们假定应力函数 U 和 $\sin\varphi$ 成正比，取

$$U=f(\rho)\sin\varphi$$

带到相容方程可得 $f(\rho)$ 表达式：

$$f(\rho)=A\rho^3+B\frac{1}{\rho}+C\rho+D\rho\ln\rho$$

所以应力分量

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho&=\left(2A\rho-\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\sin\varphi\\
\sigma_\varphi&=\left(6A\rho+\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\sin\varphi\\
\tau_{\rho\varphi}&=-\left(2A\rho-\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\cos\varphi
\end{aligned}$$

考虑边界条件

$$(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0, (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a} = 0$$
$$(\sigma_\rho)_{\rho=b} = 0, (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} = 0$$
$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=0} = 0, \int_a^b \tau_{\varphi\rho} d\rho = -F$$

解得

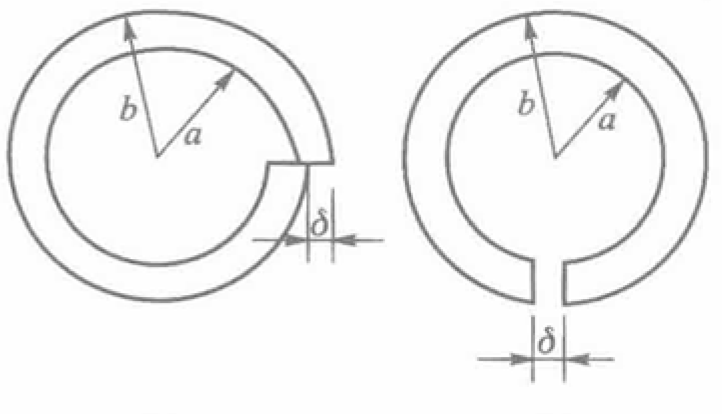
$$A = -\frac{F}{2N}, B = \frac{Fa^2b^2}{2N}, D = \frac{F}{N}(a^2+b^2)$$

其中 $N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\ln\frac{b}{a}$

我们给出位移分量

$$u_\rho = -\frac{2D}{E}\varphi\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{E}\left[A\rho^2(1-3\nu) + \frac{B}{\rho^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\ln\rho\right] + K\sin\varphi + L\cos\varphi$$
$$u_\varphi = \frac{2D}{E}\varphi\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{E}\left[A\rho^2(5+\nu) + \frac{B}{\rho^2}(1+\nu) - D(1-\nu)\ln\rho\right] \frac{D(1+\nu)}{E}\cos\varphi + K\cos\varphi - L\sin\varphi + H\rho$$

K, L, H 由约束条件给出。



(a) (b)

对于一个内半径为 a，外半径为 b 的圆环，先在其上切开一条径向细缝，再用外力强迫细缝的两表面错开 δ （径向位移）然后焊接起来，如 a 所示。

可以简单求出径向位移 δ:

$$\delta = (u_\rho)_{\varphi=2\pi} - (u_\rho)_{\varphi=0} = -\frac{4D\pi}{E}$$

可以得出强使细缝表面错开 δ 所需的力：

$$F = -\frac{NEd\delta}{4\pi(a^2+b^2)}$$

考虑一个不完整圆环，切口表面平行，距离为 δ ，如 b ，用外力强使切口两表面合拢然后焊牢，就转化为第一个问题，但符号应相反。因此其内的预应力是很容易求得的。

具有小圆孔的平板的均匀拉伸

由于小圆孔的存在，必然对板内应力分布产生影响，由圣维南原理可知，这种影响仅局限于孔的附近区域，在孔边的较远处，这种影响显著减小

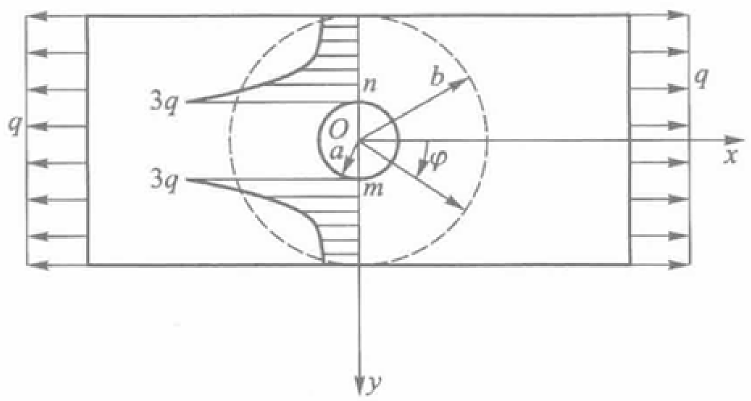


图 7-11

假设在圆孔中心距离 b（b 远大于 a） 的地方，应力分布已经和没有圆孔的情况完全一样，采用极坐标系有

$$
\begin{aligned}
(\sigma_\rho)_{\rho=b} &= q\cos^2\varphi = \frac{q}{2}(1+\cos 2\varphi) \\
(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} &= -\frac{q}{2}\sin 2\varphi
\end{aligned}
$$

这表示在小圆孔同心，半径为 b 的圆周上，应力有两部分组成，一部分是拉应力 $\frac{q}{2}$，按照圆筒公式可得

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{b^2}{b^2-a^2}\frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right) \\
\sigma_\varphi &= \frac{b^2}{b^2-a^2}\frac{q}{2}\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right) \\
\tau_{\rho\varphi} &= 0
\end{aligned}
$$

另一部分是随 φ 变化的法向应力 $\frac{q}{2}\cos 2\varphi$ 和切向应力 $-\frac{q}{2}\sin 2\varphi$，考虑应力函数

$$
U = f(\rho)\cos 2\varphi
$$

带入双调和方程可得应力函数表示式：

$$
U = \left(A\rho^2 + B\rho^4 + \frac{C}{\rho^2} + D\right)\cos 2\varphi
$$

可得应力分量

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= -\left(2A+\frac{6C}{\rho^4}+\frac{4D}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi \\
\sigma_\varphi &= \left(2A+12B\rho^2\frac{6C}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi \\
\tau_{\rho\varphi} &= \left(2A+6B\rho^2-\frac{6C}{\rho^4}-\frac{2D}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi
\end{aligned}
$$

考虑边界条件可得式子

$$
\begin{aligned}
&2A+\frac{6C}{b^4}+\frac{4D}{b^2}=-\frac{q}{2} \\
&2A+\frac{6C}{a^4}+\frac{4D}{a^2}=0 \\
&2A+6Bb^2-\frac{6C}{b^4}-\frac{2D}{b^2}=-\frac{q}{2} \\
&2A+6Ba^2-\frac{6C}{a^4}-\frac{2D}{a^2}=0
\end{aligned}
$$

解得并考虑 $\frac{a}{b}\approx 0$ 于是有

$$
A=-\frac{q}{4},B=0,C=-\frac{a^4q}{4},D=\frac{a^2q}{2}
$$

将结果叠加可得（考虑 $\frac{a}{b}\approx 0$ ）

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)+\frac{q}{2}\left(1+\frac{3a^4}{\rho^4}-\frac{4a^2}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi \\
\sigma_\varphi &= \frac{q}{2}\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)-\frac{q}{2}\left(1+\frac{3a^4}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi \\
\tau_{\rho\varphi} &= -\frac{q}{2}\left(1-\frac{3a^4}{\rho^4}+\frac{2a^2}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi
\end{aligned}
$$

当 $\rho=a$ 时，此时切应力和轴向应力皆为0，最大环向应力发生在小圆孔边界的 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，其值为

$$
(\sigma_\varphi)_{\max}=3q
$$

这表明，如果板很大，圆孔很小，圆孔边上将发生应力集中现象。我们定义应力集中系数

$$
K=\frac{(\sigma_\varphi)_{\max}}{q}
$$

应力集中现象引出了对于断裂力学的研究。

尖劈顶端受集中力或集中力偶作用

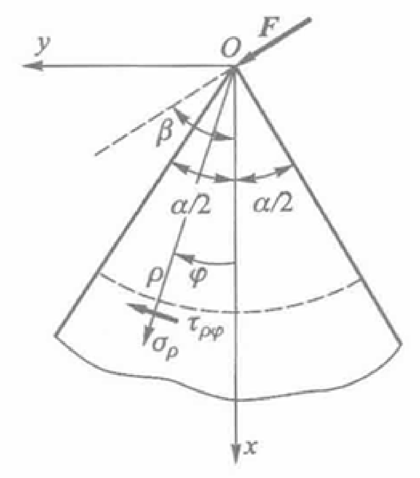


图 7-12

假定尖劈中心角为 α，下端可认为伸向无穷，在其顶端受集中力作用，并于尖劈的中心线成 β 角。取单位厚度，并设其所受的力为 F。

考虑量纲分析法，F 的量纲为 MT^{-2}(考虑单位力)， ρ 的量纲为 L，α,β,φ 的量纲为一，所以应力分量的表达式为 $\frac{F}{\rho}N$，N 为 α,β,φ 组成，由于在应力函数中 ρ 的幂次比应力分量的幂次高两次，所以假设应力函数

$$U=\rho f(\varphi)$$

可以解出应力函数

$$U=A\rho\cos\varphi+B\rho\sin\varphi+\rho\varphi(C\cos\varphi+D\sin\varphi)$$

由于前两项为在直角坐标系中为一次项，对应力无影响，所以可改写成

$$U=\rho\varphi(C\cos\varphi+Dsin\varphi)$$

引出应力分量

$$\sigma_\rho=\frac{2}{\rho}(D\cos\varphi-C\sin\varphi)$$
$$\sigma_\varphi=0,\quad \tau_{\rho\varphi}=0$$

考虑平衡条件 $\sum F_x=0,\sum F_y=0$ 得

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\rho\sigma_\rho\cos\varphi d\varphi+F\cos\beta=0$$
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\rho\sigma_\rho\sin\varphi d\varphi+F\sin\beta=0$$

解得

$$\sigma_\rho = -\frac{2F\cos\beta\cos\varphi}{(\alpha+\sin\alpha)\rho} - \frac{2F\sin\beta\sin\varphi}{(\alpha-\sin\alpha)\rho}$$

对于力偶问题，应力分量中只能出现 ρ 的负二次幂，所以应力函数与 ρ 无关。

$$U = f(\varphi)$$

可以解得

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{2M\sin 2\varphi}{(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\rho^2} \\
\sigma_\varphi &= 0 \\
\tau_{\rho\varphi} &= -\frac{M(\cos 2\varphi-\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\rho^2}
\end{aligned}$$

对于解答，当 $\alpha = 257.45^\circ$，有 $\sin\alpha - \alpha\cos\alpha = 0$，也就是说应力趋于无穷大，这显然是一个佯谬问题，可以采用复变函数的方法修正。

几个弹性半平面的解答

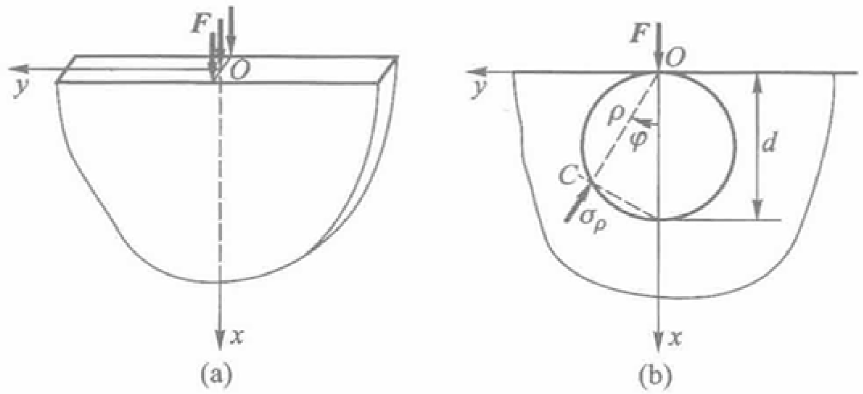


图 7-15

设想有一个垂直的集中力作用在板的水平边界上，这板下方和左右两方是无限伸长的。假定 F 是单位厚度的集中载荷。

引入尖劈的结论可得解答，取 $\alpha = \pi, \beta = 0$（称为 Bossinesq 解答）

$$\sigma_\rho = -\frac{2F\cos\varphi}{\pi\rho}$$

该应力分布规律有两个特点：1. 过体内任何一点 C 并于矢径垂直的微分面均为主平面，因为切应力都为零。2. 直径与 x 轴重合且过 O 点的圆周上各点的径向应力都相等。

在这个圆周上有

$$\rho = d\cos\varphi$$

带入式中有：

$$\sigma_\rho = -\frac{2F}{\pi d}$$

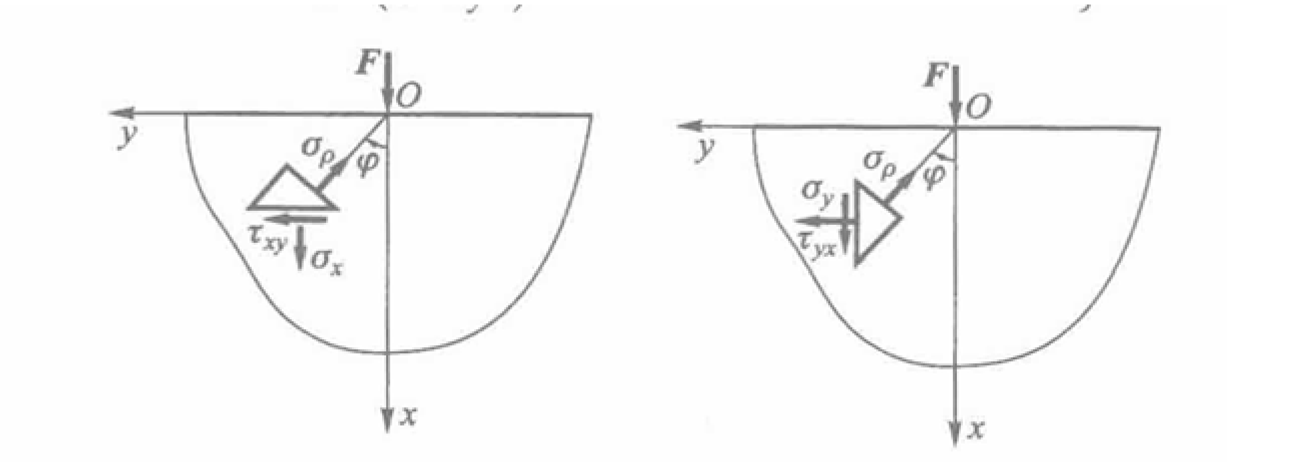


图 7-16

考虑上图两个小单位体的平衡，注意到

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

所以可得直角坐标系上的应力分量

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

最大切应力出现在 $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}$ 处，因此如果我们需要用切应力强度校核时，需要关注此处应力状态

利用几何方程，我们可得位移分量

$$u_\rho = -\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\rho - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi + I\cos\varphi + K\sin\varphi$$
$$u_\varphi = \frac{2F}{\pi E}\sin\varphi\ln\rho + \frac{(1+\nu)F}{\pi E}\sin\varphi - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\cos\varphi + H\rho - I\sin\varphi + K\cos\varphi$$

考虑对称性可得

$$H = K = 0$$

所以简化成

$$
u_\rho = -\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\rho - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi + I\cos\varphi
$$
$$
u_\varphi = \frac{2F}{\pi E}\sin\varphi\ln\rho + \frac{(1+\nu)F}{\pi E}\sin\varphi - \frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\cos\varphi - I\sin\varphi
$$

I 表示铅垂方向的刚性位移，如果半平面不受铅锤方向的约束，则常数 I 不能确定。

当 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，则对于不同的 ρ 将给出半平面表面任一点 M 的向下铅锤位移，即所谓沉陷。

M 点沉陷(位移 u_φ 沿 φ 正方向为正)

$$
-(u_\varphi)^M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2F}{\pi E}\ln\rho - \frac{(1+\nu)F}{\pi E} + I
$$

由于 I 无法表示，所以引入相对沉陷

$$
\eta = \frac{2F}{\pi E}\ln\frac{s}{\rho}
$$

s 为任取基点到力作用点距离

考虑连续分布载荷

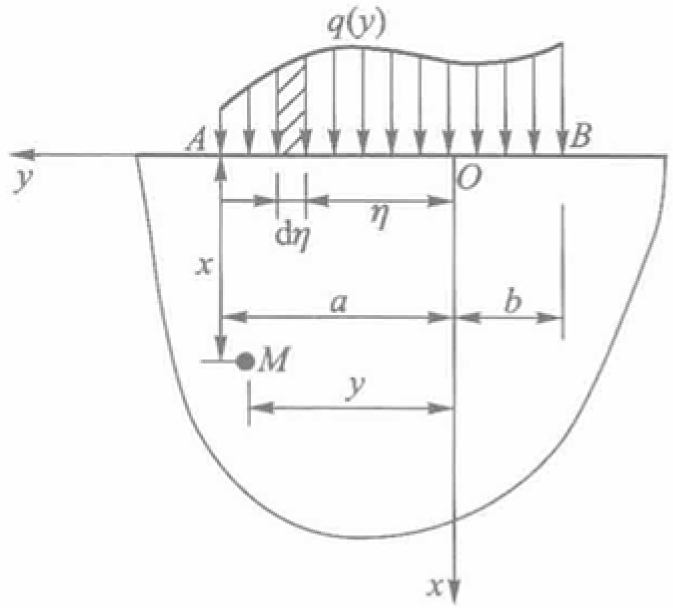


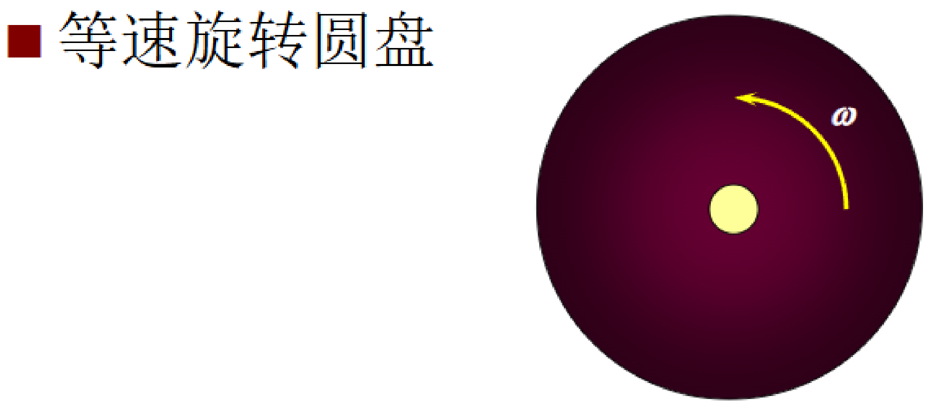
图 7-19

取 y 轴上距原点 η 处微分线段 $d\eta$，其与给定基点 M 铅直距离和水平距离分别为 x 和 $y-\eta$ 所以可以得出其在 M 点引起的应力

$$
d\sigma_x = -\frac{2qd\eta}{\pi}\frac{x^3}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}
$$
$$
d\sigma_y = -\frac{2qd\eta}{\pi}\frac{x(y-\eta)^2}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}
$$
$$
\tau_{xy} = -\frac{2qd\eta}{\pi}\frac{x^2(y-\eta)}{[x^2+(y-\eta)^2]}
$$

积分可得整个分布载荷所产生的应力

旋转圆盘的应力分析



对于一个等速旋转圆盘，这显然是一个轴对称问题，同时，我们需要考虑离心力的作用，所以显然这是一个不能忽视体力的问题，因此我们给出平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\phi}{\rho}+m\omega^2\rho=0$$

我们需要考虑离心力的作用，所以显然这是一个不能忽视体力的问题，我们给出应力分量表达式：

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du_\rho}{d\rho}+\nu\frac{u_\rho}{\rho}\right)\\
\sigma_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{du_\rho}{d\rho}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)\\
\tau_{\rho\phi} &= \tau_{\phi\rho}=0
\end{aligned}$$

我们还有另一种办法：对于平衡方程，左右两边同乘 ρ 得

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sigma_\rho)+\sigma_\rho-\sigma_\phi+m\omega^2\rho^2=0$$

引用应力函数 U 取

$$U=\rho\sigma_\rho \qquad \sigma_\phi=\frac{dU}{d\rho}+m\omega^2\rho^2$$