弹性波

弹性力学

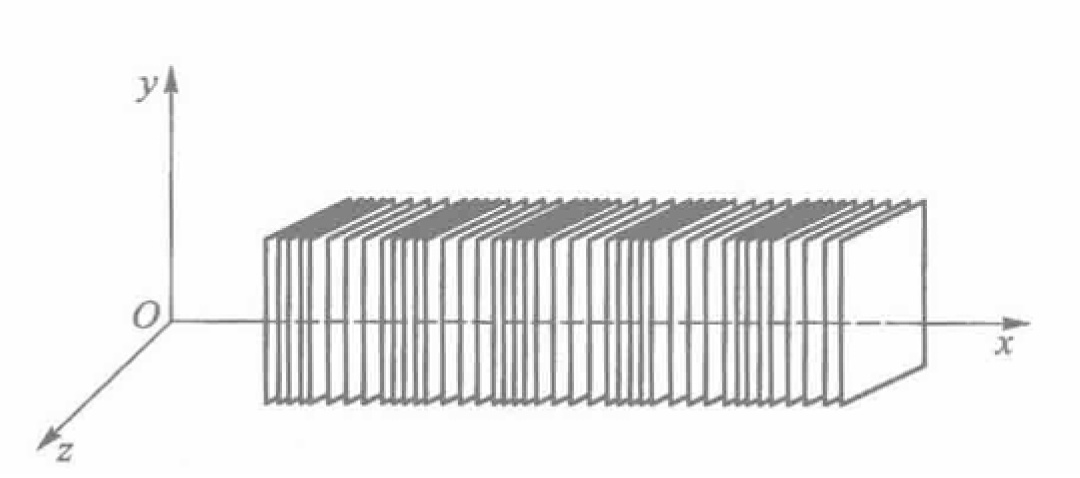
在考虑动力问题时， 需要考虑弹性体由于具有加速度而应当施加的惯性力，根据达朗贝尔原理， 我们在原有的平衡微分方程添加惯性项，由于这个惯性项无法建立其与应力关系，所以我们一般采用位移方式求解。

运动微分方程

$$
\begin{aligned}
(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2u=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\
(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2v=\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\\
(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2w=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}
$$

平面波



考虑纵波，纵波满足如下条件

$$
u=(x,t)\quad v=0\quad w=0
$$

运动方程简化为

$$
\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c_1^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\quad c_1^2=\frac{\lambda+2G}{\rho}
$$

达朗贝尔解：

$$
u=f_1(x-c_1t)+f_2(x+c_1t)
$$

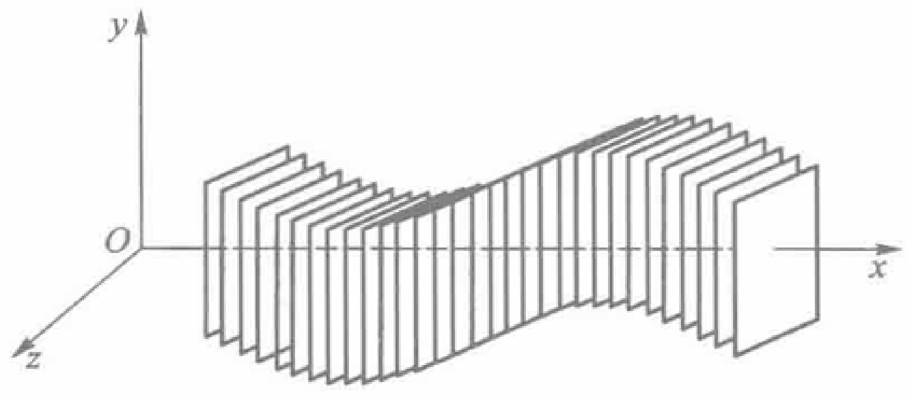


图 12-3

考虑横波，横波满足如下条件：

$$u = 0 \quad v = v(x,t) \quad w = 0$$

运动微分方程满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}$$

横波解

$$v = \varphi_1(x - c_2 t) + \varphi_2(x + c_2 t)$$

横波波速总是小于纵波波速，二者满足

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{G}{\lambda + 2G}} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

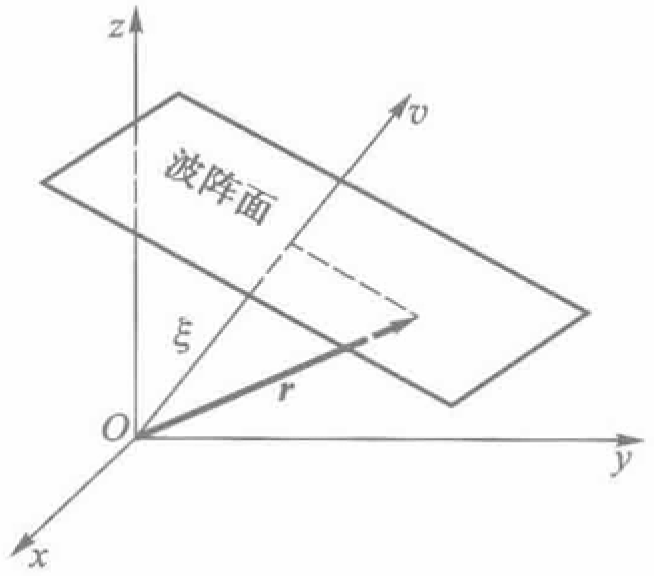


图 12-4

考虑平面经过一点 $r=(x,y,z)$，其单位法向量 $v=(l,m,n)$ ，波阵面位置满足

$$\xi = r\cdot v - ct = lx+my+nz-ct$$

波阵面上各点位移都相同，可表示为

$$u=f(\xi)\quad v=g(\xi)\quad w=h(\xi)$$

f,g,h 由初始条件确定。

带入运动微分方程，考虑 $l^2+m^2+n^2=1$ 有

$$\begin{aligned}(\lambda+G)(l^2f''+lmg''+lnh'')=(\rho c^2-G)f''\\(\lambda+G)(lmf''+m^2g''+mnh'')=(\rho c^2-G)g''\\(\lambda+G)(lnf''+mng''+n^2h'')=(\rho c^2-G)h''\end{aligned}$$

方程有解则

$$\begin{vmatrix} l^2-\frac{\rho c^2-G}{\lambda+G} & lm & ln \\ lm & m^2-\frac{\rho c^2-G}{\lambda+G} & mn \\ ln & mn & n^2-\frac{\rho c^2-G}{\lambda+G}\end{vmatrix}=0$$

化简得到

$$(G-\rho c^2)^2(\lambda+2G-\rho c^2)=0$$

得到

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}\quad c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

这说明，如果波为平面波，其一般为横波、纵波或二者的线性叠加结果。

膨胀波与畸变波

如果无限弹性介质的运动为无旋的，则 $\omega = \nabla \times U = 0$，则取位移场 U 和势函数 Φ 满足 $U = \nabla\Phi$，所以运动方程为

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

或写作

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 U \tag{1}$$

这种位移称为无旋位移，其在无限弹性介质中以速度 $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}$ 传播，称为无旋波。

同样的，如果运动是等容的，则 $\theta = \nabla \cdot U = 0$，则位移场满足

$$G\nabla^2 U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_2^2 \nabla^2 U \tag{2}$$

这种位移称为等容位移，其在无限弹性介质中以速度 $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 传播，称为等容波。

当无限介质的运动既非无旋又非等容，根据 Helmholtz 定理总可以取为等容位移和无旋位移两者的叠加。

对于体应变，其传播规律满足

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

对于转动矢量，其传播规律满足

$$G\nabla^2 \omega = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

上述我们想讨论的只是这个结论：在无限弹性介质中，有且只有只有两种类型的弹性波，他们具有相同的波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi$$

对于体应变或者无旋位移， $c=c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}$，称为膨胀波，纵波是无旋的膨胀波；对于等容位移或者转动矢量，$c=c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ，称为畸变波，横波是等容的畸变波。

球面波

对于球对称的波动方程，满足

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2u_r}{r^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

也可以写做

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=0$$

因为运动是无旋的，引入标量势 Φ 满足 $u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)\right]-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)=0$$

积分可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=F(t)$$

这是一个线性非齐次偏微分方程，其通解为齐次的通解和任一非齐次的特解之和。但是选择的特解总可以仅是 t 的函数(比如说两次积分)，所以不妨取 $F(t)=0$，所以方程简化为

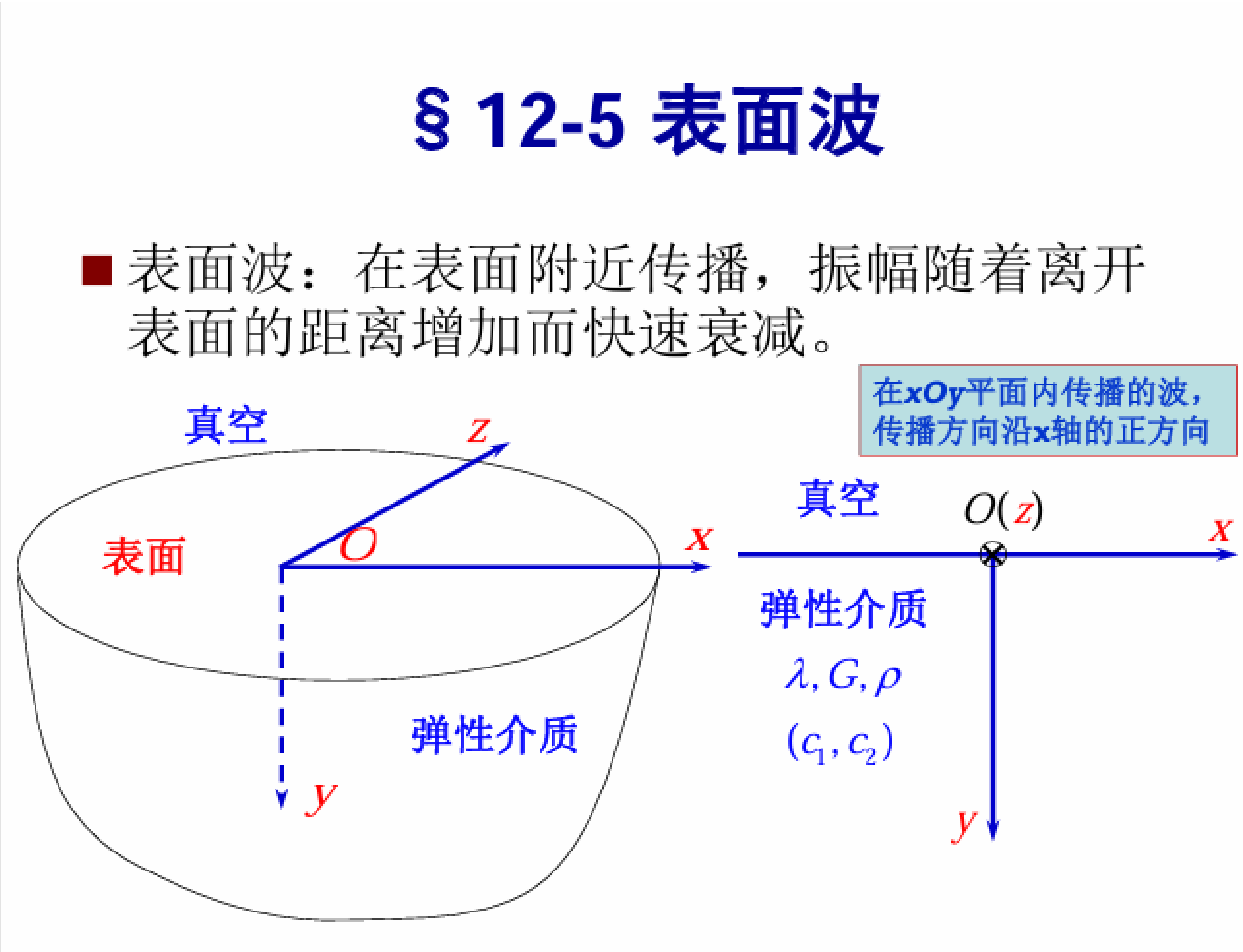
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Phi)=c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)$$

这个波动方程的解为

$$r\Phi=f_1(r-c_1t)+f_2(r+c_1t)$$

$f_1 f_2$ 为任意函数，由初始条件决定，前者表示向外传播，适用于无限弹性介质内某点由一个对称扰动的情况，后者表示向内（球心）传播，适用于实心或空心的弹性圆球体受球对称动压力作用。

表面波



如果介质是具有自由表面的弹性半无限体，则在表面附近较薄的一层内，还能产生其他类型的波，称为表层波，这种波随着深度的增大其作用迅速减弱。

我们采用拉梅分解将位移场分解为标量势和矢量势即 $U = \nabla\Phi + \nabla\times\Psi$，限定如下约束条件(可由 (1)(2) 式得出)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad \nabla^2\Psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t^2} \quad \nabla\cdot\Psi = 0$$

因为我们只考虑考虑 xOy 平面内传播的波，运动微分方程可以简化为

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x}$$
$$w = \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial y}$$

实际上，因为 u, v 与 Φ, Ψ_3 有关，称为平面内的波（in the plane），w 与 Ψ_1, Ψ_2 有关称为平面外的波（out of plane），可以分离求解，所以取如下关系：

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}, w=0$$

根据物理中所学波的知识，取 x 方向传播的简谐波

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, t)&=f(y) e^{\mathrm{i}(k x-\omega t)}=f(y) e^{\mathrm{i} k(x-c t)} \\
\Psi(x, y, t)&=g(y) e^{\mathrm{i}(k x-\omega t)}=g(y) e^{\mathrm{i} k(x-c t)}
\end{aligned}$$

其中 k 为 波数(wave number)，描述每 2π 长度波长的数量（波动的次数），c 为波速

带入约束条件可得

$$\begin{aligned}
& f^{\prime \prime}+k^2\left[\left(\frac{c}{c_1}\right)^2-1\right] f=0 \\
& g^{\prime \prime}+k^2\left[\left(\frac{c}{c_2}\right)^2-1\right] g=0
\end{aligned}$$

将方程改写为（此时需要 $\alpha^2>0 \quad \beta^2>0$ 不然不会产生衰减项）

$$\begin{aligned}
& f^{\prime \prime}-k^2 \alpha^2 f=0 \quad \alpha^2=1-\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \\
& g^{\prime \prime}-k^2 \beta^2 g=0 \quad \beta^2=1-\left(\frac{c}{c_2}\right)^2
\end{aligned}$$

对应解（考虑衰减项）

$$\begin{aligned}
& f(y)=A e^{-k \alpha y} \\
& g(y)=C e^{-k \beta y}
\end{aligned}$$

这里给出应力函数和波函数的关系

$$\begin{aligned}
& \sigma_y=\frac{\lambda}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}+2 G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) \\
& \tau_{y x}=\frac{G}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}+2 G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

考虑自由边界条件

$$y=0: \sigma_y=0 \quad \tau_{y x}=0$$

可得

$$\begin{aligned}
& k^2\left[(\lambda+2 G) \alpha^2-\lambda\right] A-\mathrm{i}\, 2 G k^2 \beta C=0 \\
& \mathrm{i}\, 2 k^2 \alpha A+k^2\left(1+\beta^2\right) C=0
\end{aligned}$$

同样的为了满足方程有解可得特征方程：

$$[(\lambda+2G)\alpha^2-\lambda](1+\beta^2)-4G\alpha\beta=0$$

考虑 λ 和 G 表达式可进一步化简

$$(2-\xi^2)=4\left[(1-b^2\xi^2)(1-\xi^2)\right]^{\frac{1}{2}}\quad\left(\xi=\frac{c}{c_2},b=\frac{c_2}{c_1}\right)$$
$$\Longrightarrow \xi^6-8\xi^4+(24-16b^2)\xi^2-16(1-b^2)=0$$
$$\xrightarrow{b^2=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}\xi^6-8\xi^4+8\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\right)\xi^2-\frac{8}{1-\nu}=0$$

在 $[0,1]$ 之间一定有一个根

表面位移

$$u_0=kA\left(\mathrm{i}+\beta\frac{C}{A}\right)e^{[\mathrm{i}\,k(x-ct)]}$$
$$w_0=kA\left(-\alpha+\mathrm{i}\,\frac{C}{A}\right)e^{[\mathrm{i}\,k(x-ct)]}$$

满足关系

$$\frac{u_0^2}{a_0^2}+\frac{w_0^2}{b_0^2}=1$$

斯通利波与勒夫波

考虑两个固体半空间界面叠加，其界面上传播的波满足如下边界条件

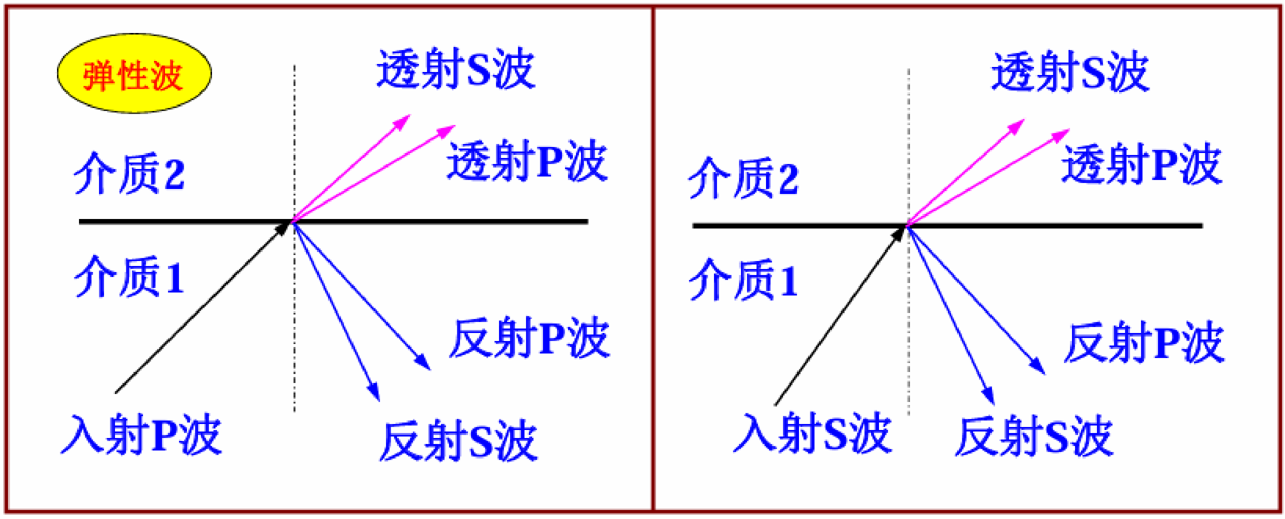
$$y=0:u=u',v=v';\sigma_y=\sigma_y',\tau_{xy}=\tau_{xy}'$$

特征方程满足

$$\begin{vmatrix}1&-\beta&-1&-\beta'\\\alpha&-1&\alpha'&1\\p&-2G\beta&-p'&-2G'\beta'\\2G\alpha&-p&2G'\alpha'&p'\end{vmatrix}=0$$

$$\xi=\frac{c}{c_2}\quad\xi'=\frac{c}{c_2'}\quad p=G\left(2-\xi^2\right)$$

平面波在边界上的反射和折射

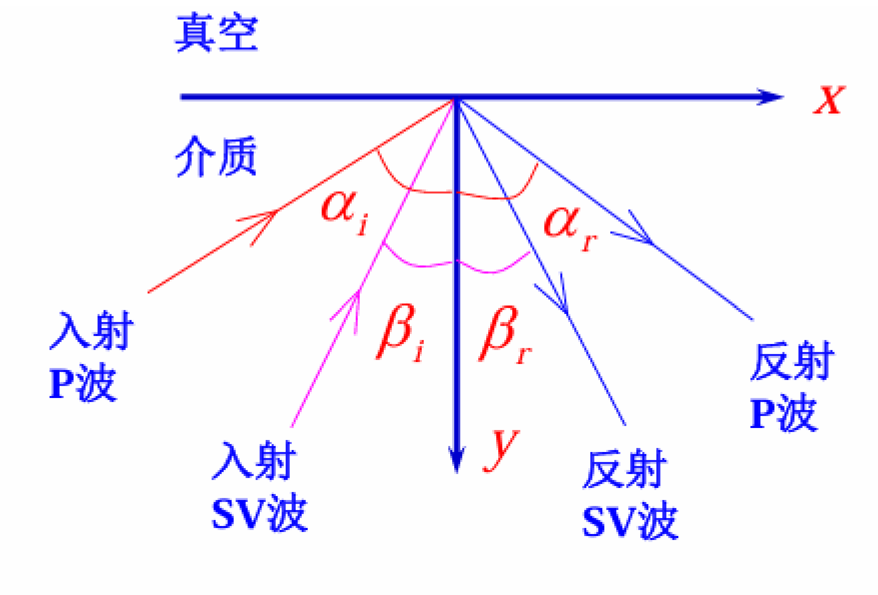


- 入射 P波（纵波） 会反射为 P波 和 SV波，以及折射 P波和 SV波。
- 入射 SV波 （横波） 会反射为 P波 和 SV波，以及折射 P波和 SV波。

波函数的表示形式：

$$\Phi(x,y,t)=Ce^{\mathrm{i}\,k(lx-ny-ct)}$$

其中 l,n 为方向矢径，c 为波速



对于 P 波，其入射波和反射波为

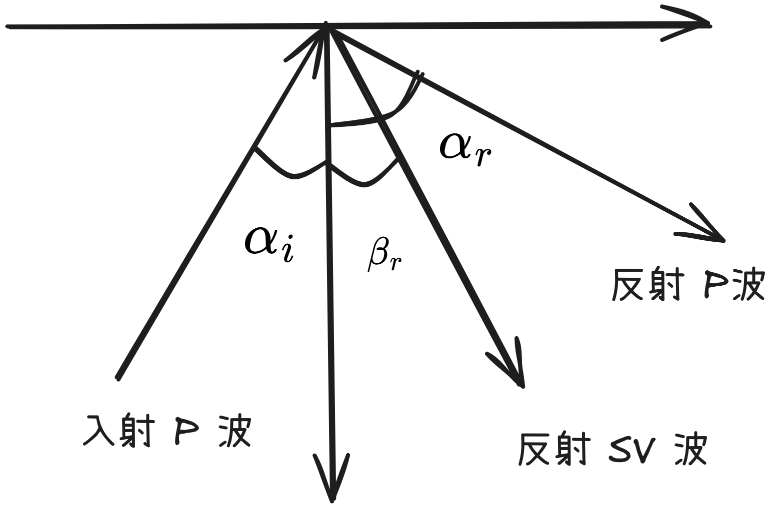
$$\Phi=\Phi_i+\Phi_r=A_{1i}e^{\mathrm{i}\,k_{1i}(l_{1i}x-n_{1i}y-c_1t)}+A_{1r}e^{\mathrm{i}\,k_{1r}(l_{1r}x-n_{1r}y-c_1t)}$$

对于 SV 波，其入射波和反射波为

$$\Psi=\Psi_i+\Psi_r=A_{2i}e^{\mathrm{i}\,k_{2i}(l_{2i}x-n_{2i}y-c_2t)}+A_{2r}e^{\mathrm{i}\,k_{2r}(l_{2r}x-n_{2r}y-c_2t)}$$

位置矢径满足

$$
\begin{array}{ll}
l_{1i}=\sin\alpha_i & n_{1i}=\cos\alpha_i \\
l_{1r}=\sin\alpha_r & n_{1r}=\cos\alpha_r \\
l_{2i}=\sin\beta_i & n_{2i}=\cos\beta_i \\
l_{2r}=\sin\beta_r & n_{2r}=\cos\beta_r
\end{array}
$$



如果仅考虑 P波入射，由于其反射 P 波和 SV 波，则

$$
\begin{aligned}
&\Phi=A_{1i}e^{\mathrm{i}\,k_{1i}(l_{1i}x-n_{1i}y-c_1t)}+A_{1r}e^{\mathrm{i}\,k_{1r}(l_{1r}x-n_{1r}y-c_1t)}\\
&\Psi=A_{2r}e^{\mathrm{i}\,k_{2r}(l_{2r}x-n_{2r}y-c_2t)}
\end{aligned}
$$

利用 (3) 式，给出应力表达式：

$$
\begin{aligned}
\sigma_y=&-\left(\lambda+2Gn_{1i}^2\right)A_{1i}k_{1i}^2e^{[\mathrm{i}\,k_{1i}(l_{1i}x-n_{1i}y-c_1t)]}\\
&-\left(\lambda+2Gn_{1r}^2\right)A_{1r}k_{1r}^2e^{[\mathrm{i}\,k_{1r}(l_{1r}x+n_{1r}y-c_1t)]}\\
&-2GA_{2r}k_{2r}^2l_{2r}n_{2r}e^{[\mathrm{i}\,k_{2r}(l_{2r}x+n_{2r}y-c_2t)]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{yx}=&\,2GA_{1i}k_{1i}^2l_{1i}n_{1i}e^{[\mathrm{i}\,k_{1i}(l_{1i}x-n_{1i}y-c_1t)]}\\
&-2GA_{1r}k_{1r}^2l_{1r}n_{1r}e^{[\mathrm{i}\,k_{1r}(l_{1r}x+n_{1r}y-c_1t)]}\\
&-GA_{2r}k_{2r}^2(l_{2r}^2-n_{2r}^2)e^{[\mathrm{i}\,k_{2r}(l_{2r}x+n_{2r}y-c_2t)]}.
\end{aligned}
$$

对于自由表面，边界条件： $y=0\sigma_y=\tau_{yx}=0$，为了满足边界条件，我们需要使得时间项 t 前的系数相同和空间项系数相同则可得

$$
k_{1i}=k_{1r}=k_1,k_2\triangleq k_{2r}
$$

$$
\alpha_i=\alpha_r
$$

$$
\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{k_2}{k_1}=\frac{c_1}{c_2}=\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^{\frac{1}{2}}=D
$$

这就是光学中 Snell 折射定律

反射系数满足

$$\frac{A_{1r}}{A_{1i}} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta - D^2 \cos^2 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + D^2 \cos^2 2\beta}$$

$$\frac{A_{2r}}{A_{1i}} = -\frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta + D^2 \cos^2 2\beta}$$