平面问题的直角坐标解答

弹性力学

平面应变问题

考察一个母线与 z 轴平行且很长的柱形物体，其所承受外力与 z 轴垂直，且分布规律不随坐标 z 而改变。在上述条件下，可认为柱体时无限长的，从中任取一个横截面，则柱形物体的形状和受载情况将对此截面是对称的。因此，在柱形物体变形时，截面上各点只能在自身平面内移动，沿 z 方向上位移为零(但是 σ_z 不为零)，也就是

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

所以应变分量有如下特点

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x, y) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = f_2(x, y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f_3(x, y) \end{aligned}$$

其余应变分量均为0。

所以基本方程可以改写成如下形式

平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \end{aligned}$$

物理方程（因为 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ 所以在利用本构方程是要考虑 σ_z，所以这边取的是等效弹性模量和等效泊松比 E_1, ν_1）

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - v_1\sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - v_1\sigma_x), \gamma_{xy} = \frac{2(1+v_1)}{E_1}\tau_{xy}$$

边界条件

$$u = \overline{u}, v = \overline{v}$$

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \overline{f}_x, \tau_{xy} l + \sigma_y m = \overline{f}_y$$

应力协调条件

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

如果体力为常量，则

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

也称莱维方程

平面应力问题

设有一块薄板（厚度为 h），其所受外力平行于板平面（ Oxy 平面），并沿厚度方向 （Oz 方向）不变。

给出自由表面条件

$$(\sigma_z)_{z=\pm h/2}=0,(\tau_{yz})_{z=\pm h/2}=0,(\tau_{xz})_{z=\pm h/2}=0$$

由于板很薄，所以在板的内部应力 $\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz}$显然是很小的，其他应力分量虽沿厚度有变化，但是变化不明显的。所以，可以认为板的内部有

$$\begin{aligned}
&\sigma_z=0,\tau_{yz}=0,\tau_{xz}=0\\
&\sigma_x=f_1(x,y),\sigma_y=f_2(x,y),\tau_{xy}=f_3(x,y)
\end{aligned}$$

平衡方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_x=0
\end{aligned}$$

几何方程：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

应变协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y}$$

物理方程

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}
$$

同样可以得出莱维方程

事实上，平面应力问题和平面应变问题在数学上可以视作同一类问题。

应力解法

用应力作为基本变量求解弹性力学的平面问题，在体力为常量时，归结为在给定的边界条件，求解由平衡微分方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0
\end{aligned}
$$

和莱维方程

$$
\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0
$$

所组成的偏微分方程。

利用一些微分理论，我们可以得到对于体力为常数的平衡微分方程通解：(见课本P96)

$$
\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - F_x x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - F_y y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}
$$

（还有另一种形式）

$$
\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - F_y x - F_x y
$$

事实上，对于体力为常量的平面问题，最后都归结为在给定的边界条件下求解双调和方程（也称相容方程）

$$
\nabla^2\nabla^2 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0
$$

其中 $U(x,y)$ 的解称为艾里应力函数

用多项式解平面问题

用多项式逆解法来解答一些具有矩形边界且不计体力的平面问题，基本思想是：对不及体力的矩形梁，在给定的坐标系下分别给出满足双调和方程的代数多项式应力函数，由此求得应力分

量，然后考察这些这些应力于边界上什么样的面力，从而得知该应力函数能解决什么问题。

- 一次多项式

$$U = a_0 + a_1 x + b_1 y$$

  这对应无应力状态。一次项基本上不影响应力结果，所以在我们求解应力函数的过程中，可以抛弃一次项。

- 二次多项式

$$U = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$$

  这代表均匀应力状态，如果 $b_2 = 0$，则代表双向均匀拉伸，如 $a_2 = c_2 = 0$ 则代表纯剪。

- 三次多项式

$$U = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 x y^2 + d_3 y^3$$

  取 $U = d_3 y^3$ 对应矩形梁纯弯曲情况。如果已知弯矩 M 则可得

$$d_3 = \frac{2M}{h^3}$$

  当艾里函数 U 为四次或四次以上的多项式，其中的系数必须满足一定条件，才能满足双调和方程。~~但这些应力函数不能解决什么重要的实际问题（徐芝纶老师原话）~~

- 四次多项式

$$U = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 + e_4 y^4$$

  为满足双调和方程则有

$$3a_4 + c_4 + 3e_4 = 0$$

  所以可以改写成

$$U = a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 x y^3 - (a_4 + \frac{c_4}{3}) y^4$$

  取 $U = d_4 x y^3$ 对应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 6 d_4 x y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -3 d_4 y^2$$

1. 在 $y = \pm\frac{h}{2}$ 的边界上，有均匀分布的切应力 $\tau_{xy} = -\frac{3}{4} d_4 h^2$
2. 在 $x = 0$ 的边界上，有按抛物线分布的切应力 $\tau_{xy} = 3 d_4 y^2$
3. 在 $x = L$ 的边界上，有按抛物线分布的切应力 $\tau_{xy} = -3 d_4 y^2$和静力等效于弯矩的正应力 $\sigma_x = 6 d_4 L y$

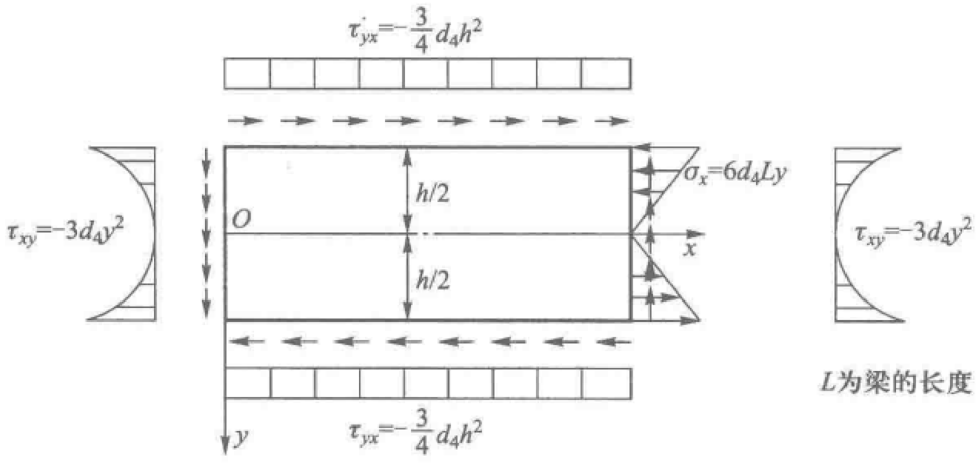

图 6-5

- 五次多项式

$$U = a_5x^5 + b_5x^4y + c_5x^3y^2 + d_5x^2y^3 + e_5xy^4 + f_5y^5$$

为满足双调和方程有

$$e_5 = -(5a_5c_5), \quad f_5 = -\frac{1}{5}(b_5 + d_5)$$

当 $U = d_5x^2y^3 + \frac{1}{5}d_5y^5$ 对应应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 6d_5x^2y - 4d_5y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2d_5y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -6d_5xy^2$$

下图给出矩形梁的应力分布:

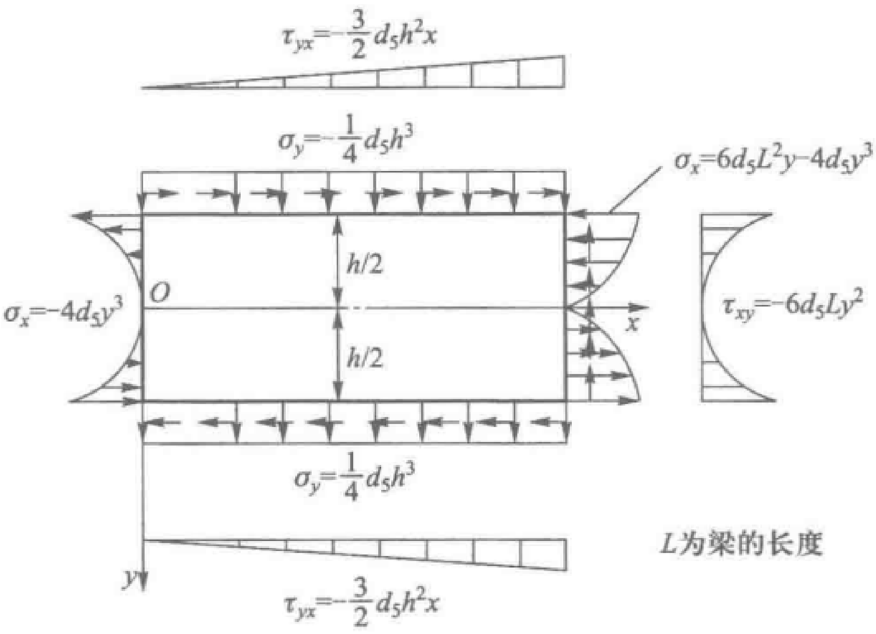

图 6-6

> 下面的东西是一些例子了，题目不重要，但是方法还是蛮多样的，但是我不会给出推导 ~~我懒~~ ~~会打到死的~~

悬臂梁一段受集中力作用

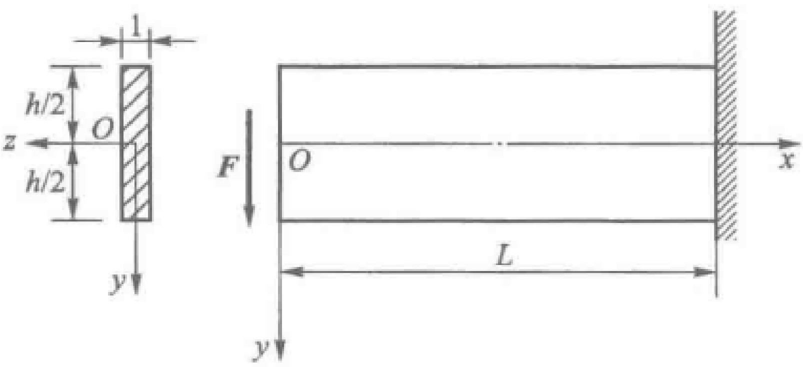

图 6-7

比较四次多项式的特殊情况，我们发现在矩形梁两端面即 $x=0,L$ 处，外力分布情况大体相近，但是上下边界上多了一个 $-\frac{3}{4}d_4h^2$ 的切应力(悬臂梁边界自由)。所以我们在此基础上添加一个纯剪对应的应力函数

$$U = d_4xy^3 + b_2xy$$

带入边界条件可以解出

$$\sigma_x = -\frac{12F}{h^3}xy$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -\frac{3F}{2h} + \frac{6F}{h^3}y^2$$

根据本构方程，我们可以得出应变分量

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F}{EI}xy$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu F}{EI}xy$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F}{GI}(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2})$$

根据微分理论和约束条件可以解得位移分量

$$u = -\frac{Fx^2y}{2EI} - \frac{\nu Fy^3}{6EI} + \frac{Fy^3}{6GI} - (\frac{Fh^2}{8GI} - \frac{FL^2}{2EI})y$$
$$v = \frac{\nu Fxy^2}{2EI} + \frac{Fx^3}{6EI} - \frac{FL^2x}{2EI} + \frac{FL^3}{3EI}$$

对于悬臂梁而言，如果左端作用的是一个力矩的话，并不存在相对应得约束条件，考虑材料力学中的假设，我们假定右端截面中点不移动，该点水平线段不转动。此时有可能变成了一个超静定梁（是否有外加约束），我们需要通过应力分量求出位移分量，利用约束条件求解。（课后题第10题。）

> 一般而言，边界条件是能解决求解问题的，但如果是超静定梁，就要考虑约束条件啦

悬臂梁受均匀分布载荷作用

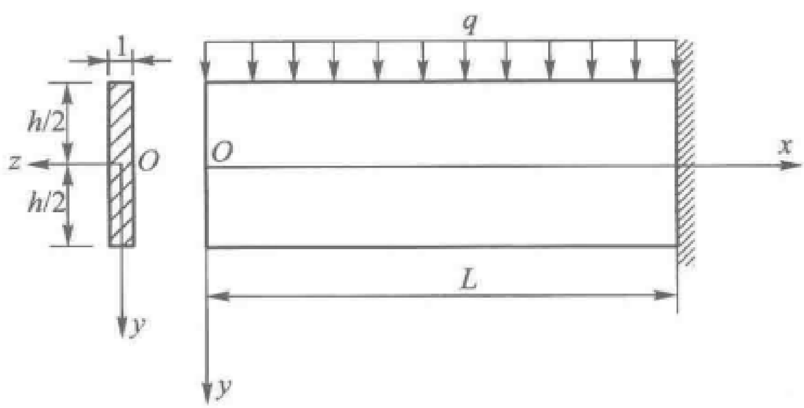

图 6-9

这边给出一种方法：弯曲应力 σ_x 主要是由弯矩产生的，切应力 τ_{xy} 主要是由剪力 F_s 产生的，而挤压应力 σ_y 主要是由载荷 q 产生的。由于 q 为常数，我们假定 σ_y 仅是 y 的函数，即

$$\sigma_y = f(y)$$

于是有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(y)$$

积分得

$$U = \frac{x^2}{2} f(y) + x f_1(y) + f_2(y)$$

有双调和方程得

$$\frac{1}{2}\frac{d^4 f(y)}{dy^4}x^2 + \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4}x + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0$$

为了满足有无数多根，所以必须有

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d_1^4 f_1(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0$$

结合边界条件，我们给出解答

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{6q}{h^3}x^2 y + \frac{4q}{h^3}y^3 - \frac{3q}{5h}y \\
\sigma_y &= -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2} \\
\tau_{xy} &= \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x
\end{aligned}$$

事实上，如果我们能够从边界条件判断 σ_y 只与 x 的简单表达式有关时，我们可以设 $\sigma_y = g(x)f(y)$ $g(x)$ 有边界条件确定。比如说本例中将均布载荷改成 $q\cos x$ 时，我们可以设 $\sigma_y = \cos x f(y)$

简支梁受均匀分布载荷作用

> **Warning**
>
> 这道题整的时候没注意看，解答不完整建议直接看书，但是我觉得按书上的解法没什么意思，他的核心就是从材料力学中找到解的形式（未定参数），然后根据双调和方程进行修正，最后根据边界条件确定系数

上面两个问题给出了两种方法，一种是根据多项式的特殊形式修正后求解艾里应力函数，另一种方式是根据特殊情况求解艾里应力函数表达式。我们还可以根据材料力学的结果进行修正。

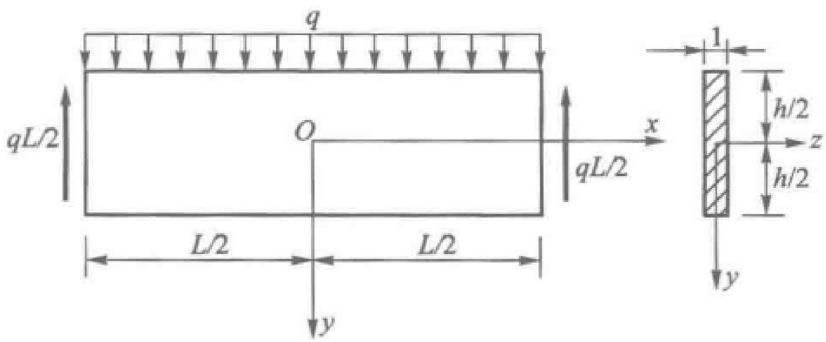

图 6-10

材料力学的解答

$$
\sigma_x = \frac{q}{2I}(\frac{L^2}{4} - x^2)y
$$
$$
\tau_{xy} = -\frac{qx}{2I}(\frac{h^2}{4} - y^2)
$$

由于材料力学中假定 σ_y 为零，但在梁上表面由均布载荷的作用 $\sigma_y = -q \neq 0$ 这显然不满足弹性力学的解。我们根据材料力学结果进行修正

$$
\sigma_x = Ay + bx^2y
$$
$$
\tau_{xy} = Cx + Dxy^2
$$

我们可以得出结果

$$
\sigma_x = Ay - \frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3
$$
$$
\sigma_y = -\frac{6q}{h^3}(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4}y + \frac{h^3}{12})
$$
$$
\tau_{xy} = -\frac{6q}{h^3}(\frac{h^2}{4} - y^2)x
$$

考察边界条件

$$
(\sigma_x)_{x=\pm\frac{l}{2}} = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=\pm\frac{l}{2}} dy = \mp\frac{qL}{2}
$$

上面结果无法满足第一个条件，我们只好利用局部性原理，将放松边界条件

$$
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=\frac{L}{2}} dy = 0
$$
$$
\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y(\sigma_x)_{x=\frac{L}{2}} dy = 0
$$

因此我们可以得出解答

$$\sigma_x = \frac{6q}{h^3}(\frac{L^2}{4} - x^2)y + q\frac{y}{h}(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5})$$
$$\sigma_y = -\frac{q}{2}(1 + \frac{y}{h})(1 - \frac{2y}{h})^2$$
$$\tau_{xy} = -\frac{6q}{h^3}x(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

三角形水坝

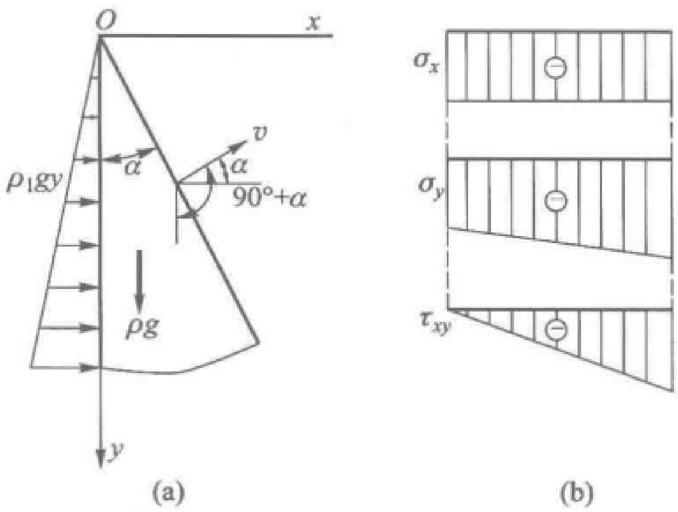

图 6-12

这个问题可以作为平面应变问题。对坝体内的任何一点，每个应力分量都应该是由两部分组成：第一部分由重力产生，与 ρg 成正比；第二部分由液体压力产生，与 $\rho_1 g$ 成正比；另外每一部分与 α, x, y 有关。总之，各应力分量包括下列形式的两部分：

$$\rho g N_1(\alpha, x, y) \quad \rho_1 g N_2(\alpha, x, y)$$

N_1 和 N_2 为由 α, x, y 按某种形式组成的数量。假定有多项式解，我们用量纲分析法来去确定 N_1 和 N_2 的幂次

应力的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$，ρg 和 $\rho_1 g$ 的量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$，α 为一个量纲一的常数，而 x 和 y 的量纲为 L，所以 N_1, N_2 与 x, y 成一次幂关系。由应力与应力函数（它对 x 和 y 的二次导数给出应力分量）的之间的关系可知

$$U = \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}x^2y + \frac{C}{2}xy^2 + \frac{D}{6}y^3$$

带入边界条件求得应力分量

$$\sigma_x = -\rho_1 g y$$
$$\sigma_y = (\rho g \cot\alpha - 2\rho_1 g \cot^3\alpha)x + (\rho_1 g \cot^2\alpha - \rho g)y$$
$$\tau_{xy} = -\rho_1 g x \cot^2\alpha$$

这边有三点需要说明：

1. 沿着坝轴，坝身往往具有不同的截面，而且坝身也不是无限长的。因此，严格来说这不是一个平面问题。
2. 我们假定下端无限长，可以自由地变形。但是，实际上坝身是有限高的，底部与地基相连，坝身底部的形变受到地基约束，所以在底部的解答是不精确的。
3. 坝顶具有一定宽度，而不会是一个尖顶。顶部还有其他载荷，所以坝顶的解答也不适用。

关于重力坝较精确的应力分析，目前大多采用有限单元法。

矩形梁弯曲的三角级数解法

在前面所讲的几个问题中，由于问题具有代数多项式形式的解，所以，比较容易地通过半逆解法凑取所要求的应力函数，从而求得应力分量和位移分量。显然，这种方法是有局限性的，它必须要求物体的主要边界上的荷载是连续的，而且能表示成代数多项式的形式。如果荷载并不具有这个特点，甚至是不连续的，则可采用三角级数求解。

回忆分离变量法，我们可以将应力函数写出如下形式

$$U = X(x)Y(y)$$

带入双调和方程中有

$$X^{(4)}Y + 2X^{(2)}Y^{(2)} + XY^{(4)} = 0$$

方程两边同除以 XY 有

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2\frac{X^{(2)}}{X}\frac{Y^{(2)}}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = 0$$

对 y 求一阶偏导得

$$2\frac{X^{(2)}}{X}\left[\frac{Y^{(2)}}{Y}\right]' + \left[\frac{Y^{(4)}}{Y}\right]' = 0$$

要使这个式子成立，则有

$$\frac{X^{(2)}(x)}{X} = -\frac{\left[\frac{Y^{(4)}}{Y}\right]'}{2\left[\frac{Y^{(2)}}{Y}\right]'} = -\lambda^2$$

所以我们有

$$X(x) = K_1 \cos\lambda x + K_2 \sin\lambda x$$

我们可以得到关系

$$X^{(4)}(x) = \lambda^4 X(x)$$

利用这个关系可以得到 Y 满足的方程

$$Y^{(4)}-2\lambda^2Y^{(2)}+\lambda^4Y=0$$

这个方程的通解为

$$Y(y)=A\cosh\lambda y+B\sinh\lambda y+Cy\cosh\lambda y+Dy\sinh\lambda y$$

所以

$$U=(K_1\cos\lambda x+K_2\sin\lambda x)(A\cosh\lambda y+B\sinh\lambda y+Cy\cosh\lambda y+Dy\sinh\lambda y)$$

上述的 K_1,K_2,A,B,C,D 与 λ 为任意常数，由于双调和方程是线性的，所以我们可以适当选择常数尽可能满足边界条件。

> 碎碎念：这种方法的计算量比数理方法还大，数理方法普通的傅里叶级数只要算两项未知数，这个要算四个未知数，而且方程极为复杂，超级难消元。做作业的时候根！本！算！不！了，直接拿matlab搓了一个求解器。感觉边界条件给的不好手算根本没有必要（

傅里叶变换求解平面问题

我们给出函数 $f(x)$ 的傅里叶变换和傅里叶反变换

$$\mathscr{F}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}fx$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

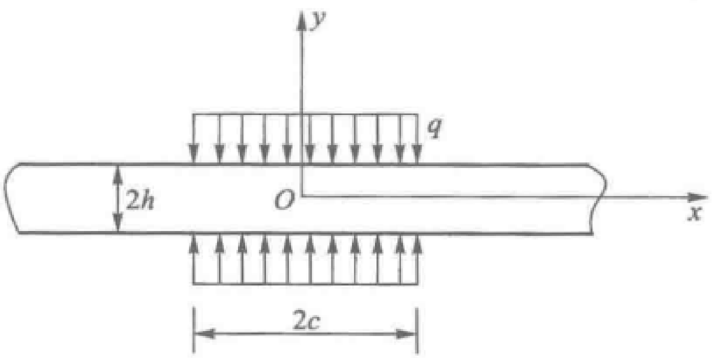

图 6-17

设一根无限长的板条，在其上下两层宽度为 $2c$ 的一段内受均布压力 q 作用，求板内应力。

我们用傅里叶积分求解，由对称性，我们取应力函数

$$U=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\cosh\lambda y+D\lambda y\sinh\lambda y]\cos\lambda xd\lambda$$

艾里应力函数物理意义

艾里应力函数的引入，使平面问题由三个位置函数变成一个函数，从而把问题归结为在给定的边界条件下求解双调和方程，