多自由度振动近似计算 III ; 连续系统振动 I

振动力学

子空间迭代法

对于一个具有 n 个自由度的多自由振动系统，假定我们需要求取 l 个振型，我们一般会取 m 个振型，进行如下迭代：

先选取任意基向量

$$\Psi_{n\times m} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$$

左乘矩阵 D

$$\Psi_1 = D\Psi_0$$

此时我们进行正交化处理：

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \Psi_1^T K \Psi_1 \\ \overline{M} &= \Psi_1^T M \Psi_1\end{aligned}$$

按照之前的方法，我们可以得到 m 个特征值和其对应的特征向量

$$\begin{aligned}&\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_m \\ &\overline{C}_1, \overline{C}_2 \dots, \overline{C}_m\end{aligned}$$

我们可以按照如下方法构造新的基向量

$$\Psi_1^* = [\Psi_1]\begin{bmatrix}\overline{C}_1 & \overline{C}_2 & \dots & \overline{C}_m\end{bmatrix}$$

因此我们将上述过程简化成如下

$$\begin{aligned}&1.\text{任意选取初始基向量}\Psi_0^* \\ &2.\text{进行如下迭代：} \\ &\quad a.\text{计算}\Psi_i = D\Psi_{i-1}^* \\ &\quad b.\text{计算系数矩阵}C = \begin{bmatrix}\overline{C}_1 & \overline{C}_2 & \dots & \overline{C}_m\end{bmatrix} \\ &\quad c.\text{计算}\Psi_i^* = \Psi_i C\end{aligned}$$

当前 l 个特征值(也就是我们所需要的)满足如下收敛条件

$$\left|\frac{\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}}{\lambda_i^{(k)}}\right| \le \varepsilon$$

时，我们判断已成功求出我们所想要的振型。一般而言 ε 取 10^{-3} 或 10^{-4} 即可满足条件，ε 越小，所需要的计算量级越大。

这种方法称作是子空间迭代法。

也就是说，我们在迭代过程中求得 Ψ_1 后，并不直接对它进行迭代，而是在迭代前先对 Ψ_1 进行处理。首先先进行一个正交化，这样可以使它的各列经迭代后分别趋于各个不同阶的主振型，而不是都趋于一阶主振型，其次，还要对它进行标准化或基准化，使得在数字运算中能保持适当的大小。

我们知道，子空间迭代法效率与 m 的选取有关，一般而言 m 越大，振型计算结果越精确，但其所需要的计算量也越大；而 m 越小，计算量越小，但收敛速度越慢。我们一般使 m 和 l 满足如下关系

$$m = \min\{2l, l+8\}$$

在计算软件，我们采用如下办法确定我们的 Ψ_0。我们尽可能确保全部信息，所以取 $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$，而对剩下的分量，我们取质量矩阵和刚度矩阵的对角元素并做除法得 $\frac{K_{ii}}{M_{ii}}$ 按照其大小从小到大排序(因为基频越低越是我们想要的元素)，按照大小及其对应的位置确定分量：比如说最小的 $\frac{K_{ii}}{M_{ii}}$ 对应着第 5 个元素（也就是 $i=5$ ），$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ~~(真的是很神奇的确定方法)~~

对于非正定或者是病态的刚度矩阵 K ，我们一般做一个移位处理，即

$$[K - \omega^2 M]X = [(K + \alpha M) - (\omega^2 + \alpha)M]X = 0$$

这样我们就得到一个等效的刚度矩阵 $\overline{K} = K + \alpha M$ 这个矩阵显然是对称且正定的。我们需要合理的选取 α ，如果 α 过大就会减小刚度矩阵的影响，也就是 M 吃掉了 K ；如果 α 过小，显然这有可能依旧是一个病态矩阵，我们一般根据对角元素来确定合适的 α。此外，合适的 α 有利于我们提高收敛速度。

弹性连续体振动

我们选取杆上 x 一小段截面 dx ，所以根据牛顿第二定律，我们有

$$\sum F = ma$$

对于这一截面，左右两侧的弹性力可由弹性力学的方式表示，即

$$F(x,t) = A(x)\sigma(x,t) = A(x)E(x)\varepsilon(x,t)$$

如果考虑外加的分布力 $f(x,t)$，我们可以得到合力表示式

$$\sum F = F(x+dx,t) - F(x,t) + f(x,y)$$

由于

$$ma = A(x)dx\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

所以我们可以得到方程

$$A(x)\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}] + f(x,t)$$

我们知道，一个振动系统方程在物理上可由力的方式描述，按照我们之前所学知识，上面三个表达式分别对应：惯性力、恢复力、激励。此时我们暂时不考虑阻尼影响，在连续体中，阻尼可分为两种：外阻和内阻（内阻一般与 $E(x)$ 的表达式有关 ）。

初始条件:

$$u(x,0) = \varphi(0), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \psi(0)$$

边界条件:

固定:

$$u(0,t) = 0$$

自由:

$$F(0,t) = 0$$

弹性支撑:

$$F(0,t) = k_1 u(0,t)$$

集中质量:

$$F(0,t) = -M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}_{x=0}$$