弹性薄板的弯曲

弹性力学

基本假设与求解方程

基尔霍夫假设：

1. 变形前垂直于薄板中面的直线段（法线），在薄板变形后仍保持为直线，且垂直于弯曲变形后的中面，其长度不变。如果我们选取薄板中面作为 Oxy 坐标平面，则有 $\gamma_{xz}=0,\gamma_{yz}=0,\varepsilon_z=0$
2. 与其他应力分量相比，垂直于中面的正应力 σ_z 和指向 z 轴的切应力 τ_{xz},τ_{yz} 很小，在计算应变时可略去不计。
3. 薄板弯曲变形时，中面内各点只有垂直位移 w ,而无 x 方向和 y 方向的位移，因此中面应变分量 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$ 均等于零，即中面无应变发生，称中面内位移函数 $w(x,y)$ 称为挠度函数

可以看出这些假设与材料力学中的梁弯曲问题所引进的假设相似。

根据基尔霍夫假设可以给出应变分量的表示式:

$$
\begin{aligned}
&u=-\frac{\partial w}{\partial x}z\\
&v=-\frac{\partial w}{\partial y}z\\
&\varepsilon_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z\\
&\varepsilon_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z\\
&\gamma_{xy}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z
\end{aligned}
$$

本构方程:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)\\
&\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)\\
&\tau_{xy}=G\gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

应力分量表达式:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

这是薄板小挠度弯曲时，主要应力 σ_x,σ_y和 γ_{xy} 与挠度 w 的关系式。可见它们沿板的厚度也称线性分布，在中面上为零，在上下板面处达到极值。

尽管按照假设，$\sigma_z,\tau_{xz},\tau_{yz}$ 视作零，但是他们只是小量，在维持平衡中仍发挥作用，因此仍需要关注其大小。

薄板上下板面的应力边界条件满足

$$
(\tau_{xz})_{z=\pm\frac{h}{2}}=0 \quad (\tau_{yz})_{z=\pm\frac{h}{2}}=0 \quad (\sigma_z)_{z=\pm\frac{h}{2}}=0
$$

考虑平衡微分方程与边界条件，可以给出表达式：

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \\
\sigma_z &= -\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^2\left(1+\frac{z}{h}\right)\nabla^2\nabla^2 w
\end{aligned}
$$

但是应力分量在板边上很难精确满足应力边界条件，这时候我们要使用圣维南原理。我们考虑的是单位宽度上合成的内力所满足的边界条件。

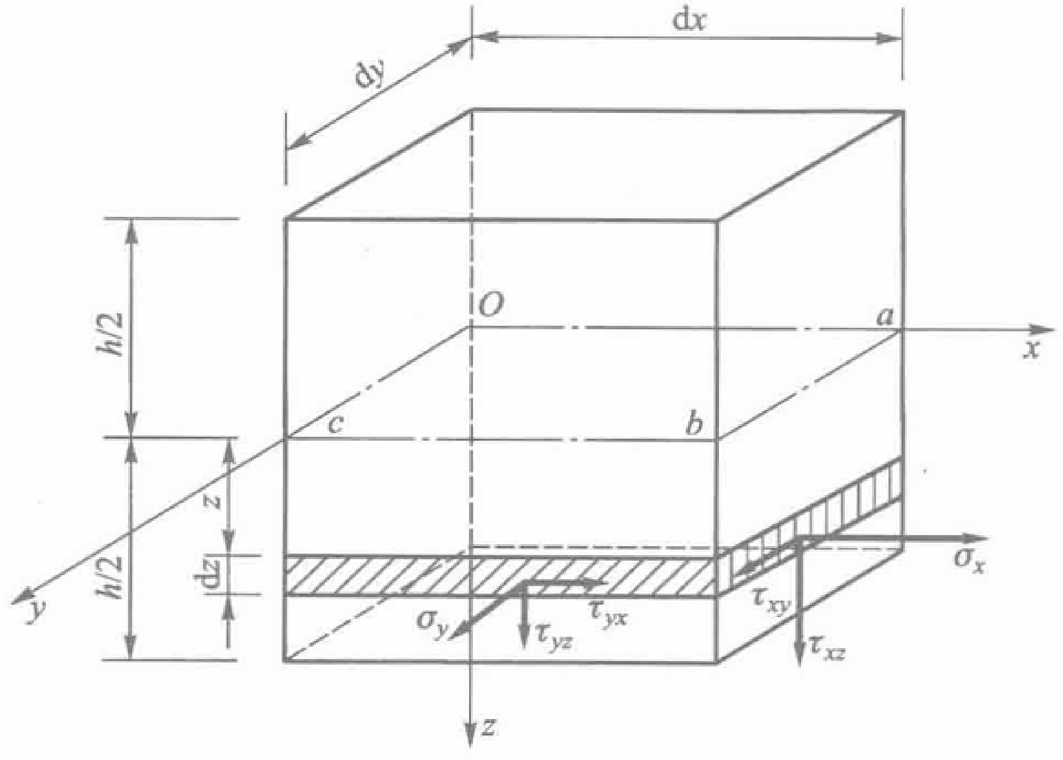


图 13-3

取上图边长为 dx, dy 高度为 h 的微小矩形单元体。建立如上坐标系由于应力的表达式，我们很自然而然得出如下三个条件

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \,\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \,\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \,\mathrm{d}z = 0$$

也就是说， $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 在板的全厚度上的主矢量为零。

我们考虑力偶作用，单位宽度力偶矩

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x \,\mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y \,\mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

其中

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$$

称为板的抗弯刚度。

最后考虑 τ_{xz}， τ_{yz} 合力

$$\begin{aligned}
F_{Sx}&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\,\mathrm{d}z=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\
F_{Sy}&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yz}\,\mathrm{d}z=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w
\end{aligned}$$

所以，我们也可以用上面的内力量表示应力量：

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{12M_x}{h^3}z\\
\sigma_y&=\frac{12M_y}{h^3}z\\
\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\frac{12M_{xy}}{h^3}z\\
\tau_{xz}&=\frac{6F_{Sx}}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\\
\tau_{yz}&=\frac{6F_{Sy}}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)
\end{aligned}$$

沿板边的扭矩可变换成等效的分布剪力与原有横向剪力叠加可得总的分布剪力 F_{Sx}^t,F_{Sy}^t，其也会合成一个交点集中力 F_{RB}

$$\begin{aligned}
F_{Sx}^t&=F_{Sx}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]\\
F_{Sy}^t&=F_{Sy}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]\\
F_{RB}&=-2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_B
\end{aligned}$$

如果薄板的上表面作用横向分布载荷，即满足边界条件：

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{h}{2}}=-q$$

则有应力 σ_z 的表达式给出薄板弯曲的基本方程：

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D}\tag{1}$$

q 为横向分布载荷。因此如果存在体力，可以将其视作横向分布载荷的一部分。对上式双调和函数积分可得位移解法。

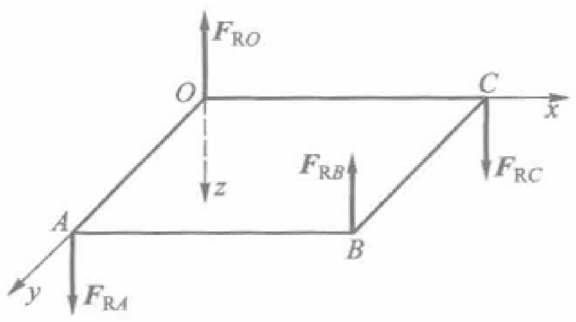


图 13-7

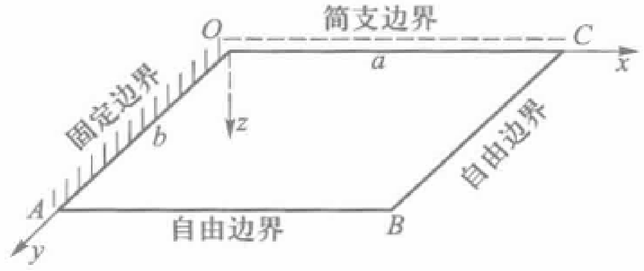


图 13-8

板的边界一般有简支边、固定边和自由边三种情况

1. 简支边界条件：简支边上挠度和弯矩为零

$$(w)_{y=0}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$$

2. 固定边界条件：固定边上挠度和转角为零

$$(w)_{y=0}=0$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=0}=0$$

3. 自由边界条件：自由边上弯矩和剪力分布为零

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0$$
$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0$$
$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0$$

4. 角点条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_B=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a,y=b}=0$$

弹性薄板弯曲

简单例子

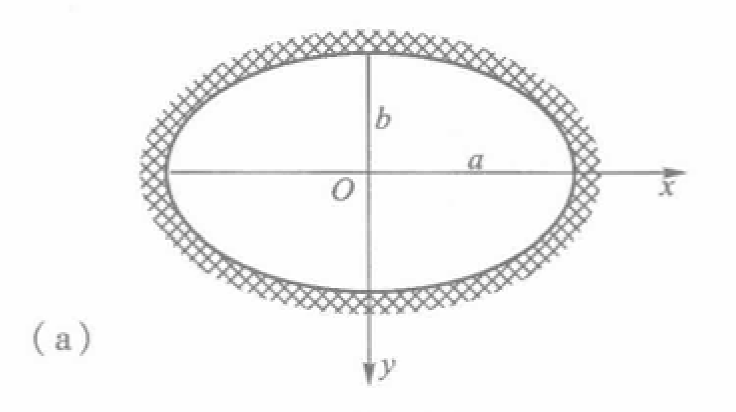


图 13-9

考虑边界固定的椭圆形薄板，受均布分布载荷 q_0 作用。根据边界条件可取挠度表达式（边界上挠度为零）

$$w = A\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2$$

带入 (1) 得

$$A = \frac{q_0}{8D\left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4}\right)}$$

接下来考虑四边简支的板，边长为 a, b 受有分布荷载 $q(x,y) = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$

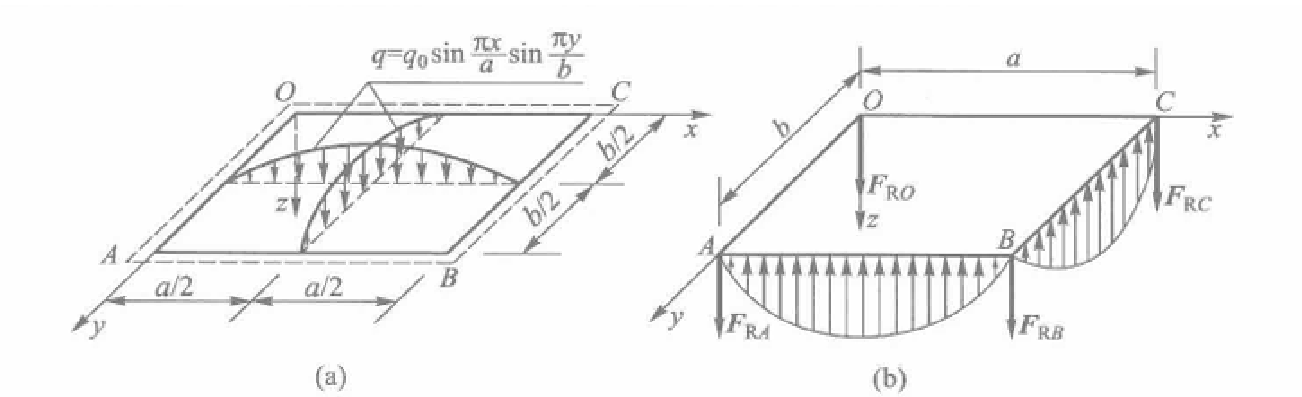


图 13-10

在本例中，(1) 式为

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

边界条件为

$$(w)_{x=0,a}=0 \quad (w)_{y=0,b}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}=0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0,b}=0$$

显然为满足边界条件可取

$$w=A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

带入 (1) 可解得

$$A=\frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

简支边矩形薄板的纳维解

基于上一个例子，如果将均布载荷改成任意载荷 $q(x,y)$，因为我们可以将其展开成双重的三角级数

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

带入到 (1) 式中：

$$\pi^4 D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=q(x,y)$$

利用三角函数的正交性可得

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

这个方程称为纳维解

其优点式，求解比较简单，但是只能适用于四边简支的矩形薄板，而且级数收敛较慢

矩形薄板的莱维解

对于矩形薄板有一边简支而另一边为任意支承的情况，莱维提出了单重三角级数方法，这种适用范围比纳维解法广泛，而且收敛性也比纳维解法好

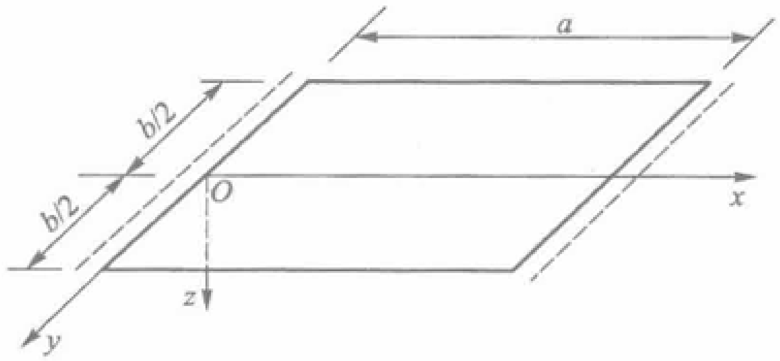


图 13-13

取

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}Y_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

带入 (1) 式并利用三角函数的正交性做积分得

$$\frac{d^4Y_m}{dy^4}-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{d^2Y_m}{dy^2}+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4Y_m=\frac{2}{aD}\int_0^a q\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x$$

所以通解：

$$Y_m^0=A_m\cosh\frac{m\pi y}{a}+B_m\sinh\frac{m\pi y}{a}+C_m\sinh\frac{m\pi y}{a}+D_m\cosh\frac{m\pi y}{a}$$

叠加特解后 $Y_m^*(y)$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[A_m\cosh\frac{m\pi y}{a}+B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}+ \\ C_m\sinh\frac{m\pi y}{a}+D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}+Y_m^*(y)\Big]\sin\frac{m\pi x}{a}$$

根据 $y=\pm\frac{b}{2}$ 的边界条件确定上述系数

比如说考虑四边简支受均布载荷作用的矩形薄板，$Y_m(y)$ 一般是 y 的偶函数可得 $C_m=D_m=0$，剩下的 A_mB_m 可由边界条件确定（课本P338）

如果边界条件是反对称的，则取 $A_m=B_m=0$

叠加法

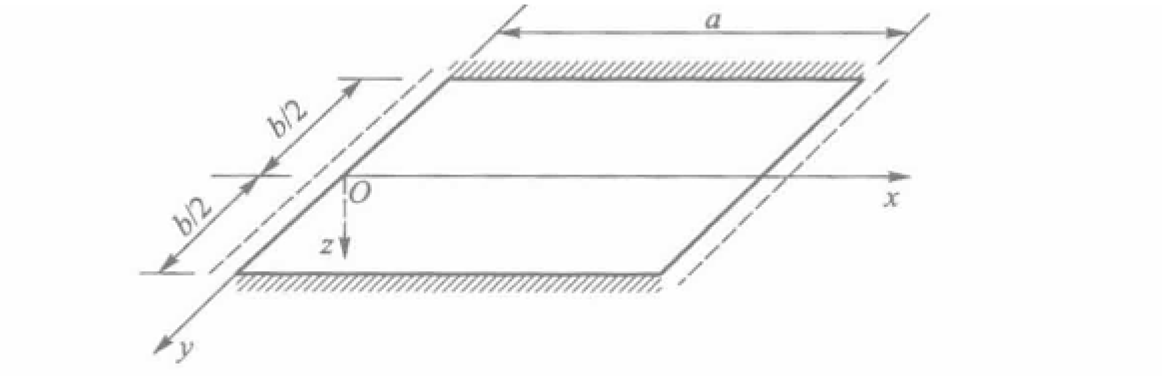
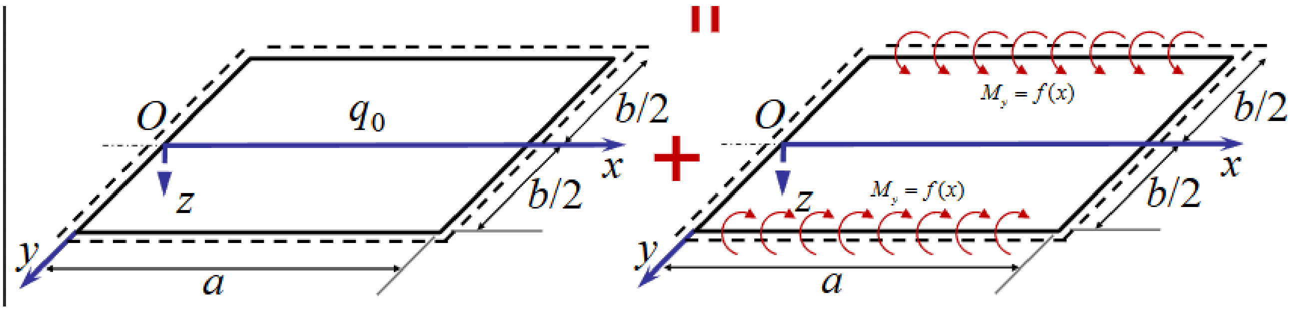


图 13-15

设两对边简支而另外两对边固定的矩形薄板，边长为 a, b 受均匀分布荷载 q_0 ，考虑将其分解为如下形式：



也就是一块四端简支且受均匀分布荷载 q_0 作用的板与一块四端简支两端边界受弯矩的板叠加而成

M_y 由边界条件给出

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0$$

极坐标形式

控制方程

$$\nabla^2\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)w = \frac{q(\rho,\phi)}{D}$$

本构方程

$$
\begin{aligned}
M_{\rho} &= -D\left[\frac{\partial^{2} w}{\partial \rho^{2}}+\nu\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial^{2} w}{\partial \phi^{2}}\right)\right] \\
M_{\phi} &= -D\left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^{2}} \frac{\partial^{2} w}{\partial \phi^{2}}\right)+\nu \frac{\partial^{2} w}{\partial \rho^{2}}\right] \\
M_{\rho \phi} &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \phi}\right) \\
F_{S \rho} &= -D \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^{2} w \\
F_{S \phi} &= -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \nabla^{2} w
\end{aligned}
$$

边界条件：

- 自由边：

$$
\begin{aligned}
&\left(M_{\rho}\right)_{\rho=a}=0 \\
&\left(F_{S \rho}^{t}\right)_{\rho=a}=\left(F_{S \rho}+\frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\rho \phi}}{\partial \phi}\right)_{\rho=a}=0
\end{aligned}
$$

- 简支边：

\begin{align} \\ &(w)_{\rho=a}= 0\\ &(M_{\rho})_{\rho=a}=0 \\

\end{align}

$$-\text{固定边}$$

\begin{align}
&(w){\rho = a }= 0 \
& \left(\frac{\partial w }{\partial \rho } \right) {\rho = a }=0
\end{align}

$$\text{对于对于轴对称问题，控制方程可简化成}$$

\left(\frac{d ^{2} }{d \rho^{2} } +\frac{1}{\rho}\frac{d }{d \rho } \right) \left(\frac{d ^{2} }{d \rho^{2} } +\frac{1}{\rho}\frac{d }{d \rho } \right) w = \frac{q}{D}

$$\text{这个方程通解为}$$

w = A{0} + B{0} \rho^{2}+C{0} \ln \rho +D{0 } \rho^{2} \ln \rho

$$\text{此时所对应的内力表达式为}$$

\begin{align}
&M{\rho }= -D\left[2(1+\nu)B{0} -(1-\nu) \frac{C{0}}{\rho^{2}}+(3+\nu)D{0}
+2(1+\nu)D{0}\ln \rho\right] \
&M{\phi} = -D\left[2(1+\nu)B{0}+(1-\nu) \frac{C{0}}{\rho^{2}}+(1+3\nu)D{0}

+2(1+\nu)D{0}\ln \rho\right] \
&F^{t}{S\rho}=F{S\rho}=- \frac{4DD_{0}}{\rho} \
\end{align}

剩下分量均为零，这只是通解所对应的应力分量，还需要考虑特解对应的分量问题。对

w = A{0} +B{0} \rho^{2}+D_{0} \rho^{2} \ln \rho

由于中心点处的应力分量无法满足边界条件，利用圣维南原理可得，对于中央半径为$

F_{S\rho}= -\frac{F}{2 \pi \rho}

则可求得D_0，其余分量由固定边界条件给出