连续系统振动的近似方法 II ; 非线性振动 I

振动力学

弹性体振动的近似解问题

加权残数法

对于一个弹性体振动问题，我们一般要求解两个函数：振型函数 $\Phi(x)$ 以及时间函数 $T(t)$ ，对于振型函数，我们一般需要求解以下方程

$$\left[E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right]-\omega^2\rho(x)A(x)\Phi=0$$

其中 ω^2 表示频率。记将解带入方程后两端差为残数，显然对于精确解，残数应当为零。但是我们并不能总是给出精确解，考虑如下弱形式：

$$\int_0^l \psi(x)R(\widetilde{\Phi}(x))\,\mathrm{d}x=0$$

其中 $\psi(x)$ 为已知权函数，也就是我们退而求其次，要求其关于所在区域的加权平均值为零。满足上述加权平均值关系的解 $\widetilde{\Phi}(x)$ 称为近似解。所以对于我们需要求解的近似振型函数：

$$R(\widetilde{\Phi}(x))=\sum_{i=1}^n \alpha_i\widetilde{\varphi}_i(x)$$

一般而言， $\widetilde{\varphi}(x)$ 是我们设定的试函数（一般而言满足边界条件）。因此当我们设定好权函数 $\psi(x)$ 后，我们的任务就剩下求解待定参数 α_i。

对于 $\psi(x)$ 我们一般有如下四种取法：

1. 伽辽金法：权函数取为试函数，因此

$$\int_0^l \widetilde{\varphi}_i(x)R\left[\sum_{j=1}^n \alpha_j\widetilde{\varphi}_j(x),x\right]\mathrm{d}x=0$$

2. 配点法，也称并置法，取 n 个点 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ，令残差在这些点上为零

$$R\left[\sum_{j=1}^n \alpha_j\widetilde{\varphi}_j(x_i),x_i\right]=0$$

   显然取狄拉克函数 $\delta(x-x_i)$ 可为权函数。

3. 子区域法：我们划分 n 个区域 $[l_{i-1},l_i]$ ，令残数在各个子区域的积分为零，即

$$\int_{l_{i-1}}^{l_i} R\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widetilde{\varphi}_j(x), x\right] \mathrm{d}x = 0$$

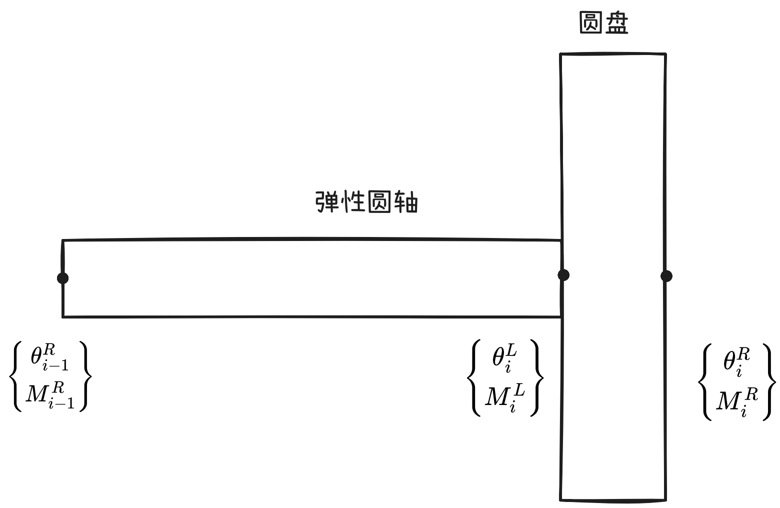
那么对应权函数满足

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [l_{i-1}, l_i] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. 最小平方法：要求残数的平方值在全区间上的累积取最小值，以此确定权函数。即

$$\int_0^l \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} R\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widetilde{\varphi}_j(x), x\right] \mathrm{d}x = 0$$

传递矩阵法



考虑多刚体盘的圆截面扭转振动，取上述单元体，记转角 θ 为广义位移，扭矩 M 为广义力。

圆盘两侧满足

$$\begin{aligned} &\theta_i^L = \theta_i^R \\ &M_i^R - M_i^L = J_i \ddot{\theta}_i^R = -\omega^2 J_i \theta_i^R \end{aligned}$$

J_i 为惯性矩，我们假定扭转运动为周期函数满足 $\ddot{\theta}_i = -\omega^2 \theta_i, \omega$ 为频率，以矩阵形式写出就是

$$\begin{Bmatrix} \theta_i^R \\ M_i^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i^L \\ M_i^L \end{Bmatrix}$$

对于弹性体，我们假定其惯性矩为零，则其运动满足

$$M_i^L = M_{i-1}^R = k_i(\theta_i^L - \theta_{i-1}^R)$$

我们依旧给出矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \theta_i^L \\ M_i^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{i-1}^R \\ M_{i-1}^R \end{Bmatrix}$$

所以可以得出

$$\begin{Bmatrix} \theta_i^R \\ M_i^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{i-1}^R \\ M_{i-1}^R \end{Bmatrix} \triangleq S_i \begin{Bmatrix} \theta_{i-1}^R \\ M_{i-1}^R \end{Bmatrix}$$

因此叠加就可得到

$$\begin{Bmatrix} \theta_n^R \\ M_n^R \end{Bmatrix} = S_n S_{n-1} \dots S_1 \begin{Bmatrix} \theta_0^R \\ M_0^R \end{Bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0^R \\ M_0^R \end{Bmatrix}$$

现在考虑边界条件，给出两种例子（~~因为我上课就听了两种~~）

当左端固定，右端自由时上述方程可以写作

$$\begin{Bmatrix} \theta_n^R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ M_0^R \end{Bmatrix}$$

显然，为了满足这个方程可得

$$s_{22} = 0$$

而当右端固定时，则改写为

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ M_n^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ M_0^R \end{Bmatrix}$$

则要求

$$s_{12} = 0$$

所以，为了求解固有频率，我们需要根据边界条件，定出矩阵中某一元素 s_{ij} 为零。

非线性振动

保守系统的非线性振动

根据能量守恒原理，保守系统的总能总是保持不变的，即

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

$U(x)$ 为系统势能， E 满足一定非线性条件。可以得出

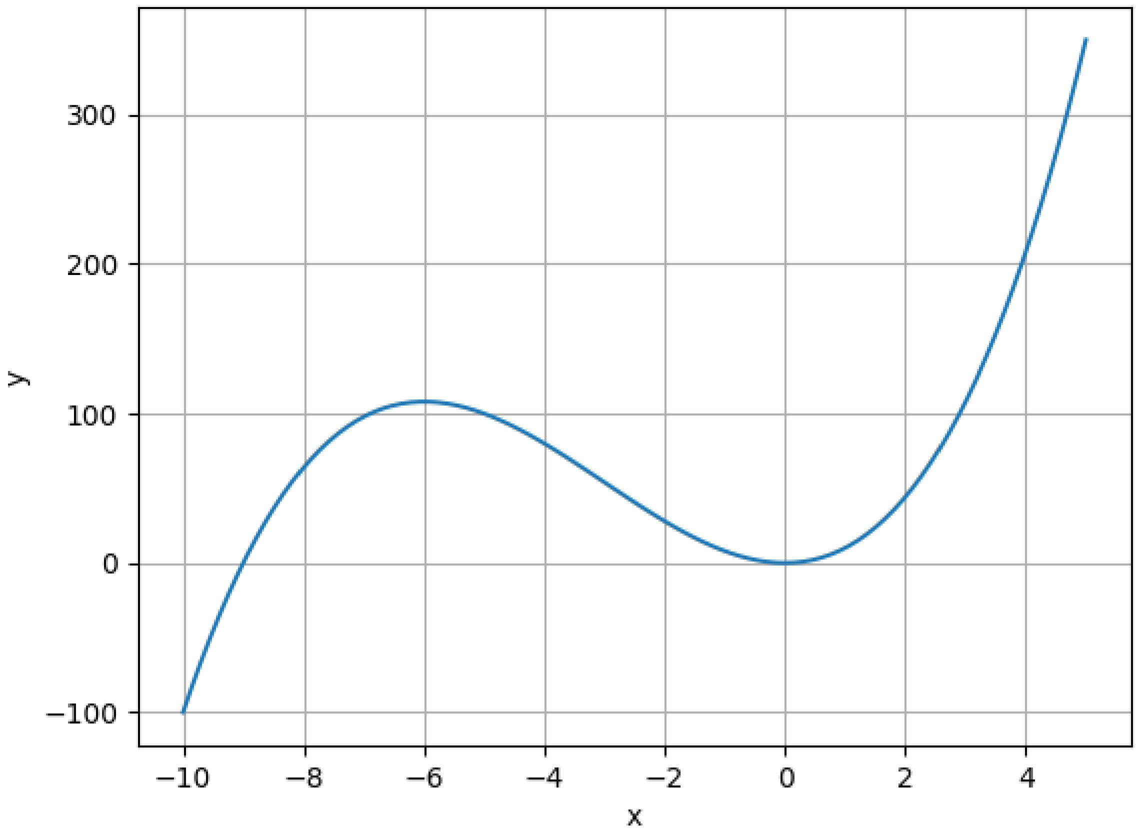
$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}} = dt$$

假定系统满足一定的周期性，且有一定的对称性。我们可以解出周期满足

$$4\int_0^{x_{\max}}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}}=T$$

对于简单的非线性恢复力 $F(x)=x,x^3,\dots x^{2n+1}$ 我们可以求出对应的解析解

如果恢复力中包含偶函数，例如 $F(x)=k_1x+k_2x^2$ ，那么对应的势能为 $U(x)=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{k_2}{3}x^3$ 。势能函数大概如图所示



因为势能不能为零，为了保证其在 x 负半轴处有解。所以负半轴的势能取值限制了系统运动。取负半轴处最大值为 $E_{\max}$。所以总能量应满足关系式

$$0<E<E_{\max}$$

此时我们无法利用对称性求解周期，但在系统运动中，无论是从位移最大处 $x_{\max}$ 到位移最小处 $x_{\min}$ ，还是从位移最小处到位移最大处，两者的时间应当是相同的，因此

$$T=2\int_{x_{\min}}^{x_{max}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}}$$