弹性力学变分解法

弹性力学

> **Note**
>
> 了解变分法可看：[变分法]（不影响理解这章内容，但是变分很重要）
>
> 研究生课程：[大连理工大学 力学中的泛函分析与变分原理 全43讲 主讲-郭旭 视频教程_哔哩哔哩_bilibili]

虚功原理

设有一组应力分量，满足平衡微分方程和应力边界条件：

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}+F_i=0\\ \bar{f}_i=\sigma_{ij}n_j\end{cases}$$

这组应力分量称为**静力可能的应力**。静力可能的应力未必是真实的应力，因为不一定满足应变协调方程，其所对应的位移应满足位移边界条件。但是真实应力一定是经历可能的。我们用 σ_{ij}^S 表示静力可能的应力。

同样的，我们设有一组位移分量 u_i 和一组应变分量 ε_{ij} 满足：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\\ u_i=\bar{u}_i\end{cases}$$

这组位移称为**几何可能的位移**。同样的，几何可能的位移未必是真实的，因为不一定满足平衡微分方程，和位移表示的应力边界条件，但是真实的位移一定是几何可能的。我们用 u_i^k,ε_{ij}^k 表示几何可能的位移和几何可能的应变。

上面三个可能的量满足如下关系：

$$\int_V F_iu_i^k\,\mathrm{d}V+\int_S\bar{f}_i^su_i^k\,\mathrm{d}S=\int_V\sigma_{ij}^s\varepsilon_{ij}^k\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

证明如下：

利用指标不影响表示和应力张量的对称性有

$$\sigma_{ij}^s\varepsilon_{ij}^k=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^su_{i,j}^k+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^su_{j,i}^k=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^su_{i,j}^k+\frac{1}{2}\sigma_{ji}^su_{i,j}^k=\sigma_{ij}^su_{i,j}^k$$

利用微分可得

$$\sigma_{ij}^{s}\varepsilon_{ij}^{k}=\left(\sigma_{ij}^{s}u_{i}^{k}\right)_{,j}-u_{i}^{k}\sigma_{ij,j}$$

利用高斯积分公式可得

$$\int_V \sigma_{ij}^{s}\varepsilon_{ij}^{k}\,\mathrm{d}V=\int_S u_i^k\sigma_{ij}^{s}n_j\,\mathrm{d}S-\int_V u_i^k\sigma_{ij,j}^{s}\,\mathrm{d}V$$

所以根据边界条件和平衡微分方程可得

$$\begin{aligned}\int_S u_i^k\sigma_{ij}^{s}n_j\,\mathrm{d}S&=\int_S \bar{f}_i^{s}u_i^k\,\mathrm{d}S\\ -\int_V u_i^k\sigma_{ij,j}^{s}\,\mathrm{d}V&=\int_V F_i u_i^k\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

所以证明了上述功能关系，这个关系称为弹性体的虚功原理，可表述伪：在弹性体上，外力在任意一组几何可能位移上作的功等于一组静力可能的应力在与上述几何可能位移所对应的应变上所作的功。

当我们选取的式真实的应力、应变和位移时，虚功可得（考虑表面位移边界条件）：

$$\int_V F_i u_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\bar{f}_j u_i\,\mathrm{d}S+\int_{S_\sigma}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i\,\mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

贝蒂互换定理

我们把第一状态应力取为静力可能的应力，而把第二状态的位移和应变取为几何可能的位移和应变，也就是

$$\int_V F_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\,\mathrm{d}V$$

然后将第二状态应力取为静力可能的应力，而把第一状态的位移和应变取为几何可能的位移和应边：

$$\int_V F_i^{(2)}u_i^{(1)}\,\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(2)}u_i^{(1)}\,\mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\,\mathrm{d}V$$

利用物理方程可以证明上式左端相等：（依旧是指标不影响表示）

$$\int_V \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\,\mathrm{d}V=\int_V \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\,\mathrm{d}V=\int_V\left(\lambda\varepsilon_{kk}^{(1)}\varepsilon_{ss}^{(2)}+2G\varepsilon_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\mathrm{d}$$

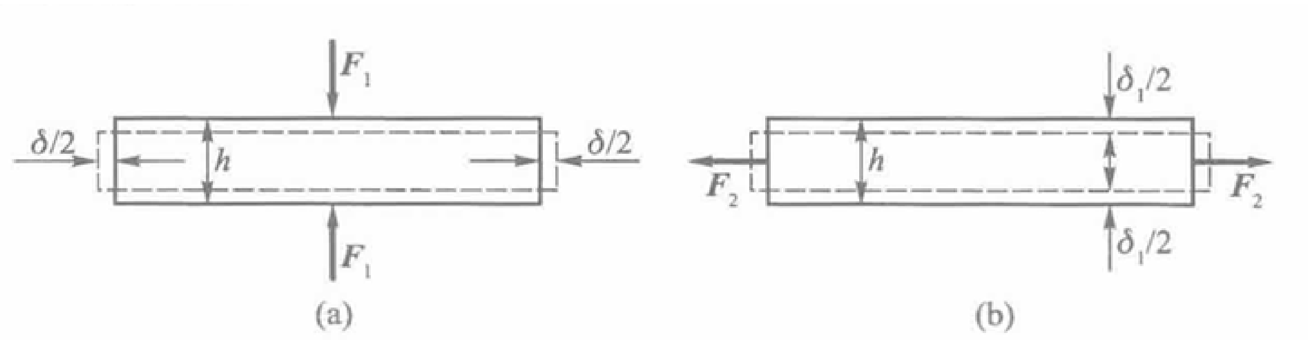
所以

$$\int_V F_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(1)}u_i^{(2)}\,\mathrm{d}S=\int_V F_i^{(2)}u_i^{(1)}\,\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(2)}u_i^{(1)}\,\mathrm{d}S$$

这就是贝蒂互换定理，可表示为：作用在弹性体上的第一状态的外力在第二状态位移上所作的功，等于第二状态的外力在第一状态位移上所作的功。

例题

考虑一个等截面杆承受一对大小相等方向相反的压力 F_1 求杆的总伸长 δ



假定第二状态为，同一杆件受大小相等，方向相反的共线的两力 F_2 作用，使杆呈简单中心拉伸状态，杆的横向收缩为

$$\delta_1 = \nu \frac{F_2 h}{AE}$$

功的互等定理给出

$$F_1 \delta_1 = F_2 \delta_2$$

可得

$$\delta = \frac{\nu h F_1}{AE}$$

最小势能原理

设几何可能的位移为:

$$u_i^k = u_i + \delta u_i$$

这里 u_i 为真实位移，而 δu_i 表示真实位移邻近的位移的微小该变量，称为虚位移。因为真实位移 u_i 满足位移边界条件，所以为了 u_i^k 满足我位移边界条件，必须有

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on } S_u$$

带入几何方程可得

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \triangleq \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}$$

同样的，第一项为真实的应变，第二项表示由虚位移产生的虚应变。将上述两式带入 (1) 式，取真实应力为静力可能的应力可得

$$\int_V F_i (u_i + \delta u_i) \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_j (u_i + \delta u_i) \,\mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) \,\mathrm{d}V$$

可化简成

$$
\int_V F_i \delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \,\mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V
$$

该式称为位移变分方程，也称虚位移方程。

因为微分变分可以交换次序（参考变分学中的欧拉方程的证明）

$$
\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \delta v_\varepsilon
$$

所以又可以改写

$$
\int_V F_i \delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \,\mathrm{d}S = \int_V \delta v_\varepsilon \,\mathrm{d}V \tag{3}
$$

考虑产生虚位移的过程外力不变，变分和积分可以交换顺序得

$$
\delta \left(\int_V v_\varepsilon \,\mathrm{d}V - \int_V F_i u_i \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \,\mathrm{d}S \right) \triangleq \delta E_p = 0
$$

E_p 称为总势能，他是应变分量和位移分量的泛函。

考虑可能几何位移对应的势能

$$
E_p(\varepsilon_{ij}^k) = \int_V v_\varepsilon(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) \,\mathrm{d}V - \int_V F_i (u_i + \delta u_i) \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i (u_i + \delta u_i) \,\mathrm{d}S
$$

与真实势能相减得

$$
E_p(\varepsilon_{ij}^k) - E_p(\varepsilon_{ij}) = \int_V [v_\varepsilon(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) - v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})] \,\mathrm{d}V - \int_V F_i \delta u_i \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \,\mathrm{d}S
$$

由泰勒展开得，忽略二阶以上的高阶微量，其中

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \delta v_\varepsilon \\
&\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} (\delta v_\varepsilon) \delta \varepsilon_{kl} = \delta^2 v_\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以

$$
v_\varepsilon(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) - v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) = \delta v_\varepsilon + \frac{1}{2} \delta^2 v_\varepsilon
$$

利用 (3) 式给出

$$
E_p(\varepsilon_{ij}^k) - E_p(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \int_V \delta^2 v_\varepsilon \,\mathrm{d}V
$$

由于

$$\delta^2 v_\varepsilon = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = 2v_\varepsilon(\delta\varepsilon_{ij})$$

因为 v_ε 总是为正定函数，所以积分恒大于零，即

$$E_p(\varepsilon_{ij}^k) > E_p(\varepsilon_{ij})$$

所以，在所有几何可能的位移中，真实位移使得总势能取最小值

应用

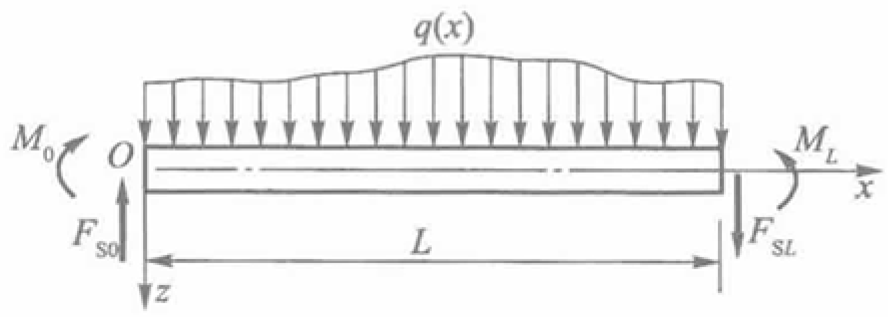


图 14-2

如图直梁，用最小势能原理推导用梁挠度表示的平衡微分方程和应力边界条件。

采用材料力学中的简化模型，即：

$$w = w(x) \quad u = -z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

几何方程给出

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

考虑梁处于单向应力状态，应变能密度为

$$v_e = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 = \frac{1}{2}Ez^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2$$

对全梁作体积分得

$$V_\varepsilon = \iiint v_\varepsilon dxdydz = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

荷载所作的功为

$$W = \int_0^L qw\,dx - F_{S0}w_0 + M_0\left(\frac{dw}{dx}\right)_0 + F_{SL}w_L - M_L\left(\frac{dw}{dx}\right)_L$$

总势能为

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2}\int_0^L EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \\
&\quad -\int_0^L qw\,dx + F_{S0}w_0 - M_0\left(\frac{dw}{dx}\right)_0 - F_{SL}w_L + M_L\left(\frac{dw}{dx}\right)_L
\end{aligned}
$$

对上式作变分，并取零得

$$
\delta E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^L q\delta w\,\mathrm{d}x + \left[M\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]_0^L - [F_s\delta w]_0^L = 0
$$

第一个积分给出

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^L EI_y\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x =& \left[EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\delta\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]_0^L - \left[\delta w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]_0^L + \\
& \int_0^L \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\delta w\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

整理得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right) - q\right]\delta w\mathrm{d}x + \left[\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} + M\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]_0^L - \\
&\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right) + F_s\right]\delta w\right\}_0^L = 0
\end{aligned}
$$

因为 δw 是任意的，所以上式给出平衡微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right) = q \qquad (0 \le x \le L)
$$

边界条件

$$
\left.\begin{aligned}
\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} + M\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \\
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} + F_s\right)\right]\delta w = 0
\end{aligned}\right. \qquad (x = 0, L)
$$

柱形杆的位移分量：

$$
\begin{aligned}
u &= -\alpha yz \\
v &= \alpha xz \\
w &= \alpha\varphi(x, y)
\end{aligned}
$$

推导 φ 满足的微分方程和边界条件

位移相对应的应力分量

$$
\begin{aligned}
\tau_{zx} &= \alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) \\
\tau_{zy} &= \alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)
\end{aligned}
$$

应变能

$$
\begin{aligned}
V_\varepsilon = \iiint v_x dxdydz &= \frac{1}{2G}\int dz \iint (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dxdy \\
&= \frac{1}{2}LG\alpha^2 \iint_R \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right] dxdy \triangleq \frac{1}{2}LG\alpha^2 I_0
\end{aligned}
$$

由于在杆的两端只有产生扭矩的 $\bar{f}_x, \bar{f}_y$ 虚位移

$$
\begin{aligned}
\delta u &= 0 \\
\delta v &= 0 \\
\delta w &= \alpha\delta\varphi
\end{aligned}
$$

由于面上虚功都为零，如果不计体力，则有

$$
\delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}LG\alpha^2 \delta I_0 = 0
$$

即

$$
\delta I_0 = 0
$$

对应

$$
2\iint_R \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\delta\varphi\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\delta\varphi\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_R \nabla^2\varphi\delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0
$$

利用高斯积分公式

$$
\oint_s \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}l + \frac{\partial\varphi}{\partial x}m - yl + xm\right)\delta\varphi ds - 2\iint_R \nabla^2\varphi\delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0
$$

所以给出

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{Inside R} \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}l + \frac{\partial\varphi}{\partial x}m - yl + xm = 0 \quad \text{On s}
\end{aligned}
$$

基于最小势能的近似计算方法

因为我们并不是总能给出所有可能的几何关系，所以我们希望在所给定的可能的位移族中，找到满足势能 E_p 最小值得一组位移分量。尽管这组位移分量不一定满足真实关系，但是在所给

定的位移族中最接近的的，因此在某种程度上可以将其视作是一组近似解。

基于上述思想，我们将位移分量表示成如下形式：

$$u = u_0 + \sum^m A_m u_m$$

$$v = v_0 + \sum^m B_m v_m$$

$$w = w_0 + \sum^m C_m w_m$$

同时在边界上显然有

$$\begin{aligned} u_0 = \bar{u} \quad v_0 = \bar{v} \quad w_0 = \bar{w} \\ u_m = 0 \quad v_m = 0 \quad w_m = 0 \end{aligned}$$

此时未知的只有 A_m, B_m, C_m 我们将位移表达式带入到势能的表达式中，于是 E_p 就变成了关于 A_m, B_m, C_m 的函数，显然，为了求得 E_p 的极值，A_m, C_m, D_m 应满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial A_m} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial B_m} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial C_m} = 0 \end{cases}$$

如果将其展开可得

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial A_m} \iiint_V v_\varepsilon \,\mathrm{d}V - \int_V F_x u_m \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_x u_m \,\mathrm{d}S = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial B_m} \iiint_V v_\varepsilon \,\mathrm{d}V - \int_V F_y v_m \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_y v_m \,\mathrm{d}S = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial C_m} \iiint_V v_\varepsilon \,\mathrm{d}V - \int_V F_z w_m \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_z w_m \,\mathrm{d}S = 0 \end{cases}$$

这种方法称为瑞利-里茨法

如果我们此时选择直接计算应变能表达式可得

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij,j} n_j \delta u_i \mathrm{d}S - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i \,\mathrm{d}V$$

带回 (3) 可得

$$\int_V (\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i \mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}(\bar{f}_i-\sigma_{ij}n_j)\delta u_i \mathrm{d}S=0$$

如果所选取的位移函数满足应力边界条件，上式可以化简成

$$\int_V (\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i \,\mathrm{d}V=0$$

由本构方程可得

$$\begin{aligned}\sum^m \iiint_V \Big[&\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x\right)u_m\delta A_m\\ &\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_y\right)v_m\delta B_m\\ &\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z\right)w_m\delta C_m\Big]\end{aligned}$$

因为 $\delta A_m,\delta B_m\delta C_m$ 彼此独立且任意，所以上式成立的条件为

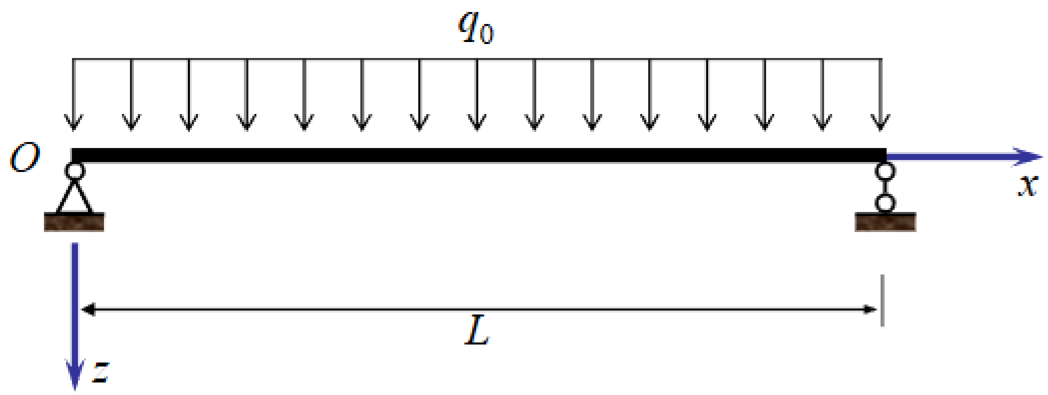
$$\begin{cases}\iiint_V \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x\right)u_m\mathrm{d}V=0\\ \iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_y\right)v_m\mathrm{d}V=0\\ \iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z\right)w_m\mathrm{d}V=0\end{cases}$$

根据上式可以求得 A_m,B_m,C_m 如果以位移形式给出则为

$$\begin{cases}\iiint_V \left((\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2u+F_x\right)u_m\mathrm{d}V=0\\ \iiint_V \left((\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2v+F_y\right)v_m\mathrm{d}V=0\\ \iiint_V \left((\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2w+F_z\right)w_m\mathrm{d}V=0\end{cases}$$

这个方法称为伽辽金法

例题



考虑两端简支的等截面梁，受均布荷载 q 作用，

势能：

$$E_p=\frac{EI_y}{2}\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^L qw\,\mathrm{d}x$$

为满足两端约束条件要求 $(w)_{x=0,L}=0$，所以取挠度

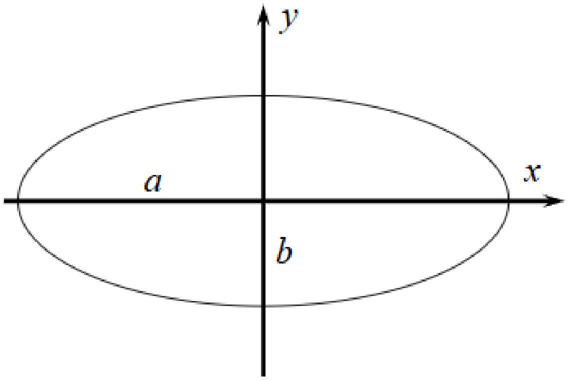
$$w=\sum^{m}C_m\sin\frac{m\pi x}{L}$$

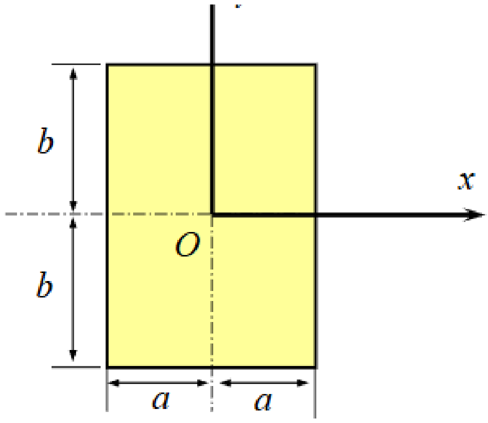
带入式中可得

$$E_p=\frac{EI_y\pi^4}{4L^3}\sum^{m}m^4C_m^2-\frac{2qL}{\pi}\sum_{m=1,3,\dots}\frac{C_m}{m}$$

由于 $\frac{\partial E_p}{\partial C_m}=0$

$$C_m\frac{4qL^4}{EI_y\pi^5}\frac{1}{m^5}\quad m\text{为奇数}$$





用瑞利-里兹法求椭圆截面杆和矩形截面杆的扭转函数

扭转问题可以归结求变分方程

$$\delta V_{\varepsilon}=\frac{1}{2}LG\alpha\delta I_0$$

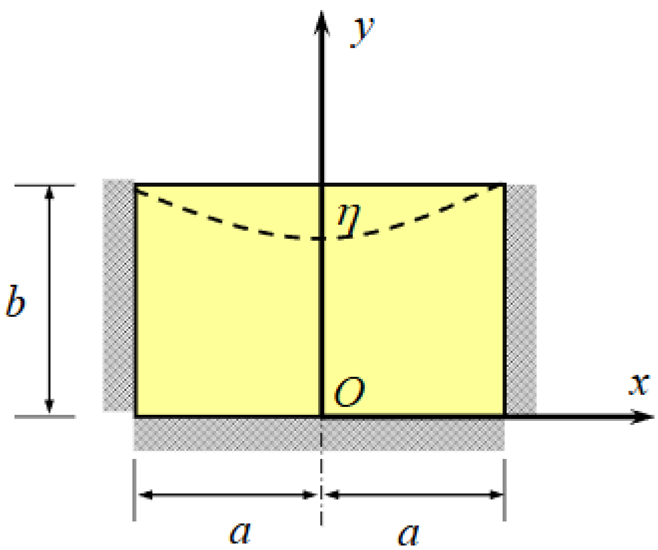
其中

$$I_0=\iint_R\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dxdy$$

对于椭圆截面柱形杆，取 $\varphi=Axy$ 带入可得

$$A=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

如果对于柱形杆，我们取扭转函数 $\varphi=Axy+Cxy^3-Dx^3y$，带入可得



三边固定的矩形薄板，不计体力，自由边给定位移

$$u=0$$
$$v=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

引入应变能密度表示式:

$$2v_\varepsilon=\frac{1}{E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z+\sigma_x\sigma_y)+2(1+\nu)(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{xy}^2)\right]$$

对于平面应力问题

$$v_\varepsilon=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

对于平面应变问题

$$v_\varepsilon=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}^2\right)+2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

对于本题，无面力且无体力，则势能

$$E_p=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2v\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

取位移

$$u=A_1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$v=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}+B_1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

利用

$$\frac{\partial E_p}{\partial A_1}=0\quad\frac{\partial E_p}{\partial B_1}=0$$

可解得

最小余能原理

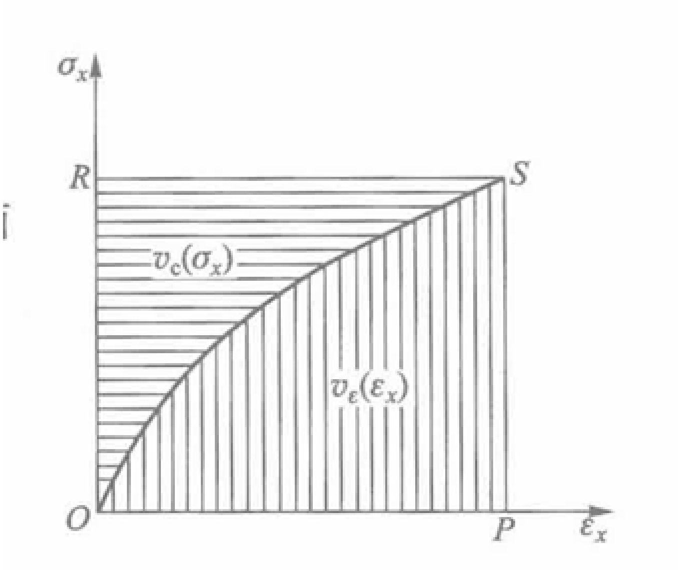


图 14-7

由功的概念可得，单向应力在应变方向上所作总功为 $w_\varepsilon = \int \sigma \, \mathrm{d}\varepsilon$ 不考虑能量的耗散，应变能应为 $v_\varepsilon = w_\varepsilon$ 这是对任意弹性关系都成立的，不限于线性关系，所以当弹性体拉伸到应变为 ε_x 时，弹性体应变能密度应满足

$$v_\varepsilon(\varepsilon_x) = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \, \mathrm{d}\varepsilon_x$$

我们定义单位体积余能为上图面积 OSR 即

$$v_c(\sigma_x) \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x \, \mathrm{d}\sigma_x$$

显然他们存在如下关系

$$v_\varepsilon + v_c = \sigma_x \varepsilon_x$$

对于复杂应力状态，也有(注意此时有哑指标)

$$\begin{cases} v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) = \displaystyle\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\varepsilon_{kl} \\ v_c(\sigma_{ij}) = \displaystyle\int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{kl} \, \mathrm{d}\sigma_{kl} \end{cases}$$

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) + v_c(\sigma_{ij}) = \sigma_{kl}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

引入两种关系式

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad \frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

现在证明后一个关系式：我们将 (4) 式做变分

$$
\delta v_\varepsilon + \delta v_c = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta v_\varepsilon + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \delta v_c = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = \varepsilon_{kl} \delta \sigma_{kl} + \sigma_{kl} \delta \varepsilon_{kl}
$$

更改哑指标可得

$$
\left(\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij} \right) \delta \sigma_{ij} = - \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij}
$$

由于右式为零，所以推出左式括号内为零，便可以推出后一个关系式，事实上这就是材料力学中的卡氏公式

假定静力可能的应力

$$
\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}
$$

其中 σ_{ij} 为真实的应力，而 $\delta\sigma_{ij}$ 称为虚应力，平衡微分方程和应力边界条件给出

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij})_{,j} + F_i = 0 \\
(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) n_j = \bar{f}_j
\end{aligned}
$$

由于 σ_{ij} 为真实的应力，则上两式给出

$$
\begin{aligned}
\delta \sigma_{ij,j} = 0 \\
\delta \sigma_{ij} n_j = 0
\end{aligned}
$$

我们将静力可能的应力带入虚功方程，取几何可能的位移为真实位移

$$
\int_V F_i u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \,\mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S = \int_V (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V
$$

引入式 (2) 可得

$$
\int_{S_\sigma} \bar{u}_i \delta \sigma_{ij} n_j \,\mathrm{d}S = \int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \,\mathrm{d}V
$$

该式子称为应力变分方程，又称虚应力方程。他表示在已知位移的边界上，虚面力在真实位移上作的功，等于整个弹性体的虚应力在真实变形中所作的功。

如果我们把卡氏定理带入可得

$$
\delta \left(\int_V v_c \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S \right) = 0
$$

第一项式弹性体的应变余能，第二项式边界 S_u 的余能

取总余能

$$E_c = \int_V v_c \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S$$

则有

$$\delta E_c = 0$$

$E_c(\sigma_{ij})$ 是应力分量的泛函，总余能的一阶变分为零，可见真实的应力使总余能取驻值。

这称为最小余能原理：在所有静力可能的应力中，真实的应力使总余能取最小值。

如果弹性体全部边界上面力已知，则上式可简化为

$$\delta \int_V v_c \,\mathrm{d}V = 0$$

称为最小功原理

基于最小余能的近似计算方法。

我们只考虑弹性关系为线性，即满足 $v_\varepsilon = v_c$ 。其思想和最小势能的思想一样。

巴博考维奇将应力分量取为如下形式

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sum_m A_m \sigma_x^{(m)}$$
$$\sigma_y = \sigma_y^0 + \sum_m A_m \sigma_y^{(m)}$$
$$\sigma_z = \sigma_z^0 + \sum_m A_m \sigma_z^{(m)}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^0 + \sum_m A_m \tau_{yz}^{(m)}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \sum_m A_m \tau_{xz}^{(m)}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \sum_m A_m \tau_{xy}^{(m)}$$

其中 σ_{ij}^0 是平衡微分方程的特解，适合应力边界条件，假定他们不满足以应力表示的应变协调方程以及 S_u 上的位移边界条件；$\sigma_{ij}^{(m)}$ 满足无体力的平衡微分方程和无面力的应力边界条件，但不满足协调方程和 S_u 上的位移边界条件。

同样未知的是 A_m ，因此我们依旧能给出取极值的条件：

$$\frac{\partial E_c}{\partial A_m} = 0$$

对于存在应力函数的平面问题和扭转问题，其应力分量已满足了平衡微分方程，所以我们只需要设定应力函数表达式，使由此求得的应力分量满足应力边界条件。

对于平面应力问题，$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$ $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 是 x 和 y 的函数，取单位厚度，余能：

$$V_c=\iint v_c dxdy=\frac{1}{2E}\iint\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\nu\sigma_x\sigma_y+2(1+\nu)\tau_{xy}^2\right]dxdy$$

对于平面应变问题则为

$$V_c=\iint v_c dxdy=\frac{1+\nu}{2E}\iint\left[(1-\nu)(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-2\nu\sigma_x\sigma_y+2\tau_{xy}^2\right]dxdy$$

如果我们研究的平面问题是单连通的，应力分量与弹性常数无关，则取 $\nu=0$，则可简化成

$$V_c=\frac{1}{2E}\iint(\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\tau_{xy}^2)dxdy$$

引入应力函数 U

$$V_c=\frac{1}{2E}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以

$$\begin{aligned}\delta V_c=\frac{1}{2E}\delta\iint\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\ \Longrightarrow \nabla^2\nabla^2 U=0\end{aligned}$$

对于近似解，取

$$U=U_0+\sum^m A_m U_m$$

取极值条件同样为

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_m}=0$$

广义变分原理

> ✎ **Note**
>
> 仅作了解

胡鹫变分原理

最小势能原理可以归结于一个条件驻值问题，其中 ε_{ij} 和 u_i 满足几何方程和位移边界条件，前者给出 6 个条件约束，后者给出 3 个条件约束，也就是

$$\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=\varepsilon_{ij}$$

$$u_i=\bar{u}_i$$

所以我们引入拉格朗日乘子，将上述约束条件与原函数联结起来也就是

$$\begin{aligned}E_p^* = &\int_V v_\varepsilon - F_i u_i \,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \,\mathrm{d}S + \\ &\int_V \lambda_{ij}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma}\mu_i(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

其中 λ_{ij} 和 μ_i 都是拉格朗日乘子，其中 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$ 于是我们将一个有条件约束的泛函极值问题转换为了一个无约束泛函极值问题。从 $\delta E_p^*=0$ 入手可得

$$\begin{aligned}\delta E_p^* = &\int_V \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}-\lambda_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \int_V(\lambda_{ij,j}+F_i)\delta u_i\,\mathrm{d}V + \\ &\int_V\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\delta\lambda_{ij}\,\mathrm{d}V \\ &\int_{S_\sigma}(\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i)\delta u_i\,\mathrm{d}S + \\ &\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i\,\mathrm{d}S + \\ &\int_{S_u}(\lambda_{ij}n_j+\mu_i)\,\mathrm{d}S = 0\end{aligned}$$

上式成立的条件给出

- 在 V 内

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}=\lambda_{ij}\\ &\lambda_{ij,j}+F_i=0\\ &\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\end{aligned}$$

- 在 S_σ 上

$$\lambda_{ij}n_j=\bar{f}_i$$

- 在 S_u 上

$$\begin{aligned}&u_i=\bar{u}_i\\ &\mu_i=-\lambda_{ij}n_j\end{aligned}$$

如果我们取 $\lambda_{ij}=\sigma_{ij}$ 则上述式子分别表示物理方程、平衡微分方程和应力边界条件。此时可得广义势能原理的泛函：

$$
\begin{aligned}
E_p^* = \int_V \left[v_\varepsilon - F_i u_i + \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij} \right) \right] \mathrm{d}V - \\
\int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \, \mathrm{d}S - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

如果取 $\delta E_p^* = 0$ 则重复上面步骤可得弹性力学的全部基本方程和全部边界条件。

同样的，对于余能可以得到如下无约束余能泛函:

$$
\begin{aligned}
E_c^* = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - v_\varepsilon) \, \mathrm{d}V + \int_V \alpha_i (\sigma_{ij,j} + F_i) \, \mathrm{d}V + \\
\int_{S_\sigma} \beta_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_j) \, \mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

其中 α_i, β_i 为拉格朗日乘子。所以有 $\delta E_c^* = 0$

$$
\begin{aligned}
\delta E_c^* = \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}V + \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} \, \mathrm{d}V + \\
\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta \alpha_i \, \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \left(\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_i \right) \delta \beta_i \, \mathrm{d}S + \\
\int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (\alpha_i - \bar{u}_i) \, \mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} \delta \sigma_{ij} n_j (\alpha_i + \beta_i) \, \mathrm{d}S = 0
\end{aligned}
$$

上式条件给出

- 在 V 内

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \\
&\sigma_{ij,j} + F_i = 0
\end{aligned}
$$

- 在 S_σ 上

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i \\
&\alpha_i + \beta_i = 0
\end{aligned}
$$

- 在 S_u 上

$$
\alpha_i = \bar{u}_i
$$

取 $\alpha_i = u_i$ 可得

$$E_c^* = \int_V [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - v_\varepsilon + u_i(\sigma_{ij,j} + F_i)]\,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i)\,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}S$$

取 $\delta E_c^* = 0$ 可得弹性力学的全部基本方程和全部边界条件。

赫林格-赖斯纳变分原理

重新改写余能的泛函

$$E_c^{**} = \int_V v_c\,\mathrm{d}V + \int_V \alpha_i\,(\sigma_{ij,j} + F_i)\,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \beta_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_j)\,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}S$$

同样利用 $\delta E_c^{**} = 0$ 有

$$\int_V \left[\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta\alpha_i\,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \left(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i\right)\delta\beta_i\,\mathrm{d}S + \int_{S_u} \delta\sigma_{ij}n_j(\alpha_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} \delta\sigma_{ij}n_j\,(\alpha_i + \beta_i)\,\mathrm{d}S = 0$$

给出

- 在 V 内

$$\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i})$$
$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

- 在 S_σ 上

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{f}_i$$
$$\alpha_i + \beta_i = 0$$

- 在 S_u 上

$$\alpha_i = \bar{u}_i$$

同样取 $\alpha_i = u_i$

$$E_c^{**} = \int_V [v_c + u_i\,(\sigma_{ij,j} + F_i)]\,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} u_i\left(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i\right)\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}S$$

同样取 $\delta E_c^{**}=0$ 可得平衡微分方程，物理方程和全部边界条件。

取 $v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-v_c(\sigma_{ij})$ 同样可得两类变量的广义变分原理的泛函

$$E_p^{**}=\int_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})-v_c-F_iu_i\right]\mathrm{d}V-\\ \int_{S_\sigma}\bar{f}_iu_i\,\mathrm{d}S-\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}S$$

哈密顿变分原理

对于动力学系统，利用达朗贝尔原理，引入惯性力可得

$$\int_V(F_i-\rho\ddot{u}_i)\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i\,\mathrm{d}S=\int_V\delta v_\varepsilon\,\mathrm{d}V$$

对上式做时间长度上的积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V(F_i-\rho\ddot{u})\delta u_i\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\delta v_\varepsilon\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$$

对于

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho\ddot{u}_i\delta u_i\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t&=\int_V\rho[\dot{u}_i\delta u_i]_{t_1}^{t_2}\,\mathrm{d}V-\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho\dot{u}_i\delta\dot{u}_i\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho\dot{u}\delta\dot{u}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\delta E_k\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

而等式左边剩下的部分可表示为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_V F_i\delta u_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\delta W\,\mathrm{d}t$$

由于等式坐标可表示势能的变分在时间长度的积累，所以整个式子可以写成如下形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(V_\varepsilon-E_k-W\right)\mathrm{d}t=0$$

实际上变分项使所熟知的拉格朗日量 $L=V_\varepsilon-E_k-W$ 。由于变分和积分可以交换未知，引入哈密顿作用量 $S=\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t$ 所以整个式子可写作

$$\delta S=0$$

这个就是哈密顿变分原理，总结如下:

如果一个物理系统的拉格朗日量 $L(q,\dot{q},t)$ ，其中 q 是广义坐标 $\dot{q}$ 是广义速度，t 是时间，那么系统从时间 t_1 到时间 t_2 的作用量可以表示为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \, \mathrm{d}t$$

哈密顿变分原理指出，一个物理系统的实际运动路径是使作用量取极值的路径，也就是

$$\delta S = 0$$

展开可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \mathrm{d}t = 0$$