

弹性力学问题的建立和一般原理

弹性力学

方程建立

回忆变形体力学基本关系

- 平衡关系：平衡方程、力的边界条件
- 连续关系：应变-位移关系（几何关系）
- 物理关系：应力-应变关系（本构关系）

总结我们现在所接触的弹性力学方程

$$\begin{array}{ll}\sigma_{ji,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i & \text{平衡（运动）微分方程} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{几何方程} \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} & \text{应力应变关系} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] & \text{应力应变关系}\end{array}$$

我们一共有十五个方程十五个变量，为了求出方程的解，我们需要给出边界条件：

1. 全部边界上已知面力（第一类边界条件）

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{f}_i$$

2. 全部边界上已知位移（第二类边界条件）

$$u_i = \bar{u}_i$$

3. 部分边界上作用力、部分边界上给定位移（第三类边界条件，也称混合边界条件）

$$\begin{array}{l}\sigma_{ji} n_j = \bar{f}_i (\text{on } S_\sigma) \\ u_i = \bar{u}_i (\text{on } S_u)\end{array}$$

当然也存在其他边界条件，比如说对于光滑物体放在同样光滑的桌面上，当这个物体受挤压时，我们能得到边界条件：法向的位移（挤压产生），平面上切应力为零（表面光滑），称为mixed boundary condition

同时我们给出初始条件

$$\begin{array}{l}u_i(x, 0) = u_{i0} (x \in V) \\ \dot{u}_i(x, 0) = v_{i0}\end{array}$$

当我们求得应变或应力，为了求位移，为确保单值性需要引入应变协调方程

$$e_{ikm}e_{jln}\varepsilon_{ij,kl} = 0$$

基于以上方程，我们通常采用两种方式求解弹性力学问题：一种是位移解法、另一种为应力解法

位移解法

我们先用位移表示应力：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial w}{\partial z}, \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

带入平衡方程有

$$\begin{aligned}(\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + F_x &= 0 \quad (\rho\ddot{u}) \\ (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + G\nabla^2 v + F_y &= 0 \quad (\rho\ddot{v}) \\ (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial z} + G\nabla^2 w + F_z &= 0 \quad (\rho\ddot{w})\end{aligned}$$

这个方程也称拉梅方程。

以位移作为基本变量求解时，归结为在给定的边界条件下求解拉梅方程，进而可以求得应变分量和应力分量

应力解法

还有一种解法是通过应力来求解，以应力作为基本变量求解，要求在体内满足平衡微分方程，其相应的应变分量还须满足应变协调方程。

首先改写应力应变关系：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\Theta, & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\Theta, & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\Theta, & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$

带入应变协调方程可得

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right)$$

轮转 x, y, z 还可以得到其余表达式。

Beltrami-Michell 方程（以应力表示的应变协调方程）

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= -\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

当体力为常数时可以对方程右边做进一步化简

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0$$

当然三维问题的应力解法繁琐且复杂，只有少数特殊情形如轴对称才适合用应力解法。应力解法在二维问题中才被广泛使用。

弹性力学三大原理

我们在材料力学中接触到如下三个原理

- 叠加原理
- 解的唯一性定理
- 圣维南原理

这三个原理同时在弹性力学也是被广泛运动的。

叠加原理

叠加原理：在 **小变形线弹性** 情况下，作用在物体上几组荷载产生的总效应等于每组荷载单独作用效应的综合。

叠加原理要求一种荷载的作用不会引起另一种荷载的作用发生性质的变化。

解的唯一性定理

解的唯一性定理：假设弹性体受已知体力作用，在物体的边界上，或者面力已知，或者位移已知，或者一部分上面力已知，而另一部分上位移已知，则在弹性体平衡时，体内各点的应力分量于应变分量是唯一的，对于后两种情况，位移分量也是唯一的。

基于解的唯一性可以给出两种解法：逆解法和半逆解法

所谓逆解法,就是先按某种方法给出一组满足全部基本方程的应力分量或位移分量，然后考察，在确定的坐标系下，对于形状和几何尺寸完全确定的物体，当其表面受什么样的面力作用或具有什么样的位移时，才能得到这组解答。

所谓半逆解法,就是对于给定的问题，根据弹性体的几何形状、受力特点或材料力学已知的初等结果，假设一部分应力分量或位移分量为已知，然后由基本方程求出其他量，把这些量合在一起凑合已知的边界条件;或者把全部的应力分量或位移分量作为已知，然后校核这些假设的量是否满足弹性力学的基本方程和边界条件。

解的唯一性定理基于“物体不受外力作用时，应变能为零，应力分量和应变分量为零”这一假设，当涉及初应力时，这一假设不再成立

圣维南原理

弹性力学问题精确求解存在困难：

1. 实际面力分布无法精确知道
2. 很难找到能逐点满足所有边界条件的解析解

圣维南原理：若在物体任一小部分上作用一个平衡力学，则该平衡力系在物体内部所产生的应力分布，仅局限于该力系作用的附近区域，在离该区域的相当远处，这种应力便急剧减少。

又可以表述为：若把作用在物体局部边界上的面力，用另一组与它静力等效的力系来代替，则在力系作用区域的附近应力分布将有显著的改变，但在远处所受的影响可以不计。

事实上圣维南原理不仅能等效面力，还能等效体力

当对薄壁杆件引用圣维南原理时，要求力的作用区域必须与壁厚尺寸大致相当，否则将会导致严重的错误。

弹性力学的简单问题

对于简单问题，我们采用材料力学的方法求得相应的应力分量，校核他们是否满足平衡微分方程和应力边界条件，如果满足，则根据解的唯一性定理就是问题的解答。