非线性振动II;复习课

振动力学

> ✎ Note
>
> 非线性振动的内容源自季文美《机械振动》

非线性振动

对于非线性振动系统，将方程成线性部分和非线性部分

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon f(x,\dot{x})$$

因为非线性部分源自刚度和阻尼；非线性振动中有两个比较典型的物理模型，分别对应不同的非线性项。

- 非线性刚度：Duffing 振子

$$\ddot{x}+2c\dot{x}+k_1x+k_3x^3=f(t)$$

- 非线性阻尼： VanderPol 振子

$$\ddot{x}+(c_0+c_1x^2+c_2\dot{x}^2)\dot{x}+kx=f(t)$$

对于一般的非线性振动系统，我们很难给出准确的解析解，如果满足 $0<\varepsilon\ll 1$ 也就是弱非线性情况，我们能给出近似解；对于强非线性情况，我们只有数值解。

平均摄动法

对于微分方程

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon f(x,\dot{x})$$

由于 ε 是小参数，我们可以将解按 ε 直接展开的幂级数形式，即

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

这里取非线性项为三次刚度 $f(x)=x^3$ 我们将这个解带入我们的方程，一一比较系数显然可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0:\ddot{x}_0+\omega^2x_0=0\\
&\varepsilon^1:\ddot{x}_1+\omega^2x_1=f(x_0,\dot{x}_0)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

此时初始条件为

$$x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0$$

所以第一个方程给出解

$$x_0 = A\cos\omega t$$

显然这是一个无外加激励时，保守系统的解。我们将这个解带入第二个方程

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x = -\alpha A^3 \cos^3 \omega t$$

杜哈梅积分给出解的形式

$$x_1(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \beta t\cos\omega t + \Gamma\cos\omega t$$

C_1, C_2, β, Γ 为系数。注意第三项为一个含有 t 的长期项。尽管在一定时间内，方程的解具有的渐进性，但是随着时间的增加显然会出现发散解的现象。

L-P 法

引入新的时间变量

$$\tau = \omega t$$

其中 ω 是关于 ε 的未知函数，于是方程变为

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x(\tau), \omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

我们依旧考虑三次刚度项，所以基本摄动法给出

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0 : \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \\
&\varepsilon^1 : \omega_0^2 x_1'' + 2\omega_0 w x_0'' + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

初始条件仍相同，所以给出第一个方程的解

$$x_0 = A\cos\tau$$

将上述解带入第二个方程可得

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{4}\omega_0 A_0 \left(8\omega_1 - \frac{3}{\omega_0}A_0^2\right)\cos\tau - \frac{1}{4}A_0^3\omega_0^2\cos 3\tau$$

右端第一项将引起共振从而出现长期项，为了使得长期项不出现，需令其系数为零，因此有

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0}$$

同样的可以求得剩下的 ω_i 所以时间变量满足

$$
\tau=\omega t=\left(\omega_0+\frac{3A^2}{8\omega_0}\varepsilon+\dots\right)t
$$

如果我们取的级数项够多，有效的区域也就会又大

平均法(K-B 法)

$$
\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x})
$$

对于上述方程，我们做如下假定

$$
\begin{aligned}
\varepsilon=0:&\begin{cases}x(t)=A\cos(\omega_0t+\varphi_0)\\ \dot{x}(t)=-\omega_0A\sin(\omega_0t+\varphi_0)\end{cases}\\
\varepsilon\neq0:&\begin{cases}x(t)=a(t)\cos(\omega_0t+\varphi(t))\\ \dot{x}(t)=-\omega_0a(t)\sin(\omega_0t+\varphi(t))\end{cases}
\end{aligned}
$$

此时补充条件

$$
\dot{a}\cos(\omega_0t+\varphi(t))-a\dot{\varphi}(t)\sin(\omega_0t+\varphi(t))=0
$$

将上述 $\varepsilon\neq0$ 的假设带入方程中 (考虑 $\varepsilon=0,\varepsilon\neq0$) 可得

$$
\begin{aligned}
\dot{a}&=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}f[\quad]\sin(\omega_0t+\varphi)\\
\dot{\varphi}&=-\frac{\varepsilon}{\omega_0a}f[\quad]\cos(\omega_0t+\varphi)
\end{aligned}
$$

(PS:老师上课没写中间的东西那我不写也是合理的)

对于上述两项，等式的右边含有小量 ε 说明这两项也是一个小量，因此 a 和 φ 的变换过程是很缓慢的，也就是随 t 慢变的量，因此我们可以将其视作是一个平稳变化项和微小扰动的叠加。为了方便起见，我们记 $\omega_0t+\varphi(t)\triangleq\psi$ 。那么右边就是一个关于变量 ψ 周期为 2π 的周期函数，那么我们总可以用三角函数展开，展开后我们只取一个近似项，便可以将上述转换为如下形式（具体细节参照季文美《机械振动》P516）

$$
\begin{aligned}
\dot{a}&=-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\sin\psi f(a\cos\psi,-\omega_0a\sin\psi)\,\mathrm{d}\psi\\
\dot{\varphi}&=-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0a}\int_0^{2\pi}\cos\psi f(a\cos\psi,-\omega_0a\sin\psi)\,\mathrm{d}\psi
\end{aligned}
$$

因为这是一个慢变过程，所以在一个周期 $t=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 内可以将 a 和 φ 视作常数

~~课上有两道例题，一个算duffing 振子 一个算 VanerPol 振子但是这章应该不考计算所以没写过程，详情请看季文美机械振动 P518。这边讲一个黄老师上课的要点。~~

~~历年卷上有我就打一下吧 但是是季文美老师的版本（~~

> Tip

参数不重要，重要的是大概的解题过程（

求杜芬方程的周期解:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = 0$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，方程有解

$$\begin{aligned} x &= a\cos\psi, \quad \psi = \omega_0 t + \theta \\ \dot{x} &= -\omega_0 a \sin\psi \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 时，我们仍然保留解的形式，但此时 a 和 θ 都是时间 t 的函数。将解带入杜芬方程中可得

$$\omega_0 \dot{a}\sin\psi + \omega_0 a\dot{\theta}\cos\psi = \varepsilon\omega^2 a^3\cos^3\psi$$

补充方程

$$\dot{a}\cos\psi = a\dot{\theta}\sin\psi$$

将上述两个方程联立求解可得标准方程

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{8}\varepsilon\omega_0 a^3\left(2\sin 2\psi + \sin 4\psi\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{8}\varepsilon\omega_0 a^2\left(3 + 4\cos 2\psi + \cos 4\psi\right) \end{aligned}$$

在 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 时间内对时间项取平均

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0 a^2 \end{aligned}$$

得到一次近似解

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= a_0 = \text{const} \\ \overline{\theta}_1 &= \frac{3}{8}\varepsilon\omega_0 a^2 t + \theta_0 \quad \psi_1 = \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2\right)t + \theta_0 \end{aligned}$$

范德波方程

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

同样取变换

$$\begin{aligned} x &= a\cos\psi, \quad \psi = t + \theta \\ \dot{x} &= -a\sin\psi \end{aligned}$$

所以可得标准方程

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{1}{8}\varepsilon a[4-a^2-4\cos 2\psi+a^2\cos 4\psi] \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{8}\varepsilon[(4-2a^2)\sin 2\psi-a^2\sin 4\psi]
\end{aligned}
$$

做平均化可得平均方程：

$$
\begin{aligned}
&\dot{a} = \frac{1}{8}\varepsilon a(4-a^2) \\
&\theta = 0
\end{aligned}
$$

积分得

$$
\bar{a}_1^2 = \frac{4}{1+\left(\frac{4}{a_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}} \quad \bar{\theta}_1 = \theta_0
$$

极限环

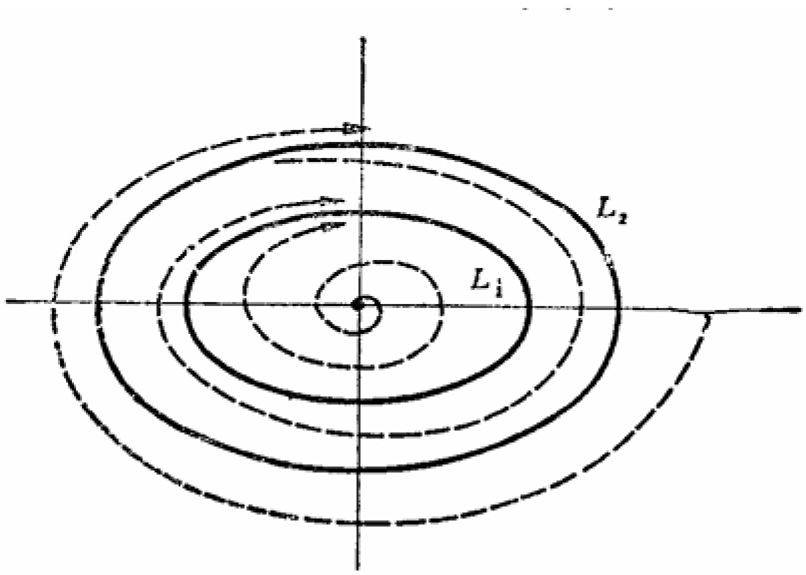

图 11.5-1

对于一个 VanderPol 振子我们所考虑的非线性阻尼是一个正的阻尼，而线性阻尼是一个负的阻尼。此时相平面上会出现一个闭轨线（图中L1）当初始时刻在闭轨线内部时，阻尼整体表现出负阻尼特性，由于负阻尼使得振荡系统发散，所以振幅逐渐变大，但是负阻尼特性会随振幅变大而减小，逐渐趋近闭轨线；同理，当初始时刻在闭轨线外部是，阻尼整体表现出正阻尼特性；正阻尼特性使得振荡系统衰减，但是正阻尼特性也随之减弱，所以也表现出逐渐趋近闭轨线，这样的闭轨线成为极限环。

如果极限环的两侧相轨线都逐渐趋于它，则极限环是稳定的。如果哪怕有一侧的相轨迹是离开它的，极限环是不稳定的。稳定的极限环对应于系统的稳态周期运动，这样的稳态运动称为自激振动或者简称自振。自振发生于系统受到某些不可避免的干扰而自发地开始振动，振幅一直增长至系统的非线性因素起作用而限制振幅为止。这种运动之所以能够维持，是由于存在一个

系统有关的外部恒定能源，又由于系统固有的非线性机制，在运动着的系统与恒定能源之间引起交变力的出现，使系统周期性地从恒定能源获取能量，平衡由于阻尼而造成地能量损耗。

复习课

成绩占比：

- 平时成绩 25%
- 大作业 25%
- 期末考 50%

简答题 8 道 占比40

计算题 3 道 占比60

核心内容

- 单自由度振动
- 多自由度振动
- 连续系统振动

分类问题；

保守系统的自由振动（1.2、1.4.、1.5 不考）；

谐和激励

- 一般形式
- 基座振动
- 周期振动

瞬态解；

多自由度

- 邓克利法物理意义
- Rayleigh Ritz 法 要求会算有过程
- 几种近似计算方法

连续系统

- 主要考杆和梁
- 可能会有几种特殊的杆梁问题（课本）
- 能量法
- 正交性（重点）

非线性振动要考，但是简答题；不考静态分岔