粘性流体层流的基本运动

流体力学

> ✎ **Note**
>
> 本章内容主要参考吴望一老师的《流体力学》

N-S 方程的小雷诺数近似解

粘性不可压缩流体方程组的复杂性在于惯性力项是非线性的，从而使得整个方程组成为非线性的方程组，而数学上要解一个非线性方程组却是非常困难的。我们知道 Re 数表征惯性力和粘性力之比，所以这时候出现两个极端：Re 很大和 Re 很小。当我们所研究的问题特征速度以及特征尺度都比较小，流体粘性比较大时， Re 就比较小，也就意味着粘性力比惯性力要大很多，因此可将惯性力作零阶近似。

斯托克斯解

我们将惯性项全部略去，得到斯托克斯近似或斯托克斯流动。于是 N-S 方程可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

在小雷诺数问题中，绕圆球的小雷诺数流动最为典型。

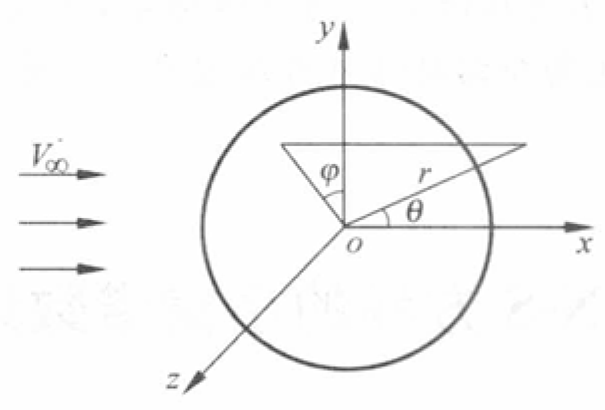


图 7-1　圆球绕流

由于对称性，在球坐标系中有 $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0, v_\varphi=0$，则运动方程组满足

1. 连续性方程：

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0$$

2. 动量方程:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right)$$

3. 角动量方程:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

我们给出边界条件:

1. 圆球表面 $r=a$ 上

$$v_r=0, v_\theta=0$$

2. 无穷远处

$$v_r=V_\infty\cos\theta,\quad v_\theta=-V_\infty\theta$$

我们采用分离变量方法求解上述方程，取

$$v_r=j(r)J(\theta)\quad v_\theta=k(r)K(\theta)\quad p=\mu l(r)L(\theta)+p_\infty$$

带入无穷远处的边界条件可得

$$J(\theta)=\cos\theta,\quad K(\theta)=-\sin\theta,\quad j(\infty)=V_\infty,\quad k(\infty)=V_\infty$$

将上述关系式带入到我们的运动方程组中有

$$\begin{aligned}
&\cos\theta\left[j'-\frac{k}{r}+\frac{2j}{r}-\frac{k}{r}\right]=0\\
&L(\theta)l'(r)=\cos\theta\left[j''-\frac{j}{r^2}+\frac{2j'}{r}-\frac{j}{r^2}+\frac{2k}{r^2}-\frac{2j}{r^2}+\frac{2k}{r^2}\right]\\
&L'(\theta)\frac{l}{r}=\sin\theta\left[-k''+\frac{k}{r^2}-\frac{2kk'}{r}-\frac{k}{r^2}\cot^2\theta-\frac{2j}{r^2}+\frac{k}{r^2}\csc^2\theta\right]
\end{aligned}$$

显然， $L(\theta)=\cos\theta$，所以上述方程也可以简写成如下形式

$$\begin{aligned}
j'+\frac{2(j-k)}{r}&=0\\
l'(r)=j''+\frac{2j'}{r}&-\frac{4(j-k)}{r^2}\\
\frac{l}{r}=k''+\frac{2k'}{r}&+\frac{2(j-k)}{r^2}
\end{aligned}$$

我们将上述方程变形可得

$$r^3 j'''' + 8r^2 j''' + 8rj'' - 8j' = 0$$

这是一个欧拉方程，解具有 r^k ，k 有下面的特征方程给出

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

解答 $k = 0, 2, -1, -3$，所以

$$j = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2$$

同样的，我们可以解出

$$k = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2$$
$$l = \frac{B}{r^2} + 10rD$$

利用边界条件可以确定上述系数，我们直接给出最终结果

$$v_r(r,\theta) = V_\infty \cos\theta \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right]$$
$$v_\theta(r,\theta) = -V_\infty \sin\theta \left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right]$$
$$p(r,\theta) = -\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty a}{r^2}\cos\theta + p_\infty.$$

讨论作用在圆球上的力，由于流场关于 φ 对称，所以流场作用在圆球上的力只有一个正应力和切应力分量

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}$$
$$p_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

利用之前所导出的结论可得在球面上的力

$$p_{rr} = \frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{a}\cos\theta - p_\infty$$
$$p_{r\theta} = -\frac{3\mu V_\infty}{2a}\sin\theta$$

作用在圆球上的合力

$$R = \int_S (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta) dS = 6\pi\mu V_\infty a$$

在无粘二维平面流动中，我们定义了阻力系数，同样的我们可以定义斯托克斯阻力系数

$$C_D = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re}$$

奥森解

当 $Re > 1$ 时，实验结果和斯托克斯解出现偏差。s实际上，我们不能很简单的丢到我们的非线性项，我们将 N-S 方程还原成如下形式

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

奥森将速度写作

$$v_j = V_\infty + v_j'$$

v_j' 在无穷远处附近是一小量。将上式带入到惯性项中，并忽略二阶小量可得

$$V_\infty \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

该方程仍然线性方程，而且保留了惯性项。采用求解斯托克斯的方法可以求得阻力和对应的阻力系数

$$R = 6\pi\mu V_\infty a \left(1 + \frac{3aV_\infty}{8\nu}\right)$$
$$C_D \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right)$$

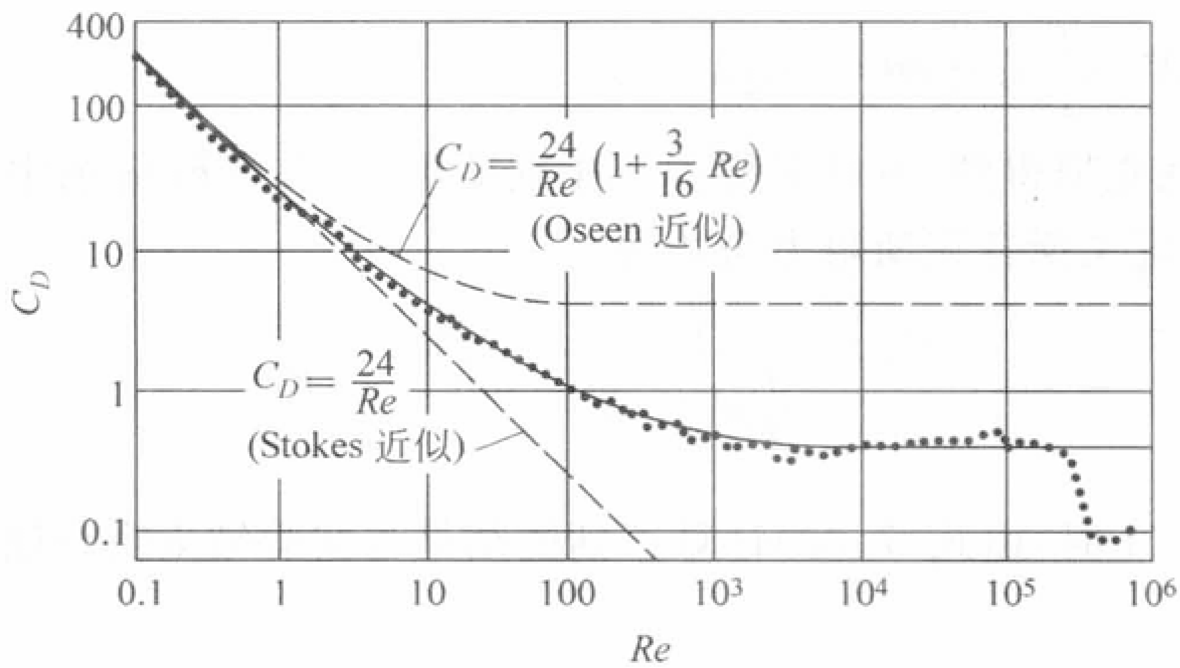
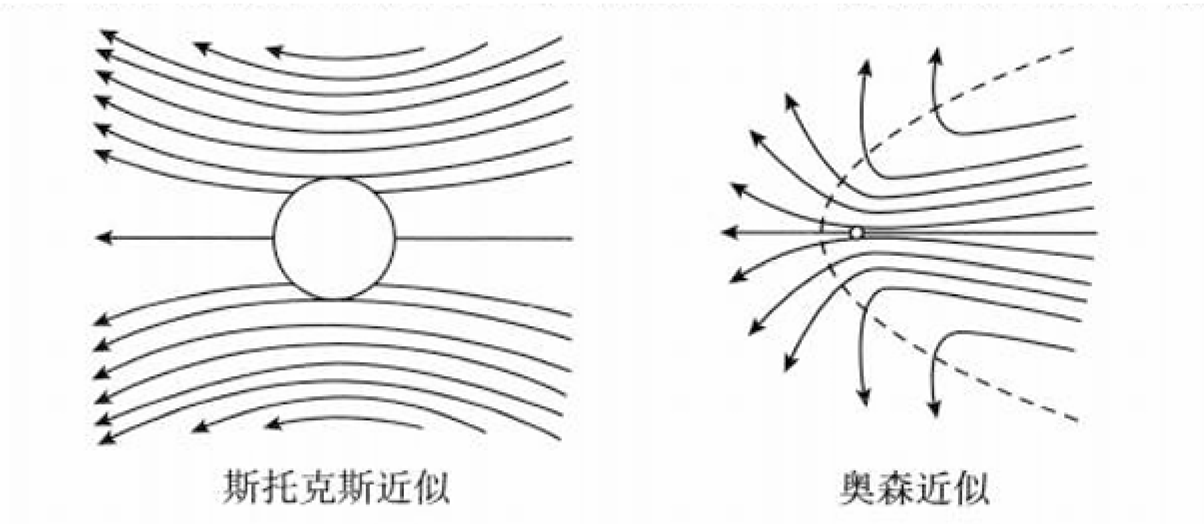


图 7-2　小 Re 数下阻力系数与 Re 数的关系

奥森公式在 $Re \leq 5$ 都采用，但是在阻力角度，奥森公式较斯托克斯并无特别显著的改变



上面两个图可以很明显表示处斯托克斯近似和奥森近似的差别。实验表明，奥森近似在定性方面与实际结果相符合。

普朗特边界层方程

采用边界层理论作为在大 Re 情形下的近似解。边界层理论最主要的任务是计算物体在流体中运动时摩擦阻力和热传递，同时附带阐明理想流体所不能解释的一些现象，如分离，以及理想流体理论在压强分布、速度分布及升力等方面为什么和实验结果相当符合等问题。

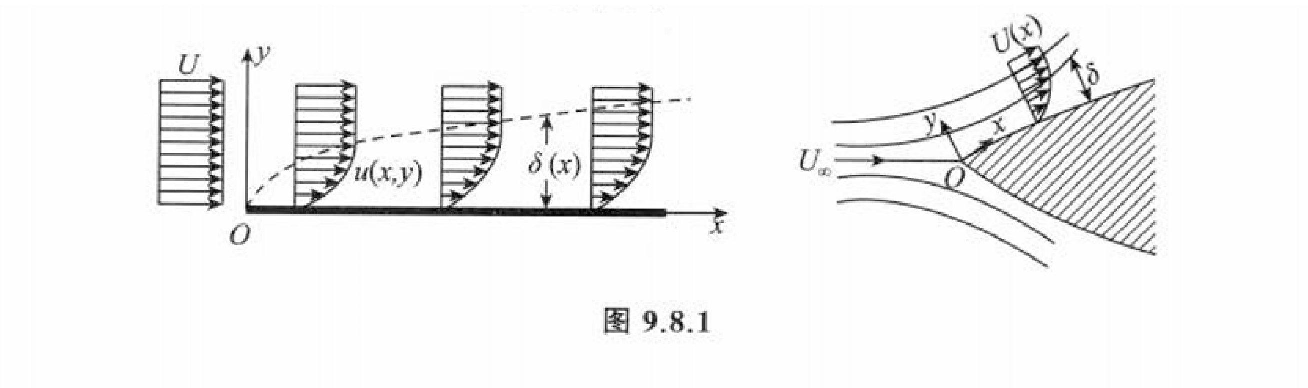


图 9.8.1

如上图所示，流场可以很明显分成性质不同的两个区域：一个紧贴物面非常薄的一层区域，称为边界层；另一个是边界层外整个流动区域，称为外部流动区。在外部流区，物面对于流动的滞止作用大大地削弱，各截面速度分量变化缓慢，对应的粘性应力比惯性力小得多，可以略去，将流体视作理想的。但是在边界层内的速度分类沿屋面法向变化非常迅速，所以粘性力 $\tau=\mu \partial u / \partial y$ 可以达到很高的数值，这是一种强烈的剪切运动，每点都有强度很大的涡旋。

我们用边界层沿物体表面法线方向的距离即**边界层的厚度** δ 表征边界层区域。通过量纲分析可得，边界层的边界满足下列关系式

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{V_{\infty}}}$$

取物体后缘处最大的边界层厚度

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{V_\infty}}$$

即

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad Re = \frac{LV_\infty}{\nu}$$

所以边界层厚度和物体的特征之比和 $\sqrt{Re}$ 成反比，当 Re 很大时， δ 与特征长度相比是一个非常小的量。

不可压缩二维层流边界层微分方程

我们给出无量纲化的二维连续性方程和 N-S 方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\
&St\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) \\
&St\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right).
\end{aligned}$$

St 是斯特劳哈尔数，其他无量纲量满足

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{u}{V}, \quad v' = \frac{v}{V}, \quad p' = \frac{p}{\rho V^2}, \\
x' &= \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{t}{T},
\end{aligned}$$

我们在上述无量纲方程估计每一项的量阶：估计有一个标准，量阶都是相对于这个标准而言，标准改变后，整个物理量的量阶可以完全不同；量阶不是指该物理量或几何量的具体数值，而是指该量在整个区域内相对于标准小参数而言的平均水平。

我们取 $\delta' = \delta/L$ 为估计标准

1. u' 及其各阶导数的量阶

$$u' \sim 1, \frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1, \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sim 1, \frac{\partial u'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}, \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'^2},$$

2. v' 及其各阶导数的量阶

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} \sim \delta', \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \sim \delta', \frac{\partial v'}{\partial y'} \sim 1, \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'}.$$

3. $St\frac{\partial u'}{\partial t'}$ 及 $St\frac{\partial v'}{\partial t'}$ 的量阶

$$St\frac{\partial u'}{\partial t'} \sim u'\frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1, St\frac{\partial v'}{\partial t'} \sim u'\frac{\partial v'}{\partial x'} \sim \delta'.$$

4. $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 及 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim 1, \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta'.$$

由于 Re 很大时，δ 很小。忽略如下量阶

1. $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ 及 $\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}$ 的量阶比$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$ 及 $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}$ 低二阶，故可略去
2. $\frac{\partial^2 p'}{\partial y'}$ 比 $\frac{\partial^2 p'}{\partial x'}$ 低一阶，在一级近似范围可认为 $\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$

可得简化方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\
&St\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}
\end{aligned}$$

转化为有量纲形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

由于边界层压力 p 与 y 无关，取外部势流交界处的压力，则该处压力可以通过外部势流的伯努利方程得到:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

所以可得不可压缩二维层流边界微分方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

做一个简单的归纳:

边界层厚度	$\delta'=O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$
速度及其导数	$u'=O(1)$ $u'=O(\delta')$ $\frac{\partial}{\partial x'}=O(1)$， $\frac{\partial}{\partial y'}=O\left(\frac{1}{\delta'}\right)$， $\frac{\partial}{\partial y'}\gg\frac{\partial}{\partial x'}$
压强及其导数	穿过边界层压强不变 $\frac{\partial}{\partial y'}=O(\delta')$， $\frac{\partial}{\partial x'}=O(1)$， $\frac{\partial}{\partial x'}\gg\frac{\partial}{\partial y'}$
惯性力和黏性力	同阶

Note

穿过边界层压强不变这是一件非常重要的事情，它解释了为什么有些时候我们可以利用理想流体模型来表示一个粘性流体作用结果。如果此时我们所研究的模型边界层很薄（如不分离绕流），物面上的压强分布和边界层外部边界上理想外流的压强分布完全一样，由于边界层很薄，边界层外部边界上的压强分布和理想物体绕流压强分布相差甚微。

不可压缩二维边界层的动量积分关系式

位移厚度

采用动量积分方法将用到几个厚度，其中之一是位移厚度。边界层的存在导致该区域内的流体的流量比不考虑边界层的情形减少，减少的量：

$$\rho\int_0^\infty (U-u)dy$$

令宽度的变窄量为 δ^*，则

$$\rho U\delta^*=\rho\int_0^\infty (U-u)dy$$

则

$$\delta^*=\int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

动量损失厚度

边界层内流量减少的同时，流体的动量也相应减少，可以采用与位移厚度相似的动量损失厚度来描述动量的减少量。

$$\rho\int_0^\infty uU dy-\int_0^\infty u^2\,dy\rho=\int_0^\infty u(U-u)\,dy$$

该减少量等于因边界层导致的流道变窄而带来的流体动量减少，令流道变窄量为 θ，则

$$\rho U^2\theta = \rho\int_0^\infty u(U-u)\,dy$$

则

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

能量损失厚度

边界层中流体速度降低也使通过流体的动能减少，令能量损失厚度为 δ_e，则

$$\delta_e = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u^2}{U^2}\right)dy$$

卡门动量积分公式

考虑定常流动，不可压缩二维层流边界微分方程可以简写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0,\\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

所以对上述方程积分可得

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u(U-u)dy+\frac{dU}{dx}\int_0^\infty (U-u)dy=\frac{\tau_w}{\rho}$$

其中 $\frac{\tau_w}{\rho}=\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$

如果引用位移厚度 δ^* 和动量损失厚度 θ 的定义，可将上述化简为

$$\frac{d}{dx}(U^2\theta)+\frac{dU}{dx}d\delta^*=\frac{\tau_w}{\rho}$$

展开并定义形状因子 $H=\delta^*/\theta$ 得

$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\theta(2+H)=\frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

布拉修斯相似解

布拉修斯相似解

相似解是指沿边界层的流动方向，在不同的 x 处，流体运动的速度剖面相似。更具体地说，如果以势流的速度分布 $U(x)$ 为速度 u 的尺度因子，边界层厚度 $\delta(x)$ 为坐标 y 的尺度因子，

则存在无量纲坐标 $y/\delta(x)$ 上表出的无量纲速度剖面 $u/(U(x))$ 对于不同的 x 将完全相同，也就是

$$\frac{u\left(x_1, \frac{y}{\delta(x_1)}\right)}{U(x_1)} = \frac{u\left(x_2, \frac{y}{\delta(x_2)}\right)}{U(x_2)}$$

$x_1 x_2$ 是我们任取的两个坐标，因此相似性解只依赖于一个组合变数 $y/\delta(x)$。

考虑无限空间中一均匀气流以速度 U 沿板面方向定常地向一半无穷长且厚度为零地平板流来。

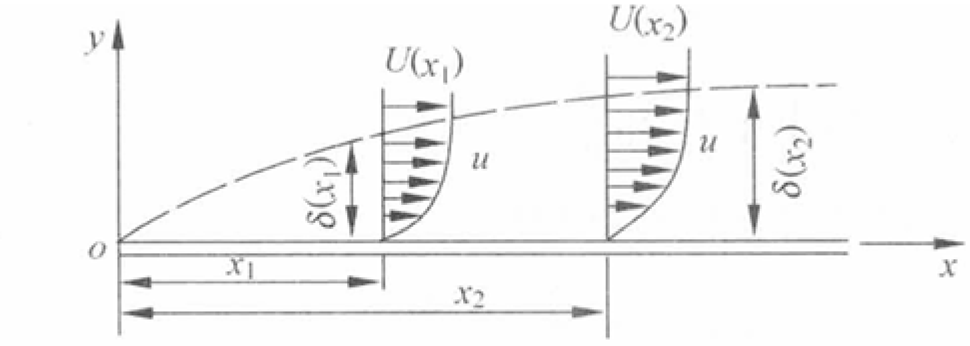


图 7-8　边界层速度剖面的相似性

我们考虑的是一个很简单的等速常压情形，普朗特边界方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

由连续性方程，我们可以引入一个流函数满足

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

引入无量纲参数

$$x = Lx' \quad y = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}y' \quad = Uu'$$
$$v = \frac{U}{\sqrt{\mathrm{Re}}}v' \quad \psi = \sqrt{\nu U L}\psi'$$

对于我们引入的半无穷长平板，特征长度没有意义，所以无量纲函数只依赖与无量纲坐标

$$\psi' = \psi'(x', y')$$

所以对应有量纲函数

$$\psi = \sqrt{\nu U L}\psi'\left(\frac{x}{L}, y\sqrt{\frac{U}{\nu L}}\right)$$

但是我们的解仍与特征长度有关，为了消去其影响，取一个自变量

$$\eta = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y\sqrt{\frac{U}{\nu L}}}{\sqrt{\frac{x}{L}}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

对流函数

$$\frac{\psi'}{\sqrt{x'}} = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U L}}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{L}}} = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U x}}$$

我们希望其是一个关于自变量 η 的函数即

$$\psi' = \sqrt{x'}f\left(\frac{y'}{\sqrt{x'}}\right)$$

所以对应流函数

$$\psi = \sqrt{\nu U x}f\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \equiv \sqrt{\nu U x}f(\eta)$$

我们来更详细描述以下边界层的解是相似的这件事：

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \sqrt{\nu U x}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}f' = Uf'(\eta)$$

所以

$$\frac{u}{U} = f'(\eta)$$

这表示沿 x 轴方向上的速度 u 是 η 的函数。由于边界层厚度满足

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

所以我们的组合变数应当满足关系

$$\frac{y}{\delta(x)} \sim y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \eta$$

所以

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

现在求解 f，由 N-S 方程给出

$$2f''' + ff'' = 0$$

边界条件:

$$\begin{cases} \eta = 0 \quad f = f' = 0 \\ \eta = \infty \quad f' = 1 \end{cases}$$

这是一个非线性三阶常微分方程，无法找出封闭形式的解析解。布拉修斯采用级数方法

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \eta^n$$

可以证明

$$\begin{cases} f^{(3k)}(0) = 0 \\ f^{(3k+1)}(0) = 0 \\ f^{(3k+2)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_k \alpha^{k+1} \end{cases}$$

其中

$$\alpha = f''(0), \quad C_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} C_{k-r-1} C_r$$

数值积分方法:

表 9.9.1

$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''	$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	f'	f''
0	0	0	0.33206	3.2	1.56911	0.87609	0.13913
0.4	0.02656	0.13277	0.33147	3.6	1.92954	0.92333	0.09809
0.8	0.10611	0.26471	0.32739	4.0	2.30576	0.95552	0.06424
1.2	0.23795	0.39378	0.31659	4.4	2.69238	0.97587	0.03897
1.6	0.42032	0.51676	0.29667	5.0	3.28329	0.99155	0.01591
2.0	0.65003	0.62977	0.26675	6.0	4.27964	0.99898	0.00240
2.4	0.92230	0.72899	0.22809	7.0	5.29926	0.99992	0.00022
2.8	1.23099	0.81152	0.18401	8.0	6.27923	1.00000	0.00001

布拉修斯平板解

我们根据数值计算结果，分析平板边界层的主要物理量。我们们规定纵向速度分离和外流值 U 相差 1% 的地方为边界层厚度，此时对应的 $\eta = 5$，于是边界层厚度为

$$\delta = 5.0\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

板上的局部阻力

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.332\mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}$$

局部阻力系数

$$C_x = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.664\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \triangleq \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

长为 L，宽为 b 且两边浸润在流体中的平板所受总摩擦阻力为

$$D = 2b\int_0^L \tau \,\mathrm{d}x = 1.328b\sqrt{\mu\rho U^3 L}$$

总的阻力系数

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$