Stiffness Method

有限元方法

> 以下三种方法用于计算机编程

Matrix Partitioning

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{fix} \\ d_? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_? \\ F_{fix} \end{Bmatrix}$$

用 $[\,]_{fix}$ 表示已知位移或应力，用 $[\,]_?$ 表示未知量，因此求解的步骤为：

1. 求解： $K_{22}d_? = F_{fix} - K_{21}d_{fix}$
2. 求解： $F_? = K_{11}d_{fix} + K_{12}d_?$

Note

如果此时已知量为 0 （固定约束），我们可以删除对应行列的元素，比如说 d_{11} 位移为零，那么我们就可以删除第一行和第一列的元素，此时求解步骤为

$$\begin{aligned} K_{22}d_? &= F_{fix} \\ \Longrightarrow F_? &= K_{12}d_? \end{aligned}$$

这样方便求解

- Advantages:
  - 待求的方程比较少

    - 满足特定约束
- Disadvantages:
    - 需要改变方程数量
    - 不易编程

Row Substitution

假定约束条件给出 $d_i = \delta$， 则我们可以直接将其直接带入 Global Equation：

$$\begin{bmatrix} & & & \cdots & \\ K_{i_1} & K_{i_2} & \cdots & K_{ii} & \cdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \end{Bmatrix}$$

同时保留位移信息

$$\begin{bmatrix} & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}$$

Penalty Method

我们也可以将约束转换成一个比较大的惩罚项:

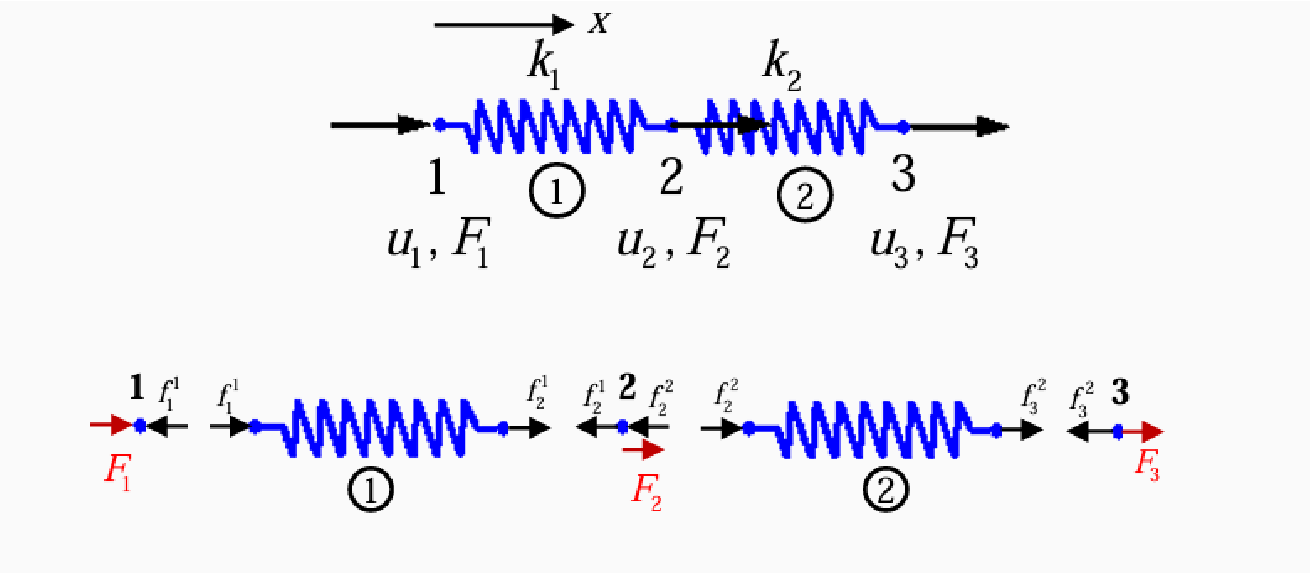
$$\begin{bmatrix} & & & \cdots & \\ K_{i_1} & K_{i_2} & \cdots & K_{ii} + BIG & \cdots \\ & & & \cdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i + BIG \times \delta \end{Bmatrix}$$

展开后:

$$\begin{aligned} \text{small} + (BIG)d_i &= \text{small} + BIG \times \delta \\ \implies \qquad d_i &= \delta \end{aligned}$$

一般取 $\delta = 10^{15}(K_{ii})_{rep}$

考虑两个弹簧的简单串联问题:



给出两个弹簧满足的平衡方程

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix}$$

考虑节点处的平衡条件可得装配后全局刚度矩阵:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Note

如果通过组合元素刚度来创建全局刚度矩阵，k_{22} 是由作用于节点 2 的直接刚度之和给出，这是兼容性条件所要求的。
k_{ij} 一般是负的（反作用力）或者是零（无作用效果）

Tip

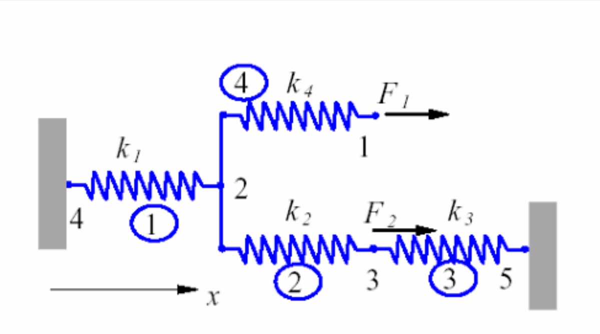
- 位置 ii 中的项由所有在节点 i 处汇合的元素的直接刚度总和组成
- 位置 ij 项由连接节点 i 和 j 的所有元素与节点 i 和 j 有关的间接刚度综合构成
- 反作用力项添加负值
- 为不发生相互作用的节点组合添加一个零

N 个自由度会产生一个 $N \times N$ 的刚度矩阵（方阵）

- （全局）刚度矩阵的 i 行与位移的积等于作用在系统第 i 个自由度的外力

- 刚度矩阵的第 j 列表示使 j 节点产生单位位移，其余节点不变所需要的力。
- 一般而言刚度矩阵为对称矩阵，对角线元素为正，矩阵为奇异矩阵

举个🌰



考虑如图系统，对于节点 (1) 直接刚度为 k_4 ，节点 (1) 和节点 (2) 之间的连接弹簧刚度为 k_4 其作用效果为反作用力；对于节点 (2) ，直接相连的弹簧有 k_1, k_2, k_4 ，节点 (2) 与节点 (4) 之间的连接弹簧刚度为 k_1 ，节点 (2) 和节点 (3) 之间的连接刚度弹簧节点为 k_2；对于节点 (3) ，直接相连的弹簧有 k_2, k_3 ，除了节点 (2) 外还与节点 (5) 相连；对于节点 (4) ，直接刚度为 k_1 ，与节点 (2) 相连；对于节点 (5) ，直接刚度为 k_3 ，与节点 (3) 相连，所以全局刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_4 + k_2 + k_1 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

还有一种求法，其思想与上面的两个弹簧装配问题类似，对于弹簧 k_l ，其两端节点的位移分别为 u_i, u_j （i, j, l 不一定要相等），则此时局部刚度矩阵

$$\mathbf{k}_l = \begin{bmatrix} k_l & -k_l \\ -k_l & k_l \end{bmatrix}$$

将其叠加就可得到全局装配矩阵

在这个例子中，对于弹簧 k_1 ，其作用两端节点位移为 u_2, u_4；对于弹簧 k_2 ，其作用两端节点位移为 u_2, u_3，对于弹簧 k_3 ，其作用两端节点位移为 u_3, u_5；对于弹簧 k_4 ，其作用两端节点位移为 u_1, u_2，将其叠加可得全局刚度矩阵。

我们还能利用 Lagrange 方程或者能量最小原理得到上述方程。