多自由度振动 I

振动力学

多自由度振动系统

对于多自由振动系统，直接利用牛顿力学建立运动方程是一件非常复杂的事情。我们考虑利用Lagrange方程建立系统方程。

给出 Lagrange 作用量

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2} R_{ij} q_j q_i$$

带入 Lagrange 方程中有：

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i(t)$$

$Q_i(t)$ 为广义力，它包括阻尼力和外加激励。

如果在 Lagrange 量中引入能量耗散函数

$$D = \frac{1}{2} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

则将 Lagrange 方程改写成

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = Q_i(t)$$

此时广义力只有外加激励的作用结果。

将上述的 Lagrange 方程展开可得多自由度振动系统的振动微分方程

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F$$

这个方程对于单自由振动系统一定成立，但是对于多自由度振动系统，系统中仍存在其他作用因素

1. 科氏力（也称陀螺力） $G\dot{q}$
2. 因张力刚度发生的变化 $\widetilde{K}q$

这些因素在后面暂时不会考虑，我们对科氏力做一个简要说明，首先系数矩阵 G 是一个反对称矩阵

$$G = -G^T$$

所以无法将其与阻力系数矩阵 C 合并。

科氏力是一个保守力，考虑一个陀螺，陀螺转动能保持长时间的稳定，我们可以将其视作是一种保守系统，即没有能量的耗散。

保守状态的多自由振动系统

模仿双自由度系统，考虑方程

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

我们依旧假定解的形式

$$X = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

带入

$$(K - \lambda_i M)X_{i0} = 0$$

其中 $\lambda_i = \omega_i^2$

显然这也是一个类似于特征值的求解问题，我们假定解满足

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$$

和对应的特征向量（也就是振型）

$$\varphi_1, \varphi_2，\ \cdots，\ \varphi_n$$

显然，特征值可能出现重根和零根的情况，我们暂时先不考虑

如果出现重根情况，重根对应的特征矢量不能唯一确定（因为其对应的特征矢量任意线性叠加都是其特征矢量），但是我们可以通过正交性确定对应的特征矢量。

我们依旧能给出刚度矩阵、质量矩阵和振型满足的关系式

$$\begin{aligned}
\varphi_j^T K \varphi_j &= \begin{cases} 0 & i \ne j \\ \overline{K}_i & i = j \end{cases} \\
\varphi_j^T M \varphi_j &= \begin{cases} 0 & i \ne j \\ \overline{M}_i & i = j \end{cases} \\
\omega_i &= \frac{\overline{K}_i}{\overline{M}_i}
\end{aligned}$$

证明如下：对于第 i 个和第 j 个主振型矢量 Φ_i 和 Φ_j 有

$$\begin{aligned}
K\Phi_i &= \lambda_i M \Phi_i \\
K\Phi_j &= \lambda_j M \Phi_j
\end{aligned}$$

对于上述两个式子，分别左乘 Φ_j^T 和 Φ_i^T 可得

$$\Phi_j^T K\Phi_i = \lambda_i \Phi_j^T M\Phi_i$$
$$\Phi_i^T K\Phi_j = \lambda_j \Phi_i^T M\Phi_j$$

由于 K 和 M 都是对称矩阵，所以有

$$\Phi_j^T K\Phi_i = \Phi_i^T K\Phi_j$$

$$\Phi_j^T M\Phi_i = \Phi_i^T M\Phi_j$$

将其带入之前的表达式中，两式相减可得

$$(\lambda_i - \lambda_j)\Phi_i^T M\Phi_j = 0$$

所以可以证得正交性。

对于不同固有频率的主振型关于质量矩阵和刚度矩阵正交，这就是多自由度振动系统的主振型的正交性。

有阻尼的多自由度振动特殊情况

由于振型之间相互正交，所以他们构成了 N 维向量空间的一组正交基

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i(t) = T\{q\}$$

带入到运动方程中有

$$M(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \ddot{q}_i(t)) + C(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \dot{q}_i(t)) + K(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i(t)) = F$$

我们对方程解耦

什么是耦合呢？他表示一个广义坐标下运动对另一个广义坐标下的运动影响，或者说振动元素的相互作用现象，在系统的振动微分方程中，耦合表现为系统的质量矩阵、刚度矩阵或阻尼矩阵的非对角元素不为零。

对于无阻尼振动，我们可以利用正交性来对方程解耦，也就是将存在耦合的振动转换为不存在耦合的情况。解耦后系统的实际运动表现为多个单自由度系统的振动

但是对于阻尼系统，我们不一定能通过正交性来解耦，因为 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_j^T C\varphi_i \dot{q}(t)$ 不一定是一个对角矩阵。一般有两种处理方法：忽略非对角线元素 $\sum_{i=1}^{n} \varphi_j^T C\varphi_i \dot{q}(t) \approx \overline{C}_j q_j$ (一般适用于弱阻尼系统， ξ 不大于 0.2)或采用比例阻尼 $C = \alpha M + \beta K$。

于是我们可以将方程解耦成如下形式

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j$$

其中 $f_j = F/M_j$

我们如何确定 ξ_j 呢？他是一个无量纲常数，一般数值较小。一种办法是直接将其取为一个常数，而对于比例阻尼则有

$$\xi_j = \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{\omega_j} + \beta\omega_j)$$

我们也可以对初始条件进行解耦，比如说对于位移初始条件：

$$x(0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i(0)$$

左乘 $\varphi_j^T M$ 有

$$\varphi_j^T M x(0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j^T M \varphi_i q_i(0) = \overline{M}_j q_j(0)$$

以上方法称为主坐标分析法or主振型叠加法

最后，我们利用杜哈梅积分对上述方程求解

Miscellaneous

对于一个多自由度振动系统，我们可以根据振型的个数 n 分成低频、中频和高频三种类型。对于低频振动，我们常取 $m(m << n)$ 个振型来研究，而对于高频振动，我们常用的方法是知统计能量分析（Statistical Energy Analysis 简称SEA）。而对于中频振动，暂时没有一个比较好的研究思路。

缺 无根、重根笔记