应力和应变的关系

弹性力学

变形体力学的基本关系

- 平衡关系：平衡方程、力的边界条件
- 连续关系：应变-位移关系（几何关系）
- 物理关系：应力-应变关系（本构关系）

我们可以给出应力应变最一般的形式

$$\sigma_i = f_i(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$$

注：σ_i表示三组正应力和三组切应力，我们直观上认识到 $f_i(i=1,2,\ldots,6)$ 取决于材料本身的物理特性。
我们依旧回到小变形，在这个条件下，我们可以合理~~（疯狂）~~运用泰勒展开，忽略二阶以上的小量，也就是

$$\begin{aligned}\sigma_i = f_i(0) &+ \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} f_i(0)\right)\varepsilon_x + \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_y} f_i(0)\right)\varepsilon_y + \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_z} f_i(0)\right)\varepsilon_z \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{yz}} f_i(0)\right)\gamma_{yz} + \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{xz}} f_i(0)\right)\gamma_{xz} + \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{xy}} f_i(0)\right)\gamma_{xy}\end{aligned}$$

由无初始应力条件可以导出

$$\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

其中 C_{ij} 为材料常数，是一个四阶张量。如果物体是由非均匀材料组成，各处就有不同的弹性效应。

该式也就是复杂情况的广义胡克定律。

这36个材料常数的关系曾一度引起欧洲无数争论，直到Green从能量角度结束了这场纷争。

热力学基本定律

热力学第一定律

我们来考虑弹性体变形的功能变化关系。(老师的PPT和课本不一样🤔)

由热力学第一定律我们有

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dE_k}{dt}+\frac{dV_1}{dt}+\frac{dQ}{dt}$$

其中 $\frac{dW}{dt}$ 表示单位时间内外力所做的功，$\frac{dE_k}{dt},\frac{dV_1}{dt}$ 表示单位时间内动能和内能变化，$\frac{dQ}{dt}$为热量变化。

如果以率形式（其实也就是单位时间变化:-| 更直白点就是导数）表示总体能量守恒定律

$$\dot{U}+\dot{K}=\dot{A}+\dot{Q}$$

给出内能和动能率形式:

$$U=\int_V \dot{u}dV, V=\int_V \rho v_i\dot{v}_i dV$$

以及由体力和面力作用的外力功率和热源与热量引起的热量变化率:

$$\dot{A}=\int_V F_i v_i dV+\int_S T_i v_i dS \quad \dot{Q}=\int_V rdV-\int_S h_i n_i dS$$

其中 h 为热流速率矢量（单位时间内沿温度梯度方向流经单位面积的热量），热流方向与法线方向相反，所以取减号，也就是流入为正流出为负，r 为热源强度（单位时间内单位以及产生的热强）

将表达式带回热力学第一定律

$$\int_V \dot{u}dV+\int_V \rho_i v_i\dot{v}_i dV=\int_V F_i v_i dV+\int_S T_i v_i dS+\int_V rdV-\int_S h_i n_i dS$$

有高斯定理有

$$\int_S T_i v_i dS=\int_S \sigma_{ij}n_j v_i dS=\int_V(\sigma_{ij}v_i)_{,j}dV=\int_V(\sigma_{ij,j}v_i+\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij})dV$$

$$\int_S h_i n_i dS=\int_V h_{i,i}dV$$

我们推导第一项高斯定理后一个等号的表达式

$$(\sigma_{ij}v_i)_{,d}=\sigma_{ij,j}v_i+\sigma_{ij}v_{i,j}$$

因为应变与位移变化存在如下关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

利用应变张量对称性可以得到

$$\sigma_{ij}v_{i,j}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

也就是应变的变化率，即对单位时间位移（即速度）求偏导然后组合可得单位时间内应变变化率

带入表达式中，有平衡方程最终可以化简成

$$\dot{u}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-h_{i,i}+r$$

其中 h 为热流速率矢量，r 为热源强度

这是热力学第一定律的局部形式，他揭示了变形后内能变化。

热力学第二定律

这时候考虑热力学第二定律，我们给出变化量和速率的表达式

$$\Delta H=\Delta H^{s}+\Delta H^{P}$$

ΔH表示总熵 ΔH^{s}表示供熵（$\Delta Q/T$） ΔH^{p}表示产熵

$$\dot{H}=\dot{H}^{s}+\dot{H}^{p}$$

$\dot{H}^{s}$ 表示熵的输入速率， $\dot{H}^{p}$ 表示熵的生成速率

我们分别给出总熵变化率、产熵变化率、供熵变化率

$$\dot{H}=\int_{V}\dot{\eta}dV,\dot{H}^{p}=\int_{v}\dot{\eta}^{p}dV,\dot{H}^{s}=\int_{V}\frac{r}{T}dV-\int_{S}\frac{h_{i}}{T}n_{i}dS$$

η为比熵

热力学第二定律告诉我们 $\dot{H}^{p}\geq 0$，利用高斯定律可得

$$\dot{\eta}^{p}=\dot{\eta}+(\frac{h_{i}}{T})_{,i}-\frac{r}{T}\geq 0$$

即 Clausius-Duhem不等式

现在我们有两个本构方程

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-h_{i,i}+r\\T\dot{\eta}&=-h_{i,i}+\frac{h_{i}}{T}T_{,i}+r+T\dot{\eta}^{p}\end{aligned}$$

带入可得

$$\dot{u}-T\dot{\eta}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{h_{i}}{T}T_{,i}-T\dot{\eta}^{p}$$

由全微分展开可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}-T\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}+\left(\frac{\partial u}{\partial T}-T\frac{\partial \eta}{T}\right)\dot{T}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{h_i}{T}T_{,i}-T\dot{\eta}^p$$

这是一个很复杂的方程，我们先考虑对于没有变形的单纯加热过程，即：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}-T\frac{\partial \eta}{T}\right)\dot{T}+\frac{h_i}{T}T_{,i}=-T\dot{\eta}^p\le 0$$

括号内的量（内能与熵）是状态函数，与过程无关，而温度变化率 $\dot{T}$ 与过程有关，他受外界影响调控（可快可慢、可正可负），这种影响是不利的，因而我们要消除这种不确定因素的影响，因此

$$\frac{\partial u}{\partial T}-T\frac{\partial \eta}{\partial T}=0$$

对任何热力学过程都适用。回到我们原本的方程中，将上式带入方程中展开可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}-T\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{h_i}{T}T_{,i}-T\dot{\eta_i}^p$$

提取整理张量ε_{ij}有

$$T\dot{\eta_i}^p=\sigma_{ij}^{(d)}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{h_i}{T}T_{,i}\ge 0$$

前一项表示内摩擦耗散功转化为热量引起的熵的生成速率，后一项表示热量在传递过程中耗散导致的熵生成速率
其中

$$\sigma_{ij}^{(d)}=\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(q)}，\sigma_{ij}^{(q)}=\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}-T\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$\sigma_{ij}^{(q)}$ 称为准保守应力，$\sigma_{ij}^{(d)}$称为耗散应力

自由能

我们得到了本构方程，但是本构方程中的变量又该如何表示呢

我们考虑Helmholtz自由能

$$F=u-T\eta$$

以率形式写出就是

$$\dot{F}=\dot{u}-T\dot{\eta}-\dot{T}\eta$$

展开得

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{\partial F}{\partial T}\dot{T}=\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}-T\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}+\left(\frac{\partial u}{\partial T}-T\frac{\partial \eta}{T}\right)\dot{T}-\eta\dot{T}$$

根据之前我们所得，我们得到

$$\sigma_{ij}^{(q)} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \eta = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

对于本构方程，如果我们以比熵 η 取代绝对温度 T 作为基本状态变量

$$\begin{gathered}\dot{u} = \sigma_{ij}^{(q)} \dot{\varepsilon}_{ij} + T\dot{\eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{gathered}$$

本构方程

讨论了这么多，让我们回到我们所研究的弹性材料，我们有如下结论

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij}^{(d)} = 0, \sigma_{ij}^{(q)} = \sigma_{ij} \\ &F = F(\varepsilon_{ij}, T), \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \eta = -\frac{\partial F}{\partial T} \\ &u = u(\varepsilon_{ij}, \eta), \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}, T = \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{aligned}$$

根据过程选择适当的参数有利于我们求解问题，

- 等温过程

$$F = F(\varepsilon_{ij}), \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- 等熵过程

$$u = u(\varepsilon_{ij}), \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

上面应力的表达式是不是非常眼熟？在这一节的讨论中，我们关注的是内能或自由能，在材料力学中，我们并没有涉及这两种能量，而关注的是应变能。于是上述表达式给我们启发：对于弹性体，我们可以假定其能量变换转化为应变能，简单来说就是

- 在绝热情况（等熵过程）下，应变能为内能的增量
- 在等温过程中，应变能为自由能的密度

应变能

不考虑过程，我们对应变能求导可得

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}, W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

将格林公式带入得

$$A=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}=\int_0^{\varepsilon_{ij}}dW$$

也就是应变能函数等于单位体元的变形功。

定义余应变能函数

$$W_c=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-W$$

对两边取微分，消去 $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$

$$dW_c=\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}$$

我们得到了卡式定律

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}}$$

对于一般线弹性情形:

$$W=W_c=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

也称 Clapeyron's formula

$$W(\varepsilon_{ij})=W_0+\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij}$$

我们从能量角度来推导柯西材料常数的关系。

考虑小变形，我们对应变能做二阶的泰勒展开

$$W(\varepsilon_{ij})=W_0+\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij}+\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=W_0+A_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

因为 $\sigma_{ij}=A_{ij}+C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$，且无初始应力，所以有

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

但是通过这样方法求出的材料常数有81个

我们引入应力的对称性和应变的对称性

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}=\sigma_{ji}=C_{jikl}\varepsilon_{kl}=C_{jikl}\varepsilon_{lk}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

所以可得

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}$$

这样就将常数化简成36个

各向异性弹性体

我们回忆材料常数矩阵

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

我们所要做的是找出上述常数之间的关系，尽可能减少变量，现在让我们建立几种常见的各向异性弹性体的应力与应变的关系

极端各向异性弹性体

考虑应变能

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

我们对其求导数

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}$$

用同样的方法对 ε_{kl}求导数可得

$$\sigma_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}, \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$$

考虑将指标互换可以得到关系式（也称Minor symmetry）

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

对于极端的各向异性体，只有21个独立弹性常数，材料矩阵为一个对称矩阵也就是

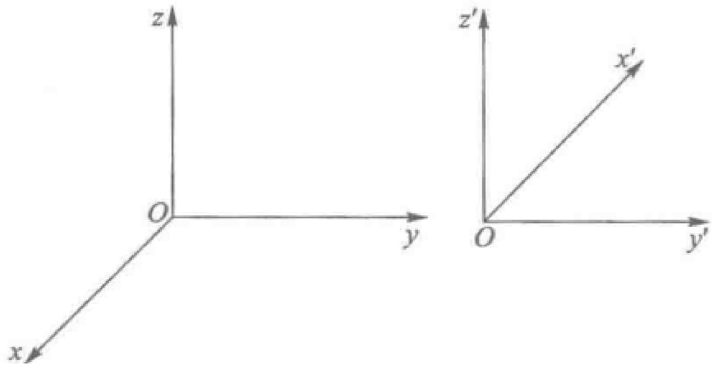
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ S & Y & M & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

(SYM表示对称部分)
极端的各向异性体可以看成各种弹性体的基础，无论是多么复杂的弹性体都要满足极端各向异性弹性体条件

有一个弹性对称面的各向异性弹性体

如果物体内的每一个点都存在这样一个平面，和该面对称的两个方向具有相同的弹性，则该平面称为物体的弹性对称面，而垂直于弹性对称面的方向称为物体的弹性主方向。

我们设下图 Oyz 平面为弹性对称面，即 x 轴为弹性主方向，做如图坐标变换得



	x	y	z
x'	$l_1=-1$	$m_1=0$	$n_1=0$
y'	$l_2=0$	$m_2=1$	$n_2=0$
z'	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

此时应力应变关系仍保持不变

我们可以得到弹性系数满足

$$C_{15}=C_{16}=C_{25}=C_{26}=C_{35}=C_{36}=C_{45}=C_{46}=0$$

此时弹性常数减少到13个

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & & \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & C_{56}\\ & & & & C_{56} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

正交各向异性弹性体

在上个弹性体的基础上，我们假定 Oxy 平面也是弹性对称面，可做如下图的变化

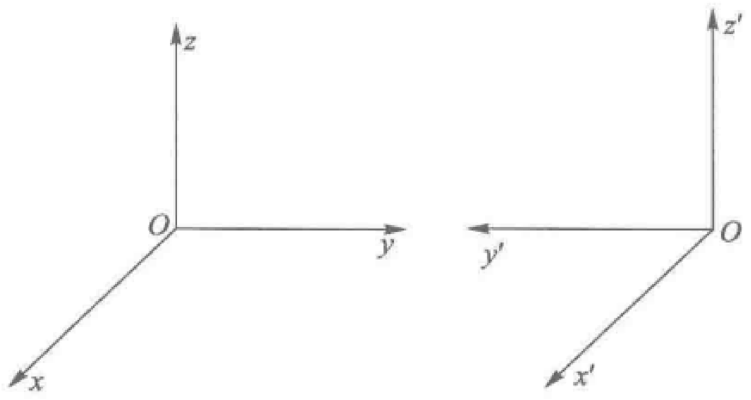


图 4-2

此时有

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{56} = 0$$

弹性常数减少到9个

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

如果在此基础上，我们假定剩下的平面也为弹性对称面，我们发现不会得到新的结果，也就是如果相互垂直的3个平面有2个是弹性对称面，则第三个平面必然也是弹性对称面，这种弹性体称为正交各向异性弹性体。

对于正交各向异性弹性体当坐标轴方向与弹性主方向一致时，正应力只与正应变有关，切应力只与对应切应变有关，因此拉压与剪切之间，以及不同平面内的切应力与切应变之间不存在耦合作用

横观各向同性弹性体

在正交各向异性的基础上，如果物体内每一点都有一个弹性对称轴，也就是说，每一点都有一个各向同性平面，在这个平面内，沿各个方向具有相同的弹性体，这种弹性体称为横观各向同性体。

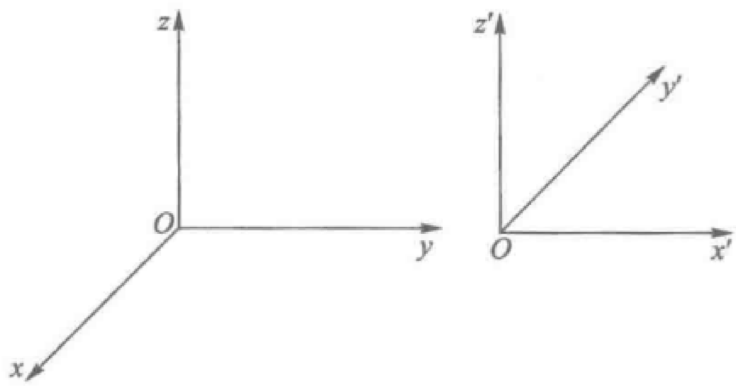


图 4-3

现在研究横观各向同性弹性体的材料常数。假定 Oxy 平面为各向同性平面，即 z 轴为弹性对称轴，先让坐标系统绕 z 轴旋转 $90°$，新老坐标关系如下

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & l_1=0 & m_1=1 & n_1=0 \\ y' & l_2=-1 & m_2=0 & n_2=0 \\ z' & l_3=0 & m_3=0 & n_3=1 \end{array}$$

给出应力应变所满足的关系

$$\begin{cases} \sigma_{x'}=\sigma_y, & \sigma_{y'}=\sigma_x, & \sigma_{x'}=\sigma_z \\ \tau_{y'z'}=-\tau_{xz}, & \tau_{x'z'}=\tau_{yz}, & \tau_{x'y'}=-\tau_{xz} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varepsilon_{x'}=\varepsilon_y, & \varepsilon_{y'}=\varepsilon_x, & \varepsilon_{x'}=\varepsilon_z \\ \gamma_{y'z'}=-\gamma_{xz}, & \gamma_{x'z'}=\gamma_{yz}, & \gamma_{x'y'}=-\gamma_{xz} \end{cases}$$

可以得出

$$C_{11}=C_{22}, C_{13}=C_{23}, C_{44}=C_{55}$$

弹性常数现在减少到6个

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & & & \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

然后我们将坐标轴绕z轴旋转任意角 φ，给出新老坐标关系

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & l_1=\cos\varphi & m_1=\sin\varphi & n_1=0 \\ y' & l_2=-\sin\varphi & m_2=\cos\varphi & n_2=0 \\ z' & l_3=0 & m_3=0 & n_3=1 \end{array}$$

由 $\sigma_{i'j'}=\sigma_{ij}n_{i'i}n_{j'j}$和 $\varepsilon_{i'j'}=\varepsilon_{ij}n_{i'i}n_{j'j}$得

$$\begin{cases}\tau_{x'y'}=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi\\ \gamma_{x'y'}=(\varepsilon_y-\varepsilon_x)\sin 2\varphi+\gamma_{xy}\cos 2\varphi\end{cases}$$

变换后仍满足

$$\tau_{x'y'}=C_{66}\gamma_{x'y'}$$

利用应力应变关系可以得出

$$2C_{66}=C_{11}-C_{12}$$

可见此时横观各向同性弹性体有5个独立弹性常数

各向同性弹性体

在正交各向弹性体的基础上，我们来研究我们在材料力学中最常接触到的各向同性弹性体。所谓各向同性体，就是沿各个方向上弹性性质完全相同，在数学上就是应力与应变在所有方位不同得坐标系中都一样。

我们在横观各向同性体的基础上做进一步化简。对横观各向同性体做如图坐标变化，应力应变关系仍保持不变

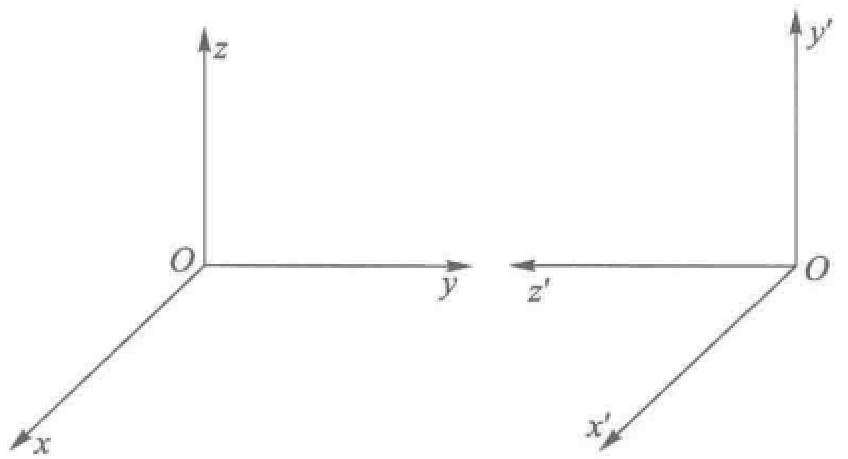


图 4-5

我们可得

$$C_{12}=C_{13},C_{11}=C_{33},C_{44}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})$$

因此，我们最终可做如下化简

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{12}\theta + (C_{11} - C_{12})\varepsilon_x \\
\sigma_y &= C_{12}\theta + (C_{11} - C_{12})\varepsilon_x \\
\sigma_z &= C_{12}\theta + (C_{11} - C_{12})\varepsilon_x \\
\tau_{yz} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

其中

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

引入拉梅（Lamé）常数 $\lambda = C_{12}, 2\mu = C_{11} - C_{12}$可化简成

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

（其中 $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$)

Lamé常数是连续介质力学最常用的常数之一。它分为拉梅第一常数 λ 和拉梅第二常数 μ(也称剪切模量)。第一参数λ没有物理解释，但其有助于化简胡克定律的刚度矩阵。两个参数构建了均质各向同性介质的弹性模量的参数化形式，并与其他弹性模量形成了联系。

> 下面特别乱!

取

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu)\theta$$

也就是体应变的胡克定律，所以可得

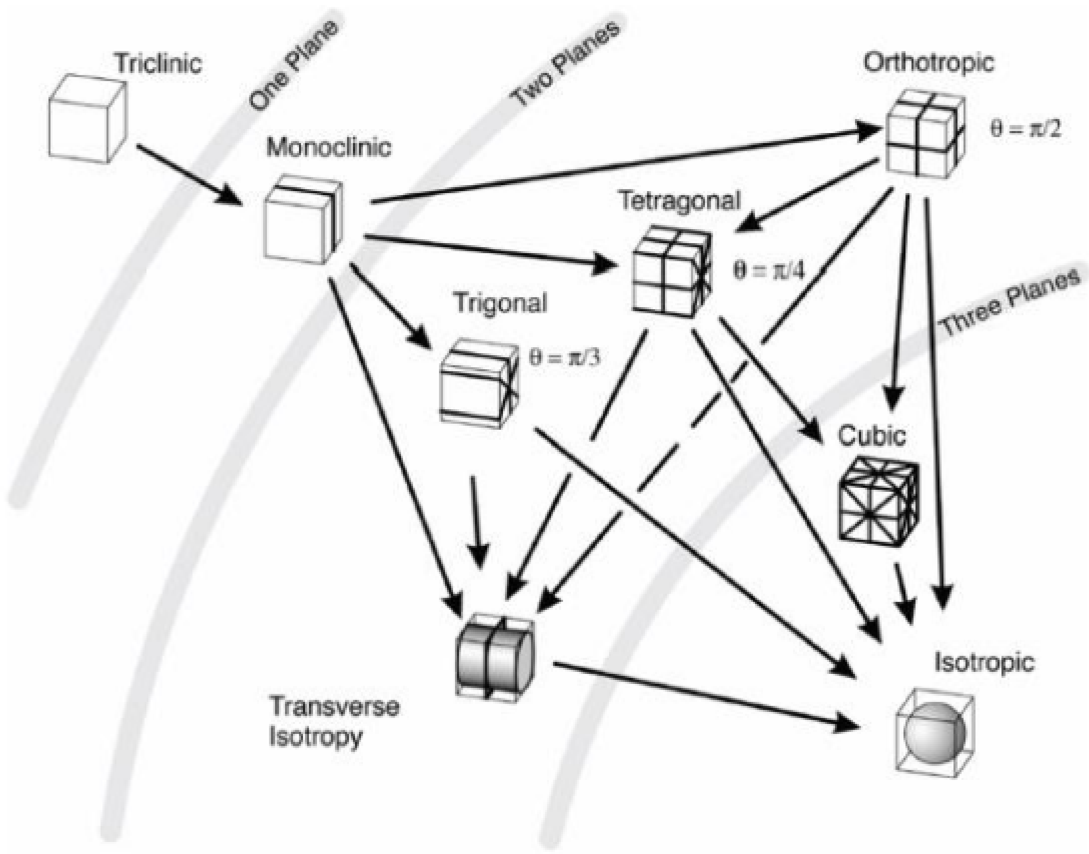
$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\Theta$$

引入体积模量(Bulk modulus)

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

可以得平均应力 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$满足关系

$$\sigma_m = K\theta$$



最终我们总结一下本构方程，这实际上在材料力学有胡克定律就可以导出

应力表示

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned}
$$

应变表示

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

弹性常数的测定

我们先考虑一种简单情况：一维试件的单向拉伸，假定沿x方向拉伸，此时 $\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$，此时试件为各向同性弹性体，所以有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_x \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}
\end{aligned}
$$

由实验结果有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x
\end{aligned}
$$

所以有

$$
E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}
$$

也就是我们材料力学所学的杨氏模量和泊松比

接着我们考虑纯剪切的情况：$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$
所以有

$$
\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{\mu}
$$

而实验结果给出

$$
\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}
$$

也就证明了 $\mu=G$

> **Note**
>
> 上面只需要记住以下几个东西：
>
> $$
> \begin{aligned}
> E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\
> \lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}
> \end{aligned}
> $$

我们给出应变能表示

$$
\begin{aligned}
W(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau\gamma_{xy}) \\
&= \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 - 2\nu(\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y) + 2(1+\nu)(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]
\end{aligned}
$$

显然，能量为正

$$
K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0
$$

也就得到泊松比小于 $\frac{1}{2}$