平面问题的极坐标系解答

弹性力学

极坐标方程

直角坐标系向极坐标系的坐标变换式:

$$egin{aligned} \sigma_{
ho} &= \sigma_x \cos^2 arphi + \sigma_y \sin^2 arphi + 2 au_{xy} \sin arphi \cos arphi \ \sigma_{arphi} &= \sigma_x \sin^2 arphi + \sigma_y \cos^2 arphi - 2 au_{xy} \sin arphi \cos arphi \ au_{
hoarphi} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin arphi \cos arphi + au_{xy} (\cos^2 arphi - \sin^2 arphi) \end{aligned}$$

我们给出极坐标形式的平衡微分方程

$$egin{aligned} rac{\partial \sigma_{
ho}}{\partial
ho} + rac{1}{
ho} rac{\partial au_{arphi
ho}}{\partial arphi} + rac{\sigma_{
ho} - \sigma_{arphi}}{
ho} + F_{
ho} = 0 \ rac{\partial au_{
ho arphi}}{\partial
ho} + rac{1}{
ho} rac{\partial \sigma_{arphi}}{\partial arphi} + rac{2 au_{
ho arphi}}{
ho} + F_{arphi} = 0 \end{aligned}$$

极坐标的几何方程

$$egin{align} arepsilon_{
ho} &= rac{\partial u_{
ho}}{\partial
ho} \ arepsilon_{arphi} &= rac{1}{
ho} rac{\partial u_{arphi}}{\partial arphi} + rac{u_{
ho}}{
ho} \ & \ \gamma_{
hoarphi} &= rac{1}{
ho} rac{\partial u_{
ho}}{\partial arphi} + rac{\partial u_{arphi}}{\partial
ho} - rac{u_{arphi}}{
ho} \ & \ \end{array}$$

本构方程(这里运用了各向同性的性质)

$$egin{aligned} arepsilon_{
ho} &= rac{1}{E}(\sigma_{
ho} -
u\sigma_{arphi}) \ arepsilon_{arphi} &= rac{1}{E}(\sigma_{arphi} -
u\sigma_{
ho}) \ \gamma_{
hoarphi} &= rac{2(1+
u)}{E} au_{
hoarphi} \end{aligned}$$

对于平面应变问题 $E_1=rac{E}{1u^2},
u_1=rac{
u}{1u}$

极坐标系的 Laplace 算子:

$$abla^2 = rac{\partial^2}{\partial
ho^2} + rac{1}{
ho} rac{\partial}{\partial
ho} + rac{1}{
ho^2} rac{\partial^2}{\partial arphi^2}$$

不计体力时,应力表达式:

$$egin{align} \sigma_{
ho} &= rac{1}{
ho} \; rac{\partial U}{\partial
ho} + rac{1}{
ho^2} rac{\partial^2 U}{\partial arphi^2} \ & \ \sigma_{arphi} &= rac{\partial^2 U}{\partial
ho^2} \ & \ au_{
ho arphi} &= au_{arphi
ho} = -rac{1}{
ho} rac{\partial^2 U}{\partial
ho \partial arphi} + rac{1}{
ho^2} rac{\partial U}{\partial arphi} \ & \ rac{\partial U}{\partial arphi} &= au_{arphi
ho} &= au_{arphi$$

双调和方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) = 0$$

轴对称应力

当应力函数 U 与 φ 无关时,双调和方程变为

$$\left(rac{d^2}{d
ho^2}+rac{1}{
ho}rac{d}{d
ho}
ight)\left(rac{d^2U}{d
ho^2}+rac{1}{
ho}rac{dU}{d
ho}
ight)=0$$

展开并同乘 ρ^4 得

$$ho^4 rac{d^4 U}{d
ho^4} + 2
ho^3 rac{d^3 U}{d
ho^3} -
ho^2 rac{d^2 U}{d
ho^2} +
ho rac{d U}{d
ho} = 0$$

取 $\rho = e^t$ 可以解得

$$U = A \ln \rho + B\rho^2 \ln \rho + C\rho^2 + D$$

应力表达式

$$egin{aligned} \sigma_
ho &= rac{A}{
ho^2} + B(1+2\ln
ho) + 2C \ \ \sigma_arphi &= -rac{A}{
ho^2} + B(3+2\ln
ho) + 2C \ \ au_{
hoarphi} &= 0 \end{aligned}$$

应变分量:

$$egin{aligned} arepsilon_{
ho}&=rac{1}{E}\left[(1+
u)rac{A}{
ho^2}+(1-3
u)B+2(1-
u)B\ln
ho+2(1-
u)C
ight]\ arepsilon_{
ho}&=rac{1}{E}\left[-(1+
u)rac{A}{
ho^2}+(3-
u)B+2(1-
u)B\ln
ho+2(1-
u)C
ight]\ \gamma_{
hoarphi}&=0 \end{aligned}$$

位移分量:

$$egin{aligned} u_
ho &= rac{1}{E}iggl[-(1+
u)rac{A}{
ho} + 2(1-
u)B
ho(\ln
ho-1) + (1-3
u)B
ho + 2(1-
u)C
hoiggr] \ &+ I\cosarphi + K\sinarphi \ u_arphi &= rac{4B
hoarphi}{E} + H
ho - I\sinarphi + K\cosarphi \end{aligned}$$

应力轴对称并不表示位移也是轴对称,但在轴对称应力情况,如果物体的几何形状和受力(或几何约束)也是轴对称,则位移也是轴对称,此时有 $u_{\varphi}=0$,即

$$B = H = I = K = 0$$

厚壁圆筒受均匀分布压力

边界条件

$$egin{aligned} (au_{
hoarphi})_{
ho=a}&=0, (au_{
hoarphi})_{
ho=b}=0\ (\sigma_{
ho})_{
ho=a}&=-q_1, (\sigma_{
ho})_{
ho=b}=-q_2, \end{aligned}$$

由于应力轴对称, 给出拉梅解答

$$egin{align} \sigma_{
ho} &= rac{a^2b^2}{b^2-a^2}rac{q_2-q_1}{
ho^2} + rac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2} \ \sigma_{arphi} &= -rac{a^2b^2}{b^2-a^2}rac{q_2-q_1}{
ho^2} + rac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2} \ au_{
hoarphi} &= 0 \ \end{array}$$

曲梁的纯弯曲

边界条件

$$egin{aligned} (\sigma_
ho)_{
ho=a} &= 0, (au_{
hoarphi})_{
ho=a} &= 0 \ (\sigma_
ho)_{
ho=b} &= 0, (au_{
hoarphi})_{
ho=b} &= 0 \end{aligned} \ \int_a^b \sigma_arphi d
ho &= 0, \int_a^b
ho\sigma_arphi d
ho &= -M \end{aligned}$$

求得

$$egin{aligned} \sigma_{
ho} &= -rac{4M}{N}igg(rac{a^2b^2}{
ho^2}\!\lnrac{b}{a} - b^2\lnrac{b}{
ho} + a^2\lnrac{a}{
ho}igg) \ \sigma_{arphi} &= -rac{4M}{N}igg(-rac{a^2b^2}{
ho^2}\!\lnrac{b}{a} - b^2\lnrac{b}{
ho} + a^2\lnrac{a}{
ho} + b^2 - a^2igg) \ au_{
hoarphi} &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$N = (b^2 - a^2) - 4a^2b^2(\ln\frac{b}{a})^2$$

我们可以根据曲梁的约束条件求得位移分量。

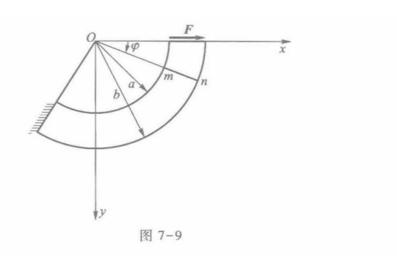
现在考虑环向位移分量

$$u_{arphi}=rac{4B
hoarphi}{E}-K\sinarphi$$

这显然是一个多值函数,但是在完整圆环中这是不合理的,所以有 B=0,但是在不完整圆环中,多值是有可能的。

曲梁一端受径向集中力作用

设有一内半径为 a 外半径为 b 的矩形截面曲梁,一个端面固定,另一个端面受径向力



我们假定应力函数 U 和 $\sin \varphi$ 成正比,取

$$U = f(\rho)\sin\varphi$$

带到相容方程可得 $f(\rho)$ 表达式:

$$f(
ho) = A
ho^3 + Brac{1}{
ho} + C
ho + D
ho\ln
ho$$

所以应力分量

$$egin{align} \sigma_{
ho} &= \left(2A
ho - rac{2B}{
ho^3} + rac{D}{
ho}
ight)\sinarphi \ \sigma_{arphi} &= \left(6A
ho + rac{2B}{
ho^3} + rac{D}{
ho}
ight)\sinarphi \ au_{
hoarphi} &= -\left(2A
ho - rac{2B}{
ho^3} + rac{D}{
ho}
ight)\cosarphi \ \end{split}$$

考虑边界条件

$$egin{aligned} (\sigma_
ho)_{
ho=a} &= 0, (au_{
hoarphi})_{
ho=a} &= 0 \ (\sigma_
ho)_{
ho=b} &= 0, (au_{
hoarphi})_{
ho=b} &= 0 \ (\sigma_arphi)_{arphi=0} &= 0, \int_a^b au_{arphi
ho} d
ho &= -F \end{aligned}$$

解得

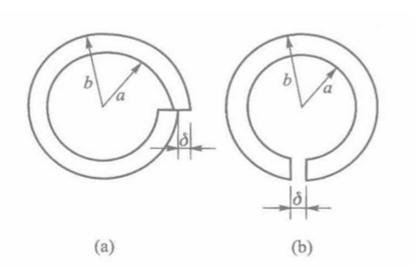
$$A = -rac{F}{2N}, B = rac{Fa^2b^2}{2N}, D = rac{F}{N}(a^2+b^2)$$

其中 $N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}$

我们给出位移分量

$$\begin{split} u_{\rho} &= -\frac{2D}{E}\varphi\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{E}\bigg[A\rho^2(1-3\nu) + \frac{B}{\rho^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\ln\rho)\bigg] \\ &+ K\sin\varphi + L\cos\varphi \\ u_{\varphi} &= \frac{2D}{E}\varphi\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{E}\bigg[A\rho^2(5+\nu) + \frac{B}{\rho^2}(1+\nu) - D(1-\nu)\ln\rho\bigg] \\ &\frac{D(1+\nu)}{E}\cos\varphi + K\cos\varphi - L\sin\varphi + H\rho \end{split}$$

K, L, H 由约束条件给出。



对于一个内半径为 a, 外半径为 b 的圆环, 先在其上切开一条径向细缝, 再用外力强迫细缝的 两表面错开 δ (径向位移)然后焊接起来, 如 a 所示。

可以简单求出径向位移 δ :

$$\delta=(u_
ho)_{arphi=2\pi}-(u_
ho)_{arphi=0}=-rac{4D\pi}{E}$$

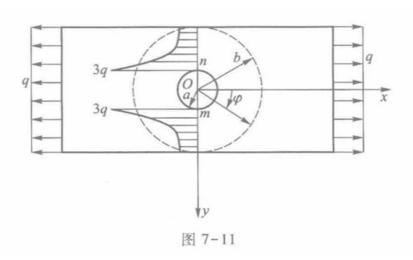
可以得出强使细缝表面错开 δ 所需的力:

$$F=-rac{NEd\delta}{4\pi(a^2+b^2)}$$

考虑一个不完整圆环,切口表面平行,距离为 δ ,如b,用外力强使切口两表面合拢然后焊牢,就转化为第一个问题,但符号应相反。因此其内的预应力是很容易求得的。

具有小圆孔的平板的均匀拉伸

由于小圆孔的存在,必然对板内应力分布产生影响,由圣维南原理可知,这种影响仅局限于孔的附近区域,在孔边的较远处,这种影响显著减小



假设在圆孔中心距离 b (b 远大于 a) 的地方,应力分布已经和没有圆孔的情况完全一样,采用极坐标系有

$$egin{split} (\sigma_
ho)_{
ho=b} &= q\cos^2arphi = rac{q}{2}(1+\cos2arphi) \ (au_{
hoarphi})_{
ho=b} &= -rac{q}{2}\sin2arphi \end{split}$$

这表示在小圆孔同心,半径为b的圆周上,应力有两部分组成,一部分是拉应力 $\frac{q}{2}$,按照圆筒公式可得

$$egin{align} \sigma_
ho &= rac{b^2}{b^2-a^2}rac{q}{2}igg(1-rac{a^2}{
ho^2}igg) \ \sigma_arphi &= rac{b^2}{b^2-a^2}rac{q}{2}igg(1+rac{a^2}{
ho^2}igg) \ au_{
hoarphi} &= 0 \ \end{pmatrix}$$

另一部分是随 φ 变化的法向应力 $\frac{q}{2}\cos 2\varphi$ 和切向应力 $-\frac{q}{2}\sin 2\varphi$,考虑应力函数

$$U = f(\rho)\cos 2\varphi$$

带入双调和方程可得应力函数表示式:

$$U = \left(A
ho^2 + B
ho^4 + rac{C}{
ho^2} + D
ight)\cos2arphi$$

可得应力分量

$$egin{aligned} \sigma_{
ho} &= -\left(2A + rac{6C}{
ho^4} + rac{4D}{
ho^2}
ight)\cos2arphi \ \sigma_{arphi} &= \left(2A + 12B
ho^2rac{6C}{
ho^4}
ight)\cos2arphi \ au_{
hoarphi} &= \left(2A + 6B
ho^2 - rac{6C}{
ho^4} - rac{2D}{
ho^2}
ight)\sin2arphi \end{aligned}$$

考虑边界条件可得式子

$$2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{q}{2}$$
 $2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0$
 $2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{q}{2}$
 $2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0$

解得并考虑 $\frac{a}{b} \approx 0$ 于是有

$$A=-rac{q}{4}, B=0, C=-rac{a^4q}{4}, D=rac{a^2q}{2}$$

将结果叠加可得(考虑 $\frac{a}{b} \approx 0$)

$$egin{align} \sigma_
ho &= rac{q}{2} \left(1 - rac{a^2}{
ho^2}
ight) + rac{q}{2} \left(1 + rac{3a^4}{
ho^4} - rac{4a^2}{
ho^2}
ight) \cos 2arphi \ \sigma_arphi &= rac{q}{2} \left(1 + rac{a^2}{
ho^2}
ight) - rac{q}{2} \left(1 + rac{3a^4}{
ho^4}
ight) \cos 2arphi \ au_{
hoarphi} &= -rac{q}{2} \left(1 - rac{3a^4}{
ho^4} + rac{2a^2}{
ho^2}
ight) \sin 2arphi \ \end{split}$$

当 $\rho=a$ 时,此时切应力和轴向应力皆为 $\mathbf{0}$,最大环向应力发生在小圆孔边界的 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$,其值为

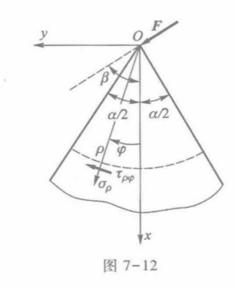
$$(\sigma_arphi)_{
m max}=3q$$

这表明,如果板很大,圆孔很小,圆孔边上将发生应力集中现象。我们定义应力集中系数

$$K = rac{(\sigma_arphi)_{ ext{max}}}{q}$$

应力集中现象引出了对于断裂力学的研究。

尖劈顶端受集中力或集中力偶作用



假定尖劈中心角为 α ,下端可认为伸向无穷,在其顶端受集中力作用,并于尖劈的中心线成 β 角。取单位厚度,并设其所受的力为 F。

考虑量纲分析法,F 的量纲为 MT^{-2} (考虑单位力), ρ 的量纲为 L, α , β , φ 的量纲为一,所以应力分量的表达式为 $\frac{F}{\rho}N$,N 为 α , β , φ 组成,由于在应力函数中 ρ 的幂次比应力分量的幂次高两次,所以假设应力函数

$$U=
ho f(arphi)$$

可以解出应力函数

$$U = A
ho\cosarphi + B
ho\sinarphi +
hoarphi(C\cosarphi + D\sinarphi)$$

由于前两项为在直角坐标系中为一次项,对应力无影响,所以可改写成

$$U =
ho arphi (C\cos arphi + D sin arphi)$$

引出应力分量

$$egin{aligned} \sigma_{
ho} &= rac{2}{
ho}(D\cosarphi - C\sinarphi) \ \sigma_{arphi} &= 0, \quad au_{
hoarphi} &= 0 \end{aligned}$$

考虑平衡条件 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ 得

$$egin{split} \int_{-rac{a}{2}}^{rac{a}{2}}
ho\sigma_{
ho}\cosarphi darphi+F\coseta&=0\ \int_{-rac{a}{2}}^{rac{a}{2}}
ho\sigma_{
ho}\sinarphi darphi+F\sineta&=0 \end{split}$$

$$\sigma_{
ho} = -rac{2F\coseta\cosarphi}{(lpha+\sinlpha)
ho} - rac{2F\sineta\sinarphi}{(lpha-\sinlpha)
ho}$$

对于力偶问题,应力分量中只能出现 ρ 的负二次幂,所以应力函数与 ρ 无关。

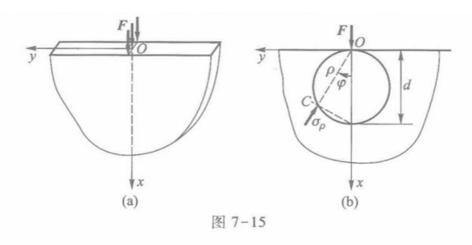
$$U=f(arphi)$$

可以解得

$$egin{aligned} \sigma_{
ho} &= rac{2M\sin2arphi}{(\sinlpha-lpha\coslpha)
ho^2} \ \sigma_{arphi} &= 0 \ au_{
hoarphi} &= -rac{M(\cos2arphi-\coslpha)}{(\sinlpha-lpha\coslpha)
ho^2} \end{aligned}$$

对于解答,当 $\alpha=257.45^{\circ}$,有 $\sin\alpha-\alpha\cos\alpha=0$,也就是说应力趋于无穷大,这显然是一个佯谬问题,可以采用复变函数的方法修正。

几个弹性半平面的解答



设想有一个垂直的集中力作用在板的水平边界上,这板下方和左右两方是无限伸长的。假定 F 是单位厚度的集中载荷。

引入尖劈的结论可得解答,取 $\alpha=\pi,\beta=0$ (称为 Bossinesq 解答)

$$\sigma_{
ho} = -rac{2F\cosarphi}{\pi
ho}$$

该应力分布规律有两个特点: 1. 过体内任何一点 C 并于矢径垂直的微分面均为主平面,因为切应力都为零。2. 直径与 x 轴重合且过 O 点的圆周上各点的径向应力都相等。

在这个圆周上有

$$ho = d\cosarphi$$

带入式中有:

$$\sigma_{
ho} = -rac{2F}{\pi d}$$

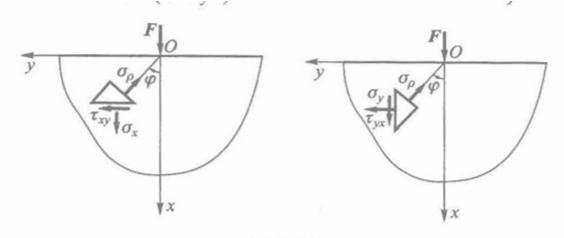


图 7-16

考虑上图两个小单位体的平衡, 注意到

$$\cos arphi = rac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin arphi = rac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

所以可得直角坐标系上的应力分量

$$egin{aligned} \sigma_x &= -rac{2F}{\pi} rac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \ \sigma_y &= -rac{2F}{\pi} rac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \ au_{xy} &= -rac{2F}{\pi} rac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

最大切应力出现在 $y=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$ 处,因此如果我们需要用切应力强度校核时,需要关注此处应力状态

利用几何方程, 我们可得位移分量

$$egin{aligned} u_{
ho} &= -rac{2F}{\pi E}\cosarphi\ln
ho - rac{(1-
u)F}{\pi E}arphi\sinarphi + I\cosarphi + K\sinarphi \ u_{arphi} &= rac{2F}{\pi E}\sinarphi\ln
ho + rac{(1+
u)F}{\pi E}\sinarphi - rac{(1-
u)F}{\pi E}arphi\cosarphi + H
ho - I\sinarphi + K\cosarphi \end{aligned}$$

考虑对称性可得

$$H = K = 0$$

所以简化成

$$egin{aligned} u_
ho &= -rac{2F}{\pi E}\cosarphi\ln
ho - rac{(1-
u)F}{\pi E}arphi\sinarphi + I\cosarphi \ u_arphi &= rac{2F}{\pi E}\sinarphi\ln
ho + rac{(1+
u)F}{\pi E}\sinarphi - rac{(1-
u)F}{\pi E}arphi\cosarphi - I\sinarphi \end{aligned}$$

I表示铅垂方向的刚性位移,如果半平面不受铅锤方向的约束,则常数 I 不能确定。

当 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$,则对于不同的 ρ 将给出半平面表面任一点 M 的向下铅锤位移,即所谓沉陷。

M 点沉陷(位移 u_{φ} 沿 φ 正方向为正)

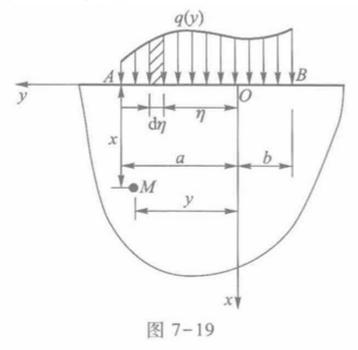
$$-(u_arphi)_{arphi=rac{\pi}{2}}^M=-rac{2F}{\pi E}{
m ln}\,
ho-rac{(1+
u)F}{\pi E}+I$$

由于I无法表示,所以引入相对沉陷

$$\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho}$$

s 为任取基点到力作用点距离

考虑连续分布载荷

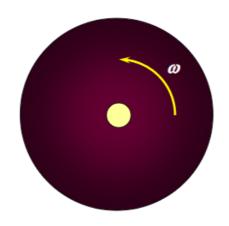


取 y 轴上距原点 η 处微分线段 $d\eta$, 其与给定基点 M 铅直距离和水平距离分别为 x 和 $y-\eta$ 所以可以得出其在 M 点引起的应力

$$egin{align} d\sigma_x &= -rac{2qd\eta}{\pi}rac{x^3}{[x^2+(y-\eta)^2]^2} \ d\sigma_y &= -rac{2qd\eta}{\pi}rac{x(y-\eta)^2}{[x^2+(y-\eta)^2]^2} \ au_{xy} &= -rac{2qd\eta}{\pi}rac{x^2(y-\eta)}{[x^2+(y-\eta)^2]} \ \end{aligned}$$

旋转圆盘的应力分析

■等速旋转圆盘



对于一个等速旋转圆盘,这显然是一个轴对称问题,同时,我们需要考虑离心力的作用,所以 显然这是一个不能忽视体力的问题,因此我们给出平衡方程

$$rac{\partial \sigma_{
ho}}{\partial
ho} + rac{\sigma_{
ho} - \sigma_{\phi}}{
ho} + m \omega^2
ho = 0$$

我们需要考虑离心力的作用,所以显然这是一个不能忽视体力的问题,我们给出应力分量表达式:

$$egin{align} \sigma_{
ho} &= rac{E}{1-
u^2}igg(rac{du_{
ho}}{d
ho} +
urac{u_{
ho}}{
ho}igg) \ \sigma_{\phi} &= rac{E}{1-
u^2}igg(
urac{du_{
ho}}{d
ho} + rac{u_{
ho}}{
ho}igg) \ au_{
ho\phi} &= au_{\phi
ho} = 0 \ \end{aligned}$$

我们还有另一种办法:对于平衡方程,左右两边同乘 ρ 得

$$rac{\partial}{\partial
ho}(
ho\sigma_
ho)+\sigma_
ho-\sigma_\phi+m\omega^2
ho^2=0$$

引用应力函数 U 取

$$U=
ho\sigma_
ho \qquad \sigma_\phi=rac{dU}{d
ho}+m\omega^2
ho^2$$