

连续系统振动 IV

振动力学

梁弯曲振动的正交性

梁的弯曲振动：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [E(x)I(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w] + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t)$$

同样的，我们采用分离变量法来求解上述方程，取

$$w(x, t) = \Phi(x)T(t)$$

所以方程变为

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 \rho(x)A(x)\Phi(x)$$

数学上能证明上述方程具有离散解 $q_i(t), \Phi_i(x)$ 。如果考虑固支、简支、自由、夹支这四种边界条件，同样有正交性：

质量：

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = \begin{cases} \overline{M}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

刚度：

$$\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i''(x)\Phi_j''(x)dx = \begin{cases} \overline{K}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

证明如下：

左乘 $\Phi_j(x)$ 并作积分

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx$$

做两次分步积分可得

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi_i(x) \right] dx = \Phi_j(x) \frac{d}{dx} [E(x)I(x)\Phi_i''(x)] \Big|_0^L \\ - \Phi_j'(x)E(x)I(x)\Phi_i''(x) \Big|_0^L + \int_0^L \Phi_j''(x)\Phi_i''(x)E(x)I(x)dx$$

这简要描述边界条件的对应关系

$$w(x_0, t) = 0 \Rightarrow \Phi(x_0) = 0$$

$$\theta(x_0, t) = 0 \Rightarrow \Phi'(x_0) = 0$$

$$M(x_0, t) = 0 \Rightarrow E(x_0)I(x_0)\Phi''(x_0) = 0$$

$$P(x_0, t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} [E(x_0)I(x_0)\Phi''(x_0)] = 0$$

代入上式可得

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{d^2}{dx^2} \Phi_i(x) \right] dx = \int_0^L \Phi_j''(x)\Phi_i''(x)E(x)I(x)dx$$

也就是

$$\int_0^L \Phi_j''(x)\Phi_i''(x)E(x)I(x)dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)$$

再取一个振型 $\Phi_j(x)$ 便可以证明正交性。

Note

上述可以说明为什么边界条件不能出现 w, P 和 θ, M 这两种组合，就是因为无法保证分部积分中的两个积分项同时等于零

同样的，参考之前的 [连续系统振动 II](#) 的做法，可以得到边界条件为弹性支撑和集中质量的正交性

弹性支撑

$$\begin{aligned} P(0, t) &= -k_1 w(0, t) & M(0, t) &= k_2 \theta(0, t) \\ P(L, t) &= k_3 w(L, t) & M(L, t) &= -k_4 \theta(L, t) \end{aligned}$$

对应关于刚度的正交性

$$\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i''(x)\Phi_j''(x)dx + k_1\Phi_i(0)\Phi_j(0) + k_2\Phi_i'(0)\Phi_j'(0) \\ + k_3\Phi_i(L)\Phi_j(L) + k_4\Phi_i'(L)\Phi_j'(L) = \begin{cases} \overline{K}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

集中质量（左端固支）

$$w(0, t) = 0 \quad \theta(0, t) = 0 \\ P(L, t) = -M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad M(L, t) = 0$$

对应关于质量的正交性

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx + M_0\Phi(L)\Phi(L) = \begin{cases} \overline{M}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Note

对于上述两种特殊的边界条件，我们在一开始讨论的时候并没有讨论其正负号，因为这个和坐标选定有关，但是无论如何，其边界条件必须满足上述正交性中的修正项为正，也就是取“+”（考虑能量）