单自由度振动 I

振动力学

单自由线性系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

取 $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$，研究其特解。取 $x(t) = x(s)e^{i\omega t}, x(s)$是一个和自身系统有关的参数，带入方程求解可得

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k)x(s)e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

消去 $e^{i\omega t}$，整理得

$$x(s) = \frac{F_0}{(k - m\omega^2 + i\omega c)}$$

记 $F_0/k = \delta$也就是振系的零频率扰度（常力作用下的静挠度），对方程整理得，有

$$\frac{x(s)}{\delta} = \frac{1}{(k - m\omega^2 + i\omega c)/k}$$

引入频率比： $s = \frac{\omega}{\omega_0}$，对于上述表达式则又有

$$\frac{x(s)}{\delta} = \frac{1}{1 - s^2 + 2\xi si}$$

所以定义放大率 β 和φ 有

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\xi s)^2}}$$
$$\tan\varphi(s) = \frac{2\xi s}{1 - s^2}$$

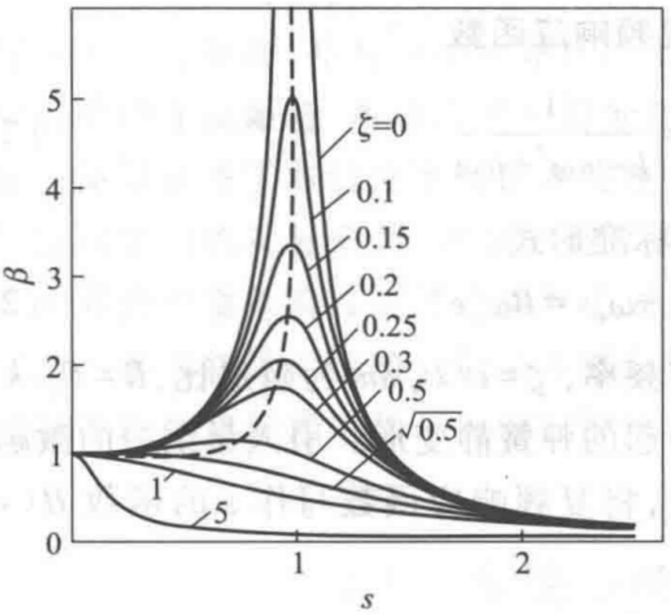

图 2.2 幅频特性曲线

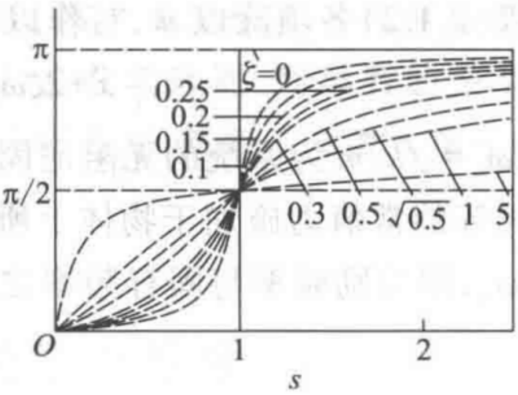

图 2.3 相频特性曲线

特征:

1. 稳态响应是激励力频率相同的简谐振动
2. 振幅和相位差由系统本身和激励力得物理性质确定，与初始条件无关
3. $\lim\limits_{s\to 0}\beta(s)=1, \lim\limits_{s\to\infty}\beta(s)=0$，表明激励力频率远小于固有频率时振幅接近弹簧静变形，激励力频率远大于固有频率时振幅趋近零
4. $\xi=0, \lim_{s\to 1}\beta(s)=\infty$该现象称为共振，此时激励力频率等于固有频率 ω_n
5. $\xi\neq 0$，将振幅取最大值时的激励频率 w_m定义为共振频率， $\omega_m=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$，共振区的幅频特性曲线称为共振峰
6. 系统中的阻尼强弱性质和共振峰的陡峭程度可通过振幅放大因子体现，称为品质因数

   $$Q=\beta|_{s=1}=\frac{1}{2\xi}$$

   在共振峰两侧取 $\beta=Q/\sqrt{2}$对应两点 ω_1和 ω_2 $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$称为系统的带宽，满足

   $$\Delta\omega=\frac{\omega_n}{Q}$$

7. 低频受迫振动响应与激励力同相，高频率反相。

对于3和7的一些物理解释
考虑一下矢量图:

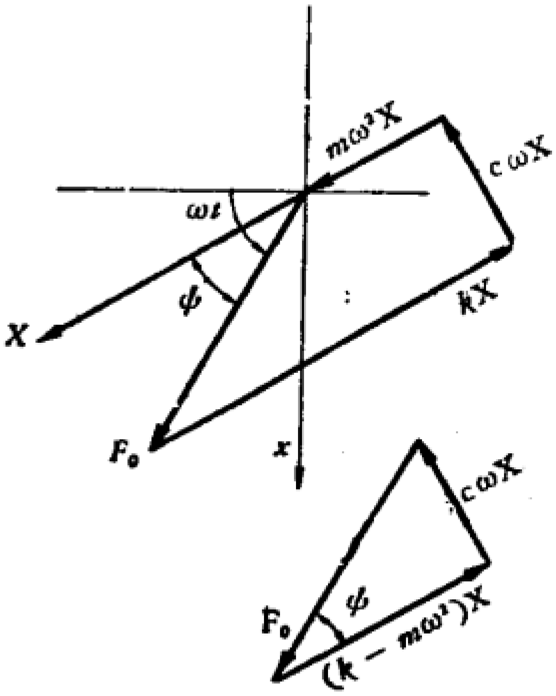

图 3.3-2

当ω较小的时候，$m\omega^2X, c\omega X$都是小量，可以忽略不记，只剩下恢复力 kX，其作用结果近似于静挠度，所以辐角较小
当ω较大的时候，$m\omega^2X$较大，因此振幅接近零，辐角接近惯性力方向（$\varphi=\pi$）
当 $w=w_0$时，惯性力和恢复力相互抵消，只有阻尼力作用。但是阻尼力作用效果有限，当ω略大或略小时，惯性力与恢复力作用效果足以覆盖阻尼力的作用效果

惯性力

考虑$F(t)=m\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$，也就是由相对运动引起的振动。

带入上面的方程可得

$$\beta(s)=\frac{s^2}{\sqrt{(1-s^2)+(2\xi s)^2}}$$
$$\tan\varphi(s)=\frac{2\xi s}{1-s^2}$$

大概图像:

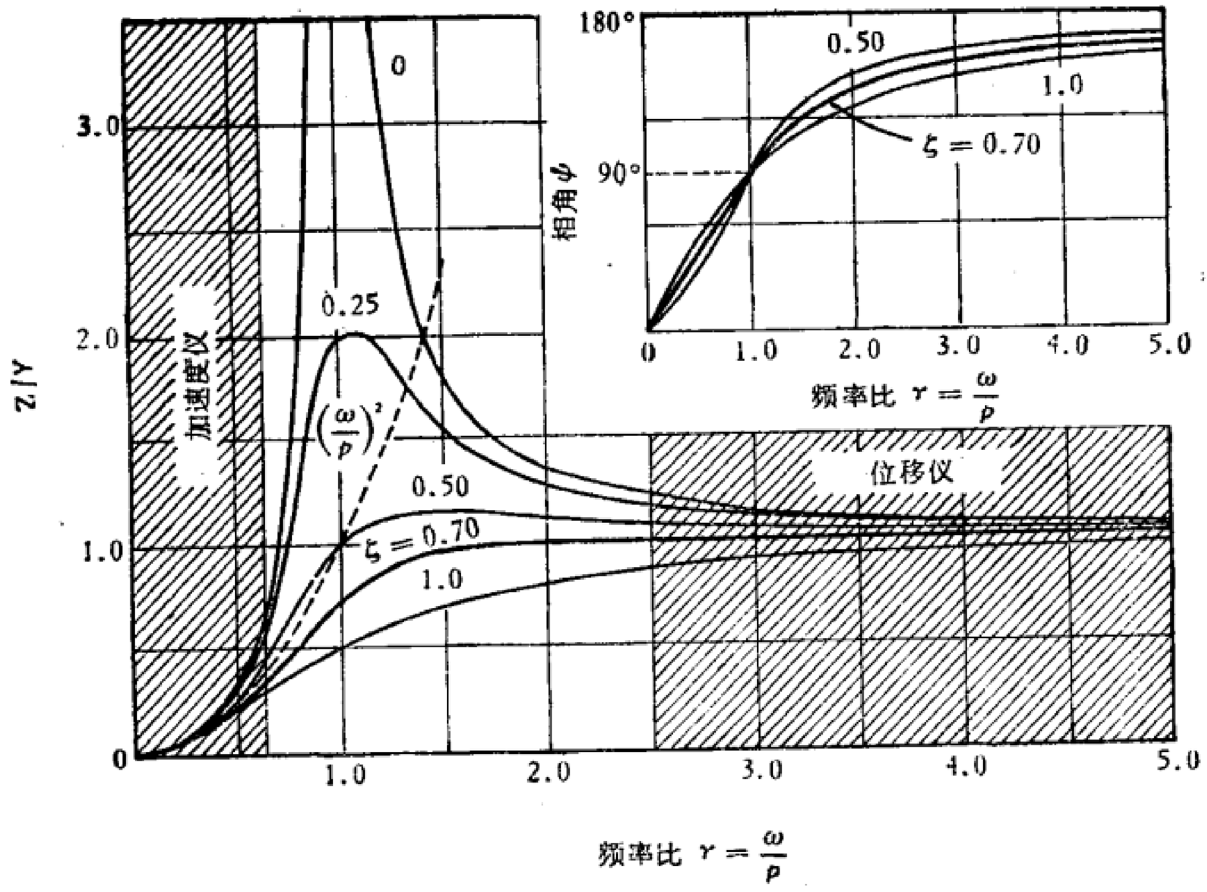

图 3.8-2

多个谐和激励

考虑 $f(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i \varphi_i)$，所以对应稳态响应

$$x=\sum_{i=1}^{n} X_i(s) e^{i(\omega_i t+\varphi_i)}$$

带入运动方程，令系数相等可以得出

$$X_n=\frac{1}{k}\beta_n A_n$$

其中 $\beta_n=\frac{1}{(1-s_n^2)^2+(2\xi s_n)^2}, \tan\varphi(s)=\frac{2\xi s_n}{1-s_n^2}$ 也就是不同频率比在频率比曲线上所对应的点（将连续化作离散）

以频率为横坐标，作出 β_n和 φ_n的离散图称为频谱图，可用于分析周期激励力的响应状况，该方法也适用于分析任意周期惯性力激励的受迫振动。