Preknowledge

有限元方法

矩阵

$$Ax = b$$

当 $\det A \neq 0$ 时，上述线性方程有唯一解；当 $\det A = 0$ 时，也就是矩阵 A 为奇异矩阵时，A^{-1} 不存在，所以线性方程无解或有无数解。

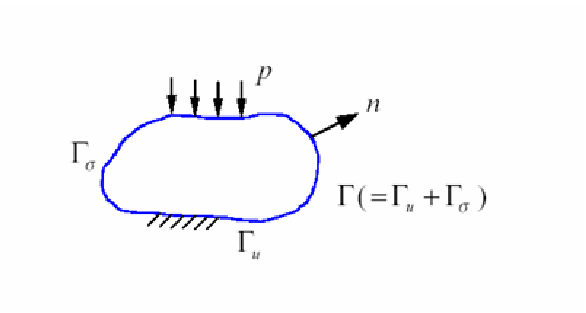
解的求法：

- 直接求逆 $x = A^{-1}b$；这种方法适用于小型线性方程
- 高斯消元：这种方法使用中型或小型矩阵求解
- 迭代法：这种方法适用于大型矩阵求解

能量法

弹性力学变分解法

线弹性理论



弹性力学给出了求解方程

应变：$\varepsilon = \nabla u$

应力：$\sigma = D\varepsilon$

平衡方程: $\nabla^T \sigma + f = 0$

位移边界条件: $u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u$

应力边界条件: $n\sigma = \bar{T} \text{ on } \Gamma_\sigma$

系统势能

$$\Pi_p = U + \Omega = \int_B \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV - \int_B f_i u_i dV - \int_{\partial B} \bar{T}_i u_i dS$$

应变能

$$U = \int_B \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV$$

外力势能

$$\Omega = -\int_B f_i u_i dV - \int_{\partial B} \bar{T}_i u_i dS$$

最小势能原理给出

$$\delta\Pi_p = 0$$

我们利用其推导有限元方式的公式并且评判近似解的性能。

将势能表达式改写成如下矩阵形式:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_B \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_{\partial B} \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS$$

取 $u = Nd_e$ N 为型函数，d_e 为节点位移。因此应变 $\varepsilon = (\nabla N)d_e = Bd_e$ 应力 $\sigma = DBd_e$ B 为应力矩阵。

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\mathbf{d}_e^T \left(\int_B \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV\right)\mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \left(\int_B \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV\right) - \mathbf{d}_e^T \left(\int_{\partial B} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS\right)$$

因为势能取驻值

$$\delta\Pi_p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Pi_p}{\partial\mathbf{d}_e^T}\delta\mathbf{d}_e^T = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Pi_p}{\partial\mathbf{d}_e^T} = 0$$

这是由于微分变分可以交换位置，带入势能表达式可得:

$$\left(\int_B \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV\right)\mathbf{d}_e = \left(\int_B \mathbf{N}^T\mathbf{f}dV\right) + \left(\int_{\partial B} \mathbf{N}^T\mathbf{T}dS\right)$$

可得

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}$$