应变状态理论

弹性力学

应变分析是几何分析，适用于一切连续介质

位移与应变

物体变形前后同一质点的位置矢量差：

$$\mathbf{u} = \rho(\xi, \eta, \zeta) - \mathbf{r}(x, y, z)$$

可以写出位移分量：

$$\begin{aligned} u &= \rho_1(\xi, \eta, \zeta) - r_1(x, y, z) \\ v &= \rho_2(\xi, \eta, \zeta) - r_2(x, y, z) \\ w &= \rho_3(\xi, \eta, \zeta) - r_3(x, y, z) \end{aligned}$$

这三个量表示了一个点在坐标系的x, y, z的位移分量

取一个六面微元体，正应变对应棱边的伸长，且应变对应棱边间夹角的变化

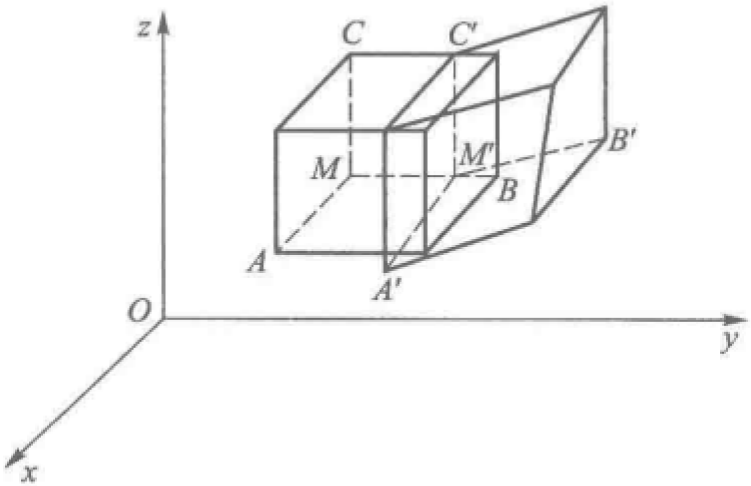


图 3-2

考虑小变形，我们给出正应变和切应变的表达式

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{M'A' - MA}{MA}, \gamma_{yz} = \frac{\pi}{2} - \angle C'M'B' \\ \varepsilon_y &= \frac{M'B' - MB}{MB}, \gamma_{xz} = \frac{\pi}{2} - \angle C'M'A' \\ \varepsilon_z &= \frac{M'C' - MC}{MC}, \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle A'M'B' \end{aligned}$$

这六个分量称为应变分量。

我们所考虑的是小变形，我们可以认为物体内各点的位移全由它自己的大小和形状的变化引起，忽略物体位置变化影响。

接下来建立应变分量和位移分量之间的关系。将我们的微分平行六面体分别投影到3个坐标平面。也就是如下图。

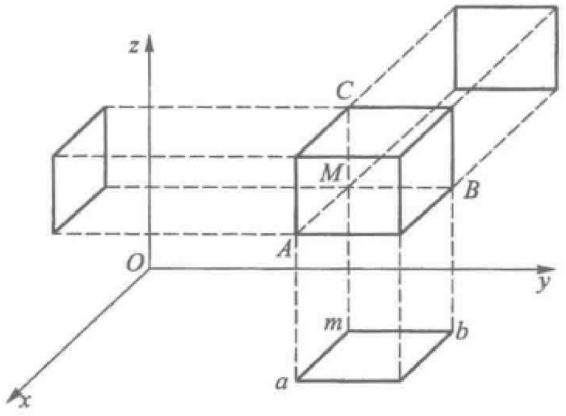


图 3-3

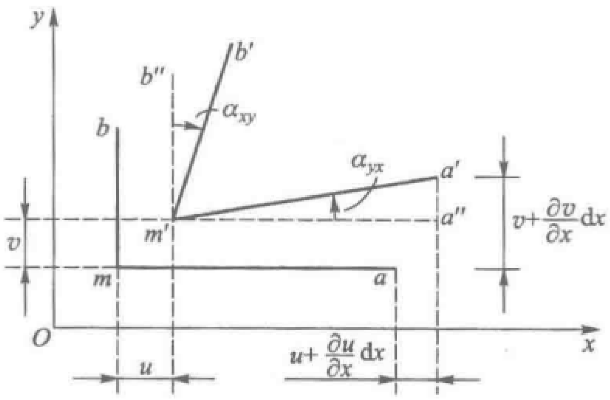


图 3-4

我们考虑 Oxy 平面上投影的变形。假定ma,mb表示 MA，MB 在 Oxy 平面上的投影，$m'a',m'b'$ 表示变形后 $M'A'$，$M'B'$ 在 Oxy 平面上的投影，所以A点位移表示为 $u(x+dx,y,z),v(x+dx,y,z)$， B点位移表示为$u(x,y+dy,z),v(x,y+dy,z)$，其泰勒展开结果已在图中给出。取 $m'a'$在Ox 轴上的投影 $m'a''$，有

$$m'a''=dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u=dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\approx M'A'$$

于是正应变分量为

$$\varepsilon_x=\frac{M'A'-MA}{MA}\approx\frac{dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx-dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

同理有

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

我们得到了过物体内任意点并分别与3个坐标轴平行的微分线段的伸长率——正应变，接下来讨论切应变。

令 α_{yx} 表示与 Ox 轴平行的微分线段 ma 向 Oy 轴转过的角度，α_{yx} 表示与 Ox 轴平行的微分线段 mb 向 Ox 轴转过的角度，导出切应变分量：

$$\gamma_{xy}=\frac{\pi}{2}-\angle B'M'A'\approx\frac{\pi}{2}-\angle b'm'a'=\alpha_{xy}+\alpha_{yx}$$

有几何关系有

$$\alpha_{yx}=\tan\alpha_{yx}=\frac{a''a'}{m'a''}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$相比1是小量可以忽略，所以

$$\alpha_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

同理可得 α_{xy} 表达式

因此，切应变分量为

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

其他方向上的切应变分量可由顺次轮换得到。

整理我们所得结果

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\
\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

称为几何方程，又称柯西方程

相对位移张量:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}$$

对于单连通物体（无孔洞），若已知其相对位移张量，并假设位移分量具有二阶或二阶以上的连续偏导数，则可以通过积分求得连续单值的位移分量。也就是说，相对位移张量确定了物体变形情况。

我们可以将相对位移张量分解成如下形式（对称矩阵+反对称矩阵）：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}
&=\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y})\\
\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

定义

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

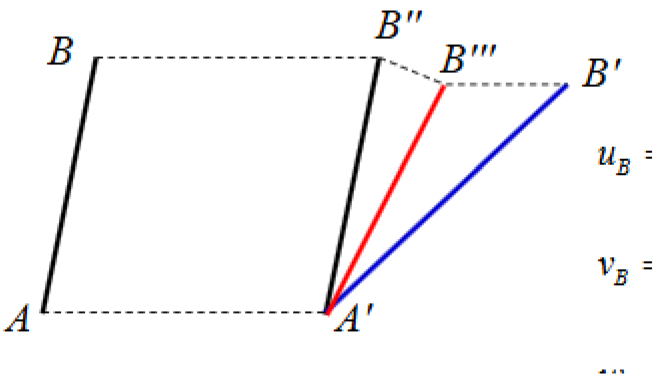
（注：我喜欢用 ε 来表示应变，而且他是应变张量:-)）

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{cases} \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

其中 ω 称为转动矢量，那么我们可以进一步改写表达式为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

对于转动矢量，它代表微元体的刚性转动，是坐标的函数，对整个物体来说是变形的一部分。转动分量和应变分量一起完整地描述了物体的变形



那么对于一个靠近A点的点B来说，变形所引起的位移有如下公式给出

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u} + \varepsilon d\mathbf{x} + \omega d\mathbf{x}$$

它包含三个部分

1. 随A点的平移位移
2. 绕A点刚性转动产生的位移
3. 由A点邻近的微元体的变形在B点引起的位移。
   变形包括正应变与切应变，切应变带来转动

应变张量分析

~~累了不想打太多所以就不打公式了~~

- 转轴时应变分量的变换

$$\varepsilon_{i'j'} = \varepsilon_{ij} n_{i'i} n_{j'j}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{xz} l_1 n_1 + \gamma_{xy} l_1 m_1 \\
\varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x l_2^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z n_2^2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{xz} l_2 n_2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 \\
\varepsilon_{z'} &= \varepsilon_x l_3^2 + \varepsilon_y m_3^2 + \varepsilon_z n_3^2 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{xz} l_3 n_3 + \gamma_{xy} l_3 m_3 \\
\gamma_{y'z'} &= 2(\varepsilon_x l_2 l_3 + \varepsilon_y m_2 m_3 + \varepsilon_z n_2 n_3) + \gamma_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \\
&\quad \gamma_{xz}(l_2 n_3 + l_3 n_2) + \gamma_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) \\
\gamma_{x'z'} &= 2(\varepsilon_x l_1 l_3 + \varepsilon_y m_1 m_3 + \varepsilon_z n_1 n_3) + \gamma_{yz}(m_1 n_3 + m_3 n_1) + \\
&\quad \gamma_{xz}(l_1 n_3 + l_3 n_1) + \gamma_{xy}(l_1 m_3 + l_3 m_1) \\
\gamma_{x'y'} &= 2(\varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \\
&\quad \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1) + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1)
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}10)$$

也可以导出物体内部某一点沿任意方向微分线段的伸长率

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} mn + \gamma_{xy} lm$$

主应变应当满足如下方程

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_x - \varepsilon) l + \varepsilon_{xy} m + \varepsilon_{xz} n = 0 \\
\varepsilon_{xy} l + (\varepsilon_y - \varepsilon) m + \varepsilon_{yz} n = 0 \\
\varepsilon_{xz} l + \varepsilon_{yz} m + (\varepsilon_z - \varepsilon) n = 0
\end{aligned}$$

同时满足

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

展开后可得

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3$$

应变张量不变量满足:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\
J_2 &= \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y - (\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \\
J_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_y \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

体应变

考察 dx, dy, dz 的微分平行六面体，变形前体积:

$$V = dxdydz$$

变形后体积

$$\begin{aligned} V^* &= dx(1+\varepsilon_x)dy(1+\varepsilon_y)dz(1+\varepsilon_z) \\ &\approx dxdydz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \end{aligned}$$

所以可得体应变表达式:

$$\theta = \frac{V^* - V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

也就是第一主变量的表达式，存在下面三种情况

1. $\theta > 0$ 微元体膨胀
2. $\theta < 0$ 微元体收缩
3. $\theta = 0$ 等容变形

应变协调方程

在我们引入应变协调方程之前，我们思考一个问题：如何从应变得到位移呢？因为我们知道，应变张量是由对位移求导得到的，那么我们就很自然的想到通过积分求得位移

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

但是我们只知道 $\frac{\partial u}{\partial x}$，而不知道直接知道其他两个分量。但是这两个分量是一个函数，我们对其求偏导便能用应变分量表示.
比如说对于 $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = A \\ &\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = B \\ &\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial z}(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x})] = \frac{1}{2}(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}) = C \end{aligned}$$

利用积分

$$\int Adx + Bdy + Cdz = 0$$

可以求得单值连续函数$\frac{\partial u}{\partial y}$，然后按照这样的方法可以求得$\frac{\partial u}{\partial z}$，最后求得 u

但是，为满足积分结果单值连续，我们给出条件

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

将 A, B, C 条件带入可求得关系，如果我们对每一个单值连续函数都做这样的处理，我们能得到18个条件，但只有6个是不同的，这六个条件也就是变形协调方程

回到最初的积分式子，当然，这是一个多元函数积分，微积分告诉我们这个积分结果可能是不唯一的，为了确保唯一性，我们也应当确保所积对象是单值连续函数（也就是积分与路径无关）。

此外，从数学角度上来说，柯西方程给出了包含六个方程却只有三个未知函数的偏微分方程，由于方程个数超过函数个数，方程组可能是矛盾的。

我们直接给出应变协调方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

又称圣维南方程，这是保证物体连续的一个必要条件

张量形式:

$$\varepsilon_{ij,kl} e_{ikm} e_{jln}=0$$

用应变导数表示

如果物体时单连通的，则应变分量满足应变协调方程也是物体连续的充分条件

而多联通物体，总是可以作适当的截面使它变成单连通物体，在此被割开以后的区域里，一定能求得单值连续的函数 u, v, w。但对于求得的 u, v, w，当点 (x, y, z) 分别从截面两侧趋向于截面上某一点时，他们将趋于不同的值 $u^+, v^+, w^+, u^-, v^-, w^-$，为满足连续条件，需添加补充条件

$$u^+=u^-, v^+=v^-, w^+=w^-$$

此时应变协调方程也是充分条件。