应力状态分析

弹性力学

弹性体受力状态基本关系

1. 平衡关系
2. 几何关系
3. 物理关系

- 体力：作用在物体微粒体的力：重力、惯性力、电磁力

$$p=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta V}=\frac{dP}{dV}$$

- 面力：作用在物体表面的分布力：风力、液体压力、两物体间的接触力

$$T=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{dF}{dS}$$

内力：在外界因素作用下的物体，其内部之间附加产生相互作用的一种量度
应力

$$\begin{aligned}f_n&=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{dF}{dS}\\&=f_{n1}e_1+f_{n2}e_2+f_{n3}e_3\\&=\sigma_n n+\tau_n\tau\end{aligned}$$

应力数值不仅依赖于空间点，而且依赖于微元面积的方向

如果考虑材料具有微结构

$$f_n=\lim_{\Delta S\to \Delta S_{\lim}}\frac{\Delta F}{\Delta S}=\frac{dF}{dS}$$

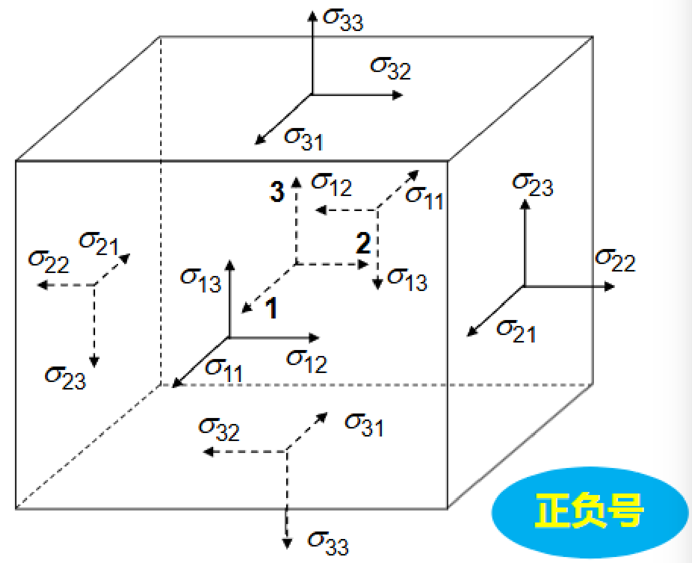
§ 2-2 应力和一点的应力状态

- 如何衡量一点的应力状态：应力张量

$$(\sigma_{ij})=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$

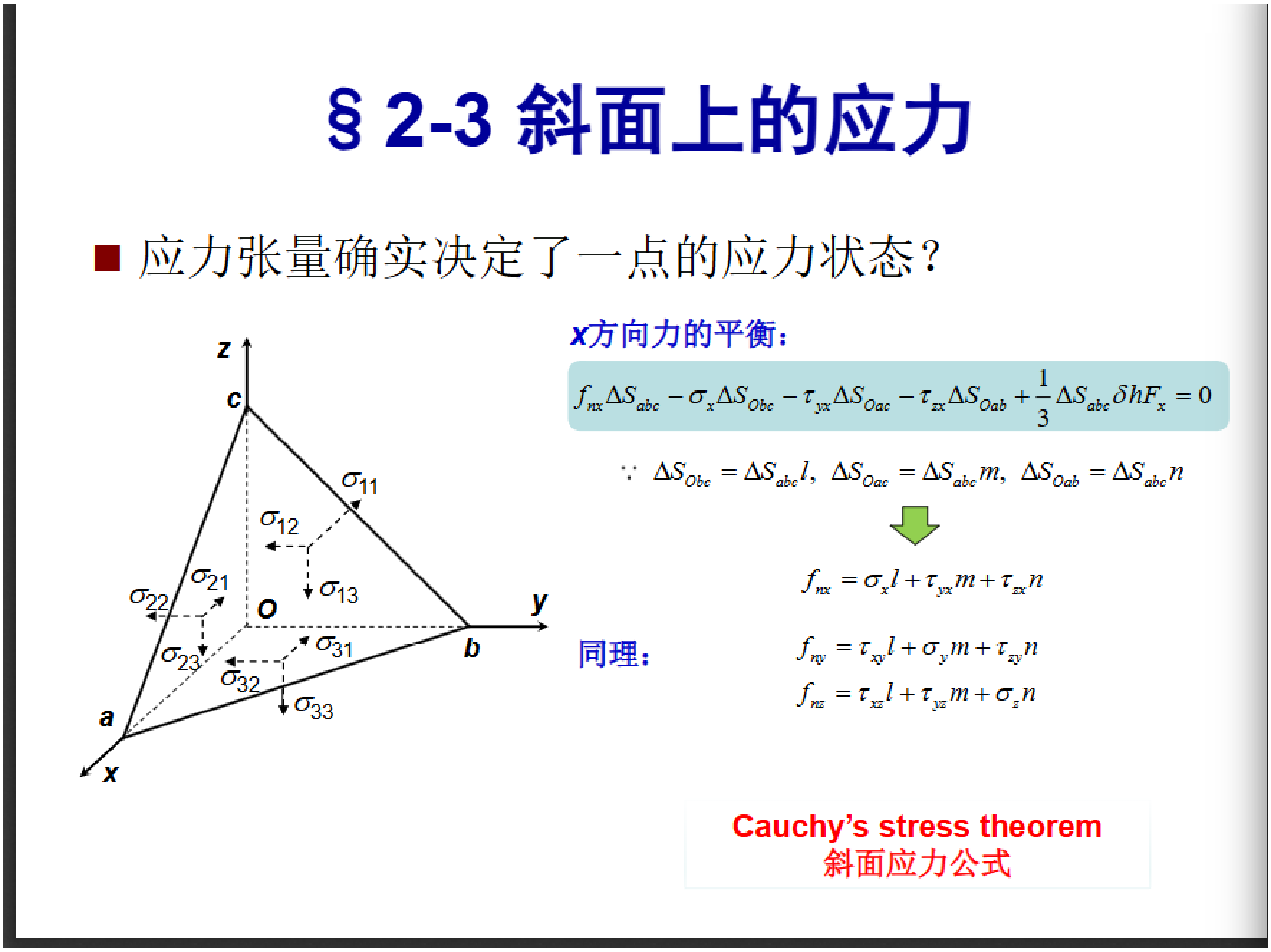
应力状态 ⇨ 强度



Nine components of a stress tensor

知道一个坐标系一个点上的应力状态可以其他坐标系的应力状态（一一对应）

对于 σ_{ij} 第一个下标 i 表示所在面法向方向，第二个下标 j 表示应力方向（存在两个下标互换情况 :-| ）



做一个与坐标倾斜的微分面，斜面 n 上的应力矢量 (f_{nx}, f_{ny}, f_{ny})，当这个斜面无限接近 原点时，(f_{nx}, f_{ny}, f_{ny})可以表示过原点的任一微分面上的应力。

现在来推导应力分量的表达式

对于斜面上的应力，先考虑x方向上的平衡

$$f_{nx}\Delta S_{abc}-\sigma_x\Delta S_{Obc}-\tau_{yx}\Delta S_{Oac}-\tau_{zx}\Delta S_{Oab}+\frac{1}{3}\Delta S_{abc}\delta hF_x=0$$

由于体力$\frac{1}{3}\Delta S_{abc}\delta hF_x$相较于应力为小量（多了一个$\delta h$），忽略不计得

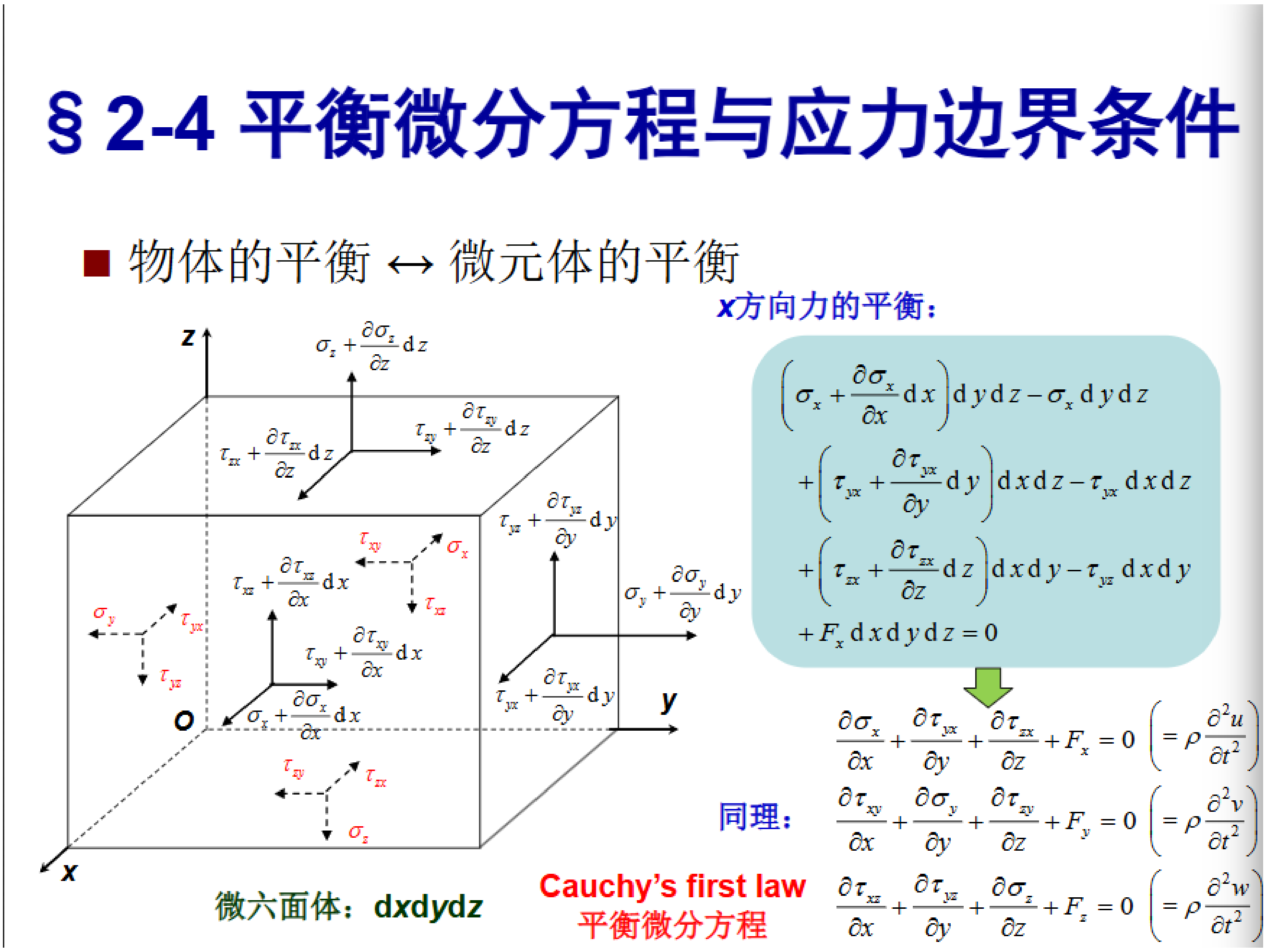
$$f_{nx}=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n$$

其他方向的公式也可以导出

$$\begin{aligned} f_{nx} &= \sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n \\ f_{ny} &= \tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n \\ f_{nx} &= \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n \end{aligned}$$

也称Cauthy's stress theorem(CST)公式

平衡方程



先考虑一个微分平行六面体的平衡。

假定$x=0$微分面上的应力分量 $\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}$

于是有泰勒展开得$x=dx$的微分面上的应力分量为

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx,\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx$$

由静力平衡方程得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_x=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_x=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

建立起体力与应力关系，称为平衡微分方程，也称纳维方程，其中，F_x,F_y,F_z表示单位体积的体力在3个坐标方向的分量，ρ代表物体的密度， u,v,w表示物体任一点的位移矢量在3个坐标方向的分量

上述方程考虑了物体运动情况，也就是引入了惯性力，当物体静止或做匀速运动时，惯性力为0

也可以简写成

$$\sigma_{ij,j}+F_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$\sigma_{ij,j}$表示应力分量对坐标的偏导数

考虑力矩平衡可得关系

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

也就是切应力互等关系（应力张量对称性）

基本弹性体不考虑力偶作用。对于部分材料，当研究微结构时需要考虑力偶作用，此时切应力互等失效，理论：couple stress theory

拓展：诺特定理

对于每个局部作用下的可微对称性，存在一个对应的守恒流。（每个对称性对应一种守恒律）

我们从一个微分四面体推出应力边界条件，设单位面积上的外加面力的3个分量 $\overline{f}_x,\overline{f}_y,\overline{f}_z$,表面外法线 $n=(l,m,n)$，由CST公式可以推出应力边界条件
应力边界条件：

$$\begin{aligned}\overline{f}_x&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\ \overline{f}_y&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\ \overline{f}_z&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}$$

也可以简写做

$$\overline{f}_i=\sigma_{ij}n_j$$

平衡微分方程对应物体内部的平衡，应力边界条件对应物体边界部分的平衡。如果物体是平衡的，则应力分量满足平衡微分方程和应力边界条件；反之，如已知应力分量满足平衡微分方程和应力边界条件，则物体也是平衡的，但这属于静力学上可能的平衡，对真实变形物体而言，还需考虑几何连续条件。

变换规则

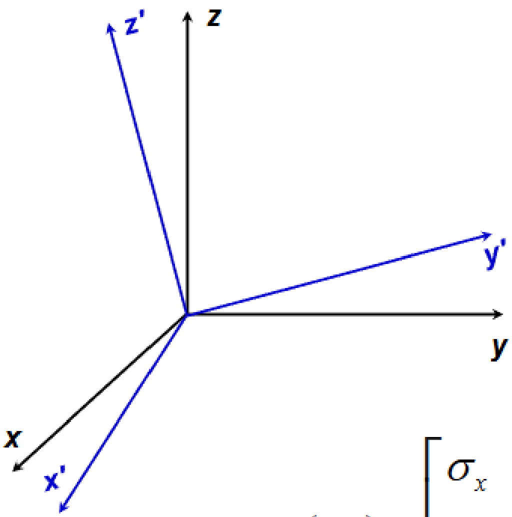
坐标系改变时，用一点的各应力分量应作如何改变呢？

当坐标系仅作平移变换，同一点的各应力分量是不会改变的

我们考虑转轴变换

§ 2-5 应力张量的坐标变换

■ 两个不同的坐标系



方向余弦：

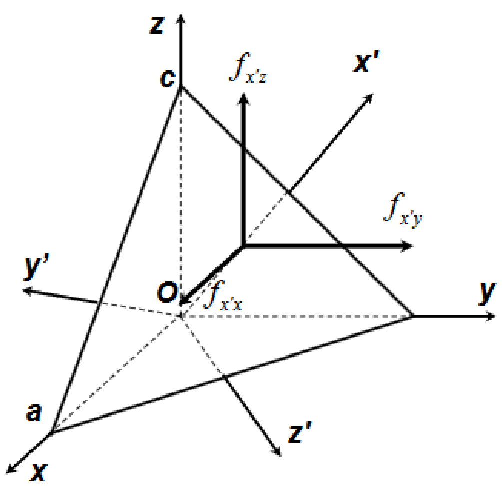
$n_{i'j}$	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

已知：$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow (\sigma_{i'j'}) = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$

上图给出了变换前后的相关参数，其中 l_i, m_i, n_i表示3个新坐标系对老坐标系的方向余弦

§ 2-5 应力张量的坐标变换

■ Cauchy’s stress theorem (CST)



由矢量分解：

$$\sigma_{x'} = \mathbf{f}_{x'} \cdot \mathbf{e}_1' = f_{x'x} l_1 + f_{x'y} m_1 + f_{x'z} n_1$$
$$\tau_{x'y'} = \mathbf{f}_{x'} \cdot \mathbf{e}_2' = f_{x'x} l_2 + f_{x'y} m_2 + f_{x'z} n_2$$
$$\tau_{x'z'} = \mathbf{f}_{x'} \cdot \mathbf{e}_3' = f_{x'x} l_3 + f_{x'y} m_3 + f_{x'z} n_3$$

由CST：

$$f_{x'x} = \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1$$
$$f_{x'y} = \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1$$
$$f_{x'z} = \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1$$

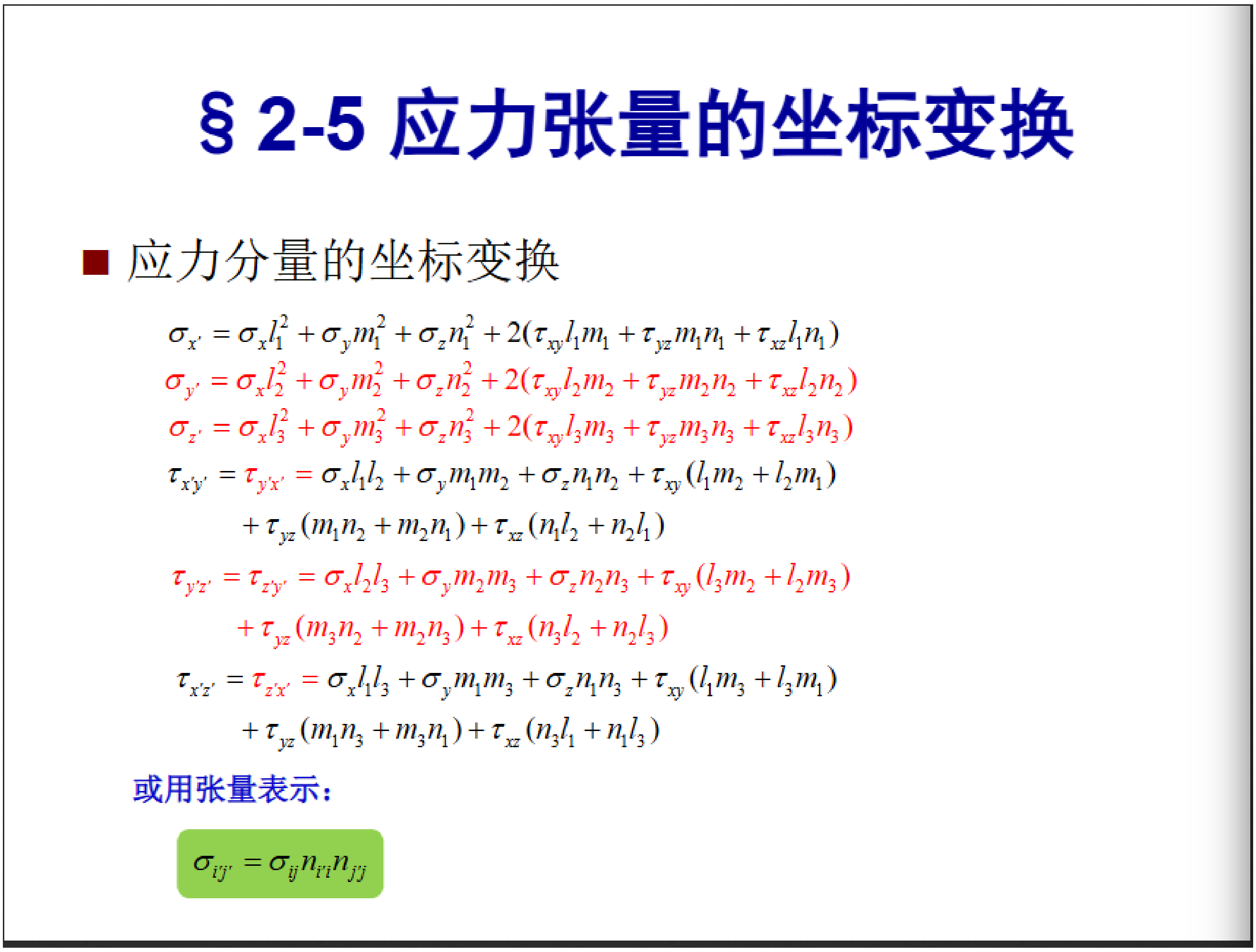
先考虑与 Ox' 轴垂直的微分面上的应力矢量 $f_{x'}$，我们用 $f_{x'x}, f_{x'y}, f_{x'z}$ 表示 $f_{x'}$ 在3个老坐标系方向的分量，e'_1, e'_2, e'_3表示3个新坐标轴的单位矢量。
由矢量分解:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= f_{x'} \cdot e'_1 = f_{x'x} l_1 + f_{x'y} m_1 + f_{x'z} n_1 \\
\tau_{x'y} &= f_{x'} \cdot e'_2 = f_{x'x} l_2 + f_{x'y} m_2 + f_{x'z} n_2 \\
\tau_{x'z} &= f_{x'} \cdot e'_e = f_{x'x} l_3 + f_{x'y} m_3 + f_{x'z} n_3
\end{aligned}
$$

因为与 Ox' 轴垂直的微分面对老坐标轴来说是倾斜的，它的外法线方向即为 Ox' 轴的方向，其方向余弦为 l_1, m_1, n_1所以有以下关系式

$$
\begin{aligned}
f_{x'x} &= \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 \\
f_{x'y} &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1 \\
f_{x'z} &= \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1
\end{aligned}
$$

于是有:



关系式

$$
\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} n_{i'i} n_{j'j}
$$

当坐标作转轴变换时，应力分量遵循二阶张量的变换规律，因此，这9个量组成二阶张量。显然，虽然转轴后各应力分量都改变了，但9个分量作为一个“整体”，所描绘的一点的应力状态是不会改变的

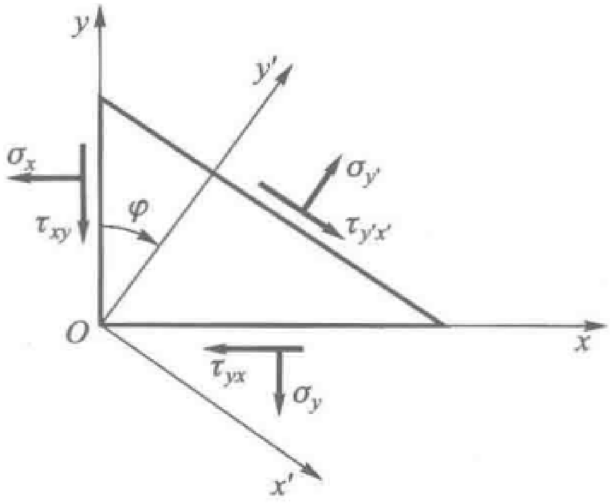


图 2-9

在平面情况下，就是材料力学中的二次应力转换式

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi - 2\tau_{xy}\cos\varphi\sin\varphi \\
\sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi + 2\tau_{xy}\cos\varphi\sin\varphi \\
\tau_{x'y'} &= (\sigma_x - \sigma_y)\cos\varphi\sin\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)
\end{aligned}
$$

主应力与应力张量不变量

寻找某一坐标系，其中应力张量只有正应力分量，而切应力分量为零，即存在三个相互垂直的微分面，其上只有正应力而无切应力

由矢量分解有：

$$f_{nx} = \sigma l, f_{ny} = \sigma m, f_{nz} = \sigma n$$

主平面相对原坐标轴是一个倾斜的微分面，所以由柯西斜面公式得，

$$
\begin{aligned}
f_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\
f_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\
f_{nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n
\end{aligned}
$$

带入可得

$$
\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0 \\
\tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy} n = 0 \\
\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n = 0
\end{aligned}
$$

满足有解的条件为

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\
\tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{xy} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma
\end{vmatrix} = 0
$$

展开后得到应力状态特征方程：

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
I_2 &= \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2 \\
I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

称为应力张量不变量，其含义是：当坐标系旋转时，每个应力分量都要随之改变，但这3个量是不变的。方程的跟代表主应力，他的大小和方向在物体的形状和引起内力的因素确定以后是完全确定的，不随坐标的改变而改变。

对于解 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$有三种情形

1. $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1$，三个应力主方向相互垂直
2. $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ σ_3的方向垂直于 σ_1 和 σ_2 的方向，
3. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$，任何方向都是主应力方向

最大切应力

寻找切应力最大的微分面。

$$f_{vx} = \sigma_1 l, f_{vy} = \sigma_2 m, f_{vz} = \sigma_3 n$$

用f_v 表示此微分面上应力矢量大小，σ_v, τ_v分别表示正应力与切应力

$$\begin{aligned}
f_v &= \sqrt{f_{vx}^2 + f_{vy}^2 + f_{vz}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} \\
\sigma_v &= f_{vx} l + f_{vy} m + f_{vz} n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 n^2 + \sigma_3 n^2
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\tau_v^2 &= f_v^2 - \sigma_v^2 \\
&= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 n^2 + \sigma_3 n^2)^2
\end{aligned}$$

- $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\
\tau_2 &= \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\
\tau_3 &= \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}
\end{aligned}$$

- $\sigma_1 = \sigma_3 > \sigma_2$

$$\tau_v = \tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
  没有切应力