多自由度振动 II ; 多自由度振动的近似计算方法 I

振动力学

Miscellaneous

> ~~因为这节课前期在开小差所以记得很乱不知道在讲什么但应该是一些课本上的内容~~

复数解法的简谐激励作用下的多自由度振动系统

考虑受到简谐广义力激励的多自由度系统:

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=F_oe^{i\omega t}$$

我们可以取

$$X=X_0e^{i\omega t}$$

然后带入到方程求解。

$$(K-\omega^2M+i\omega C)X_0=F_0$$

解出 $X=HF_0$，H 为复频响应矩阵

$$H=(K-\omega^2M+i\omega C)^{-1}$$

所以得到系统响应

$$x=HF_0e^{i\omega t}$$

但是这个方法仅适用于小自由度系统（因为要对矩阵求逆，矩阵求逆不是一个很舒服的事情）

复振型

> 这个方法已经很少用了但还是有研究的价值。
> 符号有点乱见谅 -.-

在引入复振型之前，我们对阻尼矩阵进行一个说明，我们之前引入了两种方法来处理阻尼矩阵：一是只取对角元元素；二是化成比例阻尼处理，但这两个只是极少数的情况，于是在其他情况下，我们至少能保证阻尼矩阵是一个满秩矩阵。（虽然我不知道有什么用哈哈哈）

当存在阻尼作用时，系统一定不是一个保守状态，借用常微分的知识，我们引用一个衰减项

$$x=X_0e^{\lambda t}$$

对于自由振动有

$$[\lambda^2 M + \lambda C + K]e^{\lambda t} = 0$$

要求有解，方程要求

$$\det[\lambda^2 M + \lambda C + K] = 0$$

这个称为线性阻尼系统的特征方程，他是 λ 的 $2n$ 次代数方程，它的解 λ_i 可以是实根或复根。如果是实根，他一定是负值，对应系统的衰减自由运动，如果是复根，它一定具有复实部，且复特征根一定是共轭成对出现，对应特定频率与减幅率的一种衰减自由振动。记其对应的特征向量为 ϕ_i

我们做一个变换，考虑取

$$y = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}$$

所以方程变成

$$\widehat{M}\dot{y} + \widehat{K}y = \widehat{F}$$

其中

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad \widehat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

所以可以设特征振动为

$$y = \psi e^{\lambda t}$$

因为我们描述的是同一个运动方程，所以他们有相同的特征根，即

$$\psi_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \phi_i \\ \phi_i \end{Bmatrix}$$

我们依旧能证明特征根满足正交性

$$\psi_j^T \widehat{K} \psi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \overline{K}_i & i = j \end{cases}$$

$$\psi_j^T \widehat{M} \psi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \overline{M}_i & i = j \end{cases}$$

$$-\lambda_i = \frac{\overline{K}_i}{\overline{M}_i}$$

利用正交型和复振型矩阵 $\Psi = [\psi_1, \ldots, \psi_{2n}]$ 设

$$y = \Psi z$$

带入方程并左乘 Ψ^T 解耦得

$$\Psi^T \widehat{M} \Psi \dot{z} + \Psi^T \widehat{K} \Psi z = \Psi^T \widehat{F}$$

也就是

$$\overline{M}_i \dot{z}_i + \overline{K}_i z_i = (\Psi^T \widehat{F})_i$$

考虑到 $\overline{K}_i = -\lambda_i \overline{M}_i$ 那么上述方程又可以写作

$$\dot{z}_i - \lambda_i z_i = \frac{\phi_i^T F(t)}{\overline{M}_i}$$

所以对应零初始条件解:

$$z_i = \frac{1}{\overline{M}_i} \int_0^t \phi_i^T F(t) e^{\lambda_i (t-\tau)} \, \mathrm{d}\tau$$

以此回带便可以解出复振型解。

邓利克法

对于保守系统方程，我们可以改写成如下形式

$$D\ddot{x} + x = 0$$

其中 $D = FM, F = K^{-1}$ 称为柔度矩阵，我们将 $x = X_0 e^{i\omega t}$ 带入并改写方程可得

$$(D - \nu I) X_0 = 0$$

其中 $\nu = \frac{1}{\omega^2}$ 同样的为了使方程有解我们可以得出

$$\det[D - \nu I] = 0$$

展开得

$$\nu^n + \alpha_1 \nu^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} + a_n = 0$$

根据特征值的性质，我们知道

$$\alpha_1 = -(D_{11} + D_{22} + \cdots + D_{nn}) = -\mathrm{tr} D$$

根据多项式的性质，我们可以将特征方程改成如下形式

$$(\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2) \ldots (\nu - \nu_n) = 0$$

所以我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i = \sum_{n}^{i=1} D_{ii}$$

假定 ν_1 为最大值(对应频率最小)，假定其他频率对应的 $\nu_2, \ldots, \nu_n$ 远小于 ν_1，因此可以近似忽略，所以我们得到了一个基频近似公式（下限）

$$\nu_1 \approx \sum_{i=1}^{n} D_{ii}$$

我们看柔度矩阵 F，其元素 F_{ij} 表示 i 坐标上的单位力引起的质量 j 的位移。

接下来讨论 D 。对于 D 上的对角元素 $D_{ii} = F_{ii} M_i$ 它表示系统内仅有 i 质量，他的柔度就等于 F_{ii}，也就是说 系统内仅有第 i 质量时其固有频率 $\widetilde{\omega}_i$满足

$$D_{ii} = F_{ii} M_i = \frac{1}{\widetilde{\omega}_i^2}$$

我们就算出了近似基频的取值。