连续系统振动 II

振动力学

弹性连续体振动方程

引言:

对于杆的纵向振动，我们已经导出其振动方程

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=f(x,t)$$

基于上述方程，类似地我们也可以导出弹性体振动

- 等截面圆轴扭转振动

  $$\rho(x)I(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[G(x)I(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]=f(x,t)$$

  由材料力学中的知识可得，对于扭转问题，我们所关注的是扭矩 f 与转角 θ 的关系。同时我们一般假设横截面在扭转振动中仍保持平面做整体转动，弹性力学告诉我们只有等截面圆轴才满足这一要求。
- 弦的振动

  $$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=f(x,t)$$

  在弦的振动问题中，$A(x)$ 一般为变量，张力 $T(x)$ 一般为常量。

我们一般采用分离变量法来求解上述方程。在数理方法中，对于上述的问题，一般需要给出初始条件和边界条件来构成定解问题。

我们给出初始条件和边界条件。

初始条件一般有两种

$$u(x,t_0)=\varphi(x)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\psi(x)$$

边界条件一般有四种:

$$u(0,t)=0\quad \frac{\partial}{\partial x}u(0,t)=0$$

$$F(0,t)=k_1u(0,t)\qquad F(0,t)=M\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(0,t)$$

上述两种分布对于弹性支撑和集中质量这两种情况，我们暂时不处理正负号。

我们将分析无外加激励的弹性振动问题

均匀弹性体振动

对于上述三种情况，当它们满足一定均匀性条件时，我们可以总结成如下W 波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0$$

假定边界条件皆为**两端固定**。我们知道可以通过分离变量方法来求解方程。

$$u = X(x)T(t)$$

取本征值 $\lambda = -\omega^2$，根据边界条件我们知道本征值和其对于的本征函数

$$\omega_i = \frac{i\pi c}{L}$$

$$X_i = \sin \frac{\omega_i}{c} x$$

在振动力学中，它们又被称为固有频率和振型，满足归一化条件。

时间函数满足

$$T(t) = A \sin \omega_i t + B \cos \omega_i t$$

其他细节可参照下表:

表 9.1

	弦的横振	杆的纵振	轴的扭振
物理参数	T 弦的张力 ρ 弦的线质量	E 弹性模量 A 截面积 ρ 密度	G 剪切弹性模量 I_p 截面极惯量矩 ρ 密度
x 截面处位移 y	横向位移	纵向位移	转　角
单位长度的质量（或转动惯量）	ρ	ρA	ρI_p
x 截面处力（或扭矩）	$T\dfrac{\partial y}{\partial x}$	$EA\dfrac{\partial y}{\partial x}$	$GI_p\dfrac{\partial y}{\partial x}$
波速 c	$\sqrt{T/\rho}$	$\sqrt{E/\rho}$	$\sqrt{G/\rho}$
运动微分方程	$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$		
通　解	$y=\Sigma y_i=\Sigma X_i(x)Y_i(t)$ $Y_i(t)=A_i\sin p_i t+B_i\cos p_i t, X_i(x)=C_i\sin\dfrac{p_i x}{c}+D_i\cos\dfrac{p_i x}{c}$		
边界条件	两端固定 $X(0)=X(l)=0$	两端自由 $X'(0)=X'(l)=0$	一端固定一端自由 $X(0)=X'(l)=0$
固有频率	$p_i=i\pi c/l$ $i=1,2,3,\cdots$	$p_i=i\pi c/l$ $i=0,1,2,\cdots$	$p_i=\dfrac{2i-1}{2}\cdot\dfrac{\pi c}{l}$ $i=1,2,3,\cdots$
振型函数	$X_i=\sin\dfrac{i\pi x}{l}$	$X_i=\cos\dfrac{i\pi x}{l}$	$X_i=\sin\left(\dfrac{2i-1}{2}\cdot\dfrac{\pi x}{l}\right)$

非均匀弹性体振动问题

基于上述思想，我们依旧采用分离变量法来处理我们的振动问题。经过分离变量后，方程变形成如下形式:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\frac{\frac{d}{dx}[E(x)A(x)\Phi'(x)]}{\rho(x)A(x)\Phi(x)}=-\omega^2$$

于是固有频率及其对应的振幅应满足

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]=-\omega_i^2\rho(x)A(x)\Phi_i(x)$$

正如前面的振动系统，我们研究其正交性。我们先给出结论

$$\int_0^L\rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)=\begin{cases}0 & \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\\ \overline{M}_i & \mathrm{i}=\mathrm{j}\end{cases}$$

$$\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i'(x)\Phi_j'(x) = \begin{cases} 0 \text{ i} \neq \text{j} \\ \overline{K}_i \text{ i} = \text{j} \end{cases}$$

此时我们考虑的是两端固定、两端自由、一端固定和一端自由这三种边界情况。我们将上述这两种正交情况称为加权正交，它们分别表述振型函数所具有的正交性和其一阶导数所具有的正交性。

证明第一个方程:

考虑两个本征函数所满足的方程

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right] = -\omega_i^2\rho(x)A(x)\Phi_i(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_j(x)\right] = -\omega_j^2\rho(x)A(x)\Phi_j(x)$$

我们对第一式子做乘以 $\Phi_j(x)$ 处理，然后在 $[0, L]$ 上积分

$$\int_0^L \Phi_j(x)\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]dx = -\omega_i^2\int_0^L \Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx$$

左式有分步积分展开得

$$\left\{\Phi_j(x)\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]\right\}\Bigg|_0^L - \int_0^L \Phi_j'(x)E(x)A(x)\Phi_i'(x)dx$$

边界条件给出第一项为零，所以简化成

$$\int_0^L \Phi_j'(x)E(x)A(x)\Phi_i'(x)dx = \omega_i^2\int_0^L \Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx$$

同理可得，对于第二个本征函数所满足的方程有

$$\int_0^L \Phi_i'(x)E(x)A(x)\Phi_j'(x)dx = \omega_j^2\int_0^L \Phi_i(x)\rho(x)A(x)\Phi_j(x)dx$$

两式相减

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\int_0^L \Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx = 0$$

由于 $\omega_i \neq \omega_j$ ，所以

$$\int_0^L \Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx = 0$$

也就是关于权重 $\rho(x)A(x)$ 正交

第二个式子利用上述正交性由

$$
\left\{\Phi_j(x)\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]\right\}\Bigg|_0^L-\int_0^L\Phi_j'(x)E(x)A(x)\Phi_i'(x)dx
$$
$$
=-\omega_i^2\int_0^L\Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx
$$

得出。这边做一个简要描述：分布积分结果为零，所以等式左边第二项，也就是关于一阶导数的正交性只和等式右边也就是关于振型函数的正交性有关。

现在考虑边界条件为弹性支撑或者集中质量时的正交性条件，我们无法得出分部积分为零的结果，所以需要对原有的正交性进行修正。直接给出结论：

对于弹性支撑：

$$
\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i'(x)\Phi_j'(x)dx+k_1\Phi_i(0)\Phi_j(0)+k_2\Phi_i(L)\Phi_j(L)=\begin{cases}0 & \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\\ \overline{K}_i & \mathrm{i}=\mathrm{j}\end{cases}
$$

对于集中质量：

$$
\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i'(x)\Phi_j'(x)dx+M_1\Phi_i(0)\Phi_j(0)+M_2\Phi_i(L)\Phi_j(L)=\begin{cases}0 & \mathrm{i}\neq\mathrm{j}\\ \overline{M}_i & \mathrm{i}=\mathrm{j}\end{cases}
$$

我们用一个复杂情况证明上述两个正交性：左端为弹性支撑、右端为集中质量。也就是

$$
\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}=k_1u(0,t)
$$
$$
\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L}=-M\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(L,t)
$$

重复之前的步骤，我们依旧可以的得到在 $0\sim L$ 上积分的关系式：

$$
\left\{\Phi_j(x)\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]\right\}\Bigg|_0^L-\int_0^L\Phi_j'(x)E(x)A(x)\Phi_i'(x)dx
$$
$$
=-\omega_i^2\int_0^L\Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx
$$

我们对边界条件做一些处理，将 $u=\sum\Phi_i(x)q_i(t)$ 带到边界条件中，利用 $\ddot{q}_i(t)=-\omega_i^2q_i(t)$ 可得

$$
\left[E(x)A(x)\frac{d\Phi_i}{dx}\right]_{x=0}=k_1\Phi_i(0)
$$
$$
\left[E(x)A(x)\frac{d\Phi_i}{dx}\right]_{x=L}=M\omega_i^2\Phi_i(L)
$$

于是，在分部积分可展开成

$$\left\{\Phi_j(x)\left[E(x)A(x)\frac{d}{dx}\Phi_i(x)\right]\right\}\Bigg|_0^L = M\omega_i^2\Phi_i(L)\Phi_j(L) - k_1\Phi_i(0)\Phi_j(0)$$

对另一个积分也做如上展开，然后两式相减可得

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\left[\int_0^L \Phi_j(x)\rho(x)A(x)\Phi_i(x)dx + M\Phi_i(L)\Phi_j(L)\right] = 0$$

可证明带有集中质量的正交性，对于弹性支撑的正交性可利用上述正交性仿照前文证得。