多自由度振动的近似计算方法 II

振动力学

Rayleigh 法

第一 Rayleigh 商：

$$R_I(x)=\frac{X^TKX}{X^TMX}$$

第二 Rayleigh 商：

$$R_{II}(x)=\frac{X^TMX}{X^TMK^{-1}MX}$$

我们给出 Rayleigh 商满足的关系式

$$R_I(x)\geq R_{II}(x)\geq\omega_1^2$$

Rayleigh 法给出了最小固有频率的上限，因此结合邓利克法可以给出最小固有频率的范围。

现在来证明上述不等式，由于一个振型矢量都可以表示为各个特征矢量的线性组合，即：

$$X=\sum c_i\varphi_i$$

假定这些特征矢量均已标准化，也就是

$$\begin{aligned}\varphi_i^TM\varphi_i&=1\\ \varphi_i^TK\varphi_i&=\omega_i^2\end{aligned}$$

所以将第一 Rayleigh 商展开得

$$R_I=\frac{(\sum c_i\varphi_i)^TK(\sum c_i\varphi_i)}{(\sum c_i\varphi_i)^TM(\sum c_i\varphi_i)}=\frac{\sum\sum c_ic_j\varphi_i^TK\varphi_j}{\sum\sum c_ic_j\varphi_i^TM\varphi_j}=\frac{\sum c_i^2\omega_i^2}{\sum c_i^2}$$

我们提取 ω_1 (最小固有频率)

$$\frac{\sum c_i^2\omega_i^2}{\sum c_i^2}=\frac{\sum_{i=2}c_i(\frac{\omega_i}{\omega_1})^2+c_1}{\sum c_i^2}\omega_1^2\geq\omega_1^2$$

对于第二 Rayleigh 商，我们先导出特征根关于 $MK^{-1}M$ 的正交性

$$\begin{aligned}\varphi_j^TMK^{-1}M\varphi_i&=\varphi_j^TM\varphi_i\varphi_i^{-1}K^{-1}(\varphi_j^T)^{-1}\varphi_j^TM\varphi_i\\&=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{1}{\omega_i^2} & i=j\end{cases}\end{aligned}$$

简化过程直接给出第二Rayleigh商

$$\frac{\sum c_i^2}{\sum c_i^2(\frac{1}{\omega_i})^2} = \frac{\sum c_i^2}{\sum_{i=2} c_i^2(\frac{\omega_1}{\omega_i})^2 + c_1^2}\omega_1^2 \geq \omega_1^2$$

下面证明

$$\frac{\sum c_i^2\omega_i^2}{\sum c_i^2} \geq \frac{\sum c_i^2}{\sum c_i(\frac{1}{\omega_i})^2}$$

做变换

$$\sum c_i^2\omega_i^2 \sum c_i(\frac{1}{\omega_i})^2 \geq \sum c_i^2 \sum c_i^2$$

由于下标不影响结果，所以展开得

$$\frac{1}{2}\sum\sum c_i^2 c_j^2[(\frac{\omega_i}{\omega_j})^2 + (\frac{\omega_i}{\omega_j})^2] \geq \sum\sum c_i^2 c_j^2$$

利用均值不等式即可证明。

上面介绍了两种 Rayleigh 商，前者适用于刚度矩阵已知的情形，后者适用于柔度矩阵已知的情形，一般来说，前者较为简便，后者较为准确。

我们计算出来的 Rayleigh 商虽然不是系统的任一阶固有频率的平方，但必介于系统的最低和最高固有频率的平方 ω_1^2 和 ω_n^2 之间，即

$$\omega_1^2 \leq R(X) \leq \omega_n^2$$

可以证明，Rayleigh 商在各阶真实振型 φ_i 处取驻点。我们在计算中使用的假设振型越接近系统的真实振型，算出来的固有频率越准确，从物理上理解就是，假设振型相当于对实际系统增加了约束，使系统的刚度提高，因此基频也提高。

Ritz 法

我们将振型表示成有限个独立假设模态的线性和，即

$$X = \sum_{i=1}^{m} C_i\psi_i \equiv \Psi\{C\}$$

其中 ψ_i 为线性独立的假设模态，Ψ 为 $n \times m$ 的矩阵，其中 n 表示系统内自由度个数，m 表示假设模态的数量，C_i 为系数

带到Rayleigh商中

$$R_I=\frac{\{C\}^T\Psi^TK\Psi\{C\}}{\{C\}^T\Psi^TM\Psi\{C\}}=\frac{\{C\}^T\overline{K}\{C\}}{\{C\}\overline{M}\{C\}}=\lambda$$

我们要使我们的 Rayleigh 商最小，即取驻点 $\frac{\partial R_I}{\partial C_i}=0$，我们可以得出关系式

$$[\overline{K}-\lambda\overline{M}]\{C\}=0$$

可求出对应的特征值 $\lambda_1\ldots\lambda_m$ 和特征向量 $C_1\ldots C_m$

我们同样可以用 Rayleigh 第二商求解。

事实上我们所得出的解坐落在一个线性空间 $\text{span}\{\varphi_1,\varphi_2\ldots\varphi_m\}$ 中，而这个空间是原本 n 维空间的子空间，Ritz 法实际上起着坐标缩并的作用。用 Ritz 法计算处的固有频率前半频率精度较高，因此要计算前 s 个固有频率，通常取 $r=2s$ 个假设振型。

矩阵迭代法

将系统的主振型方程可表示为柔度形式，即

$$DX_i=\nu_iX_i$$

所以我们可采用如下迭代算法更新

$$\begin{aligned}&1.\text{任取振型}x_0\\&2.\text{第}k\text{次迭代：}\\&\quad\beta_kx_k=Dx_{k-1}\end{aligned}$$

β_k 表示向量 Dx_{k-1} 迭代后所产生向量中的最大分量，其中 x_k 满足最大分量为1

所以我们可以的得到近似关系

$$\begin{aligned}&\beta\rightarrow\nu_1=\frac{1}{\omega_1^2}\\&x_n\rightarrow\varphi_1\end{aligned}$$

也就是计算方法中的改进幂法。

如果我们用刚度矩阵方式进行迭代即方程

$$M^{-1}KX_i=\lambda_iX_i$$

所求得的固有频率为最大固有频率。

如果我们想求解 ν_2,φ_2 则需要清除假设振型中 φ_1 的影响。 对于任意振型

$$X=a_1\varphi_1+\sum_{i=2}a_i\varphi_i$$

利用正交性，左乘 φ_1^TM 得

$$\varphi_1^T MX = \varphi_1^T M(a_1\varphi_1 + \sum_{i=2} a_i\varphi_i) = a_1\varphi_1^T M\varphi_1$$

考虑消除 φ_1 得振型

$$X' = X - a_1\varphi_1$$

由于 a_1 是一个数，所以 φ_1 的位置并不会影响，我们将正交性结果代入得

$$X' = X - \varphi_1\frac{\varphi_1^T MX}{\varphi_1^T M\varphi_1} = (I - \frac{\varphi_1\varphi_1^T M}{\varphi_1^T M\varphi_1})X$$

所以我们可以得到清形矩阵

$$H = I - \frac{\varphi_1\varphi_1^T M}{\varphi_1^T M\varphi_1}$$

推广到 r 个自由度为

$$H_r = I - \sum_{i=1}^{r}\frac{\varphi_i\varphi_i^T M}{\varphi_i^T M\varphi_i}$$