连续系统振动的近似方法 I

振动力学

解的定性性质

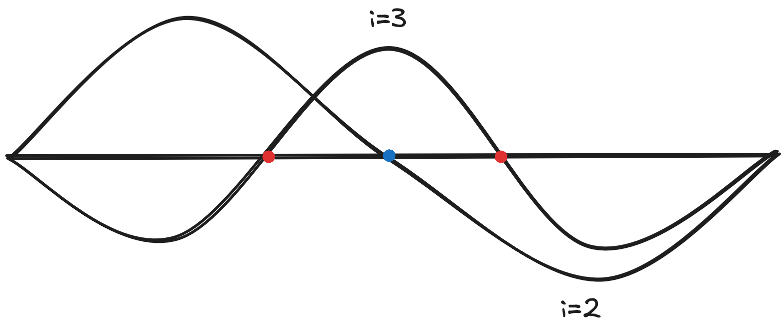
我们来讨论振动问题的一些解的定性性质。

以杆为例，第一个定性性质是频率是离散无重复的即 $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$

第二个定性性质是节点的交错性，他分为三种：

1. 杆的两个相邻位移振型节点 φ_i, φ_{i+1} 相互交错
2. 杆的两个相邻转角 θ_i, θ_{i+1} 节点相互交错
3. 同阶转角 θ_i 与位移 φ_i 相互交错

所谓交错性可以按照下图理解（不考虑两条曲线相交的节点）：可以看到 $\mathrm{i}=2$ 的节点（蓝色）在 $\mathrm{i}=3$ 节点 (红色) 之间，也就是说，相邻振型（转角）的节点必须是交错排序（左边和右边节点必须是另一条曲线的节点）



第三个定性性质是所有振型只有两个独立振型，所谓独立振型是指频率与振型相互独立，这个比较难理解，做一个简单的证明

取 $(\omega_i, \varphi_i), (\omega_j, \varphi_j)$，带入杆的振动方程中得

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right] = \omega_i^2\rho(x)A(x)\varphi_i(x) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d\varphi_j(x)}{dx}\right] = \omega_j^2\rho(x)A(x)\varphi_j(x) \tag{2}$$

(2) 式乘上 $\omega_i^2\varphi_i(x)$ 后与 (1) 相减得

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right] - \frac{d}{dx}\left[E(x)A(x)\frac{d\varphi_j(x)}{dx}\right]\varphi_i(x)\omega_i^2 = 0$$

因为 $\omega_i, \omega_j, \varphi_i(x), \varphi_j(x)$ 是已知的，所以我们总是可以用这四个已知量表示 $E(x)A(x)$ ，同样的，我们也可以表示出 $\rho(x)A(x)$ 。而对于剩下的频率与振型函数，总要满足上述关系时，也就是说剩下的频率与振型函数总是与上述四个已知量有关。这只是一个非常简单的结论说明，暂时不能用于实际中。

我们给出梁的振动解的定性问题

第一个定性性质：频率是离散无重复。

第二个定性性质：节点交错性

1. 梁的相邻两个 $\varphi(x)$ or $\theta(x)$ or $M(x)$ or $Q(x)$ 的节点是相互交错的
2. 同阶 $\varphi_i, \theta_i (\theta_i, M_i)(Q_i, \theta_i)$ 相互交错。

更多内容参见 豆 结构力学中的定性理论

弹性体振动的近似解问题

> **Note**
>
> 黄老师说这章过一下就行，考试应该考简答题（？）
> 这章内容主要来源季文美的《机械振动》

集中质量法

我们可以将惯性相对地大而弹性极微弱地部件看作集中质量（刚体或质点），而把那些惯性相对的小而弹性极为显著的部件看作无质量的弹簧。对于均匀或近乎均匀的弹性体，我们保留或大致保留弹性体原有的弹性特性，而将质量集中到弹性体的若干个截面上。但是如何选取各个接种点以及如何配置各点的质量，才能使得所得结果比较接近于实际情况，这在很大程度上要靠经验或实验的启示，缺乏一般的理论指导，优点是做法简单，所得质量矩阵为对角阵，计算量小

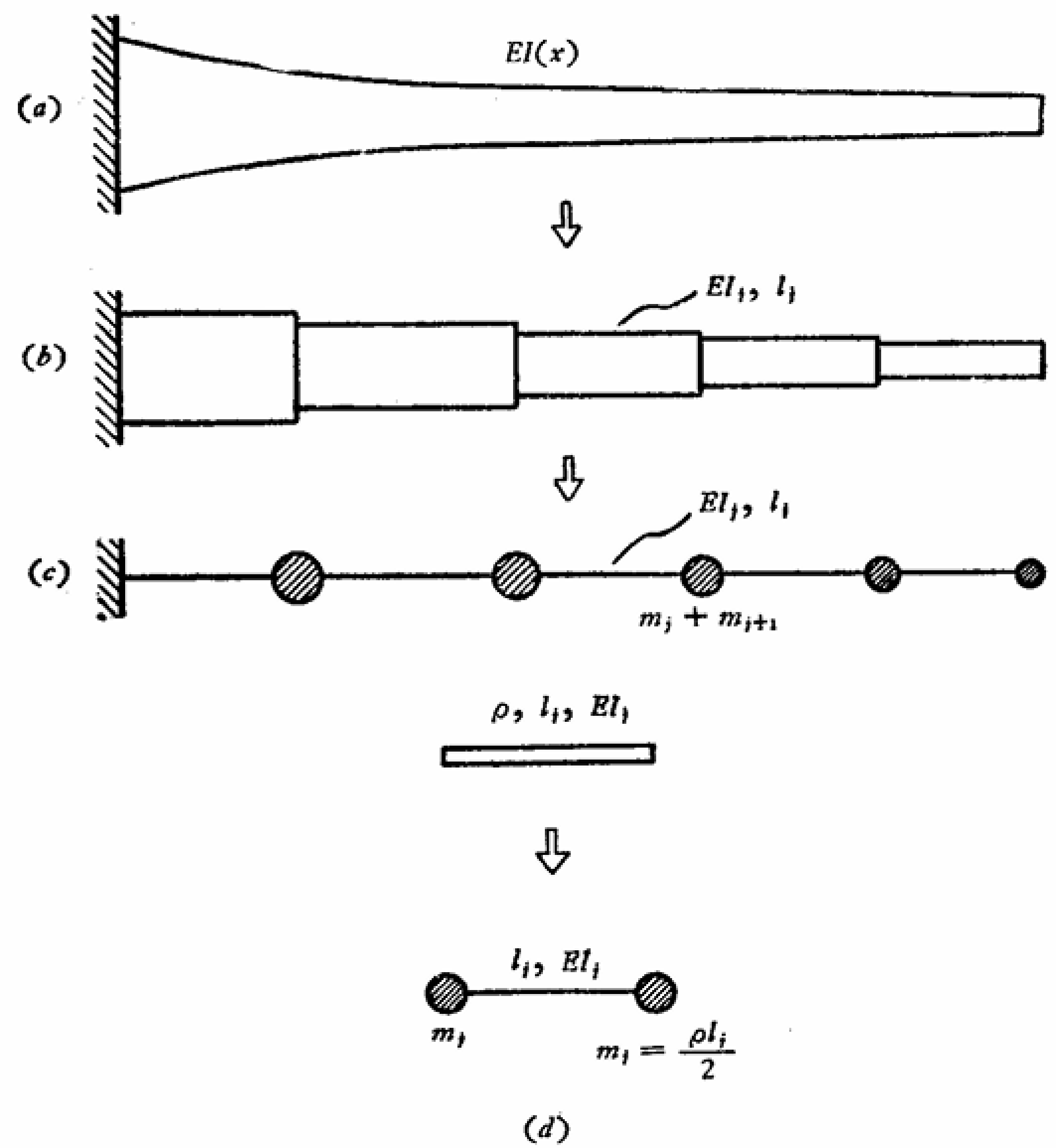
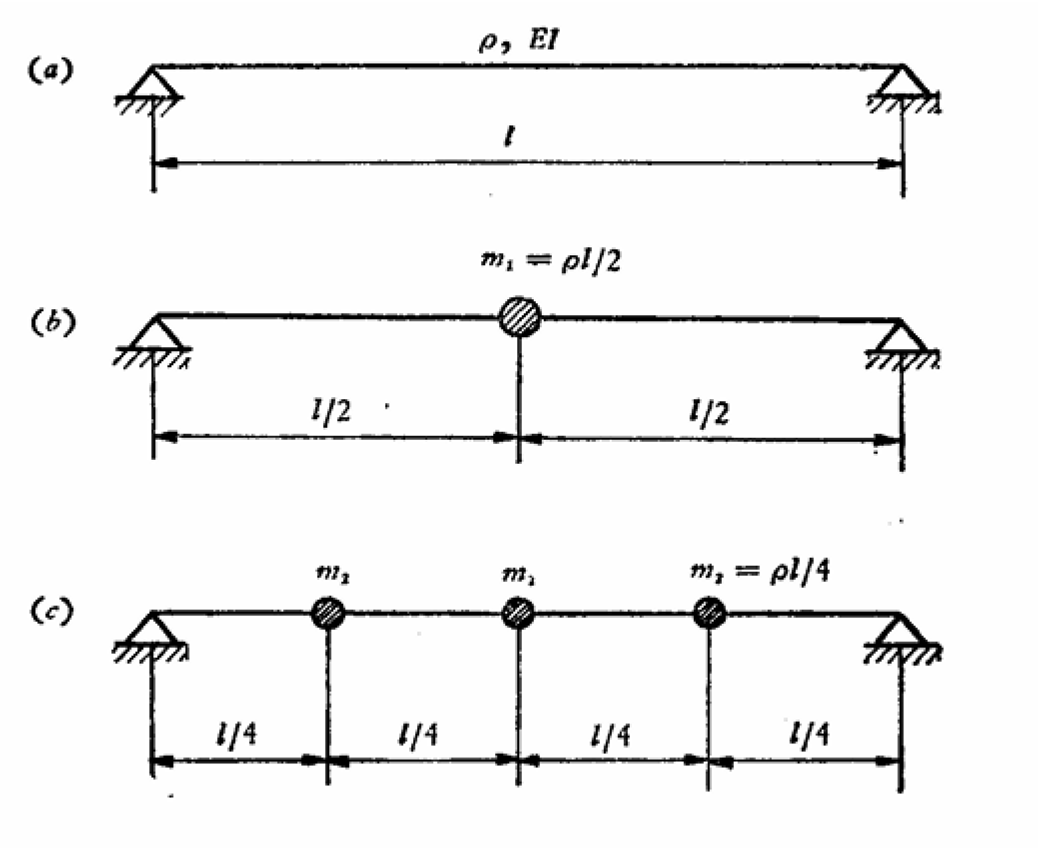


图 10.2-1

比如说如上变截面梁，我们先用若干个均匀梁端所组成的阶梯梁来替代变截面梁，然后保持各个梁端的弹性特性，将质量分别集中到梁的两端（取平分）。接下去就可以按多自由度系统的问题来处理了



比如说均匀简支梁，取分成四段的模型，而前三阶固有频率的近似值为

$$p_1 = 9.860\alpha \quad p_2 = 39.2\alpha \quad p_3 = 83.24\alpha \qquad \alpha \equiv \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$

而对应的准确值

$$p_1 = 9.867\alpha \quad p_2 = 39.48\alpha \quad p_3 = 88.83\alpha$$

要求更高阶的固有频率就得取更多分段的模型

对于固支端、铰之或滑动支座端的情形，用集中质量法得到的固有频率值的误差于 $\frac{1}{N^4}$ 成正比， N 为分段数，对于具有自由端的梁，误差则与 $\frac{1}{N^2}$ 成正比。

假设振型法

在介绍假设振型法之前，先引入广义坐标近似法

广义坐标法将系统的惯性与弹性特性转化到一些振型上去，振型本身都是物理坐标的确定函数，在找出这些振型的运动规律以后，再用它们确定系统物理坐标的运动。主振型叠加法就是一种广义坐标法，对于弯曲振动，我们将其视作是一系列主振动叠加而成

$$y(x,t) = \sum_i q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}$$

实际上，我们所考察的频率范围是有限的，我们只需要取级数的有限项和就能准确地反映实际情况。各种广义坐标法近似法就是在这一基础上发展而来的。

在主振型叠加法中，我们采用的是系统的振型函数，但是我们不能总是找到这些振型函数的解析表达式，于是我们可考虑采用一些更适用的函数，这些函数不一定满足系统的运动微分方程，但是必须具备方程中的各阶导数，并满足适当的边界条件。做如下定义：

- **比较函数**：满足边界条件的函数
- **容许函数**：满足几何边界条件

于是一维弹性体振动的解可近似表示为有限项的线性和

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t)$$

$\phi_i(x)$ 是这一边值问题的比较函数或容许函数，$q_i(t)$ 为相应的广义坐标。$\phi_i(x)$ 函数之间不一定具有正交性，所以广义坐标运动微分方程不再是相互独立，广义质量矩阵与广义刚度矩阵一般不是对角阵，而只是对称阵。

假设模态法就是一种广义坐标的近似法，他用有限个假设模态振动的线性和来近似地描述弹性体的振动。

以梁的振动为例，因为梁的位移可表示为

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t)$$

$\phi_i(x)$ 为假设模态函数，一般是指定边值问题的容许函数。

动能:

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right]^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j q_i(t)q_j(t)\int_0^l\rho(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$$

同样的势能也可以表示为

$$U=\frac{1}{2}\sum_i\sum_i q_i(t)q_j(t)\int_0^l E(x)I(x)\phi_i''(x)\phi_j''(x)\,\mathrm{d}$$

矩阵形式

$$U=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q}$$

其中 $\mathbf{q}$ 为广义位移列阵 $\dot{\mathbf{q}}$ 为广义速度列阵 $\mathbf{M}$ 为广义质量矩阵 $\mathbf{K}$ 为广义刚度矩阵，与之前不同，此时广义质量矩阵与广义刚度矩阵不为对角阵。

如果只考虑自由振动，Lagrange 方程给出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

带入可得

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=0$$

同样设定主振型振动：

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}\sin(\omega t)$$

代入得

$$[\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}]\mathbf{a}=0\quad \lambda=\omega^2$$

于是这个问题又归结于一个特征值的问题，不过此时求出的固有频率 ω 是对原有连续系统的近似值。同样的，我们也可以证明正交关系：

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{M}a_i=\begin{cases}0 & i\neq j\\ M_i & i=j\end{cases}\qquad \mathbf{a}_j^T\mathbf{K}a_i=\begin{cases}0 & i\neq j\\ K_i & i=j\end{cases}$$

相对于原有的振型函数 $X_i(x)=\sum_{j=1}^n a_{ji}\phi_i(x)=\mathbf{a}_i^T\Phi=\Phi^T a_i$ 由于质量矩阵满足

$$\mathbf{M}=\int_0^l \rho(x)\Phi\Phi^T\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^l \rho(x)\mathbf{a}_i^T\Phi\Phi^T\mathbf{a}_i\,\mathrm{d}x\\ &=\mathbf{a}_i^T\int_0^l \rho(x)\Phi\Phi^T\,\mathrm{d}x\;\mathbf{a}_i\\ &=\mathbf{a}_i^T\mathbf{M}\mathbf{a}_i=\begin{cases}0 & i\neq j\\ M_i & i=j\end{cases}\end{aligned}$$

模态综合法

这边做一个简要赘述：对于一个复杂结构的振动分析，我们可以将其转化成若干个较为简单的子结构，然后找到它们的假设模态，在对接面上保持位移协调以及内力协调条件，把子结构重新常被成总体结构，这样，我们就可以利用各个子结构的假设模态来综合总体结构的振动模态。

有限元法

有限元法把一个复杂结构（连续系统）抽象化为有限个元素在有限个节点处对接而成的组合结构，每个元素都是一个弹性体。元素的位移用结点位移插值函数表示，插值函数实质上就是一种假设模态。我们对每个元素取假设模态，由于元素数目通常取得非常大，所以假设模态取得非常简单，一般是多项式函数形式。但此时我们并不是取模态作为广义坐标，而是取结点位移作为系统的广义坐标，这时，各个元素的分布质量将按照一定的格式集中到各个结点上去。

以梁的弯曲振动为例

下图是长度为 l 的均匀梁段在常值结点力作用下的静挠曲线（暂时没考虑振动）

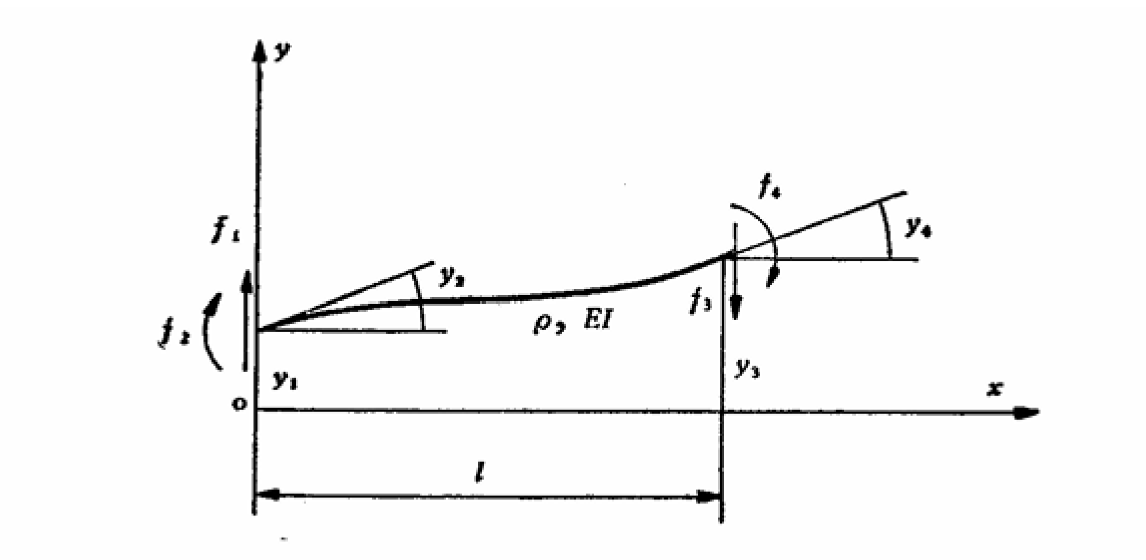


图 10.6-1

由于分布载荷为零，所以挠曲线满足

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

取解：

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \equiv X(x)A \tag{1}$$

我们取梁两端的挠度和转角作为广义坐标，即

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{Bmatrix}$$

可以得到系数列阵满足

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{l^2}&-\frac{2}{l}&\frac{3}{l^2}&-\frac{1}{l}\\\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}&-\frac{2}{l^3}&\frac{1}{l^2}\end{bmatrix}\mathbf{y}\equiv C^{-1}\mathbf{y}$$

所以 (1) 又可以写成

$$y(x)=X(x)A=X(x)C^{-1}\mathbf{y}\equiv\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{y}$$

所以 $\Phi(x)$ 也就是梁元素在常值结点力作用下，梁挠曲线的静模态函数，满足

$$\mathbf{\Phi}(x)=\begin{cases}\phi_1(x)=1-3\left(\dfrac{x}{l}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{l}\right)^3\\\dfrac{\phi_2(x)}{l}=\dfrac{x}{l}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)^2\\\phi_3(x)=3\left(\dfrac{x}{l}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{l}\right)^3\\\dfrac{\phi_4(x)}{l}=\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\left(\dfrac{x}{l}-1\right)\end{cases}\tag{2}$$

现在考虑梁的弯曲振动，如果我们仍用 $\mathbf{y}$ 描述梁的广义坐标，那么 $\mathbf{y}$ 显然是时间的函数，那么挠曲线就将不仅是空间上的函数，而且是时间上的函数，我们仍能取相同形式

$$y(x,t)=\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{y}(t)$$

$\Phi(x)$ 仍满足式子 (2) ，同时 $\Phi(x)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}(x,t)=\mathbf{\Phi}''(x)\mathbf{y}\\\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)=\mathbf{\Phi}(x)\dot{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

所以梁的动能满足

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}}\qquad\mathbf{M}=\int_0^l\rho\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\,\mathrm{d}x$$

梁的势能满足

$$U=\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{K}\mathbf{y}\qquad\mathbf{K}=\int_0^lEI\mathbf{\Phi}''^T\mathbf{\Phi}''\,\mathrm{d}x$$

根据式 (2) 可以推导出质量矩阵和刚度矩阵的表达式

在梁弯曲的简化理论中，我们只需要考虑剪力与弯矩，在梁元素两端又四个对接力 $f_i(i=1,2,,3,4)$ ，假定梁上作用分布载荷 $f(x,t)$ ，我们来求对应的广义力，虚位移

$$\delta y(x,t) = \sum_i \phi_i(x)\delta y_i$$

虚功：

$$\delta W = \sum_i f_i \delta y_i + \int_0^l f(x,t)\delta y(x,t)\,\mathrm{d}x = \sum_i \left\{ f_i + \int_0^l f(x,t)\phi_i\,\mathrm{d}x \right\} \delta y_i$$

所以广义力

$$Q_i = f_i + \int_0^l f(x,t)\phi_i\,\mathrm{d}x$$

Lagrange 方程给出梁振动方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{Q}$$

$\mathbf{Q} \equiv \{Q_i\}$ 为广义力列阵。我们就可以求解 $\mathbf{y}$ 进而给出梁振动的近似表达式。