

# Introduction For FEM

## 📖 有限元方法

工程问题一般都能化成求解如下方程：

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x, y) &= 0 \quad \text{on } \partial \Omega \end{aligned}$$

这个方程的解一般是函数  $u(x, y)$ ，“知道”一个函数意味着我们知道其在无限点  $(x, y)$  对应的值，我们并不一定总是能给出其所对应的解析表达式，会采用数值解。但是，计算机一般只能存储有限个数值解，计算过程也只是有限的。因此，我们不能真正求解一个 PDE，我们所能做的其实只是近似这个解。

所以这就带来了两个问题：

- 如何在有限数据和计算的情况下近似这个解
- 如何在不求出解析解的情况下近似PDE的解

常用的近似函数有：

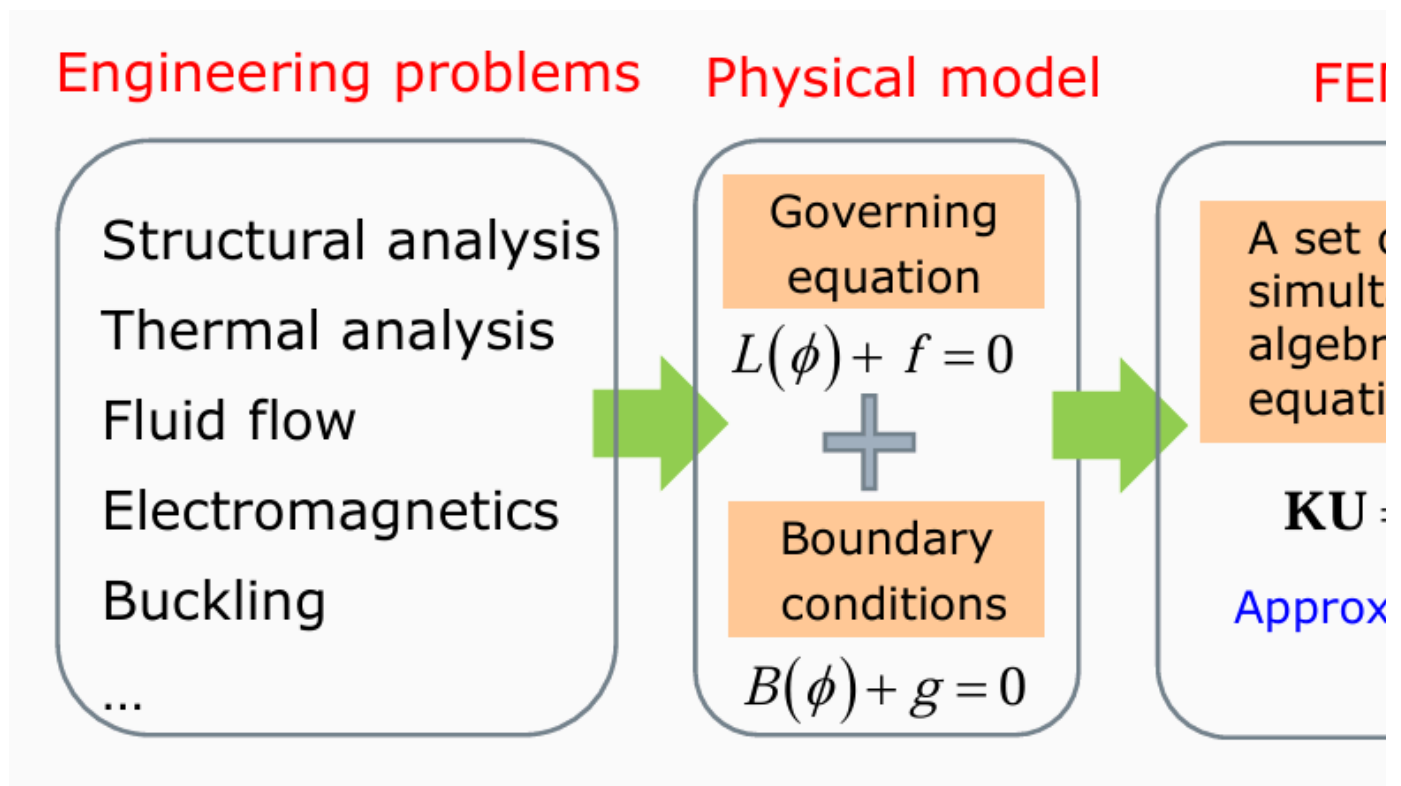
- 傅里叶级数 (Fourier series)
- 全局多项式 (global polynomial)
- 在定义域划分的网格上定义的局部多项式

傅里叶级数方法在  $u$  是全局光滑近似良好，而第二种办法一般只适用于部分邻域。有限元方法用的就是第三种方法。

斯通-魏尔施特拉斯逼近定理(Stone-Weierstrass theorem) 给出：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近。

PDEs 的解有如下特点：

- 在定义域上的大部分地方都是光滑的
- 在定义域上的小部分地方变化非常迅速
- 边界奇异点
- 也许有褶皱 (May have kinks)



Pasted image 20250219090107.png#center

将定义域划分成若干个简单的元素，找到每个元素的方程，最后将这些元素的方程整合起来。也就是

$$KU = F$$

$K$  称为刚度矩阵。

有限元方法步骤可以总结如下：

- 离散并选择元素类型
- 选定位移函数
- 定义物理关系（应力-应变、位移-应变） $\varepsilon = \nabla u$   $\sigma = D\varepsilon$
- 获取元素的刚度矩阵和其对应的等式  $k_e u_e = f_e$
- 组合元素方程以获得全局方程，并引入边界条件
- 求解自由度
- 求解元素应力应变

获取元素的刚度矩阵和等式有如下方法

- 我们可以直接计算这个等式，但是这种方法比较适用于 1 维元素
- 能量法：比如说能量最低原理、卡氏定理（适用于弹性材料）虚功原理（适用于各种材料）
- 加权残差法：如伽辽金方法，适用于各种微分方程

有限元方法的误差(error)有

- 离散误差(Discretization error)；比如说定义域的结构被简化从而会产生一定的误差。

- 模型误差(Modeling error); 比如说我们采用多项式去逼近。
- 数值误差(Numerical error); 比如说我们采用比较简单的积分方法会产生一定的误差。