粘性流体湍流的基本运动

流体力学

> ✎ **Note**
>
> 教材有够啰嗦的

湍流模式

回忆雷诺平均运动方程

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{v_i}}{\partial x_j^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(-\rho\overline{v_i'v_j'})}{\partial x_j}$$

该方程比层流运动方程多了最后的雷诺应力梯度向，使得方程组不封闭而无法求解。

一阶封闭模式

考虑雷诺应力与平均速度梯度之间的关系：

$$\tau_t=-\rho\overline{u'v'}=\rho\varepsilon_m\frac{\partial U}{\partial y}$$

ε_m 为涡粘性系数，与运动粘性有相同量纲。对于三维流场，上式可推广为

$$-\overline{v_i'v_j'}=2\varepsilon_m S_{ij}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

其中 $S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}\right)$，$\delta_{ij}$ 为Kronecker符号。

但此时 ε_m 仍是一个未知变量，所以还需要建立 ε_m 与平均速度之间的经验关系

引入用混合长度表示的雷诺应力表示式

$$-\rho\overline{u'v'}=\rho l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|\frac{\partial U}{\partial y}$$

所以可得涡粘性系数

$$\varepsilon_m=l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|$$

此时未知量变为了混合长度 l 但是 l 对平均速度的依赖性较弱。下面只介绍两种模型

Klebanoff 模型

在边界层内层

$$l = \kappa y \quad \varepsilon_m = \kappa y v^*$$

其中 κ 为卡门常数， $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 为壁摩擦速度

在外层

$$l = \alpha_1 \delta \quad \varepsilon_m = \alpha_2 \delta v^* \gamma$$

γ 为间隙因子， α_1, α_2 为实验常数

Karman

$$l = \frac{\kappa\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)}$$

一阶封闭模式的主要有点是使用方便，但是只有当方程中个输运项很小时才能得到较好的结果，适用于有适度压力梯度的二位边界层。

代数应力模式

将 N-S 方程化成 $\frac{D(v_i v_j)}{Dt}$ 形式，将瞬时速度表示成平均速度，可得雷诺应力 $\overline{v_i' v_j'}$ 方程

$$\frac{D\overline{v_i' v_j'}}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta_{jk}\frac{\overline{v_i' p'}}{\rho} + \delta_{ik}\frac{\overline{v_j' p'}}{\rho} + \overline{v_i' v_j' v_k'} - \nu\frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_k}\right) - \left(\overline{v_i' v_k'}\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \overline{v_j' v_k'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}\right) - 2\nu\frac{\overline{\partial v_i'}}{\partial x_k}\frac{\overline{\partial v_j'}}{\partial x_k} + \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right)} \tag{1}$$

δ 为克罗内克符号 给出上述式子中相应的物理意义

- 湍流扩散项： $\delta_{jk}\frac{\overline{v_i' p'}}{\rho} + \delta_{ik}\frac{\overline{v_j' p'}}{\rho} + \overline{v_i' v_j' v_k'}$
- 分子扩散项： $\nu\frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_k}$
- 产生项： $\overline{v_i' v_k'}\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \overline{v_j' v_k'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}$
- 耗散项： $\frac{\overline{\partial v_i'}}{\partial x_k}$
- 压力变形项： $\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right)}$

考虑湍动能 $k = \frac{\overline{v_i'^2}}{2}$,则取 $i = j$ 给出湍动能方程

$$
\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} = \underset{\text{(I)}}{\frac{\partial k}{\partial t}} + \underset{\text{(II)}}{\overline{v_i}\frac{\partial k}{\partial x_j}} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\underset{\text{(III)}}{\left(\frac{1}{\rho}\overline{v_i' p'} + \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i' v_j'} - 2\nu\overline{v_i' s_{ij}'}\right)} \\
& \quad \underset{\text{(IV)}}{-\overline{v_i' v_j'} s_{ij}} - \underset{\text{(V)}}{2\nu\overline{s_{ij}' s_{ij}'}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

也可以简写成如下形式:

$$
\frac{Dk}{Dt} = D_{if} + P_k - \varepsilon,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
D_{if} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{v_j' p'} + \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i' v_j'} - 2\nu\overline{v_i' s_{ij}'}\right), \\
P_k &= -\overline{v_i' v_j' s_{ij}}, \\
\varepsilon &= 2\nu\overline{s_{ij}' s_{ij}'} \\
s_{ij}' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}
$$

- I 项时湍动能的当地变化率
- II 项说明当流体微团因平均迁移而发生位置变化时，湍动能也发生变化，所以称为对流项
- III 项称为扩散项，表示脉动压力、雷诺压力和脉动粘性应力对脉动能量的输运
- IV 项为湍流能量生成项，起增加湍流动能的作用
- V 项时流体脉动粘性应力为抵抗脉动变形所作的功，对应于脉动的耗散项

但是在 (1), (2) 两式中仍存在较多未知项，我们仍需建立对未知项的表达式，这一过程称为湍流模式建立的过程。下面给出最终经模化后的雷诺应力方程和湍动能方程

$$
\begin{aligned}
\frac{D\overline{v_i' v_j'}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_k \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_l} + \nu\frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_l}\right] + P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \\
& \quad - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{v_i' v_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) - C_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right), \qquad (3) \\
\frac{Dk}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l} + \nu\frac{\partial k}{\partial x_l}\right] + P_k - \varepsilon, \qquad (4) \\
P_{ij} &= -\left(\overline{v_i' v_k'}\frac{\partial \overline{v_j'}}{\partial x_k} + \overline{v_j' v_k'}\frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_l}\right), \quad P_k = -\overline{v_i' v_l'}\frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_l},
\end{aligned}
$$

常用经验常数 $C_k = 0.09 \sim 0.11, C_1 = 1.5 \sim 2.2, C_2 = 0.4 \sim 0.5$, ε 仍是未知项，满足方程

$$
\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_\epsilon k^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} + \nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}\right] - C_{\epsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v_i' v_l'}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - C_{\epsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{5}
$$

常用经验常数 $C_\varepsilon = 0.09 \sim 0.11, C_{\varepsilon_1} = 1.5 \sim 2.2, C_{\varepsilon 2} = 0.4 \sim 0.5$

将 (3), (5) 和雷诺平均运动方程联立求解，这就是雷诺应力封闭模式

代数应力模式

在计算中，导致较大计算量的是雷诺应力的微分项，该项只是在对流项和扩散项中才有。

如果考虑将对流项和扩散项抵消，则关于雷诺应力的微分项就不存在，原方程变为如下代数方程。

$$(1-C_2)P_{ij} - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{v_i'v_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\varepsilon - C_2P_k) = 0$$

这种方法局限性太强，只适用高剪切流场和产生项与耗散项基本相等的局部平衡的湍流场。

考虑雷诺应力 $\overline{v_i'v_j'}$ 和湍动能 k 成正比，则可得

$$\frac{\overline{u_i'u_j'}}{k}(P_k - \varepsilon) = P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) - C_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right).$$

二方程模式

采用布森捏斯克涡粘性系数的思路，建立如下关系式

$$-\overline{v_i'v_j'} = \nu_i\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \tag{6}$$

其中涡粘性系数 ν_i 用湍动能 k 和湍流耗散率 ε 表示

$$\nu_i = C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$$

其中 $C_\mu = 0.09$ 我们只要利用上述两个方程就可以建立雷诺封闭方程，可适用多种不同类型的流场

一方程模式

由于 ε 方程难模化和精度低，可以在保留 k 方程的基础上舍弃 ε 方程，将其表示为

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}$$

l 可视为混合长度，需根据具体流场情况另外给出，涡粘性系数可写作

$$\nu_i = C_\mu\sqrt{k}l$$

(6) 式可以改写成

$$-\overline{u_i'u_j'} = C_\mu \sqrt{k} l \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij} k$$

双尺度模式

双尺度模式是针对原有的 ε 方程 (5) 而做出的改进

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(C_\epsilon \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}\right] - C_{\epsilon 1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}\overline{v_i'v_j'}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}\varepsilon,$$

$C_\varepsilon = 2.19, C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} = 18.7(\mathrm{Re})^{-1/2}$

湍流边界层

湍流边界层结构

湍流边界层可以分为两个区域，一是靠近壁面的近壁区，称为“内区”，受壁面条件的影响，其厚度占总厚度的 $10\% \sim 20\%$;剩下的称为外层，该层内的流动间接受壁面上产生的壁剪切应力的影响。

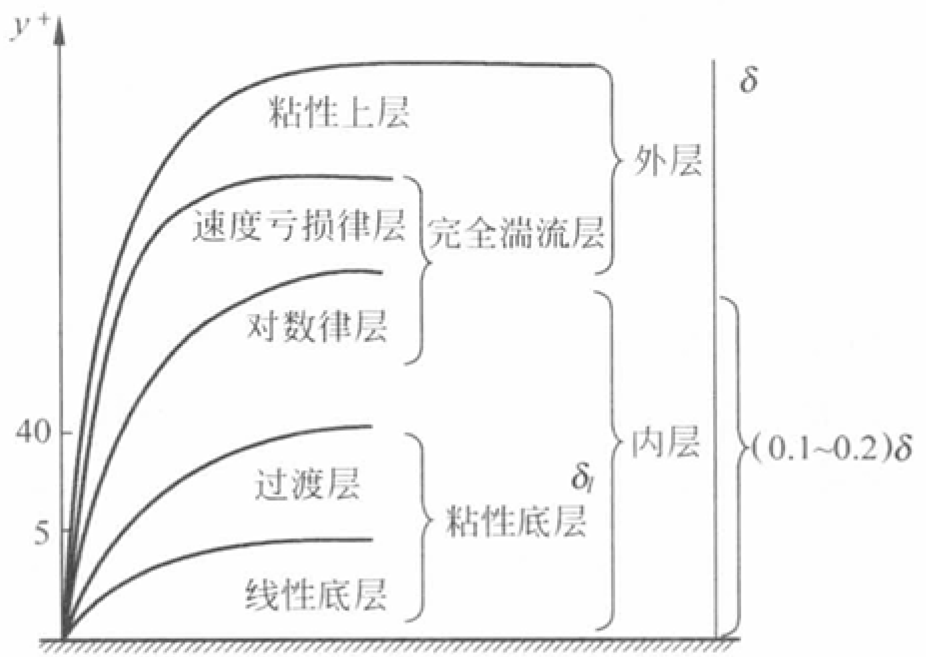

图 8-1　湍流边界层结构

定义壁摩擦系数 v^* 和当地雷诺数 y^+ 以及量纲为 1 的速度 u^+

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad y^+ = \frac{v^* y}{\nu}, u^+ = \frac{\overline{u}}{v^*}$$

- 线性底层 $y^+ < 5$

该层内的粘性应力远大于雷诺应力

$$y^+ = u^+$$

- **过渡层** $5 \le y^+ \le 40$

粘性应力与雷诺应力相当，情况复杂

- **对数律层** $y^+ > 40$

雷诺切应力与壁面切应力 τ_w 大致相等且近似为常数，可忽略粘性切应力

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C$$

$C \approx 5.0 \sim 5.2, \kappa \approx 0.4 \sim 0.41$

- **速度亏损律层**

平均运动粘性切应力很小，流场几乎有湍流切应力控制，粘性底层外缘位置上的速度 $\overline{u}$ 低于边界层外缘自由流速度 U ，有量纲分析法可得速度亏损 $U - \overline{u}$ 满足

$$\frac{U - \overline{u}}{v^*} = f_1\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

称为速度亏损律或尾迹律

$$\frac{u^+\left(\frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B\right)}{U^+ - \left(\frac{1}{\kappa}\ln \delta^+ + B\right)} \approx \frac{1}{2}W\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

尾迹函数满足

$$W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

- **粘性上层**

该区域湍流边界层与外都自由流间存在粘性起主要作用的区域

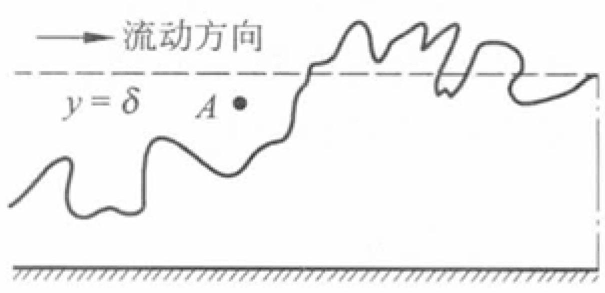

图 8-2　湍流边界层瞬时界面

边界层外缘界面瞬时位置的概率密度符合高斯分布。

二维湍流边界层方程

采用量级分析方法，可得不可压缩二维湍流边界层的运动方程：

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{dP_0}{dx}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

边界条件

$$\begin{aligned} y=0: \bar{u}=0, \bar{v}=0, \overline{u'v'}=0 \\ y\geq\delta: \bar{u}=U, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=0, \overline{u'v'}=0 \end{aligned}$$

边界层的转捩

边界层流场同样存在层流和湍流两种状态，湍流边界层往往是由层流边界层转变而成的。这个转变称为专列

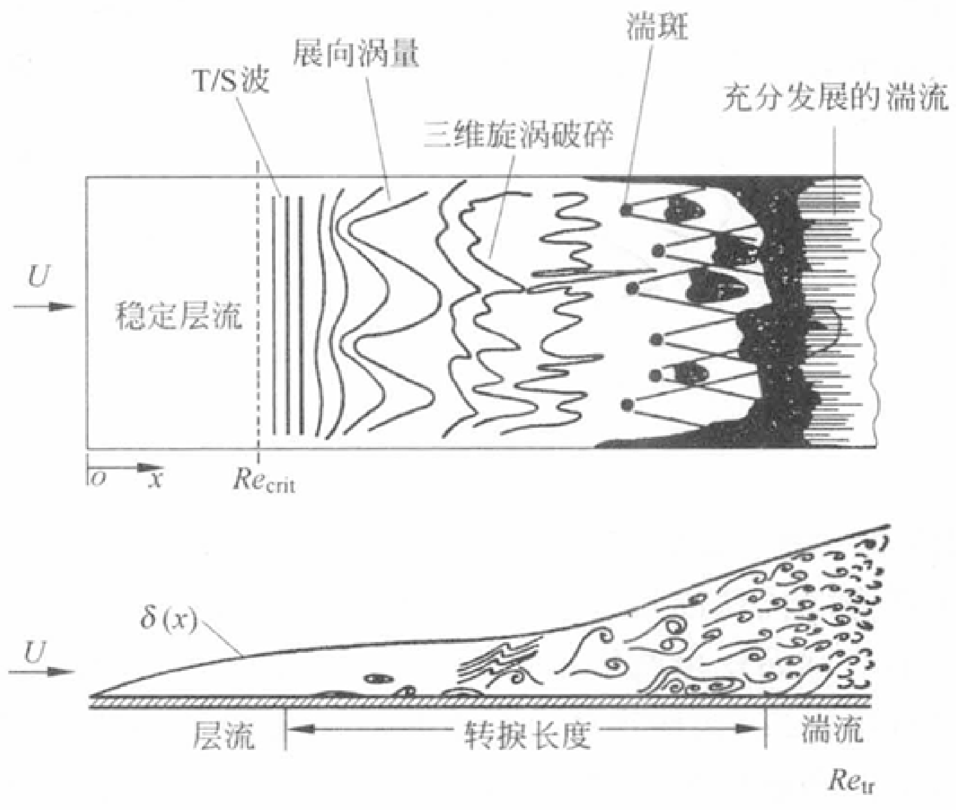

图 8-3　平板边界层转捩过程示意图

转捩区的流动沿下游方向经历以下几个阶段

1. 边界层中存在认为或者自然的扰动，扰动发展成类似波浪的二维运动，这种运动在空间或时间上都是周期性的，称为托尔明-许列赫丁（Tollmien-Schlichting）波，简称 T-S 波 （T-S 波在自然转捩过程不总是可以观察到的）
2. T-S 波的振幅增大到某极限值，二维波变为三维并形成漩涡，三维波的振幅布顿啊改变，他们和主流相互作用，使得速度剖面也具有三维的性质

3. 随着三维波的继续增长，在局部区域内瞬时间产生了非常高的剪切区即涡旋区，在这些地方发生了湍流的猝发现象。
4. 在脉动速度大的地方形成了一小块一小块称之为湍流斑的湍流区。湍流斑的形状是不规则的，随机出现在不同时刻不同位置。斑内的流动类似于完全发展的湍流边界层
5. 湍流斑扩大到相当大的时候，他们相互交错没有留下层流的空隙，层流过渡到完全湍流，转捩区结束

定义转捩雷诺数 $\mathrm{Re}_{\mathrm{tr}}$

湍流度：

$$\varepsilon = \frac{1}{U}\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2})}$$

u', v', w' 分别代表来流中扰动速度的三个分量。湍流度可理解为扰动速度的均方根与来流平均速度的比值，用以衡量脉动的大小。

当外流湍流度不超过 0.1% 时，层流和湍流区的边界与湍流都无关，转捩区从 $\mathrm{Re}_x = 3\times10^6$ 开始到 $\mathrm{Re}_x = 4\times10^6$

壁面粗糙度高会引起转捩的提前，壁面冷却、加大顺压梯度和壁面吸流能起推迟边界层转捩的作用。

湍流位置的预测

1. e^9 方法：当小扰动放大到原来的 e^9 倍时认为发生了转捩。误差大，且无法反映自由流湍流度和其他复杂因素对转捩的影响
2. 湍流模式：建立适用转捩区的低 Re 数的湍流模式，但是方法复杂
3. 修正的米歇尔方法： $\mathrm{Re}_{\theta\mathrm{tr}}$ 为发生转捩时的动量损失厚度雷诺数； $\mathrm{Re}_{x\mathrm{tr}}$ 为以坐标为特征长度的雷诺数

$$\mathrm{Re}_{\theta\mathrm{tr}} = 1.174\left[1+\frac{22400}{\mathrm{Re}_{x\mathrm{tr}}}\right]\mathrm{Re}_{x\mathrm{tr}}^{0.46}$$

二维边界层运动

碎碎念

真的很啰嗦，感觉很没有必要（
而且很 乱 （公式各种引用）

湍流尾流

湍流尾流场特征：

1. 主流速度大，x 方向的变化小于 y 方向的变化
2. 主流速度剖面存在自相似性
3. y 方向的压力变化与脉动有关
4. x 方向的压力变化与外流有关
5. 雷诺应力远大于粘性应力

x 方向的运动方程

$$
\begin{aligned}
& U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} \\
\Longrightarrow & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{U_\infty}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2}\right) \\
\xRightarrow{\text{尾部雷诺应力为零}} & P\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)\mathrm{d}y = -\frac{\overline{u'v'}}{U_\infty^2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0
\end{aligned}
$$

由上述可以推出

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U}{U_\infty}\,\mathrm{d}y = C
$$

y 方向方程

$$
\frac{\partial P}{\partial y} + \rho\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'^2} = 0
$$

积分可得

$$
\begin{aligned}
& P + \rho\overline{v'^2} = P_0 \\
\xRightarrow{\frac{dP_0}{dx}\approx 0} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{v'^2}
\end{aligned}
$$

尾流区 U 存在相似性

$$
\begin{aligned}
& \xi_1 = \frac{x+a}{d} \quad \xi_2 = \frac{y}{D}\sqrt{\frac{D}{x+a}} = \frac{y}{\sqrt{D(x+a)}} \\
& \frac{U}{U_{\max}} = f(\xi_2) \quad \frac{U_{\max}}{U_\infty} = g(\xi_1)
\end{aligned}
$$

D 为阻力

尾流平均速度分布规律满足

$$
\frac{U}{U_{\max}} = \exp\left(-\frac{U_\infty d}{2}\int_0^{\xi_2}\frac{\xi_2}{\varepsilon_m}\,\mathrm{d}\xi_2\right)
$$

ε_m 为涡粘性系数

平板湍流边界层

壁面摩擦系数

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = 2\frac{d\theta}{dx} = 2\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}_\theta}{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}_x}$$

为了使上式封闭求解，补充关系 $C_f = C_f(\theta)$，的积分关系

$$\mathrm{Re}_x = 2\int_0^{\mathrm{Re}_\theta} \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}_\theta}{C_f(\mathrm{Re}_\theta)}$$

尾迹律表面摩擦关系式:

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\mathrm{Re}_\delta}{\lambda}\right) + B + 2\frac{\Pi}{\kappa}$$

其中 $\frac{2\Pi}{\kappa} = U^+ - \left(\frac{1}{\kappa}\ln\delta^+ + B\right), \lambda = \sqrt{\frac{2}{C_f}}, \mathrm{Re}_\theta = U\frac{\delta}{\nu}$ (同样的， B 与 κ 为常数)

列出雷诺数

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}_\delta &= \lambda e^{\kappa\lambda-\kappa\beta-2\Pi} \\
\mathrm{Re}_{\delta^*} &= \frac{1+\Pi}{\kappa\lambda}\mathrm{Re}_\delta \\
\mathrm{Re}_\theta &= \left(\frac{1+\Pi}{\kappa\lambda} - \frac{2+3.179\Pi+1.5\Pi^2}{\kappa^2\lambda^2}\right)\mathrm{Re}_\delta
\end{aligned}$$

拟合关系（$\kappa = 0.4, B = 5.5, \Pi = 0.5$）

$$C_f = 0.026\mathrm{Re}_x^{-1/7} \quad \mathrm{Re}_\delta = 0.14\mathrm{Re}_x^{6/7} \quad \mathrm{Re}_{\delta^*} = 0.018\mathrm{Re}_x^{6/7}$$

阻力系数

$$C_d = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 L} = 0.0303\mathrm{Re}_L^{-1/7}$$

普朗特和施利希廷公式:

$$C_d = \frac{0.455}{(\lg\mathrm{Re}_L)^{2.58}}$$

卡门，施恩尔公式

$$\sqrt{C_d}\,\lg\mathrm{Re}_L(C_d) = 0.242$$

边界层的分离

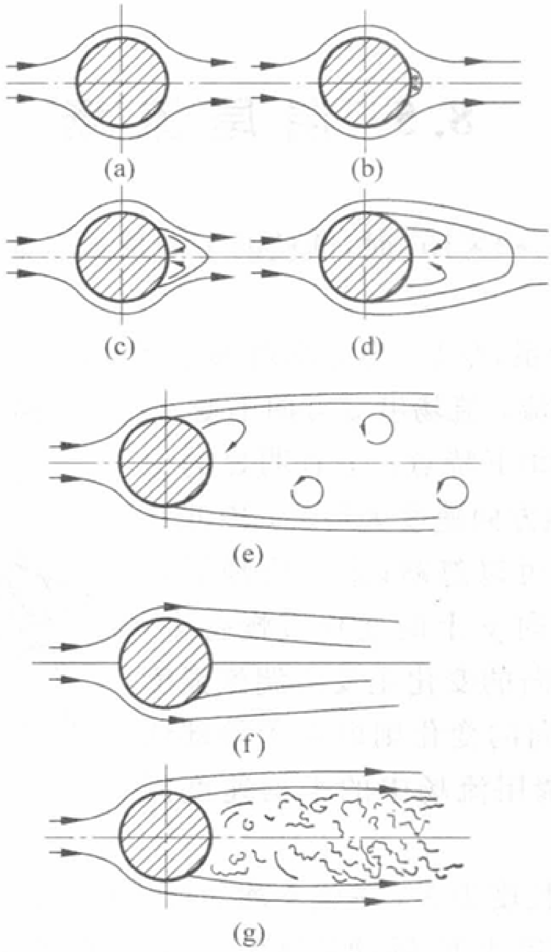

图 8-17 不同 Re 数下的圆柱绕流

$\mathrm{Re}=\frac{U_\infty d}{\nu}$ 数决定了圆柱绕流的流动特征。当 $\mathrm{Re}\leq 1$ 使粘性力占主导力，圆柱上下流线对称，随着 Re 数的增加，圆柱背面出现了较弱的对称漩涡，且对称涡的强度随着 Re 数增加而增加。当 $\mathrm{Re}>40$ 后，对称的漩涡破裂，在 $\mathrm{Re}\approx 60$ 圆柱背面出现了稳定、非对称、旋转方向相反、周期性交替脱离柱面的漩涡，这些涡在下流形成了整齐的我咧，出现卡门涡街。当 $\mathrm{Re}>150$ 时，卡门涡街开始变得不稳定。当 $\mathrm{Re}>300$ 涡街已不存在。

定义阻力系数 $C_D=2\frac{D}{\rho U_\infty^2 d}$，关系满足:

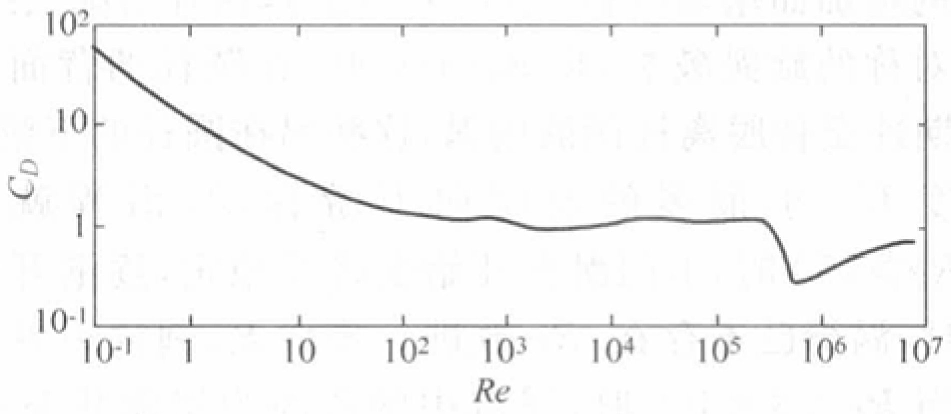

图 8-18　不同 Re 数下圆柱绕流的阻力系数

湍流边界层的分离往往不是发生在一个固定点，而是一个非定常脉动过程。这种脉动性主要是由涡的周期性与非周期性脱落造成的，定义间歇因子 γ

$$\gamma_d = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \alpha \, \mathrm{d}t; \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \text{流体倒流} \\ 1, & \text{流体顺流} \end{cases}$$

γ_d 表示流体顺流所占时间和总时间的百分比，通过 γ_d 大小可以知道某处分离情况。