连续系统振动 IV

振动力学

梁弯曲振动的正交性

梁的弯曲振动：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w]+\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(x,t)$$

同样的，我们采用分离变量法来求解上述方程，取

$$w(x,t)=\Phi(x)T(t)$$

所以方程变为

$$\ddot{T}(t)+\omega^2T(t)=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\right]=\omega^2\rho(x)A(x)\Phi(x)$$

数学上能证明上述方程具有离散解 $q_i(t),\Phi_i(x)$ 。如果考虑固支、简支、自由、夹支这四种边界条件，同样有正交性：

质量：

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)=\begin{cases}\overline{M}_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

刚度：

$$\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i''(x)\Phi_j''(x)=\begin{cases}\overline{K}_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

证明如下：

左乘 $\Phi_j(x)$ 并作积分

$$\int_0^L \Phi_j(x)\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2}{dx^2}\Phi_i(x)\right]dx=\omega_i^2\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)$$

做两次分布积分可得

$$
\int_0^L \Phi_j(x)\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2}{dx^2}\Phi_i(x)\right]dx = \Phi_j(x)\frac{d}{dx}\left[E(x)I(x)\Phi_i''(x)\right]\Big|_0^L
$$

$$
-\Phi_j'(x)E(x)I(x)\Phi''(x)\Big|_0^L + \int_0^L \Phi''(x)\Phi''(x)E(x)I(x)dx
$$

这边简要描述边界条件的对应关系

$$
w(x_0,t)=0 \Rightarrow \Phi(x_0)=0
$$

$$
\theta(x_0,t)=0 \Rightarrow \Phi'(x_0)=0
$$

$$
M(x_0,t)=0 \Rightarrow E(x_0)I(x_0)\Phi''(x_0)=0
$$

$$
P(x_0,t)=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}[E(x_0)I(x_0)\Phi''(x_0)]=0
$$

代入上式可得

$$
\int_0^L \Phi_j(x)\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2}{dx^2}\Phi_i(x)\right]dx = \int_0^L \Phi''(x)\Phi''(x)E(x)I(x)dx
$$

也就是

$$
\int_0^L \Phi''(x)\Phi''(x)E(x)I(x)dx = \omega_i^2\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x)
$$

再取一个振型 $\Phi_j(x)$ 便可以证明正交性。

> **Note**
>
> 上述可以说明为什么边界条件不能出现 w, P 和θ, M 这两种组合，就是因为无法保证分部积分中的两个积分项同时等于零

同样的，参考之前的 连续系统振动 II 的做法，可以得到边界条件为弹性支撑和集中质量的正交性

弹性支撑

$$
\begin{aligned}
P(0,t) &= k_1 w(0,t) & M(0,t) &= -k_2\theta(0,t)\\
P(0,t) &= -k_3 w(0,t) & M(0,t) &= k_4\theta(0,t)
\end{aligned}
$$

对应关于刚度的正交性

$$
\int_0^L E(x)A(x)\Phi_i''(x)\Phi_j''(x)\,dx + k_1\Phi_i(0)\Phi_j(0) + k_2\Phi_i'(0)\Phi_j'(0)
$$

$$
+k_3\Phi_i(L)\Phi_j(L) + k_4\Phi_i'(L)\Phi_j'(L) = \begin{cases} \overline{K}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
$$

集中质量（左端固支）

$$
\begin{aligned}
w(0,t) &= 0 \qquad & \theta(0,t) &= 0 \\
P(L,t) &= -M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad & M(L,t) &= 0
\end{aligned}
$$

对应关于质量的正交性

$$
\int_0^L \rho(x)A(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x) + M_0\Phi(L)\Phi(L) = \begin{cases} \overline{M}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
$$

Note

对于上述两种特殊的边界条件，我们在一开始讨论的时候并没有讨论其正负号，因为这个和坐标选定有关，但是无论如何，其边界条件必须满足上述正交性中的修正项为正，也就是取“+”（考虑能量）