

# 无粘性流体的平面二维流动

## 流体力学

不知道为什么这章打的很舒服（

---

对于一般流体微元，我们可以将其的运动分解为平移、转动、线变形和角变形四种。

由线变形引起的相对体积膨胀式：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x_1 \delta y_1 \delta z_1 - \delta x \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z \Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

角变形速率：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} (\delta\alpha + \delta\beta) / \Delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

给出旋转角速度分量：

$$\Omega_z = \frac{\delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

所以给出角速度：

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}$$

我们一般更习惯用旋度  $\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}$  （也称涡量）

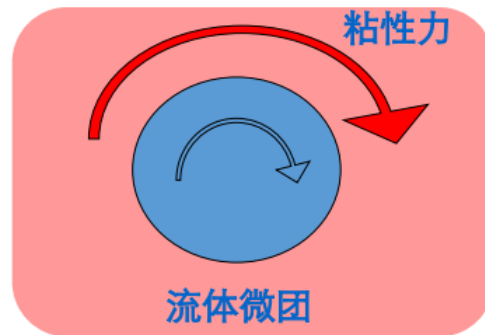
根据流体微团是否有旋转将流体的运动分为两大类：有旋流动和无旋流动。具体地说，流体微团的旋转角速度不等于零的流动称为有旋流动，而流体微团的旋转角速度等于零的流动称为无旋流动。流体微团无旋流动充要条件： $|\boldsymbol{\Omega}| = 0$

有旋无旋的定义是看流体微团是否旋转

## Rotational and Irrotational (4)

### • 粘性与有旋的关系

- 将粘性力看做外界的一种作用
- 将有旋无旋运动看做微团的一种状态



- 有粘必然有旋
- 无粘可能有旋也可能无旋

### • 三种状态 《



6

典型的边界层流动可以分为有旋无旋两个区域，此时粘性是边界层出现速度梯度的根源。

## Vortex line, Vortex tube and Vortex bunch

在有旋流动流场的全部或局部区域中连续充满着绕自身轴线旋转的流体微团，形成了一个由涡量  $\omega(x, y, z, t) = 2\Omega$  表示的涡量场

涡线：在某给定时刻  $t$ ，这条曲线上的每一点切线与位于该点的流体微团的涡量  $\omega$  方向相同，所以涡线是某一时刻沿曲线各流体微团的瞬时流动轴线。涡线和流线一样，都是基于欧拉方法研究流体流动的结果，本身和时间无关，在非定常流动中，涡线的形状和位置是随时变化的，只有在定常流动中，涡线的形状和位置才保持不变。

涡线的微分方程：

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)}$$

涡管：在给定瞬时，取涡旋场中任取一条不是涡线的封闭曲线，通过封闭曲线上的每一点作涡线，这些涡线形成一个管状表面称为涡管

涡束：涡管中作旋转运动的流体

定义涡通量：

$$dJ = 2\Omega dA$$

在涡旋场中，通过一个有限开口截面的涡通量  $J$ （涡管强度）可表示为

$$J = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_A \omega_n dA = 2 \iint_A \Omega_n dA$$

涡通量是标量，可正可负。

涡旋场中涡量散度为零：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

该式称为涡量连续方程，表示涡旋场为无源场

**涡通量守恒定律：**在同一时刻，通过同一涡管的、与涡管相连的两个任意曲面的涡通量相等。

涡通量守恒定理表示，涡度与横截面积的乘积沿涡线恒定不变，所以涡线不可能在流体内部自行产生或消失，只能首尾相接、或者沿伸至无穷远处或终于边界处。下面的Helmholtz 定理描述这一物理现象。

## Circulation and Stokes' theorem

**速度环量：**速度在某一封闭周线切线上的分量沿该封闭周线的线积分

$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

将  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$   $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  代入得

$$\Gamma = \oint (u dx + v dy + w dz)$$

速度环量为标量，他的正负号取决于速度矢量和线积分路劲矢量之间得夹角。规定逆时针方向绕行封闭周线为正方向，即封闭周线所包围的区域总在积分方向的左侧。

**斯托克斯定理：**当单连通有限封闭周线内有涡束时，则沿封闭周线的速度环量等于该封闭周线内所有涡束的涡通量之和。

斯托克斯定理适用于单连通微元封闭轴线和平面上有限单连通区域。

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{V} d\mathbf{s} = 2 \iint_A \Omega_n dA$$

对于平面上多联通区域，总是可以加上若干对辅助线转成单连通区域。假设被研究区域中有  $n$  个被绕流物体，即外周线内有  $n$  个内周线，则

$$\Gamma_{L_1} - \sum \Gamma_{L_2} = 2 \iint_A \Omega_n dA$$

这就是多连通区域的斯托克斯定理，即通过多连通区域的涡通量等于沿这个区域的外周线的速度环量与沿所有内周线的速度环量总和之差。

空间曲面上的斯托克斯定理：沿空间任一封闭周线  $L$  的速度环量等于通过张于  $(L \odot)$  该封闭周线上的空间表面  $A$  的涡通量

## Helmholtz's and Thomson's theorems

Helmholtz 定理是流体力学中关于 [W 涡旋](#) 动力学性质的三条定理，适用于有势体积力作用下的无粘性、正压流体

- **Helmholtz's first theorem** The strength of a vortex line (tube) is constant along its length. (第一定理)
- **Helmholtz's second theorem** A vortex line cannot end in a fluid; it must extend to the boundaries of the fluid or form a closed path.
- **Helmholtz's third theorem** A fluid element that is initially irrotational remains irrotational.

上面的 Helmholtz 定理与下文（课本）上的有点差别（我不能判断是否等价）。上面当作拓展就好啦

汤姆孙定理：无粘性、正压流体在有势质量力作用下，沿任何封闭的流体质点线的速度环量在运动过程中不随时间变化，即速度环量关于时间的变化率为零。

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

我们给出另一种形式的汤姆孙定理，由于时空互不影响，所以将对时间求导带入积分内(注，这里将  $d\mathbf{s}$  暂时改写成  $\delta\mathbf{r}$  仍表示对矢径的微分)

$$\oint \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{r}) = \oint \frac{d\mathbf{V}}{dt} \delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{V} \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}$$

对于最后一项，由于对于空间的变化不影响时间上的变化，所以有

$$\oint \mathbf{V} \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \oint \mathbf{V} \delta \mathbf{V} = \oint \delta \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

显然，这一项为0。而对于前一项，引入欧拉平衡方程有

$$\oint \frac{d\mathbf{V}}{dt} \delta\mathbf{r} = \oint \left( \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \delta\mathbf{r}$$

我们依旧认为质量力是一个有势力，并引入应力张量，所以有

$$\oint \nabla(-U - \mathbf{P}) \delta\mathbf{r} = 0$$

这一步可以利用斯托克斯公式进一步化简

汤姆孙定理说明，无粘性、正压流体在有势质量力的作用下，沿流场中任何封闭流体质点线的速度环量守恒，也就是说，原来有速度环量则永远保持该速度环量，原来速度环量为零则永远保持为零。结合斯托克斯定理，沿任何封闭周线的速度环量等于通过该周线所包围的曲面的涡通量。因此，汤姆孙定理也就说明了流场中旋涡不能自行产生、也不能自行消灭。换句话说，有旋流动永远保持为相同涡旋强度的有旋流动，无旋流动则永远保持无旋流动。

Helmholtz 第一定理：在同一瞬间，涡管各截面上的涡通量都相同。

Helmholtz 第二定理：无粘性、正压流体在有势质量力的作用下，涡管在运动过程中永远由相同的流体质点组成。

Helmholtz 第三定理：无粘性、正压流体在有势质量力的作用下，涡管的强度不随时间变化。

## Euler Integral, Bernoulli Integral and Bernoulli Equation

在无粘性流体的运动微分方程中考虑表示流体的旋转运动

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\Omega_y - v\Omega_z) &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\Omega_z - w\Omega_x) &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\Omega_x - u\Omega_y) &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right)\end{aligned}$$

该方程组中既有线速度又有角速度，能够区分流体流动是有旋还是无旋；该方程的右边的三项分别表示流体的势能、压力能、动能在方向上的变化梯度

我们依旧假设流体定常、体积力有势、流体为不可压缩流体或正压流体

对于无旋流动，我们给出欧拉积分式

$$U + p_F + \frac{V^2}{2} = C$$

该式的物理意义在于，对于无粘性的不可压缩流体或者正压流体、在有势质量力的作用下作定常无旋流动时，流场中任意一点的位势能、压力势能和动能总和保持不变

对于有旋流动，我们沿流线积分得伯努利积分

$$U + p_F + \frac{V^2}{2} = C$$

尽管他和欧拉积分式相同，但是伯努利积分关注对象是同一条流线上的控制体。

## Potential Flow, Velocity-Potential and Stream function

对于无粘性（理想）流体的无旋流动而言，由斯托克斯定理可知，沿流场中任意封闭周线的速度线积分，即速度环量均为零。也就是说，任取两个参考点  $A$  和  $B$  速度线积分与  $A$  点至  $B$  点的路径无关，速度线积分仅仅取决于  $B$  点相对于  $A$  点的位置，具有单值势函数的特征。

如果流体无旋，则角速度  $\Omega = 0$ ，显然有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

有微积分知识得，上述是  $u dx + v dy + w dz$  成为某一函数全微分得充分必要函数。我们可以假定  $\varphi(x, y, z, t)$  满足要求，称为速度势函数，我们将  $\varphi$  进行全微分展开根据流体运动表达式可得

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

改写成矢量形式可得

$$\nabla \varphi = \mathbf{V}$$

也就是这就是速度势函数的一个基本性质：速度在笛卡尔直角坐标系中三个坐标轴方向上的分量等于速度势函数关于相应坐标的偏导数。

速度势函数这一概念的提出，是和物理学中的“有势力”的概念相联系的。力势的负梯度是力场的力，而速度势的梯度则是流场的速度。当流体作无旋流动时，总有速度势存在，这种流动又被称为有势流动。**即无旋流动等同于有势流动**(如何判断一个流动是否是有势流动)。

在有势流动中沿曲线  $AB$  的切向速度线积分等于终点  $B$  与起点  $A$  的速度势之差

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

如果速度势是单值，则线积分与曲线从起点至终点的形状无关，所以速度环量

$$\Gamma = \oint d\varphi$$

如果速度势是单值和连续的，则沿任一封闭周线速度环量等于零。

回到连续性方程，引入速度势函数可得

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

对于不可压缩流体为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0$$

我们描述平面二维流动：

所谓平面二维流动是指流场中各点的流速都平行于某一固定平面，并且各物理量在此平面的垂直方向上没有变化。在实际工程问题中，并不存在严格的平面二维流动。当流动的物理量在某一方面(如z轴方向)的变化相对于其他方向上的变化为小量，而且在此方向上的速度接近于零时，则可以简化为平面二维流动问题。例如，空气横掠矩形机翼的流动，在翼弦与翼展相比为小量的条件下，垂直于翼展的各平面内的流动状况差异很小，尤其是机翼中段部位，工程上总是将这种流动状况简化为平面二维流动处理。再如在管壳式换热器中，流体横掠列管的流动，单管外径和长度相比为小量时，也将此流动问题简化为平面二维流动。

不可压缩流体的平面二维流动连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

流线微分方程

$$u dy - v dx = 0$$

考虑某一函数  $\psi(x, y)$  的全微分的充分必要条件与流线微分方程比较有

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

带入连续方程得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

所以函数  $\psi$  永远满足连续性方程，在流线上  $\psi = C$ ,  $C$  为常数，每条流线对应一个常数值，称  $\psi$  为流函数。

极坐标的表示形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = -v_\theta dr + v_r r d\theta \\ v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

流函数表示二维流动中两条流线间单位厚度通过的体积流量等于两条流线上的流函数常数之差。



取两条流线的两个点  $A$  和  $B$  通过  $AB$  柱面的体积流量为

$$q_V = \psi_2 - \psi_1$$

只要是不可压缩流体的平面流动，就存在流函数，且上式成立。

对于不可压缩流体的平面二维无旋流动，必然同时存在速度势函数和流函数，他们满足柯西黎曼条件：

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

流线与等势线在交点相互正交

我们将流函数线构成一簇流线，它们和等势线构成一张描述平面流动特征的网，称为流网。

由于速度势函数和流函数满足柯西黎曼条件，所以对于一个流场我们可以导出复数形式的表达式

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

其中， $z = re^{i\theta}$

## Vortex-induced flow and Point vortex

我们开始研究不可压缩流体平面二维无旋流动。我们从最简单的情况入手——均匀直线流动，也就是平行流。

对流线微分方程积分可得

$$v_0 x - u_0 y = C$$

其中  $u_0, v_0$  表示  $u, v$  速度大小

速度势函数和流函数的求解方法非常简单，我们直接给出表示式

速度势：

$$\varphi = u_0 x + v_0 y$$

流函数：

$$\psi = -v_0 x + u_0 y$$

在平面二维流场中，由 Bernoulli 方程由

$$gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$



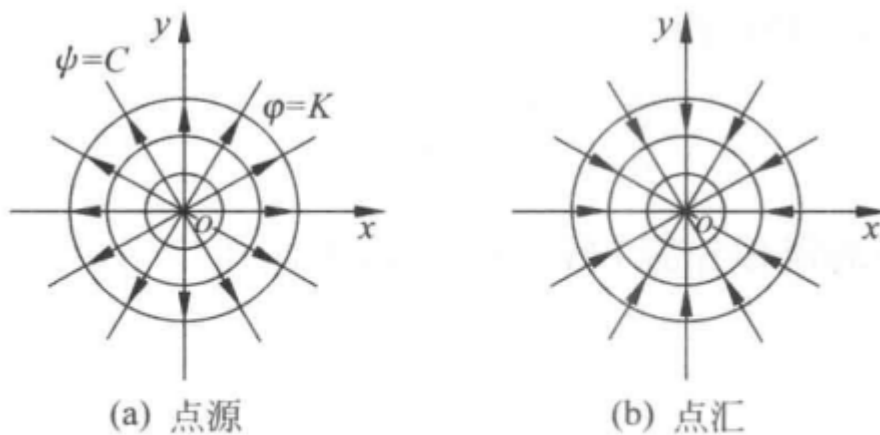


图 5-21 点源和点汇

设在无限平面上流体从一点沿径向直线均匀地向各方流出，这种流动称为点源，这个点称为源点。若流体沿径向直线均匀地从各方流入一点，这种流动称为点汇，这个点称为汇点。

显然在这些流动中只有径向速度而没有切向速度，所以对于速度势函数有：

$$d\varphi = v_r dr$$

考虑连续性条件，通过任一圆柱面的流量  $q_V$  相同，所以有

$$v_r = \pm \frac{q_V}{2\pi r}$$

正负号表示流入或流出，所以速度势函数

$$\varphi = \pm \frac{q_V}{2\pi} \ln r$$

显然在  $r \rightarrow 0$  时，径向速度和速度势函数趋于无穷大，源点或汇点为奇点。

流函数

$$\psi = \pm \frac{q_V}{2\pi} \theta$$

引入伯努利方程，考虑无穷远平面位势能为零，则

$$p = p_\infty - \frac{\rho q_V^2}{8\pi^2 r^2}$$

现在我们来考虑漩涡对于流动的影响。设有一涡管强度为  $\Gamma$  的直线涡束，涡流是被该涡束诱导产生的一种平面流动，涡流平面垂直于涡束轴线。诱导涡流类似于电磁感应产生的涡流磁场，诱导速度可由 [Biot-Savart 定理](#) 给出。即微元段在给定所诱导的速度为

$$dv_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \sin \alpha dl$$

其中  $R$  表示给定点到微元段的距离， $\alpha$  表示  $R$  与漩涡微端的轴线之间的夹角。

有Helmholtz 第一定理可得，涡管强度  $\Gamma$  沿涡管长度不变，所以有限长度  $L$  得涡束段在给定点的诱导速度

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{R^2} dl$$

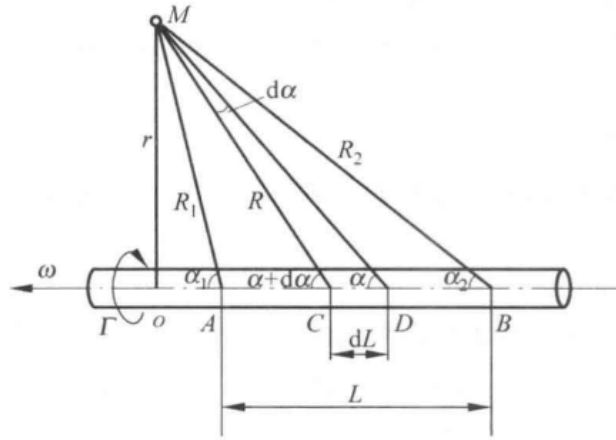


图 5-24 直涡束的诱导速度

对于直涡束

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\sin \alpha}{r} d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

对于无限长涡束，诱导速度为

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

在涡束内，流体如同刚体一样以等角速度绕自身轴旋转，速度与半径成正比，即  $v_{\theta} = r\omega$ 。涡束内的流动区域称为势流旋转区，涡束内的流动区域称为涡核区，设涡束半径为  $r_b$  涡束边缘速度

$$v_{\theta_b} = \frac{\Gamma}{2\pi r_b}$$

由 Bernoulli 方程可得涡束外距离涡束轴线为  $r$  的一点处压强为

$$p = p_{\infty} - \frac{\rho v_{\theta}^2}{2} = p_{\infty} - \frac{\Gamma^2 \rho}{8\pi^2} \frac{1}{r^2}$$

显然，当  $r \rightarrow 0$  时，压强  $p \rightarrow \infty$  这显然是不会发生的，所以要将涡束区域看成有旋流动取，涡核区的流动为等角速度旋转，涡核半径：

$$r_b = \sqrt{\frac{\Gamma^2 \rho}{8\pi^2} \frac{1}{p_{\infty} - p_b}}$$

对于涡核区的有旋流动，Bernoulli 方程失效，由平面二维定常流动的欧拉运动微分方程可得涡核区的压强分布

$$p = p_{\infty} - \rho \omega^2 r_b^2 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

我们可以得出涡核区的压强比涡核外的低，所以涡核有抽吸作用。

## Superposition of Elementary Flows

对于复杂的无旋流动，我们可以将它看成是由简单平面二维流动经线性叠加而成的复合平面流动，这几个**无旋流动叠加后仍然为无旋流动**，满足 Laplace 方程。所以我们就可以很开心的使用线性叠加啦。

### Point vortex plus a Sink

#### Superposition of Elementary Flows (1)

##### Point vortex plus a Sink

$$\varphi = \pm \frac{q_v}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \pm \frac{q_v}{2\pi} \theta$$

源汇

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

点涡

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} (q_v \ln r - \Gamma \theta) \quad \psi = -\frac{1}{2\pi} (q_v \theta + \Gamma \ln r)$$

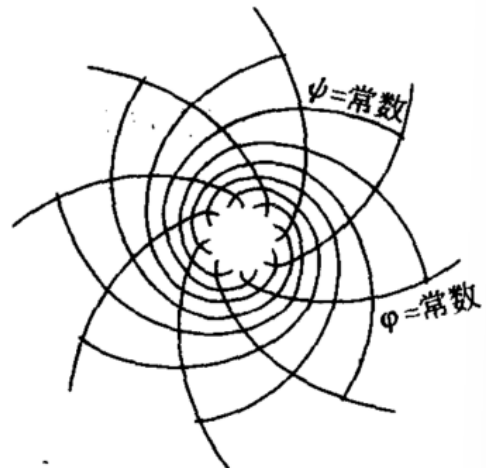
$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q_v}{2\pi r} \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

$$r = C_1 e^{\left(\frac{\Gamma}{q_v} \theta\right)}$$

等势线

$$r = C_2 e^{\left(-\frac{q_v}{\Gamma} \theta\right)}$$

流线 (螺旋线)



42

任一两点1、2的压强分布

$$p_1 = p_2 - \frac{\rho}{8\pi^2} (\Gamma^2 + q_v^2) \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

## Superposition of Elementary Flows (2)

### Uniform Stream Plus a Source

$$\varphi = u_{\infty} r \cos \theta + \frac{q_V}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = u_{\infty} r \sin \theta + \frac{q_V}{2\pi} \theta$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_{\infty} \cos \theta + \frac{q_V}{2\pi r} \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -u_{\infty} \sin \theta \end{cases}$$

stagnation point

$$\theta_z = \pi, \quad r_z = x_z = \frac{q_V}{2\pi u_{\infty}}$$

Zero streamline

$$\psi_0 = u_{\infty} r \sin \theta + \frac{q_V}{2\pi} \theta = \frac{q_V}{2}$$

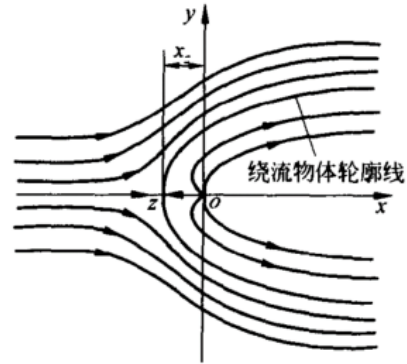
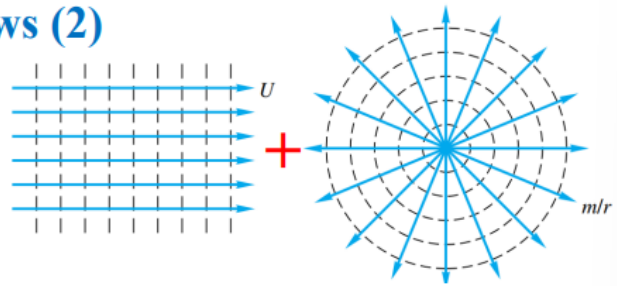


图 5-32 平行流和点源流动的叠加

在点源中心处，当  $r \rightarrow 0$ ，速度  $V \rightarrow \infty$ ；当  $r \rightarrow \infty$  时，速度  $V \rightarrow u$ ，即平行流不受点源流动的一项。在  $x$  轴某处  $z$  点，平行流速度和点源速度相互抵消，总速度  $V$  为零，该点称为驻点。将通过  $Z$  点的外轮廓线称为零流线，零流线以内区域的流场没有意义。

## Source Plus a Equal sink (dipole flow)

### Superposition of Elementary Flows (3)

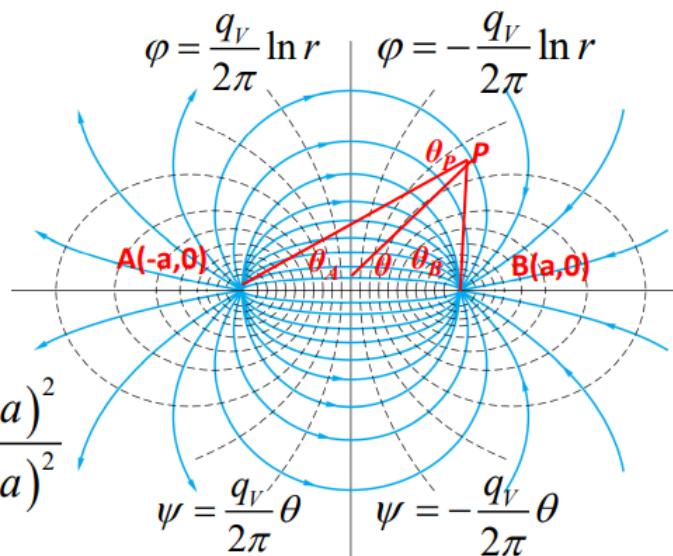
#### Source Plus an Equal Sink (dipole flow)

$$\varphi = \frac{q_{VA}}{2\pi} \ln r_A - \frac{q_{VB}}{2\pi} \ln r_B$$

$$\psi = \frac{q_{VA}}{2\pi} \theta_A - \frac{q_{VB}}{2\pi} \theta_B$$

$$\varphi = \frac{q_V}{2\pi} \ln \frac{r_A}{r_B} = \frac{q_V}{4\pi} \ln \frac{y^2 + (x+a)^2}{y^2 + (x-a)^2}$$

$$\psi = \frac{q_V}{2\pi} (\theta_A - \theta_B)$$



44

偶极流是中心点不重合的点源和点汇流动相互叠加而成的复合流动形式，他和平行流相叠加后的流动形式能恰当模拟平行流绕圆柱形物体的流体。

当  $a$  逐渐缩小是，强度  $q_V$  逐渐增大，当  $2a$  减小到零时， $q_V$  应该增加到无穷大，假定流量和彼此间距离的乘积  $2aq_V = M$  保持一个有限常数值，称为偶极矩，而原点  $o$  称为偶极点。偶极流的速度式满足

$$\varphi = \frac{q_V}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{r_A - r_B}{r_B}\right)$$

于是当源点  $A$  和汇点  $B$  逐渐靠近时，有

速度势：

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

流函数：

$$\psi = \frac{q_V}{2\pi} \left[ \arctan \frac{y}{x+a} - \arctan \frac{y}{x-a} \right]$$

也可以简化成

$$\psi = \frac{qV}{2\pi} \arctan\left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right)$$

当  $2a \rightarrow 0$ , 利用等价无穷小可得

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{r^2}$$

所以流线  $\psi = C_1$  是一簇圆心在  $y$  轴上  $(0, -\frac{M}{4\pi C_1})$ , 半径为  $\frac{M}{4\pi C_1}$  的圆周族, 即

$$x^2 + \left(y + \frac{M}{4\pi C_1}\right)^2 = \left(\frac{M}{4\pi C_1}\right)^2$$

同样的, 等势线  $\varphi = C_2$  是半径为  $\frac{M}{4\pi C_2}$ , 圆心在  $(\frac{M}{4\pi C_2}, 0)$  且与  $y$  轴在原点相切的圆周簇, 满足

$$\left(x - \frac{M}{4\pi C_2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi C_2}\right)^2$$

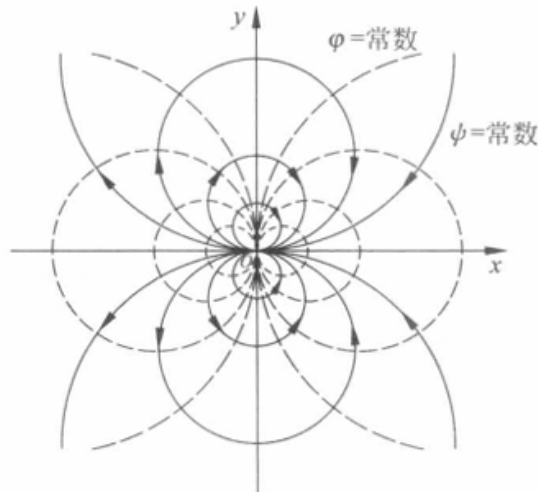
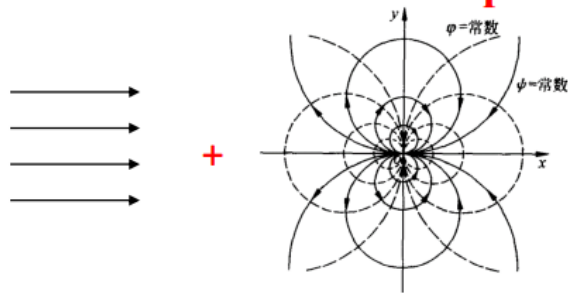


图 5-31 偶极流的流线和等势线

## Uniform Stream Plus a Dipole

### Superposition of Elementary Flows (7)

#### Uniform Stream Plus a Dipole

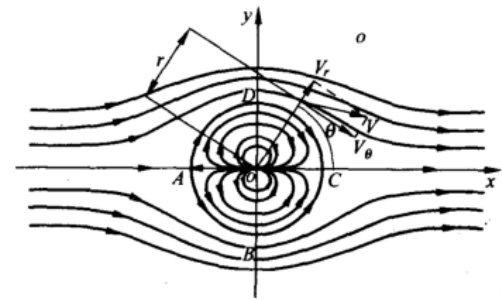


$$\psi = u_{\infty} y \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\psi = u_{\infty} y \left( 1 - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

流线方程

$$u_{\infty} y \left( 1 - \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C \quad \psi = u_{\infty} y \left( 1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right) = u_{\infty} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta$$



零流线方程

$$C = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{M}{2\pi u_{\infty}} \end{cases}$$

$$\diamond r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi u_{\infty}}}$$

48

偶极流和平行流叠加而成的二维无旋流动也称为无环量绕圆柱体的不可压缩流体二维无旋流动。也就是说，一个平行流绕过半径为  $r_0$  的圆柱体二维流动，可以用这个平行流与偶极矩  $M = 2\pi u_{\infty} r_0^2$  的偶极流叠加而成的复合流动来代替。

我们给出复合流动速度势函数

$$\varphi = u_{\infty} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta$$

我们给出圆柱表面上极坐标形式的速度分布

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_{\theta} &= -2u_{\infty} \sin \theta \end{aligned}$$

所以圆柱表面上只有切向速度，与流体绕圆柱体不发生脱离的边界条件相符。我们将满足  $v_{\theta} = 0$  点称为驻点， $v_{\theta} = 2u_{\infty}$ （不考虑方向）的点称为驻点。

我们可以得到沿圆柱体轴线速度环量

$$\Gamma = \oint v_{\theta} ds = 0$$

也就是说平行流绕过圆柱体的二维流动的速度环量为零。



## Superposition of Elementary Flows (9)

### Uniform Stream Plus a Dipole

### Irrotational flow around a circular cylinder

$$ds \cdot 1 = r_0 d\theta \cdot 1$$

$$dF_x = -pr_0 \cos \theta d\theta$$

$$dF_y = -pr_0 \sin \theta d\theta$$

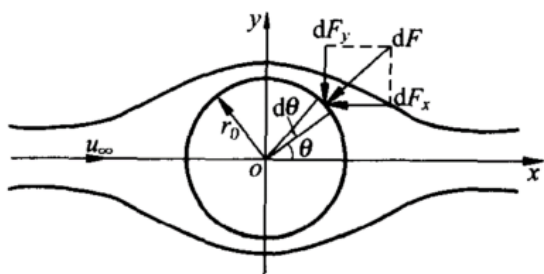


图 5-35 作用在圆柱面上的合外力

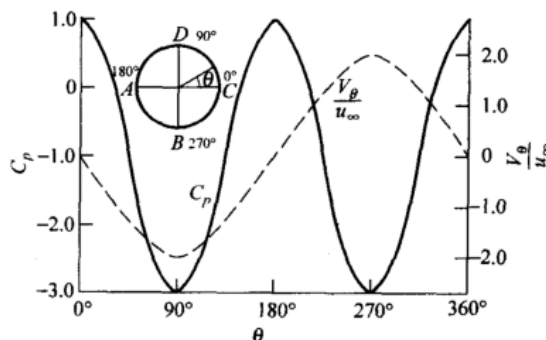


图 5-34 切向速度和压力系数沿圆柱面的分布

$$F_D = F_x = -\int_0^{2\pi} r_0 \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \cos \theta d\theta = 0$$

$$F_L = F_y = -\int_0^{2\pi} r_0 \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0$$

**D' Alembert's paradox**

50

对于圆柱体表面上的压强，用  $p_\infty$  表示无穷远处流体的压强可得

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

也就是说驻点处压强最大，舷点处压强最小（这很容易理解）。我们定义压力系数  $C_p$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = 1 - \left( \frac{V}{u_\infty} \right)^2$$

这是一个量纲为 1 的压力系数。在圆柱体面上有

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

也就是说圆柱体表面上的压力系数只是极角  $\theta$  的函数。

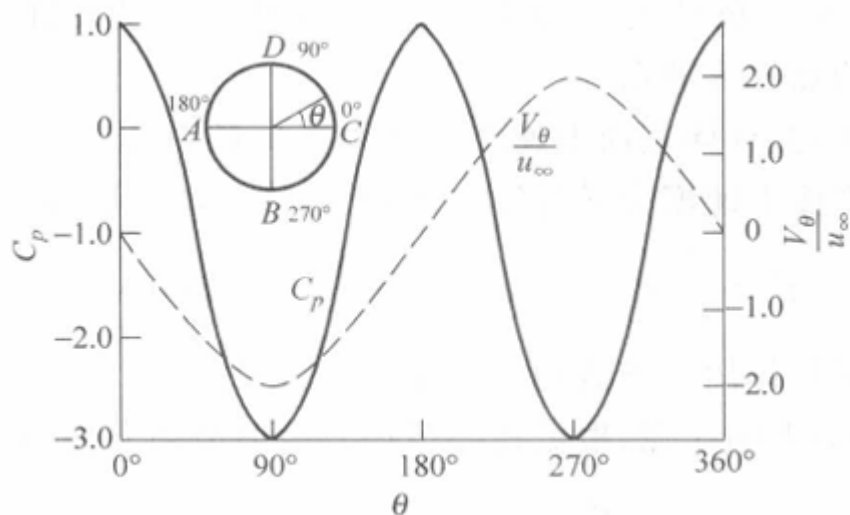


图 5-34 切向速度和压力系数沿圆柱面的分布

由上图可以看出流体在圆柱面上的压力水平合力和垂直合力均等于零，即流体作用在圆柱体上的合外力为零。

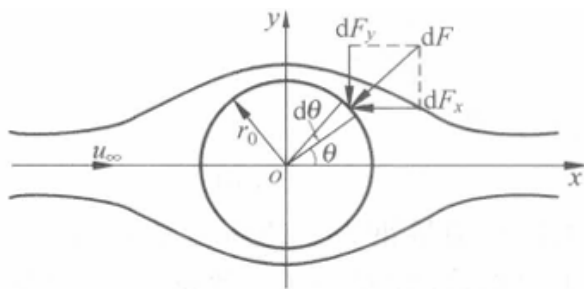


图 5-35 作用在圆柱面上的合外力

考虑单位长度圆柱体上的微元压力  $d\mathbf{F} = -pr_0 d\theta \mathbf{n}$ ，其在  $x$  轴和  $y$  轴上的投影分别为

$$dF_x = -pr_0 \cos \theta d\theta$$

$$dF_y = -pr_0 \sin \theta d\theta$$

积分可证水平分力  $F_D$  和垂直分力  $F_L$  为零。我们将圆柱体受到的与来流方向平行和垂直的作用力分别称为流体作用在圆柱体上的阻力  $F_D$  和升力  $F_L$ 。

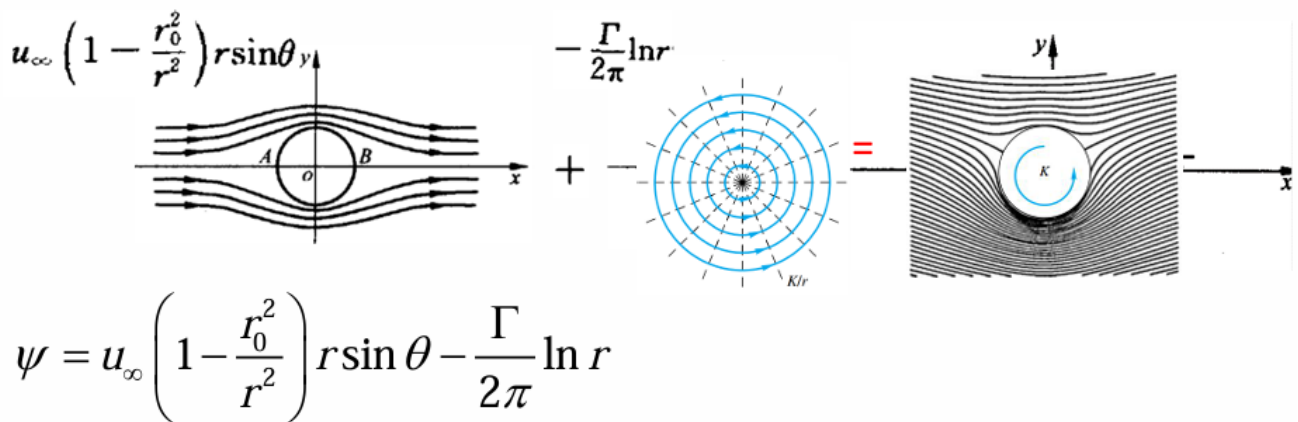
当理想流体平行流无环量绕圆柱体时，圆柱体既不受阻力作用也不受升力作用，这一结论可以推广到理想流体平行绕过任意形状柱体无环量无分离的二维流动。不受升力符合实际，但是不受阻力与实际不符，这就是著名的达朗贝尔佯谬。

但是即使对于粘性很小的流体，当流体绕圆柱体和其他物体时，物体也会受到一定阻力。即使粘性很小的流体，粘性力在靠近圆柱体表面的区域内也不能忽略，在粘性力的作用下，紧贴圆柱表面的一层（边界层）内流体会在圆柱面下游某处发生分离而形成尾部涡流区，该区域压力大体是均匀的，这样，圆柱表面前后半周上的压力分布不再相同，前半周总压力大于后半周总压力（涡流区压力方向与流体压力相反）形成了压差阻力。但如果将边界层外的流体流动看成理想流体的无旋流动，与边界层理论结合可以较为方便地解决实际流体的绕流问题。

# Flow Past a Circular Cylinder with Circulation

## Flow Past a Circular Cylinder with Circulation (1)

### Uniform Stream + Dipole + Point vortex



### 圆柱表面速度分布

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2u_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \end{cases}$$

### Stagnation point

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 u_{\infty}}$$

51

有环量绕圆柱体的不可压缩流体的二维无旋流动是由平行流绕过圆柱体无环量的二维流动和点涡流动（除点涡中心）叠加而成的。速度环量可通过圆柱体旋转的角速度求出。

速度势函数

$$\varphi = u_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

对于驻点位置，根据  $\Gamma$  的大小不同，可以分成三种情况(此时  $\Gamma < 0$ )

1.  $|\Gamma| < 4\pi r_0 u_{\infty}$  圆柱体表面上有两个驻点关于  $y$  轴左右对称，分别为第三和第四象限，驻点位置随  $|\Gamma|$  的增加而向下移动并相互靠拢。
2.  $|\Gamma| = 4\pi r_0 u_{\infty}$  驻点会聚成一点在圆柱最下端。
3.  $|\Gamma| > 4\pi r_0 u_{\infty}$  圆柱表面上无驻点。

对于第三情况，根据流场的速度方程可以解出驻点位置

$$r_1 = \frac{\Gamma}{4\pi u_{\infty}} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Gamma}{2\pi u_{\infty}} \right)^2 - 4r_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

当  $\Gamma > 0$  讨论方法仍是相同的。

我们给出圆柱表面上的压力分布（根据 Bernoulli 方程推导）

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho [u_{\infty}^2 - (-2u_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0})^2]$$

给出阻力和升力表达式：

$$F_D = 0$$

$$F_L = -\rho u_{\infty} \Gamma$$

这就是 Kutta-Joukowski 升力公式。升力方向为来流速度方向沿逆速度环流的方向旋转90度来确定。

## Flow Around Cascades

### Flow Around Cascades (1)

#### 环量

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{CD} \\ &= -t[v_1 + (-v_2)] \\ &= t(v_2 - v_1) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = u_1 = u_2, \\ V &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \end{aligned} \right\}$$

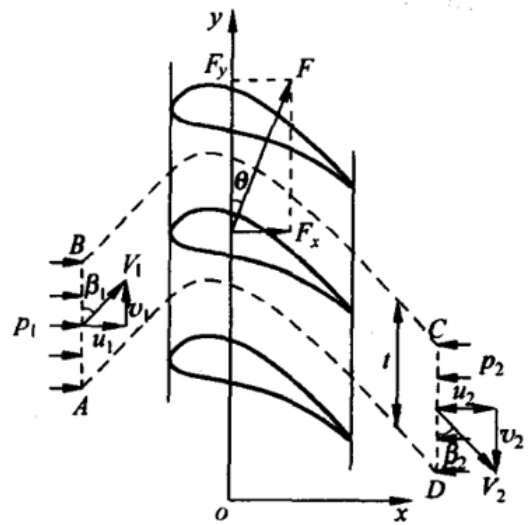


图 5-40 叶栅

#### 动量定理

$$R_y = -F_y = \rho u t (v_2 - v_1) \longrightarrow F_y = -\rho \Gamma U$$

$$F = \rho \Gamma V_{Total}$$

$$\begin{aligned} R_x &= -F_x + (p_1 - p_2)t \\ &= \rho u t (u_2 - u_1) = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{伯努利方程} \\ &(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \longrightarrow F_x = \rho \Gamma V$$

$$= \rho (v_2 - v_1) V$$

55

对于非圆柱体形物体的平面绕流问题，升力公式仍然成立。我们可以通过动量方程导出升力公式。

$$F_x = \rho \Gamma V$$

$$F_y = -\rho \Gamma U$$

这是叶栅的 Kutta-Joukowski 公式。

对于孤立叶型的绕流，可以认为栅距无穷大。所以合力

$$F = -\rho \Gamma u_{\infty}$$

绕儒科夫斯基翼型的速度环量：

$$\Gamma = \rho \pi u_{\infty} b \sin(a - a_0)$$

其中  $b$  为翼型弦长，所以可得流体作用在儒科夫斯基翼型上的升力

$$F_L = \rho \pi u_{\infty}^2 b \sin(a - a_0)$$

定义升力系数  $C_L$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 A}$$

对于单位长度的翼型而言，升力系数可简化成

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha - \alpha_0)$$