连续系统振动 V

振动力学

梁振动的特殊问题

轴向力对梁弯曲振动的影响

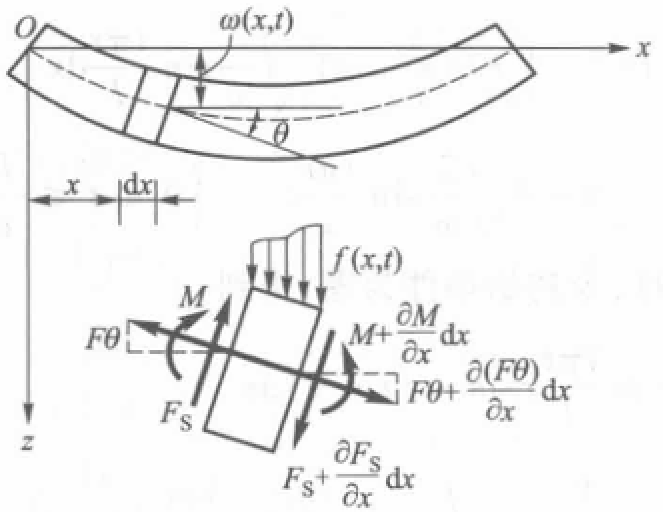


图 7.18 受轴向力作用的梁的弯曲振动

如果各截面存在常值轴向拉力 F 和 $-F$ ，列写力平衡方程时应增加此轴向力沿 z 方向的分量，方程改写为

$$\rho(x)A(x)dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left(F_s+\frac{\partial F_s}{\partial x}dx\right)-F_s+\left(F\theta+\frac{F\theta}{\partial x}\right)-F\theta+f(x,t)dx$$

(这里设轴向拉力在 x 方向的作用 $F\sin\theta\approx F\theta$)

利用之前的结论，可得受轴向力作用梁的弯曲振动方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}-F\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t)\quad(1)$$

考虑均匀梁。分离变量结果：

$$\ddot{T}(t){+}\omega^2T(t)=0$$

$$\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}-\frac{F}{EI}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}-\frac{\rho A}{EI}\omega^2\Phi(x)=0$$

特征方程 $\lambda^4-\delta^2\lambda^2-\beta^4=0$ 的根：

$$\lambda_1=\mathrm{i}\beta_1\quad\lambda_2=-\mathrm{i}\beta_1\quad\lambda_3=\beta_2\quad\lambda_4=-\beta_2$$

其中

$$\beta_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{\rho A}{EI}\omega^2 + \left(\frac{F}{2EI}\right)^2} - \frac{F}{2EI}} \qquad \beta_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{\rho A}{EI}\omega^2 + \left(\frac{F}{2EI}\right)^2} + \frac{F}{2EI}}$$

所以方程通解

$$\phi(x) = \cos\beta_1 x + \sin\beta_1 x + \cosh\beta_2 x + \sinh\beta_2 x$$

看一个🌰:

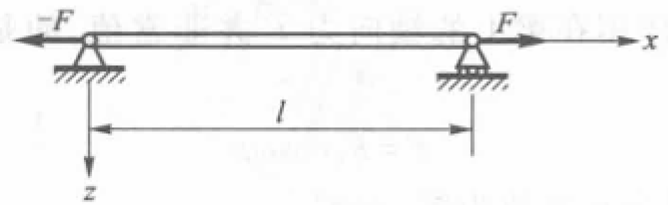


图 7.19 受轴向力作用的简支梁

考虑如上简支梁，根据边界条件可以解出频率方程

$$\sin\beta_1 l = 0$$

解出

$$\beta_{1i} l = \mathrm{i}\pi$$

固有频率:

$$\omega_i^2 = \left(\frac{\mathrm{i}\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}\left[1 + \frac{F}{EI}\left(\frac{l}{\mathrm{i}\pi}\right)^2\right]}$$

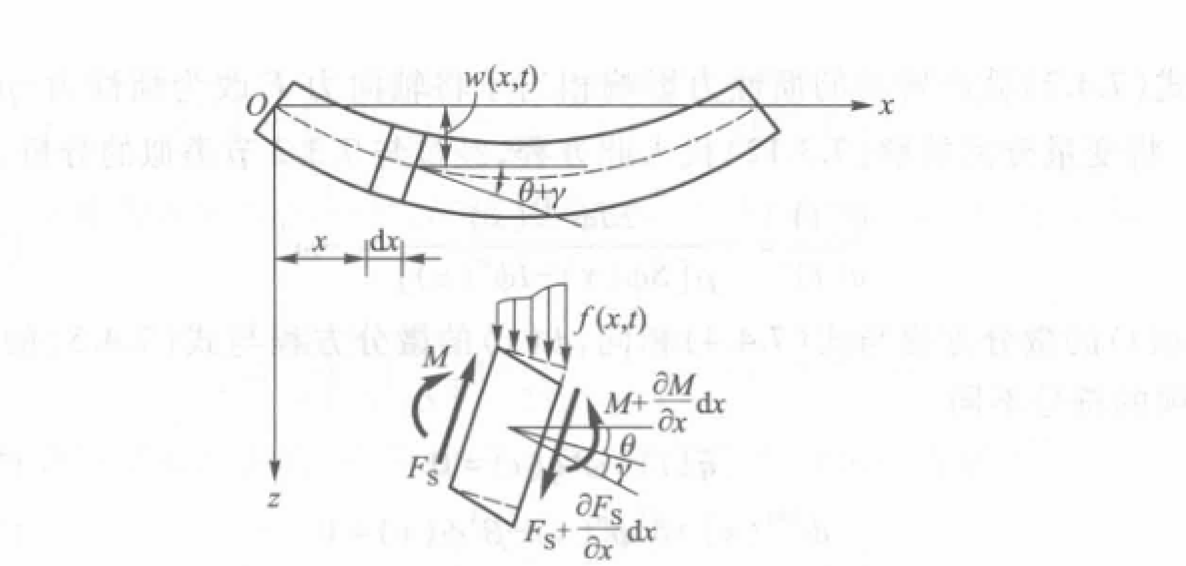
如果 F 为正（受拉也就是图上所示方向），则固有频率提升，从物理上理解是系统的等效刚度变大（考虑 $\omega^2 = \frac{\bar{K}}{\bar{M}}$），$F$ 为负（受压）则是等效刚度减小

当杆受压时，为了确保固有频率有实数解，$|F|$ 需要小于一个临界值 $|F|_{\mathrm{cr}}$

$$|F|_{cr} = \frac{(\mathrm{i}\pi)^2 EI}{l^2}$$

此临界为材料力学压杆的欧拉载荷。

Timoshenko 梁的自由振动



对于较短粗的梁，需要考虑剪切变形和转动惯量的影响，也就是 Timoshenko 梁问题。因为截面存在剪切变形，起法线轴与中心轴的切线就不再保持一致，记梁的的切变模量为 G，剪力 F_s 作用下产生的切应变 γ 为

$$\gamma=\frac{F_s}{\kappa GA}$$

κ 为截面形状因素，切应变导致中心轴切线偏转，则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\theta+\gamma$$

考虑自由振动问题，即无外加激励，达朗贝尔原理给出沿 z 轴的力平衡方程

$$\kappa GA\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-f(x,t)=0 \tag{2}$$

截面转动时产生惯性力矩 $-\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ ，考虑力矩平衡

$$\frac{\partial M}{\partial x}-F_s+\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0$$

用 w 和 θ 表示得

$$EI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\kappa GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)-\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

对 x 做偏导得

$$EI\frac{\partial^3\theta}{\partial x^3}+\kappa GA\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)-\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=0 \tag{4}$$

(2) 式给出

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\rho}{\kappa G}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

将上式带入 (4) 式中可得Timoshenko 梁自由振动方程:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho I}{\kappa G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0$$

如果忽略剪切变形，取 $G\to\infty$ 则可简化为

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial w^2}{\partial t^2}-\rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

分离变量:

$$\ddot{T}(t)+\omega^2 T(t)=0$$
$$\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}+\omega^2\frac{\rho}{E}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}-\omega^2\frac{\rho S}{EI}\Phi(x)=0$$

如果考虑剪切变形的影响，忽略惯性力矩，则振动方程可简化为

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(\frac{\rho EI}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

含结构阻尼梁的弯曲振动

如果材料在变形过程中存在由内摩擦引起的结构阻尼，所以动应力可以表示为

$$\sigma(x,t)=E\left[\varepsilon(x,t)+\eta\frac{\partial\varepsilon(x,t)}{\partial t}\right]$$

所以弯矩改成

$$M=EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta\frac{\partial^3 w}{\partial^2 x\partial t}\right)$$

所以弯曲振动方程可以改为

$$EI\frac{\partial^4(x,t)}{\partial x^4}+\eta EI\frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4\partial t}+\rho A\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t)$$

取保守系统的线性组合 $w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)q_i(t)$，带入上述方程，并作如下积分处理(正交化)

$$\int_0^L\varphi_j\left\{EI\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^{(4)}q_i+\eta EI\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^{(4)}q_i+\rho A\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\ddot{q}_i\right\}dx=\int_0^L\varphi_j f(x,t)\,dx$$

根据保守的正交性条件，可得

$$\ddot{q}_j(t)+\eta\omega_j^2\dot{q}_j(t)+\omega_j^2q_j(t)=\frac{f_j}{\overline{M}_j}\qquad \omega_j=\frac{\overline{K}_j}{\overline{M}_j}$$

对于梁的弯曲振动，之前并没有考虑过阻尼作用。在多自由度振动系统中，我们提到过当存在阻尼影响时，方程可能无法解耦。因此在弯曲振动中，如果存在阻尼影响，我们也可能无法对方程解耦，上面是一种特殊情况。还有一种阻尼作用情况可以解耦，振动方程满足如下形式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\beta_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\beta_2\rho(x)A(x)\frac{\partial w}{\partial t}=$$

这种情况其实是在多自由振动系统中讨论过的比例阻尼 $C=\alpha M+\beta K$，因对上述方程作正交化处理，阻尼就变成广义刚度和广义质量的线性组合。

膜和板的振动

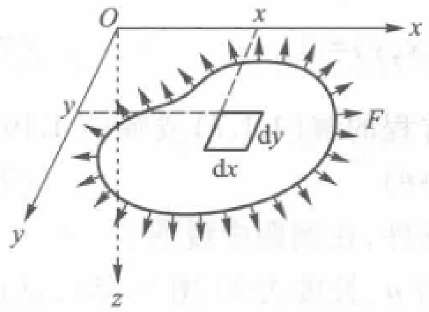


图 7.23　受张力作用的薄膜

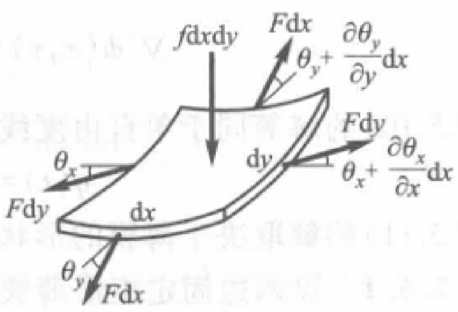


图 7.24　薄膜微元体的受力图

薄膜横向振动：

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-F\nabla^2 w=0$$

其中 ρ 为薄膜密度， h 为薄膜厚度，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

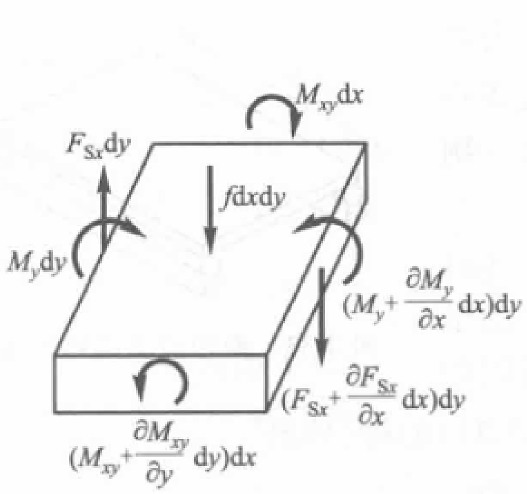


图 7.31　微元体绕 y 轴的力矩平衡

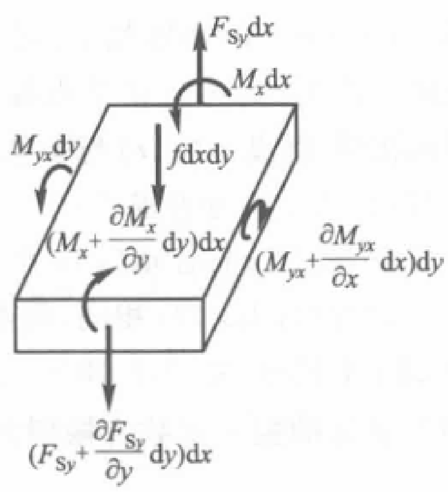


图 7.32　微元体绕 x 轴的力矩平衡

板的振动

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\nabla^4\omega = f$$

D 为抗弯刚度，满足

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$