单自由度振动 III；双自由度振动

振动力学

广义单自由度

我们之前所研究的单自由度振动系统都是在忽略弹簧质量的情况进行研究的，此时弹簧质量 m 和物体质量 M 满足 $M >> m$，但当我们考虑弹簧质量时，此时我们仍能将其视作一种单自由度系统，称为广义单自由度系统。

考虑以下这种情况：

假定弹簧长度 l 和密度 ρ 满足线性关系，且 $l \cdot \rho = m$，其中 m 为弹簧的质量。假定弹簧与物体连接处速度为 $\dot{x}$，另一端固定，同时假定弹簧上速度线性分布，因此可以给出离原点y处的弹簧微段速度方程

$$dT = \frac{1}{2}(\rho dy)(\dot{x}\frac{y}{L})^2$$

积分得

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}(\rho dy)(\dot{x}\frac{y}{L})^2 = \frac{1}{6}\rho L\dot{x}^2 = \frac{1}{6}m\dot{x}^2$$

这样我们就可以给出系统中动能和势能（势能只由弹簧的变形引起）

$$T = (\frac{1}{6}m + \frac{1}{2}M)\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

然后通过Lagrange函数便可解出系统运动方程

因此，对于质量无法忽略的弹性元件，我们可以给出弹性元件的速度分布

$$\begin{gathered} z = \dot{x}w(y) \\ w(y_0) = 1 \end{gathered}$$

y_0为弹性元件与物体的接触位置， $w(y)$与弹性元件的质量分布和变形方式有关

例如，对于悬臂梁，有材料力学的知识可以给出

$$w(y) = \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}$$

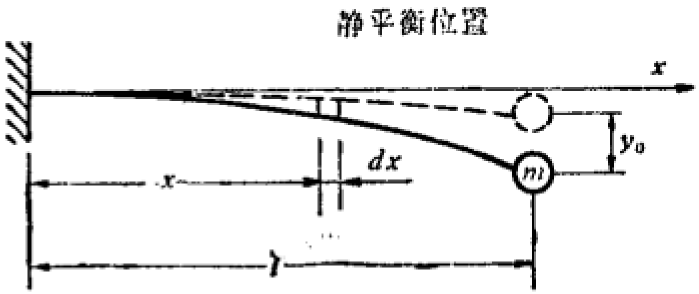
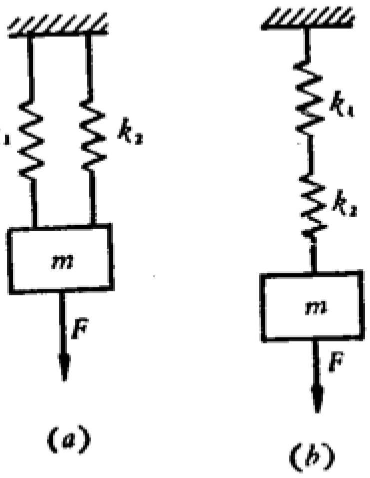


图 2.3-4

等效刚度



我们先考虑两个弹簧的串并联问题

对于串联弹簧，他们此时受的力是相同的，对于单位作用力有

$$x_1 = \frac{1}{k_1}, \quad x_2 = \frac{1}{k_2}$$

此时对等效弹簧仍有关系式

$$x = \frac{1}{k}$$

所以等效刚度

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

对于并联弹簧，他们此时因外力引起的位移是相同的，对于单位位移有

$$F_1 = k_1 \cdot 1, \quad F_2 = k_2 \cdot 1$$

此时对等效弹簧仍有关系式

$$F = k \cdot 1$$

所以等效刚度

$$k = k_1 + k_2$$

双自由度系统

我们之前所关注的都是单自由度系统的振动问题，但是实际生活中有很多更为复杂的振动，不能单纯化简为单自由度系统，必须化成双自由度甚至多自由度系统的问题来解决。随着振系自由度数目的增多，振动问题求解的工作量越来越繁重。不过，多自由度振系的许多基本概念都可以通过双自由度振系的问题来说明；而且，关于双自由度振系的理论本身有很重要。

考虑如下双自由度振动系统：

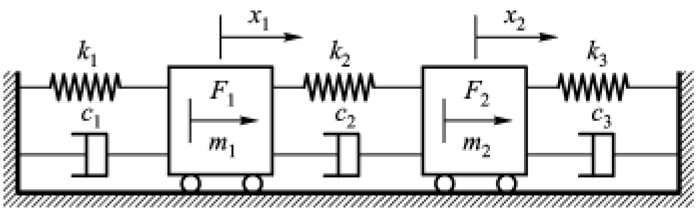


图 3-1　典型的两自由度系统

考虑一种简单地特殊情况：取 $k_3 = k_1, c_3 = c_1$ 则可以写出系统运动方程

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(t) + k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_1\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(t) - k_2(x_2 - x_1) - k_1x_2 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2\dot{x}_1 \end{aligned}$$

移项并写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

记作

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$$

先考虑保守系统，此时

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

假定存在

$$X = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

带入消去 $\sin(\omega t + \varphi)$

$$(K - \omega^2 M)X = 0$$

为了满足方程有解，此时行列式 $\det[K - \omega^2 M]$ 应为零，对于我们所研究的系统，有

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m)^2 = k_2^2$$

解得

$$\omega_1^2=\frac{k_1}{m}\quad w_2^2=\frac{k_1+2k_2}{m}$$

对于 ω_1 带入可解得振幅满足关系 $X_{10}=X_{20}$，定义振型，事实上它就是特征值对应的特征向量

$$\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad (\text{归一化形式：}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix})$$

对于 ω_2 带入可解得振幅满足关系 $X_{10}=-X_{20}$，振型

$$\varphi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad (\text{归一化形式：}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix})$$

显然 φ_1 与 φ_2 正交

在振动过程中，每个质量振动所对应的实际幅值是不确定的，但是各个质量的振动幅度与特征向量中的各个元素成比例。振动系统的固有频率取决于质量矩阵和刚度矩阵，主振型也是由质量矩阵和刚度矩阵决定的，是系统固有的振动性质。

线性代数告诉我们，不同特征值所对应的特征向量之间相互正交，也就是说，多自由振动系统的主振型相互正交，利用其正交性我们有

$$\varphi_i^TM\varphi_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \overline{M}_i(2m) & i=j\end{cases}$$

$$\varphi_i^TK\varphi_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \overline{K}_1=2k_1 & i=j=1\\ \overline{K}_2=2k_1+4k_2 & i=j=2\end{cases}$$

所以

$$\omega_i^2=\frac{\overline{K}_i}{\overline{M}_i}$$

我们给出振幅曲线和对应简化的物理模型:

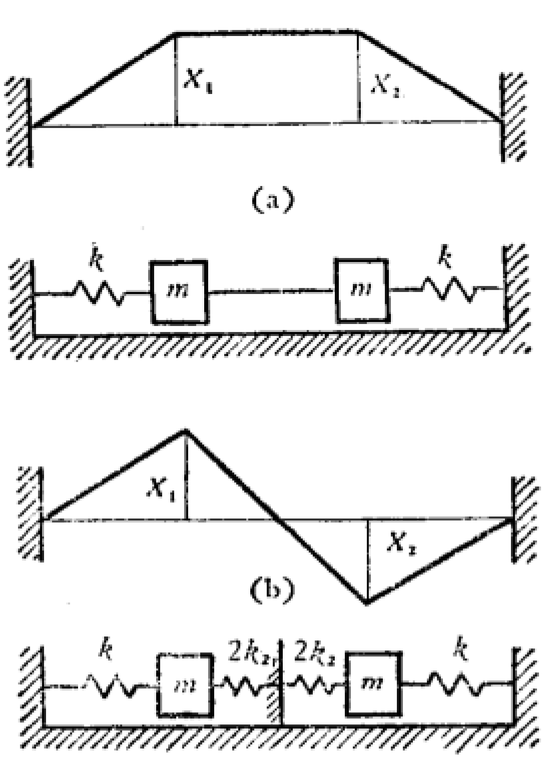
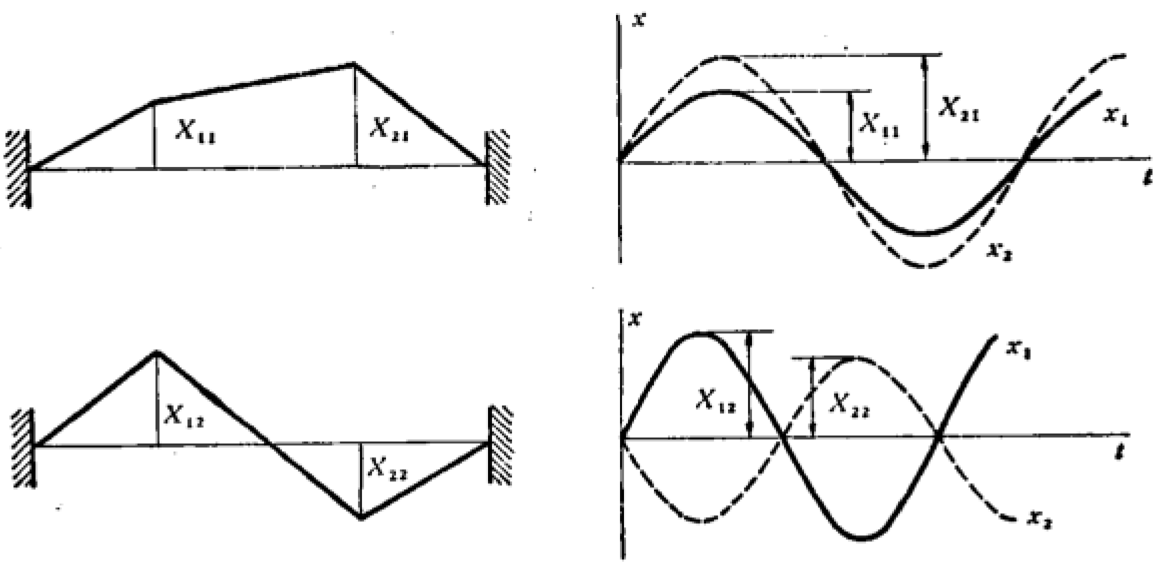


图 5.2-3

- 对于 φ_1 我们可以视作两个质量以相同的振幅同向运动，中间弹簧无变形。
- 对于 φ_2 我们可以视作两个质量以相同的振幅反向向运动，中间弹簧中点不动。

对于其他情况（两端弹簧质量不相同），我们仍可以用相同的方法求得两个质量的振幅比 $\frac{X_{10}}{X_{20}}$ 关系。此时仍会存在一正一负两种振幅比 μ_1, μ_2 ，称$\mu_1 > 0$对应的振动为第一振型（或低振型振动）称$\mu_2 < 0$对应的振动为第二振型（或高振型振动），如下图所示：



回到之前的方程，我们尝试对耦合的运动方程解耦：
取

$$X = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} q_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} q_2(t)$$

带入后仍是个矩阵形式，我们通过左乘 φ_1^T或 φ_2^T化成标量方程可得

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^T &: 2m\ddot{q}_1 + 2c_1\dot{q} + 2k_1 q_1 = F_1 + F_2 \\
\varphi_2^T &: 2m\ddot{q}_2 + (2c_1 + 4c_2)\dot{q} + (2k_1 + 4k_2)\dot{q}_2 = F_1 - F_2
\end{aligned}
$$

但此时要求阻尼为比例阻尼，即

$$C = \alpha M + \beta K$$

不然难以解耦。

解耦会在下一个笔记中具体讨论多自由度振动 I