概统

#class

概率论的基本概念

频率与概率

概率的性质

1. $P(\varnothing)=0$注：$P(A)=1$不能推出$A=\varnothing$，$P(B)=1$不能推出$B=S$
2. $A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\ldots,n, P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
3. $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
4. $P(A)=1-P(\overline{A})$
5. 加法公式：
   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\overset{推广}{\Rightarrow}$
   $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{n}^{i=1}P(A_i)-\sum\limits_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n$

样本空间·随机事件

样本空间

随机试验E所有结果构成的集合称为的样本空间，记为$S=\{e\}$，并称S中的元素e为样本点，一个元素的单点集为基本事件

随机事件

一般我们称S的子集A为E的随机事件A，当且仅当A的一个样本点发生称事件A发生
必然事件：每次试验总是发生
不可能事件：$\varnothing$

事件关系及运算

关系

不相容：$AB=\varnothing$

运算

分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

对偶律

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

等可能概型

随机变量及其分布

随机变量

定义

设随机试验的样本空间为$S = \{e\}$若$X = X(e)$为定义在样本空间上的实值单值函数，则$X = X(e)$称为随机变量

离散型随机变量及其分布

定义

随机变量的取值是有限个或可列个，样本空间$S = \{X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n, \ldots\}$由于各样本点两两不相容，所以

$$1 = P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

0-1分布

随机变量只可能取0，1两个值

$$X \sim B(1, p)$$
$$P(X = k) = p^k (1 - p)^k$$

二项分布

n重贝努里试验

设试验E只有两个可能的结果：A与$\overline{A}$，$P(A) = p, 0 < p < 1$,将E独立重复进行n次，则称一串重复的独立试验为n重贝努利试验

二项分布的表示

设X表示n重贝努里试验中事件A发生的次数，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

称X服从参数为$P(A)=p$的二项分布，记$X\sim B(n,p)$

超几何分布

当$m\to+\infty$时，记$p=\frac{a}{m},q=\frac{b}{m}$，则可证：X近似服从二项分布$B(n,p)$即

$$P=(X=k)=\frac{C_a^k C_{m-a}^{n-k}}{C_m^n}\approx C_n^k p^k q^{n-k}$$

泊松分布

若随机变量的分布律为

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},k=0,1,2,\cdots\lambda>0$$

称X服从参数为λ的泊松分布，记为$X\sim P(\lambda)$,或$X\sim\pi(\lambda)$

泊松定理

当n充分大，p足够小时，记$\lambda=np$

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

几何分布

设独立重复试验中，每次试验有两个结果$A,\overline{A}.p(A)=p$随机变量X表示直到事件A发生为止所做的试验次数，则

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$$

则称随机变量X服从参数为p的几何分布。记为$X\sim G(p)$

帕斯卡（负二项）分布

设独立重复试验中，每次试验有两个结果$A,\overline{A}.p(A)=p$随机变量X表示直到事件A发生r为止所做的试验次数，则

$$P(X=k)=C_{r-1}^{k-1}p^r(1-p)^{k-1}$$

则称随机变量X服从参数为p的几何分布。记为$X\sim G(p)$

随机变量的分布函数

随机变量X，对任意实数x，称函数$F(x)=P(X\le x)$为X的概率分布函数，简称分布函数

性质

$$
\begin{aligned}
&1)\text{单调不减函数}\\
&2)0\le F(x)\le 1,\text{且}F(-\infty)=0,F(+\infty)=1\\
&3)F(x)\text{右连续，}F(x+0)=F(x)\\
&4)P(a<X\le b)=F(b)-F(a)
\end{aligned}
$$

连续型随机变量及其概率密度

对于随机变量X的分布函数$F(x)$若存在非负函数$f(x)$，使对任意实数x有：

$$
F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt
$$

则称X为连续性随机变量，$f(x)$为概率密度函数

性质

$$
\begin{aligned}
&1)f(x)\ge 0\\
&2)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\\
&3)\text{对于任意实数}a,b,P\{a<X\le b\}=\int_{a}^{b}f(t)dt\Rightarrow P(X=a)=0\\
&4)F^{'}(X)=f(x),P(x<X<x+\Delta x)\approx f(x)\Delta x
\end{aligned}
$$

重要的连续随机变量

均匀分布$X\sim U(a,b)$

密度函数

$$
f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}
$$

分布函数

$$
F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}
$$

指数分布$X \sim E(\lambda)$

密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

无记忆性

$$P(X>t_0+t)=P(X>t_0)p(X>t)$$

正态分布$X \sim N(\mu.\sigma^2)$

密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

性质

$$\begin{aligned}&1)f(x)关于x=\mu对称\\&2)f_{max}(x)=f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\\&3)\lim_{|x-\mu|\to\infty}f(x)=0\end{aligned}$$

标准正态分布与一般正态分布

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

随机变量的函数分布

已知随机变量X的概率分布，且已知$Y=g(X)$，求Y概率的分布：
记分布函数$F_X(x),F_Y(y)$
$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)<y\}$
求得y关于x的函数$u(y)$，并带入到X的分布函数之中

多元随机变量及其分布

设E是一个随机试验，样本空间 $S=\{e\}$,设 $X=X(e)$和 $Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由他们呢所构成的向量叫做二元随机变量或二维随机向量

二元离散型随机变量

设(X,Y)所有的可能取值为 (x_i,y_i),称$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2\cdots$为二元离散型随机变量的联合概率分布律。

性质

$$p_{ij}\geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$
$$P((X,Y)\in D)=\sum_{(x_I,y_j)}p_{ij}$$

边缘分布

$$P(X=x_i)=P(X=x_i,\bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j))=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}$$
$$P(Y=y_j)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X=x_i),Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}$$

条件分布

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$

二元随机变量的分布函数

$$F(x,y)=p\{(X\leq x)\cap(Y\leq y)\}\overset{\text{记成}}{=}P(X\leq x,Y\leq y)$$

性质

$$x_1<x_2\Rightarrow F(x_1,y)\leq F(x_2,y)$$
$$y_1<y_2\Rightarrow F(x,y_1)\leq F(x,y_2)$$

$$0\leq F(x,y)\leq 1,F(+\infty,+\infty)=1$$
$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(x+\varepsilon,y)=F(x,y)\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}F(x,y+\varepsilon)=F(x,y)$$

$$P(x_1<X\leq x_2,y_i<Y\leq y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq$$

边际分布函数

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= F(x,+\infty) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) \\
F_Y(y) &= F(+\infty,y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y)
\end{aligned}
$$

条件分布函数

$$
F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon\to0^+} P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon) = \frac{P(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}
$$

二元连续型随机变量

联合概率密度

$$
F(X,Y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv
$$

性质

$$
\begin{aligned}
& f(x,y)\le 0 \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \\
& P((X,Y)\in D) = \iint_D f(x,y)dxdy \\
& \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = f(x,y)
\end{aligned}
$$

二元均匀分布

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{A},(x,y)\in D \\ 0\text{，其他} \end{cases}
$$

二维正态随机变量

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$
f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}
$$

边际概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

相互独立的随机变量

独立性定义

对所有x,y有$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$ 即$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$称随机变量X，Y相互独立

独立性等价判断

离散型

$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

连续型

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

定理

连续量X与Y独立的充要条件是f(x,y)几乎处处可以写成x函数与y函数的乘积，$f(x,y) = m(x)n(y)$

n维随机变量的一些概念和结果

二元随机变量函数分布

设二元连续型随机变量(X,Y)具有概率分布 $f(x,y)$，Z是X，Y的函数，Z=g(X,Y)，则有

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

特殊函数 $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

正态分布相关函数

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\text{则}Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

更一般的结论:
n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布

M=max(X,Y) N=min(X,Y)的分布

$$F_{max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$$
$$F_{min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

随机变量的数学特征

数学期望

离散型随机变量

设离散型随机变量X的分布律为：P(X=x_i)=p_i i=1,=2...,若级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$绝对收敛,则称级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$的值为随机变量X的数学期望，记为E(X)即

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$$

连续性随机变量数学期望

设连续型随机变量X的概率为$f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛（即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)<\infty$则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$的值为随机变量X的数学期望，记为E(x)，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

一元随机变量函数的数学期望

设Y是随机变量X的实函数：Y=g(X)
X是离散型随机变量：

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

X是连续型随机变量:

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

二元随机变量函数的数学期望

设Z是随机变量X,Y的实函数：Z=h(X,Y)
(X,Y)是离散型随机变量:

$$E(Z) = E[h(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_i)p_{ij}$$

X是连续型随机变量:

$$E(Z) = E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

数学期望的特性

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

方差

设X是一个随机变量，若$E\{[X - E(X)]^2c\}$,存在，则称其为X的方差，记为Var(X)或D(X)即

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

离散型随机变量

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(X)]^2 p_i$$

连续型随机变量

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)]^2 f(x)dx$$

此外

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

方差的性质

$$Var(c)=0$$
$$Var(cX)=c^2Var(X)$$
$$X，Y随机变量：Vae(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2E[X-E(X)][Y-E(Y$$
$$X，Y独立：Var(aX+bY+c)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$$
$$Var(X)\leq E((X-c)^2)$$
$$Var(X)=0\Leftrightarrow P(X=c)=1且E(X)=c$$

常见分布均值与方差

分布类型	分布律\密度函数	数学期望	方差
0-1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^k$	p	p(1-p)
二项分布	$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^k$	np	np(1-p)
泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其他\end{cases}$	$\frac{(a+b)}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

协方差和相关系数

协方差

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E[X-E(X)][Y-E(Y)]\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$

相关系数

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

协方差性质

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= Cov(Y,X) \\
Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) \\
Cov(aX,bY) &= abCov(X,Y) \\
Cov(X+Y,Z) &= Cov(X,Z)+cov(Y,Z) \\
Cov(X,X) &= Var(X) \\
Cov(aX+bY,cX+dY) &= acVar(X)+bdVar(Y)+(ad+bc)Cov(X,Y) \\
Var(aX+bY) &= a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)
\end{aligned}
$$

独立

$$
\begin{gathered}
Var(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n) \\
Cov(X,Y)\ \text{=0} \quad \rho_{XY}=0 \\
E(XY)=E(X)E(Y)
\end{gathered}
$$

相关系数性质

用来表示特征X，Y之间线性关系紧密程度,$|\rho_{XY}|$越大，线性关系越好

正相关：$\rho_{XY}>0$

负相关：$\rho_{XY}<0$

$$
\begin{gathered}
|\rho_{XY}| \le 1 \\
|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow \text{存在}a\text{，}b\text{使得}P(Y=a+bX)=1
\end{gathered}
$$

$\rho_{XY}=0$等价条件：

$$
\begin{gathered}
Cov(X,Y)=0 \\
E(XY)=E(X)E(Y) \\
Var(X \pm Y)=Var(X)+Var(Y)
\end{gathered}
$$

独立→不相关

相关→不独立

多元随机变量的数学特征

称$E(X)=(E(x_1),E(x_1),\cdots E(X_n))$n元随机变量X的数学期望

协方差矩阵

n维随机变量：

$$Cov(X)=\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

二元正态分布

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, a=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},协方差矩阵B=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$
$$二元正态分布X\sim N(a,B)$$
$$多元同理$$

大数定律和中心极限定理

随机变量序列依概率收敛

定义

设 Y_n为一个随机变量序列，c为常数，若对于 $\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty} P\{|Y_n-c|\geq\varepsilon\}=0$或 $\lim_{n\to+\infty} P\{|Y_n-c|<\varepsilon\}$=1成立，则称随机变量 $\{Y_n,n\geq1\}$依概率收敛于c，记为

$$Y_n\xrightarrow{P}c,\ 当n\to+\infty$$

性质

$$当n\to+\infty,X_n\xrightarrow{P}a,Y_n\xrightarrow{P}b,函数g(x,y)在(a,b)连续$$
$$g(X_n,Y_n)\xrightarrow{P}g(a,b)$$

两个不等式

马尔可夫不等式

$$P\{|Y|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E(|Y|^k)}{\varepsilon^k}$$

等价形式:

$$P\{|Y|<\varepsilon\}\geq1-\frac{E(|Y|^k)}{\varepsilon^k}$$

切比雪夫不等式

记$E(X)=\mu,Var(X)=\sigma^2$,对于任意 $\varepsilon>0$有

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

等价形式：

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

局限：精度有限，只是粗略估计

大数定律

定义

设Y_n为一个随机变量序列，若存在常数序列$\{c_n, n \geq 1\}$，使得对 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_i - c_n| \geq \varepsilon\} = 0 或 \lim_{n \to +\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

即

$$n \to +\infty，\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{P} c_n$$

贝努里大数定律

设 n_A为n重贝努里实验中事件A发生的次数，p为A发生的概率，对于 $\forall \varepsilon > 0$有：

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$$

辛钦大数定律

设 $\{X_i, i \geq 1\}$为独立同分布的随机变量序列，且其期望存在,记为μ,对任意 $\forall \varepsilon > 0$ 有：

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i - \mu| \geq \varepsilon\} = 0$$

即：

$$n \to +\infty，\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$$

推论：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i)\xrightarrow{P}E(h(X_1))$$

独立同分布的中心极限定理

设随机变量 X_n相互独立同分布，$E(X_i)=\mu,Var(X_i)=\sigma^2,\forall x\in R$ 有：

$$\lim_{n\to+\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}\le x\}=\lim_{n\to+\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\}$$

$$Y_n\overset{\Delta}{=}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)}},\lim_{n\to+\infty}P(Y_n\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{近似}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$$

德莫弗-拉普拉斯定理

设 n_A为n重贝努里实验A发生次数， $P(A)=p$， 则

$$\lim_{n\to+\infty}P\{\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

即：

$$n_A\overset{近似}{\sim}N(np,npq)$$

数理统计基础

随机样本和统计量

基础概念

1. 总体：研究对象的全体。
2. 个体：组成总体的每个元素。
3. 抽样：从总体X中抽取有限个个体
4. 随机样本：随机抽取的n个个体的集合
    1. 简单随机样本：
        1. 代表性：同分布
        2. 独立性：相互独立

常用统计量

统计量：不含任何未知参数的样本的函数

1. 样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ $E(\overline{X})=E(X)$ $Var(\overline{X})=\frac{Var(X)}{n}$
2. 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ $E(S^2)=Var(X)$
3. 样本k阶（原点）矩：$A_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i^k$
4. 样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

样本于总体的各阶矩对比表

特征数据	样本（随机变量）	总体
均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$	$E(X)=\sum\limits_{+\infty}^{i=1}x_ip_i$
方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$Var(X)=E[(X-E(X))^2]$
均方差/标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$\sigma=\sqrt{Var(X)}$
k阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$	$\mu_k=E(X^k)$
k阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$	$v_k=E[(X-E(X))^k]$

标准正态分布的上侧α分位数

设 $X\sim N\ (0,1)$若 z_α满足条件 $PX>z_\alpha=\alpha,0<\alpha<1$则称为标准正态分布$z_\alpha$的上侧$\alpha$位数 $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

常用的分布

χ^2分布

定义

随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，而且 $X_i\sim N(0,1)$则 $\sum_{n}^{i=1}X_i^2$服从自由度为n的χ^2 分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$ 自由度指独立的标准正态分布的随机变量个数.
自由度：独立标准正态分布的随机变量个数

性质

可加性

设 $Y_1\sim\chi^2(n_1),Y_2\sim\chi^2(n_2)$,且 Y_1,Y_2相互独立，则有 $Y_1+Y_2\sim\chi^2(n_1,n_2)$

数学期望和方差

设 $Y \sim \chi^2(n)$，则有

$$E(Y) = n, Var(Y) = 2n$$

上侧 α分位数

对于给定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$ 称满足条件$\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(x)dx = \alpha$的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上$\alpha$分位数

t-分布

定义

设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$并且X，Y相互独立，则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度n的t分布，记为 $t \sim t(n)$

性质

$$
\begin{aligned}
&(1) \lim_{n \to \infty} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi(t) \\
&(2) 若 X \sim t(n), E(X) = 0, Var(X) = \frac{n}{n-2} \\
&(3) t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n) \\
&(4) 当 n > 45 时，t_\alpha(n) \approx z_\alpha \\
&\quad 若 n 充分大时，X \sim t(n) 也可以认为：X \overset{近似}{\sim} N(0,1)
\end{aligned}
$$

F分布

定义

定义：设 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 且X,Y独立，则称随机变量 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度 (n_1, n_2) 的F分布，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$

上α分位数

对于给定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$ 称满足条件$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x)dx = \alpha$的点$F_\alpha(n_1, n_2)$为$F(n_1, n_2)$分布的上$\alpha$分位数

性质

$$
\begin{gathered}
若F \sim F(n_1,n_2),则\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1) \\
若t \sim t(n),则t^2 \sim F(1,n) \\
(t_{\alpha/2}(n))^2 = F_\alpha(1,n) \\
F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}
\end{gathered}
$$

正态总体下的抽样分布

定理1

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差，则有：

$$\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),也即\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

定理2

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差则有

$$(1)\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (2)\bar{X}和S^2相互独立$$

定理3

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

定理4

设 $(X_1,\cdots X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 并且相互独立,其样本方差分别为S_1^2,S_2^2则:

$$(1) F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$(2) \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$(3) 当\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2时，\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

参数估计

参数的点估计

定义

点估计的问题就是根据样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对每一个总体中的未知参数 $\theta_i(i=1,2,\cdots,k)$，构造一个统计量 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$,作为参数 θ_i的估计，称为θ_i的估计量，$\hat{\theta}_i(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$称为$\theta_i$的估计值

矩估计法

设总体X的分布函数为$F(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$,假定总体X的i阶原点矩 $u_i=E(X^i)$存在且含有未知数,则:

$$\begin{cases}\mu_1=E(X^1)=g_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\\ \mu_2=E(X^2)=g_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mu_m=E(X^m)=g_m(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=h_1(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_m)\\ \theta_2=h_2(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_m)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \theta_m=h_m(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_m)\end{cases}$$

$$\because A_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i\xrightarrow{P}\mu_i=E(X^i),用A_i作为\mu_i的估计，即得：$$

$$\therefore(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)的矩估计量为\begin{cases}\hat{\theta_1}=h_1(A_1,A_2,\cdots A_m)\\ \hat{\theta_2}=h_2(A_1,A_2,\cdots A_m)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta_m}=h_m(A_1,A_2,\cdots A_m)\end{cases}$$

极大似然估计法

一般地，设离散型总体 $X\sim P(X=x)=p(x;\theta)$,从总体X中取得样本 $X_1,\cdots,X_n$，其观察值为 $x_1,\cdots,x_n$,则事件 $\{X_1,\cdots,X_n=x_n\}$发生的概率为

$L(\theta)=P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=p(x_1;\theta)\cdots p(x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)$

称 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值，

相应的统计量$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的最大似然估计量

连续型：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

常用分布中参数的矩估计和最大似然估计

分布名称	分布	未知参数	矩估计量	极大似然估计量
0-1分布	$X\sim B(1,p)$	p	$\overline{X}$	$\overline{X}$
二项分布	$X\sim B(m,p)$	p	$\frac{\overline{X}}{m}$	$\frac{\overline{X}}{m}$
泊松分布	$X\sim \pi(\lambda)$	λ	$\overline{X}$	$\overline{X}$
均匀分布	$X\sim U[a,b]$	a,b	$\begin{cases}a=\overline{X}-\sqrt{3B_2}\\ \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3B_2}\end{cases}$	$\begin{cases}a=min(X_1,\cdots,X_n)\\ \hat{b}=max(X_1,\cdots X_n)\end{cases}$
指数分布	$X\sim E(\lambda)$	λ	$\frac{1}{\overline{X}}$	$\frac{1}{\overline{X}}$
正态分布	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ,σ^2	$\begin{cases}\mu=\hat{X}\\ \sigma^2=b_2\end{cases}$	$\begin{cases}\mu=\overline{X}\\ \sigma^2=B_2\end{cases}$

估计量的评价准则

无偏性

若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足 $E(\hat{\theta})=\theta$则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量。

若$E(\hat{\theta})\neq\theta$那么$E(\theta)-\theta$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差，

若 $\lim_{n\to\infty}E(\theta)=\theta$则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐进无偏估计量

纠偏方法

如果$E(\hat{\theta})=a\theta+b,\theta\in\Theta$，其中a，b是常数，且 $a\neq 0$，则$\frac{1}{a}(\hat{\theta}-b)$是$\theta$的无偏估计

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，且$Var(\hat{\theta})>0$则$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计

有效性

若$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，如果$Var(\hat{\theta}_1)\leq Var(\hat{\theta}_2)$对一切$\theta\in\Theta$成立，且至少有一个$\theta\in\Theta$使不等号成立则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

均方误差

设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计，方差存在，则称$E(\hat{\theta}-\theta)^2$是估计量的均方误差，记为$Mse(\hat{\theta})$即

$Mse(\hat{\theta})=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则有$Mse(\hat{\theta})=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=Var(\hat{\theta})$

相合性

设$\theta(X_1,\cdots,X_n)$为参数θ的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时θ_n依概率收敛于θ，即$\forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\theta_n-\theta|<\varepsilon\}=1$则称$\theta_n$为$\theta$的相合估计量或一致估计量

区间估计

置信区间 置信度

定义：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有未知参数$\theta,(X_1,\cdots,X_n)$是X的一个样本，对给定的值$\alpha(0<\alpha<1)$若有统计量$\theta_1=\theta(X_1,\cdots,X_n),\theta_2=(X_1,\cdots,X_n)$,使得
$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}\geq 1-\alpha\ \ \forall\theta\in\Theta$则称随机区间$(\theta_1,\theta_2)$为$\theta$的双侧置信区间
称$1-\alpha$为置信度;
称θ_1为双侧置信下限;
称θ_2为双侧置信上限;

置信区间长度 精确度

称置信区间$[\hat{\theta_1},\hat{\theta_2}]$的平均长度$E(\hat{\theta_2}-\hat{\theta_1})$为区间的精确度，并称二分之一区间的平均长度为置信区间的误差限
说明：在给定样本容量下，置信区间长度越长，置信度越高，精确度越低。所以，置信度和精确度是相互制约的。

奈曼原则

在置信度达到一定前提下，取精确度尽可能高的区间。

同等置信区间

单侧置信限

$P\{\theta_1(X_1,\cdots,X_n<\theta\}\geq 1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$则称$\theta_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的单侧置信下限。随机区间$(\theta_1,+\infty)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。
$P\{\theta<\theta_2(X_1,\cdots,X_n\}\geq 1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$则称$\theta_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的单侧置信上限。随机区间$(-\infty,\theta_2)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

单侧置信限和双侧置信区间的关系

设$\theta_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1$单侧置信下限，$\theta_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，则$(\theta_1,\theta_2)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间

枢轴量法

求未知参数θ的置信区间方法

1. 根据的样本构造函数（枢轴量）$G(X_1,...,X_n;\theta)$要求
    1. 含待估参数θ

    2. 含θ的点估计
    3. 含总体已知的性和西
    4. 不含除θ外的其他未知参数
    5. 分布已知
2. 奈曼原则。对于给定的置信度$1-\alpha$，确定尽可能大的a，尽可能小的b，使得$P\{a<G(\theta)<b\}\geq 1-\alpha$
3. 等价变换。若能从$a<G(\theta)<b$得到等价的不等式$\theta_1(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$那么$(\theta_1,\theta_2)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间。

正态总体下常用的枢轴量

单总体$N(\mu,\sigma^2)$常用的枢轴量

1. σ^2已知，求μ的区间估计:$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
2. σ^2未知，求μ的区间估计:$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
3. μ未知，求σ^2的区间估计$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$
4. μ已知，求σ^2的区间估计:$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

双总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$常用枢轴量

1. σ_1^2,σ_2^2已知，求$\mu_1-\mu_2$的区间估计:$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，求$\mu_1-\mu_2$的区间估计$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$
3. μ_1,μ_2未知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计:$\frac{S_1^2}{S_2^2}/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$
4. μ_1,μ_2已知，求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的去区间估计$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_i)^2/n_1}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_i)^2/n_2}\bigg/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2)$

正态总体均值、方差的$1-\alpha$的置信区间

正态总体均值、方差的1-α的置信区间　P201

	待估参数	其他参数	枢轴量G 的分布	双侧置信区间	单侧置信区间
一个正态总体	μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu} = \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu} = \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $=\sigma^2$未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

假设检验

假设检验的基本思想

检验统计、拒绝域

用于判断原假设H_0是否成立的统计量$T=T(X_1,\cdots,X_n)$称为对应假设问题的检验统计量，对应于拒绝原假设H_0时，样本值的范围称为拒绝域，记为W，其补集$\overline{W}$称为接受域
$W=\{(X_1,\cdots,X_n):|\overline{X}-\mu_0|\geq C\}$$C$为临界值

两类错误

- 第一类错误：原假设H_0成立，作出拒绝原假设的决策
  $P\{\text{第一类错误}\}=P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}\overset{\text{记为}}{=}P_{H_0\text{为真}}\{\text{拒绝}H_0\}$
- 第二类错误：原假设H_0不成立，做出接受原假设的决策
  $P\{\text{第二类错误}\}=P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\}\overset{\text{记为}}{=}P_{H_0\text{为假}}\{\text{接受}H_0\}$

奈曼-皮尔逊原则

控制犯第一类错误的概率不超过某个较小的常数α,再寻找检验，使得犯第二类错误的概率尽可能小，其中的常数α称为显著水平

假设类型

原假设（零假设）H_0,备择假设（对立假设）H_1关于总体参数θ的假设有三种:

$$
\begin{gathered}
H_0:\theta=\theta_0,H_1:\theta\neq\theta_0\ (\text{双边检验})\\
H_0:\theta\geq\theta_0,H_1:\theta<\theta_0\ (\text{左边检验})\\
H_0:\theta\leq\theta_0,H_1:\theta>\theta_0\ (\text{右边检验})
\end{gathered}
$$

拒绝域

- 双边假设问题:

$$
|Z|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}
$$

- 左边假设问题

$$
Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -z_\alpha
$$

- 右边假设问题

$$
Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_\alpha
$$

• $P_$值

定义

当原假设成立时，检验统计量比观察到结果更为极端的数值的概率称为$P_$值

统计显著性

一般而言，$P_$值于显著性水平作比较,
若$P_\leq\alpha$，则拒绝原假设，称在水平α下统计显著
若$P_\geq\alpha$，则接受原假设，称在水平α下统计不显著

正态总体常用的检验统计量

单个总体$N(\mu,\sigma^2)$

1. σ^2已知，求μ的区间估计:$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
2. σ^2未知，求μ的区间估计:$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
3. μ未知，求σ^2的区间估计$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

4. μ已知，求σ^2的区间估计:$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

双总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$

1. σ_1^2,σ_2^2已知，求$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$的区间估计:$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，求$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$的区间估计$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$
3. μ_1,μ_2未知，求$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$的区间估计:$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$
4. μ_1,μ_2已知，求$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$的区间估计$F=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_i)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_i)^2/n_2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1,n_2)$

单个正态总体参数的假设检验

X_1，$X_2,\cdots,X_n$来自$N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$和σ^2分别为样本均值和方差，显著性水平为α

单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

·σ^2已知的双边检验

- “Z检验法”
  $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$
  取检验统计量 $Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{在H_0为真时}{\sim} N(0,1)$
  H_0的拒绝域为
  $|Z|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}$
  参照拒绝域
  记检验统计量Z的取值$z_0=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  $P_-=P_{H_0}\{|Z|\geq|z_0|\}=2P\{Z\geq|z_0|\}=2(1-\Phi(|z_0|)\ )\}$
  判断：当$P_-\leq\alpha$时，拒绝原假设，否则，接受原假设

·σ^2未知的双边检验

- “t检验法”
  $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$
  取检验统计量：$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{在H_0为真时}{\sim} t(n-1)$
  H_0的拒绝域:
  $|t|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
  $P_-=P_{H_0}(|t|\geq|t_0|)=p_{H_0}(\{t\geq|t_0|\}\bigcup\{t\leq-|t_0|\})=2P(t\geq|t_0|)\overset{1}{=}2P(t(n-1)\geq|t_0|)$
  当$P_-\leq\alpha$时，拒绝原假设，否则，接受原假设

$\cdot\sigma^2$未知的右边检验

$H_0:\mu\le\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$
取检验统计量：$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$
H_0的拒绝域为：
$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge t_\alpha(n-1)$
$P_-=\sup\limits_{\mu\le\mu_0}\{t\ge t_0\}=P\{t(n-1)\ge t_0\}$

$\cdot\sigma^2$未知的左边检验

$H_0:\mu\ge\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$
取检验统计量：$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$
H_0的拒绝域为：
$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_\alpha(n-1)$
$P_-=\sup\limits_{\mu\ge\mu_0}\{t\le t_0\}=P\{t(n-1)\le t_0\}$

成对数据的t检验

成对样本设为 $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$
差值为$D_i=X_i-Y_i$看成来自正态总体$N(\mu_d,\sigma_d)$的样本
考虑假设问题
$H_0:\mu_d=0,H_1:\mu_d\neq0$转化称的那个正态总体均值的假设检验
记 $\overline{D}=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i,S_d^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2$
则检验统计量为 $t=\frac{\overline{D}}{S_d/\sqrt{n}}$
检验的拒绝域为 $|t|\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
$P_-=P_{H_0}\{|t|\ge|t_0|\}=2P\{t(n-1)\ge|t_0|\}$

单个正态总体方差的假设检验

双边假设

- χ^2检验法
  $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$
  取检验统计量：
  $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{为真}}{\sim}\chi^2(n-1)$
  H_0的拒绝域为：
  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)or\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
  记 $\chi_0^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2$,分布不对成的双边检验P值：
  $P_-=2min\left\{P[\chi^2(n-1)\le\chi_0^2],P[\chi^2(n-1)\ge\chi_0^2]\right\}$
  即，$p_0=P\{\chi^2(n-1)\le\chi_0^2\}$,则 $P_-=2min\{p_0,1-p_0\}$

左边假设

$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2,H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$
取检验统计量
$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0}{\sim}\chi^2(n-1)$
H_0的拒绝域为：
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$P_-=P(\chi^2(n-1)\leq\chi_0^2)=P(\chi^2(n-1)\leq\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2})$

右边假设

$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2,H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
取检验统计量
$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0}{\sim}\chi^2(n-1)$
H_0的拒绝域为：
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{\alpha}(n-1)$
$P_-=P(\chi^2(n-1)\geq\chi_0^2)=P(\chi^2(n-1)\geq\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2})$

两个正态总体参数的假设检验

比较两个正态总体均值的假设检验

当σ_1^2和σ_2^2已知时

$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$
取检验统计量：
$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\overset{H_0为真}{\sim}N(0,1)$
则检验拒绝域为：
$|Z|=\frac{|\overline{X}-\overline{Y}-\delta|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq z_{\alpha/2}$
$P_-=P_{H_0}\{|Z|\geq|z_0|\}=2P_{H_0}\{Z\geq|z_0|\}=2(1-\Phi(|z_0|)\ )$

当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$但未知时

双边假设

$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$
取检验统计量：
$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\overset{H_0为真}{\sim}t(n_1+n_2-2)$
H_0的拒绝域为：
$|t|=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

取$t_0 = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

$P_- = P\{|t| \geq |t_0|\} = 2P\{t(n_1+n_2-2) \geq |t_0|\}$

右边假设

$H_0: \mu_1-\mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1-\mu_2 > \delta$

取检验统计量

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

当$\mu_1-\mu_2=\delta$时

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

H_0的拒绝域为:

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

左边假设

$H_0: \mu_1-\mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1-\mu_2 < \delta$

取检验统计量:

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

当$\mu_1-\mu_2=\delta$时

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

H_0的拒绝域为:

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

当$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知时

$H_0 = \mu_1-\mu_2 = \delta, H_1: \mu_1-\mu_2 \neq \delta$

取检验统计量:

$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$

样本容量充分大时

$t \sim N(0,1)$

检验的拒绝域为:

$|t| = \frac{|\overline{X}-\overline{Y}-\delta|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \geq z_{\alpha/2}$

$P_- = P_{H_0}\{|t| \geq |t_0|\} = 2P\{Z \geq |t_0|\}$，其中$Z \sim N(0,1), t_0 = \frac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \geq z_{\alpha/2}$

小样本

$t \sim t(k)$
其中：
$k=\min(n_1-1,n_2-1)$或$k=\frac{(S^2/n_1+S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$
拒绝域：
$|t| \geq t_{\alpha/2}$
$P_{-}=P_{H_0}\{|t| \geq |t_0|\}=2P\{t(k) \geq |t_0|\}$

比较两个正态总体方差的假设检验

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \overset{H_0为真}{=} \frac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0为真}{\sim} F(n_1-1,n_2-1)$

双边假设

- "F检验法"
  $H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
  取检验统计量
  $F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0为真}{\sim} F(n_1-1,n_2-1)$
  H_0的拒绝域为
  $\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
  $P_{-}=2min\left\{P[F(n_1-1,n_2-1 \leq f_0], P[F(n_1-1,n_2-1) \geq f_0]\right\}$
  即，$p_0=P\{F2(n_1-1,n_2-1) \leq f_0\}$,则 $P_{-}=2min\{p_0,1-p_0\}$

左边假设

$H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
取检验统计量：$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$
H_0的拒绝域：
$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$P_{-}=P(F(n_1-1,n_2-1) \leq f_0)$

右边假设

$H_0:\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$
取检验统计量：$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$
H_0的拒绝域：
$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$P_{-}=P(F(n_1-1,n_2-1) \geq f_0)$

正态总结

正态总体中参数的双侧置信区间估计与双边假设检验比较

	待估参数	原假设 H_0	枢轴量 G	检验统计量 Ts	参考分布	置信区间 $Q_{1-\alpha/2}<G<Q_{\alpha/2}$	拒绝域 $Ts\le Q_{1-\alpha/2}$ 或 $Ts\ge Q_{\alpha/2}$
一个正态总体	μ（σ^2已知）	$\mu=\mu_0$（σ^2已知）	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert G\rvert<z_{\alpha/2}$	$\lvert Ts\rvert\ge z_{\alpha/2}$
	μ（σ^2未知）	$\mu=\mu_0$（σ^2未知）	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert G\rvert<t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert Ts\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
	σ^2（μ未知）	$\sigma^2=\sigma_0^2$（μ未知）	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<G<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$	$Ts\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $Ts\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$ $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$	$\mu_1=\mu_2$ $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\lvert G\rvert<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$\lvert Ts\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1-1,n_2-1)$	$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<G<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$	$Ts\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $Ts\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

假设检验与区间估计

若总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,μ未值，σ^2已知，对于样本$X_1,X_2,\dots X_n$,置信度设为$1-\alpha$，则μ的置信区间

$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$

即：$P_\mu\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

对于假设检验问题$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，显著性水平为$\alpha$

H_0的拒绝域为：$\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge z_{\alpha/2}$，即$\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge z_{\alpha/2}=\alpha$

双边置信限于双边假设检验的关系

假设检验问题：$H_0:\theta=\theta_0,H_1:\theta\neq\theta_0$的显著水平$\alpha$的接受域能等价写成$\hat\theta_L<\theta_0<\hat\theta_U$，那么$(\hat\theta_L,\hat\theta_U)$是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

反之，若$(\hat\theta_L,\hat\theta_U)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间，则当$\theta_0\in(\hat\theta_L,\hat\theta_U)$时，在$\alpha$水平下接受双边检验$H_0:\theta=\theta_0,H_1:\theta\neq\theta_0$中的原假设$H_0$，且检验的拒绝域为$\theta_0\le\hat\theta_L$或$\theta_0\ge\hat\theta_U$

拟合优度检验

皮尔逊拟合优度χ^2检验

提出假设

H_0:总体X的分布函数为$F(x)$
H_1:总体X的分布函数不为$F(x)$
注：当H_0中的总体X的分布函数$F(x)$含有未知参数，要先用样本求出参数的极大似然估计，以估计值为参数值。

原理及步骤

1. 从总体取得样本容量为n的样本，将其分成k个两两不相交的子集$A_1,...,A_k$
2. 以$n_i(i=1,...,k)$记样本观察值$x_i,...,x_n$中落在A_i的个数，则在n次试验中A_i发生的频率n_i/n,且有$n_1+\cdots+n_k=n$
3. 当H_0为真时，计算事件A_i发生的概率$p_i=P_{H_0}(A_i), i=1,...,k, np_i$称为理论频数，而$n_i$是实际频数，且有$n_i\sim B(n_i,p_i)$
4. 的拒绝域形式为：$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}(\frac{n_i}{n}-p_i)^2\geq c$

卡方拟合优度定理

当n充分大$n\geq 50$,当H_0为真时,则统计量$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}(\frac{n_i}{n}-p_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{np_i}-n$近似服从$\chi^2(k-1)$分布,因此检验拒绝域为$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(k-1)$
注：当H_0分布函数$F(x)$含有r个未知参数，先用样本求出未知参数的极大似然估计，求出p_i的估计值$\hat{p}_i=\hat{p}_{H_0}(A_i)$，于是检验统计量为$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{np_i}-n\sim\chi^2(k-r-1)$
拒绝域：$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(k-r-1)$
注：χ^2拟合试验使用时要求n要足够大np_i(或$n\hat{p}_i$)不能太小，要求$n\geq 50, np_i$(或$n\hat{p}_i$)≥ 5,否则合并A_i