

## Capítulo 7 – Recursividade

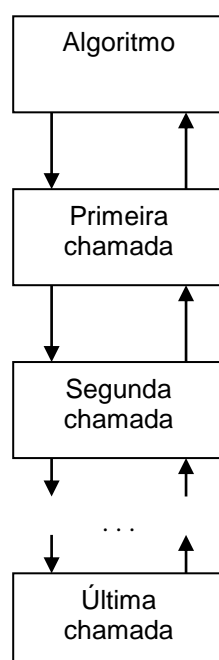
## Introdução

Funções e procedimentos recursivos são aqueles que apresentam como característica poder chamar a si próprios.

Nestes casos, a cada nova chamada do procedimento, ou da função, as anteriores ficam suspensas até que esta última seja resolvida. Quando esta tiver sido, haverá um retorno sucessivo das chamadas suspensas, resolvendo-as uma a uma.

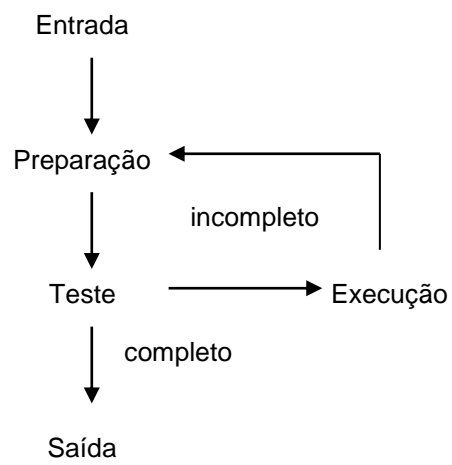
A utilização do conceito de recursividade pode simplificar bastante a elaboração de soluções para determinados tipos de problemas. Entretanto, de forma prática, às vezes, por limitações de espaço em memória, ou tempo, as soluções não recursivas sejam preferidas.

De forma geral, a recursividade pode ser representada como uma execução em profundidade.

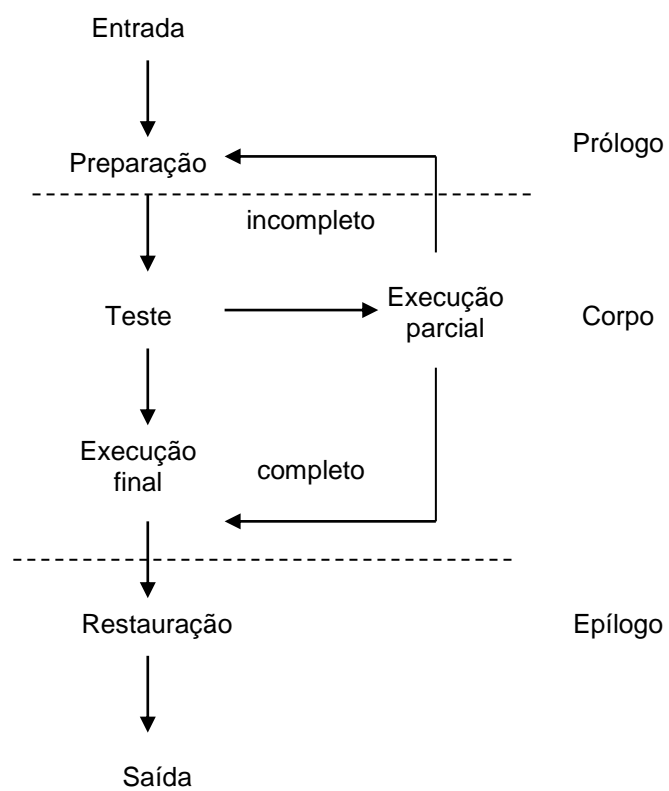


Os esquemas abaixo mostram as diferenças entre o funcionamento entre o emprego de iteração e de recursão.

Iteração :



Recursão :



Exemplo 1 :

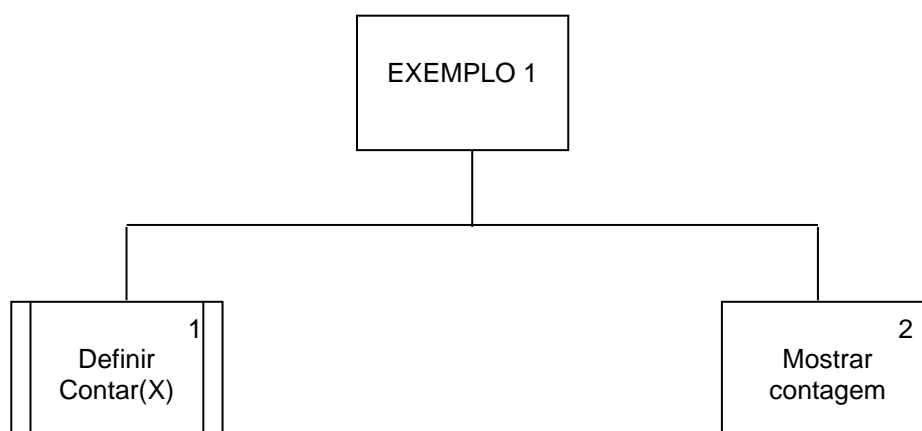
Fazer um programa com um procedimento para contar recursivamente de 1 até 10.

- Análise de dados:

- Dados do procedimento:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor no intervalo [1:10]

Diagrama funcional:



Algoritmo, com procedimento:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 1	v.1
Ação	Bloco
! definir procedimento CONTAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! mostrar contagem de 1 até 10	2

Segunda versão, refinar o segundo bloco.

Exemplo 1	v.2
Ação	Bloco
! definir procedimento CONTAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! mostrar contagem de 1 até 10	2
CONTAR ( 1 ); ! primeira chamada	

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 1		v.3
Ação		Bloco
! definir procedimento		1
procedimento CONTAR ( inteiro X )		
! verificar se o valor é válido		1,1
! mostrar valor		1.1.1
! passar ao próximo		1.2.1
! parte principal		
! mostrar contagem de 1 até 10		2
CONTAR ( 1 ); ! primeira chamada		

Quarta versão, refinar novamente o primeiro bloco.

Exemplo 1		v.4
Ação		Bloco
! definir procedimento		1
procedimento CONTAR (inteiro X)		
! verificar se o valor é válido		1,1
<div> <div>X ≤ 10 ?</div> <div>V</div> </div>	! mostrar valor	1.1.1
	tela ← ( X, " " );	
	! passar ao próximo	1.2.1
	CONTAR ( X + 1 );	
! parte principal		
! mostrar contagem de 1 até 10		2
CONTAR ( 1 ); ! primeira chamada		

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 1.
// Mostrar contagem de 1 ate' 10.
//
// definir funcao com parametro
function CONTAR ( X )
// parametro:
// int X;           // numero de vezes
//
// 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 )
// 1.1.1 mostrar valor
    printf ( "\n %d ", X );
// 1.2.1 passar ao proximo
    CONTAR ( X + 1 );    // proxima chamada
end // fim se
endfunction // CONTAR( )
//
//
// parte principal
//
    clc;           // limpar a area de trabalho
    CONTAR ( 1 ); // primeira chamada
// pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
    halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 1.
// Contar recursivamente de 1 ate 10.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// definir procedimento com parametro
void CONTAR ( int X )
{
    // 1.1 verificar se o valor e' valido
    if ( X <= 10 )
    {
        // 1.1.1 mostrar valor
        printf ( "%d%s", X, " " );
        // 1.2.1 passar ao proximo
        CONTAR ( X + 1 );
    }
}
// fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. mostrar contagem de 1ate' 10
    CONTAR ( 1 );
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getch ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Parâmetro :	I	tela	Observação
Linha :			
#5	1		primeira chamada
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	2	1	segunda chamada
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	3	2	terceira chamada
#3	3		
...			
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	10	9	décima chamada
#3	$X \leq 10 ? V$		
#1	11	10	última chamada
#2	$X \leq 10 ? F$		
#3			retorno da última
#4			retorno da penúltima
#4			retorno à parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 1.
// Contar recursivamente de 1 ate 10.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//
// definir procedimento com parametro
void CONTAR ( int X )
{
    // 1.1 verificar se o valor e' valido
    if ( X <= 10 )
    {
        // 1.1.1 mostrar valor
        cout << X << " ";
        // 1.2.1 passar ao proximo
        CONTAR ( X + 1 );
    }
}
// fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. mostrar contagem de 1ate' 10
    CONTAR ( 1 );
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 1
 * Contar recursivamente de 1 ate' 10.
 */
using System;

class Exemplo_1
{
    // definir procedimento com parametro
    public static void CONTAR ( int X )
    {
        // 1.1 verificar se o valor e' valido
        if ( X <= 10 )
        {
            // 1.1.1 mostrar valor
            Console.Write ( "" + X + " " );
            // 1.2.1 passar ao proximo
            CONTAR ( X + 1 );    // proxima chamada
        } // fim se
    } // fim do procedimento CONTAR ( )
    //
    // parte principal
    //
    public static void Main ( )
    {
        // 2. mostrar contagem de 1 ate' 10
        CONTAR ( 1 );          // primeira chamada
        // pausa para terminar
        Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
        Console.ReadLine ( );
    } // end Main ( )
} // fim Exemplo_1 class

```



Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 1
 * Contar recursivamente de 1 ate' 10.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_1
{
// definir procedimento com parametro
public static void CONTAR ( int X )
{
// 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 )
{
// 1.1.1 mostrar valor
System.out.println ( "" + X + " " );
// 1.2.1 passar ao proximo
CONTAR ( X + 1 ); // proxima chamada
} // fim se
} // fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. mostrar contagem de 1 ate' 10
CONTAR ( 1 ); // primeira chamada
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_1 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 1.
# Mostrar contagem de 1 ate' 10.
#
# definir funcao com parametro
def CONTAR ( X ):
# parametro:
# int X; # numero de vezes
#
# 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 ):
# 1.1.1 mostrar valor
    print ( X );
# 1.2.1 passar ao proximo
    CONTAR ( X + 1 ); # proxima chamada
# fim se
# CONTAR( )
#
# parte principal
#
CONTAR ( 1 ); # primeira chamada
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

Exemplo 2 :

Modificar o programa anterior para contar recursivamente de 10 até 1.

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 2		v.1
Ação		Bloco
! definir procedimento CONTAR ( inteiro X )		1
! parte principal		
! mostrar contagem de 10 até 1		2

Primeira versão, com refinamento do segundo bloco.

Exemplo 2		v.2
Ação		Bloco
! definir procedimento CONTAR ( inteiro X )		1
! parte principal		
! mostrar contagem de 10 até 1		2
CONTAR ( 10 ); ! primeira chamada		

Segunda versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 2			v.3
Ação			Bloco
! definir procedimento			1
procedimento CONTAR ( inteiro X )			
! verificar se o valor é válido			1,1
$X \leq 10$ ?	V	! passar ao próximo	1.1.1
		CONTAR ( X + 1 );	
		! mostrar valor	1.2.1
		tela $\leftarrow$ ( X, " " );	
! parte principal			
! mostrar contagem de 10 até 1			2
CONTAR ( 10 ); ! primeira chamada			

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 2.
// Mostrar contagem de 10 ate' 1.
//
// definir funcao com parametro
function CONTAR ( X )
// parametro:
// int X;                      // numero de vezes
//
// 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 )
// 1.1.1 passar ao proximo
    CONTAR ( X + 1 );          // proxima chamada
// 1.2.1 mostrar valor
    printf ( "\n %d ", X );
end // fim se
endfunction // CONTAR( )
//
// parte principal
//
clc;          // limpar a area de trabalho
CONTAR ( 1 ); // primeira chamada
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 2.
// Contar recursivamente de 10 ate' 1.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// definir procedimento com parametro
void CONTAR ( int X )
{
    // 1.1 verificar se o valor e' valido
    if ( X <= 10 )
    {
        // 1.1.1 passar ao proximo
        CONTAR ( X + 1 ); // proxima chamada
        // 1.2.1 mostrar valor
        printf ( "%d%s", X, " " );
    } // fim se
} // fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. mostrar contagem de 10 ate' 1
    CONTAR ( 1 ); // primeira chamada
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Parâmetro :	I	tela	Observação
Linha :			
#5	1		primeira chamada
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	2		segunda chamada
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	3		terceira chamada
...			
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	10		décima chamada
#1	$X \leq 10 ? V$		
#2	11		última chamada
#1	$X \leq 10 ? F$		
#4			retorno da última
#3		10	
#4			retorno da penúltima
#3		9	
#4			retorno da antepenúltima
...			
#3		2	
#4			retorno da segunda
#3		1	
#4			retorno à parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 2.
// Contar recursivamente de 10 ate' 1.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream.h>
//
// definir procedimento com parametro
void CONTAR ( int X )
{
    // 1.1 verificar se o valor e' valido
    if ( X <= 10 )
    {
        // 1.1.1 passar ao proximo
        CONTAR ( X + 1 );    // proxima chamada
        // 1.2.1 mostrar valor
        cout << X << " ";
    } // fim se
} // fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. mostrar contagem de 10 ate' 1
    CONTAR ( 1 );    // primeira chamada
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 2
 * Contar recursivamente de 10 ate' 1.
 */
using System;

class Exemplo_2
{
    // definir procedimento com parametro
    public static void CONTAR ( int X )
    {
        // 1.1 verificar se o valor e' valido
        if ( X <= 10 )
        {
            // 1.1.1 passar ao proximo
            CONTAR ( X + 1 );    // proxima chamada
            // 1.2.1 mostrar valor
            Console.Write ( "" + X + " " );
        } // fim se
    } // fim do procedimento CONTAR ( )
    //
    // parte principal
    //
    public static void Main ( )
    {
        // 2. mostrar contagem de 1ate' 10
        CONTAR ( 1 );          // primeira chamada
        // pausa para terminar
        Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
        Console.ReadLine ( );
    } // end Main ( )

} // fim Exemplo_2 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 2
 * Contar recursivamente de 10 ate' 1.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_2
{
// definir procedimento com parametro
public static void CONTAR ( int X )
{
// 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 )
{
// 1.1.1 passar ao proximo
CONTAR ( X + 1 ); // proxima chamada
// 1.2.1 mostrar valor
System.out.println ( "" + X + " " );
} // fim se
} // fim do procedimento CONTAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. mostrar contagem de 1 ate' 10
CONTAR ( 1 ); // primeira chamada
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_2 class

```



Programa em Python:

```
# Exemplo 2.
# Mostrar contagem de 10 ate' 1.
#
# definir funcao com parametro
def CONTAR ( X ):
# parametro:
# int X; # numero de vezes
#
# 1.1 verificar se o valor e' valido
if ( X <= 10 ):
# 1.1.1 passar ao proximo
    CONTAR ( X + 1 ); # proxima chamada
# 1.2.1 mostrar valor
    print ( X );
# fim se
# CONTAR( )
#
# parte principal
#
CONTAR ( 1 ); # primeira chamada
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

## Exemplo 3 :

Calcular o quociente inteiro da divisão de X por Y por uma função recursiva.

## Análise do problema:

O quociente inteiro de um número (X) por outro (Y) pode ser calculado como uma contagem de quantas vezes é possível subtrair o segundo valor do primeiro.

## Exemplo:

$X = 5$  e  $Y = 2$

$X > Y ? V \Rightarrow Q = 1$

$X = X - Y = 5 - 2 = 3$

$X > Y ? V \Rightarrow Q = 1 + 1 = 2$

$X = X - Y = 3 - 2 = 1$

$X > Y ? F \Rightarrow Q = 2$

(quociente)

## - Análise de dados:

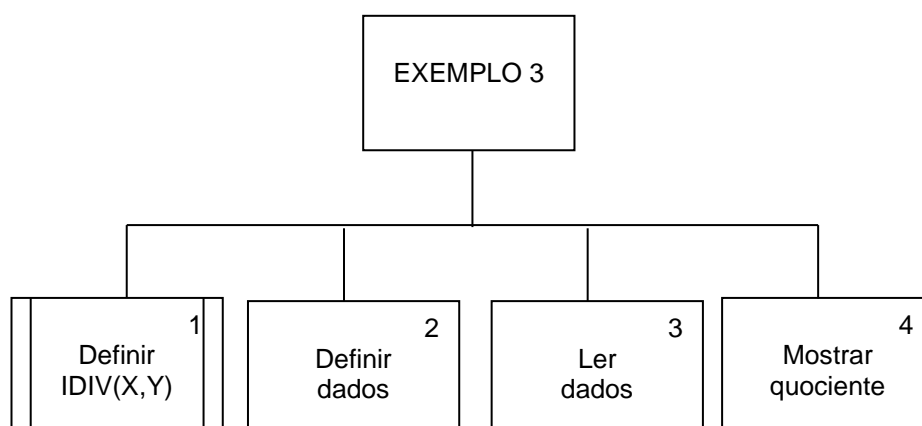
## - Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor
Q	inteiro		zero, se não puder dividir

## - Dados da parte principal:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor

## Diagrama funcional:



Algoritmo, com procedimento:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 3	v.1
Ação	Bloco
! definir função IDIV ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o quociente	4

Segunda versão, com refinamento do segundo, terceiro e quarto blocos.

Exemplo 3	v.2
Ação	Bloco
! definir função IDIV ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o quociente tela ← ( "Quociente inteiro = ", IDIV ( X,Y ) );	4

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 3	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro função IDIV ( inteiro X, inteiro Y )	
! definir dado local inteiro Q; ! quociente	1.1
! verificar se pode subtrair	1.2
X > Y? V ! contar e tentar fazer de novo Q = 1 + IDIV (X-Y, Y);	1.2.1
F Q = 0; ! não pode mais subtrair	1.2.2
retornar ( Q );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o quociente tela ← ( "Quociente inteiro = ", IDIV ( X,Y ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 3.
// Calcular o quociente inteiro de X por Y
//
// definir funcao com parametros
function retorno = IDIV ( X, Y )
// parametros:
// int X;                // dividendo
// int Y;                // divisor
//
// 1.1 definir dado local
    Q = 0;                // quociente
// 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y )
        // 1.2.1 contar e tentar de novo
        Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y ); // proxima chamada
    else
        // 1.2.2 nao pode mais subtrair
        Q = 0;
    end // fim se
// retornar o quociente
    retorno = Q;
endfunction // IDIV ( )
//
//
// parte principal
//
// 2. definir dados locais
    X = 0;                // dividendo
    Y = 0;                // divisor
// 3. ler dados
    X = input ( "\nQual o valor de X ? " );
    Y = input ( "\nQual o valor de Y ? " );
// 4. calcular e mostrar o quociente
    printf ( "\nQuociente inteiro = %d ", IDIV ( X,Y ) );
// pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
    halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 3.
// Calcular o quociente inteiro de X por Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
int IDIV ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int Q; // quociente
    // 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y ) // # 1
    {
        // 1.2.1 contar e tentar de novo
        Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y ); // próxima chamada // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 nao pode mais subtrair
        Q = 0; // # 3
    } // fim se
    return ( Q ); // # 4
} // fim da funcao IDIV ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X, // dividendo
        Y; // divisor
    // 3. ler dados
    printf ( "\nQual o valor de X ? " ); scanf ( "%d", &X ); // #5
    printf ( "\nQual o valor de Y ? " ); scanf ( "%d", &Y ); // #6
    // 4. calcular e mostrar o quociente
    printf ( "\nQuociente inteiro = %d", IDIV ( X,Y ) ); // #7
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Dados :  $X = 4$  e  $Y = 2$

Parâmetros:	X	Y	IDIV	teclado	tela	Observação
Linha :						
#5	-	-		5		
#6	5	-		2		
#7	5	2	-			primeira chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	3	2	$1 + \text{IDIV}(5-2, 2)$			segunda chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	1	2	$1 + \text{IDIV}(3-2, 2)$			terceira chamada
#1	$X \geq Y ? F$					
#3	0	2				
#4			0			primeiro retorno
#3			$1+0$			
#4			1			segundo retorno
#3			$1+1$			
#4			2			terceiro retorno
#6	5	2			2	parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 3.
// Calcular o quociente inteiro de X por Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <iostream>
using namespace std;
//
// definir funcao com parametros
int IDIV ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int Q; // quociente
    // 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y ) // # 1
    {
        // 1.2.1 contar e tentar de novo
        Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y ); // próxima chamada // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 nao pode mais subtrair
        Q = 0; // # 3
    } // fim se
    return ( Q ); // # 4
} // fim da funcao IDIV ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X, // dividendo
        Y; // divisor
    // 3. ler dados
    cout << "\nQual o valor de X ? "; cin >> X; // #5
    cout << "\nQual o valor de Y ? "; cin >> Y; // #6
    // 4. calcular e mostrar o quociente
    cout << "\nQuociente inteiro = " << IDIV ( X,Y ); // #7
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 3
 * Calcular o quociente inteiro de X por Y recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_3
{
    // definir funcao com parametros
    public static int IDIV ( int X, int Y )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int Q;          // quociente
        // 1.2. verificar se pode subtrair
        if ( X >= Y )
        {
            // 1.2.1 contar e tentar de novo
            Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y );      // proxima chamada
        }
        else
        {
            // 1.2.2 nao pode mais subtrair
            Q = 0;
        } // fim se
        return ( Q );
    } // fim da funcao IDIV ( )
}

//
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dados locais
    int X,              // dividendo
        Y;              // divisor
    // 3. ler dados
    Console.Write ( "\nQual o valor de X ?" );
    X = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    Console.Write ( "\nQual o valor de Y ?" );
    Y = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o quociente
    Console.WriteLine ( "\nQuociente inteiro = " + IDIV ( X, Y ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_3 class

```



Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 3
 * Calcular o quociente inteiro de X por Y recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_3
{
// definir funcao com parametros
public static int IDIV ( int X, int Y )
{
// 1.1. definir dado local
int Q;          // quociente
// 1.2. verificar se pode subtrair
if ( X >= Y )
{
// 1.2.1 contar e tentar de novo
Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y );      // proxima chamada
}
else
{
// 1.2.2 nao pode mais subtrair
Q = 0;
} // fim se
return ( Q );
} // fim da funcao IDIV ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dados locais
int X,          // dividendo
    Y;          // divisor
// 3. ler dados
System.out.print ( "\nQual o valor de X ? " );
X = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
System.out.print ( "\nQual o valor de Y ? " );
Y = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o quociente
System.out.println ( "\nQuociente inteiro = " + IDIV ( X, Y ) );
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_3 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 3.
# Calcular o quociente inteiro de X por Y
#
# definir funcao com parametros
def IDIV ( X, Y ):
# parametros:
# int X; # dividendo
# int Y; # divisor
#
# 1.1 definir dado local
    Q = 0; # quociente
# 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y ):
        # 1.2.1 contar e tentar de novo
        Q = 1 + IDIV ( X-Y, Y ); # proxima chamada
    # fim se
# retornar o quociente
    return ( Q );
# IDIV( )
#
# parte principal
#
# 2. definir dados locais
X = 0; # dividendo
Y = 0; # divisor
# 3. ler dados
X = int ( input ( "\nQual o valor de X ? " ) );
Y = int ( input ( "\nQual o valor de Y ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o quociente
print ( "\nQuociente inteiro = ", IDIV ( X, Y ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

## Exemplo 4 :

Calcular o resto inteiro da divisão de X por Y por uma função recursiva.

Análise do problema:

O resto inteiro de um número (X) por outro (Y) pode ser calculado como o que sobra após sucessivas subtrações do segundo valor em relação ao primeiro.

Exemplo:

$X = 5$  e  $Y = 2$

$X > Y ? V \Rightarrow R = 3$

$X = X - Y = 5 - 2 = 3$

$X > Y ? V \Rightarrow R = 1$

$X = X - Y = 3 - 2 = 1$

$X > Y ? F \Rightarrow R = 1$

(resto)

- Análise de dados:

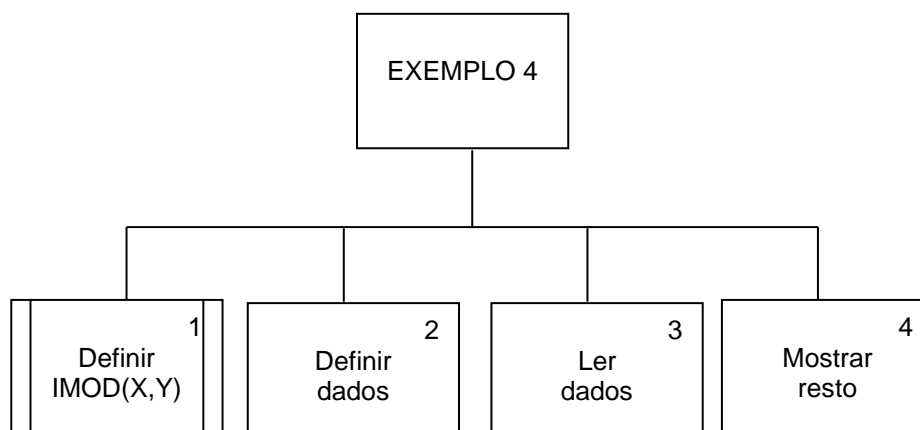
- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor
R	inteiro		resto

- Dados da parte principal:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 4	v.1
Ação	Bloco
! definir função IMOD ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o resto	4

Segunda versão, com refinamento do segundo, terceiro e quarto blocos.

Exemplo 4	v.2
Ação	Bloco
! definir função IMOD ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o resto tela ← ( "Resto inteiro = ", IMOD ( X,Y ) );	4

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 4	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro IMOD (inteiro X, inteiro Y)	
! definir dado local inteiro R; ! resto	1.1
! verificar se pode subtrair	1.2
X >= Y? V ! contar e tentar fazer de novo R = IMOD ( X-Y, Y );	1.2.1
F R = X; ! não pode mais subtrair	1.2.2
retornar ( R );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o resto inteiro tela ← ( "Resto inteiro = ", IMOD ( X,Y ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 4.
// Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente
//
// definir funcao com parametros
function retorno = IMOD ( X, Y )
// parametros:
// int X;                // dividendo
// int Y;                // divisor
//
// 1.1 definir dado local
R = 0;                // resto
// 1.2 verificar se pode subtrair
if ( X >= Y )
// 1.2.1 tentar de novo
R = IMOD ( X-Y, Y ); // proxima chamada
else
// 1.2.2 nao pode mais subtrair
R = X;
end // fim se
// retornar o resto
retorno = R;
endfunction // IMOD( )
//
// parte principal
//
// 2. definir dados locais
X = 0;                // dividendo
Y = 0;                // divisor
// 3. ler dados
clc; // limpar a area de trabalho
X = input ( "\nQual o valor de X ? " );
Y = input ( "\nQual o valor de Y ? " );
// 4. calcular e mostrar o quociente
printf ( "\nResto inteiro = %d ", IMOD ( X, Y ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 4.
// Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// definir funcao com parâmetros
int IMOD ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int R; // resto
    // 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y ) // # 1
    {
        // 1.2.1 tentar de novo
        R = IMOD ( X-Y, Y ); // próxima chamada // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 nao pode mais subtrair
        R = X; // # 3
    } // fim se
    return ( R ); // # 4
} // fim da funcao IMOD ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X, // dividendo
        Y; // divisor
    // 3. ler dados
    printf ( "\nQual o valor de X ? "; scanf ( "%d", &X ); // #5
    printf ( "\nQual o valor de Y ? "; scanf ( "%d", &Y ); // #6
    // 4. calcular e mostrar o resto
    printf ( "\nResto inteiro = %d", IMOD ( X,Y ) ); // #7
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Dados :  $X = 5$  e  $Y = 2$

Parâmetros:	X	Y	IMOD	teclado	tela	Observação
Linha :						
#5	-	-		5		
#6	5	-		2		
#7	5	2	-			primeira chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	5	2	IMOD(5-2,2)			segunda chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	3	2	IMOD(3-2,2)			terceira chamada
#1	$X \geq Y ? F$					
#3	1	2				
#4			1			primeiro retorno
#3	3	2				
#4			1			segundo retorno
#3	5	2				
#4			1			terceiro retorno
#7	5	2	1		1	parte principal

Dados :  $X = 4$  e  $Y = 2$

Parâmetros:	X	Y	IMOD	teclado	tela	Observação
Linha :						
#5	-	-		5		
#6	4	-		2		
#7	4	2	-			primeira chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	4	2	IMOD(4-2,2)			segunda chamada
#1	$X \geq Y ? V$					
#2	2	2	IMOD(2-2,2)			terceira chamada
#1	$X \geq Y ? F$					
#3	0	2				
#4			0			primeiro retorno
#3	2	2				
#4			0			segundo retorno
#3	4	2				
#4			0			terceiro retorno
#7	4	2	0		0	parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 4.
// Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//
// definir funcao com parâmetros
int IMOD ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int R; // resto
    // 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y ) // # 1
    {
        // 1.2.1 tentar de novo
        R = IMOD ( X-Y, Y ); // próxima chamada // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 nao pode mais subtrair
        R = X; // # 3
    } // fim se
    return ( R ); // # 4
} // fim da funcao IMOD ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X, // dividendo
        Y; // divisor
    // 3. ler dados
    cout << "\nQual o valor de X ? "; cin >> X; // #5
    cout << "\nQual o valor de Y ? "; cin >> Y; // #6
    // 4. calcular e mostrar o resto
    cout << "\nResto inteiro = " << IMOD ( X,Y ); // #7
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```



Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 4
 * Calcular o resto inteiro da divisao de X por Y recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_4
{
    // definir funcao com parametros
    public static int IMOD ( int X, int Y )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int R          // resto
        // 1.2. verificar se pode subtrair
        if ( X >= Y )
        {
            // 1.2.1 contar e tentar de novo
            R = IMOD ( X-Y, Y ); // proxima chamada
        }
        else
        {
            // 1.2.2 nao pode mais subtrair
            R = X;
        } // fim se
        return ( R );
    } // fim da funcao IMOD ( )
} //
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dados locais
    int X,          // dividendo
        Y;          // divisor
    // 3. ler dados
    Console.Write ( "\nQual o valor de X ?" );
    X = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    Console.Write ( "\nQual o valor de Y ?" );
    Y = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o resto
    Console.WriteLine ( "\nResto inteiro = " + IMOD ( X, Y ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_4 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 4
 * Calcular o resto inteiro da divisao de X por Y recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_4
{
// definir funcao com parametros
public static int IMOD ( int X, int Y )
{
// 1.1. definir dado local
    int R = 0;           // resto
// 1.2. verificar se pode subtrair
    if ( X >= Y )
    {
// 1.2.1 contar e tentar de novo
        R = IMOD ( X-Y, Y ); // proxima chamada
    }
    else
    {
// 1.2.2 nao pode mais subtrair
        R = X;
    } // fim se
    return ( R );
} // fim da funcao IMOD ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dados locais
    int X,               // dividendo
        Y;               // divisor
// 3. ler dados
    System.out.print ( "\nQual o valor de X ? " );
    X = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
    System.out.print ( "\nQual o valor de Y ? " );
    Y = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o resto
    System.out.println ( "\nResto inteiro = " + IMOD ( X, Y ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_4 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 4.
# Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente
#
# definir funcao com parametros
def IMOD ( X, Y ):
# parametros:
# int X; # dividendo
# int Y; # divisor
#
# 1.1 definir dado local
R = 0;# resto
# 1.2 verificar se pode subtrair
if ( X >= Y ):
# 1.2.1 tentar de novo
R = IMOD ( X-Y, Y );      # proxima chamada
else:
# 1.2.2 nao pode mais subtrair
R = X;
# fim se
# retornar o resto
return ( R );
# IMOD( )
#
# parte principal
#
# 2. definir dados locais
X = 0; # dividendo
Y = 0; # divisor
# 3. ler dados
X = int ( input ( "\nQual o valor de X ? " ) );
Y = int ( input ( "\nQual o valor de Y ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o quociente
print ( "\nResto inteiro = ", IMOD ( X, Y ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

## Exemplo 5 :

Calcular o máximo divisor comum entre X e Y por uma função recursiva.

Análise do problema:

O máximo divisor comum pode ser definido recursivamente como:

$$\text{MDC}(X, Y) = \begin{cases} X, & \text{se } Y = 0 \\ \text{MDC}(Y, X/Y), & \text{se } Y \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo:

X = 12 e Y = 8

Y == 0 ? F => MDC (12, 8) = MDC (8, 12//8) = MDC (8, 4)

Y == 0 ? F => MDC (8, 4) = MDC (4, 8//4) = MDC (4, 0)

Y == 0 ? V => MDC 4

- Análise de dados:

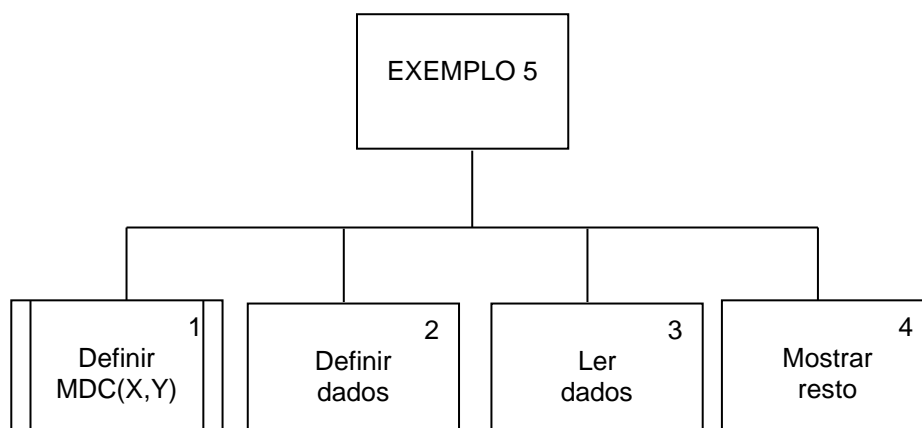
- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor
Resultado	inteiro		máximo divisor comum

- Dados da parte principal:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		dividendo
Y	inteiro		divisor

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 5	v.1
Ação	Bloco
! definir função MDC ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o quociente	4

Segunda versão, com refinamento do segundo, terceiro e quarto blocos.

Exemplo 4	v.2
Ação	Bloco
! definir função MDC ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o M.D.C tela ← ( "M.D.C. = ", MDC ( X,Y ) );	4

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 5	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro MDC (inteiro X, inteiro Y)	
! definir dado local inteiro Resultado;	1.1
! verificar se pode subtrair	1.2
Y==0? V Resultado = X;	1.2.1
F Resultado = MDC (Y, X//Y);	1.2.2
retornar ( Resultado );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro X, ! dividendo Y; ! divisor	2
! ler dados tela ← "Qual o valor de X ? "; X ← teclado; tela ← "Qual o valor de Y ? "; Y ← teclado;	3
! calcular e mostrar o M.D.C tela ← ( "M.D.C. = ", MDC ( X,Y ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 5.

// Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente
//
# definir funcao com parametros
function retorno = MDC ( X, Y )
// parametros:
// int X;    // dividendo
// int Y;    // divisor
//
// 1.1 definir dado local
R = 0;    # resto
// 1.2 verificar se pode subtrair
if ( Y == 0 )                # 1
// 1.2.1 nao pode mais calcular
R = X;                # 2
else
// 1.2.2 inverter os dados e continuar
R = MDC ( Y, mod (X,Y) );    # 3
end # fim se
// retornar o resto
retorno = R;                # 4
endfunction # MDC( )
//
// parte principal
//
// 2. definir dados locais
X = 0;    # dividendo
Y = 0;    # divisor
// 3. ler dados
clc;    # limpar a area de trabalho
X = input ( "\nQual o valor de X ? " );
Y = input ( "\nQual o valor de Y ? " );
// 4. calcular e mostrar o quociente
printf ( "\nResto inteiro = %d ", MDC ( X, Y ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
// halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 5.
// Calcular o maximo divisor comum de X e Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir de funcao com parametros
int MDC ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int Resultado;           // maximo divisor comum
    // 1.2 verificar se pode calcular
    if ( Y == 0 )             // # 1
    {
        // 1.2.1 nao pode mais calcular
        Resultado = X;        // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 inverter os dados e continuar
        Resultado = MDC ( Y, X%Y );    // # 3
    } // fim se
    return ( Resultado );        // # 4
} // fim da funcao MDC ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X,                    // dividendo
        Y;                    // divisor
    // 3. ler dados
    printf ( "\nQual o valor de X ? "; scanf ( "%d", &X );    // #5
    printf ( "\nQual o valor de Y ? "; scanf ( "%d", &Y );    // #6
    // 4. calcular e mostrar o maximo divisor comum
    printf ( "\nM.D.C. = %d", MDC ( X, Y ) );    // #7
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Dados :  $X = 12$  e  $Y = 8$

Parâmetros:	X	Y	MDC	teclado	tela	Observação
Linha :			Resultado			
#5	-	-		12		
#6	12	-		8		
#7	12	8	MDC(12, 8)			primeira chamada
#1		$Y = 0 ? F$				
#3	12	8	MDC(8,12//8)			segunda chamada
#1		$Y = 0 ? F$				
#3	8	4	MDC(4,8//4)			terceira chamada
#1		$Y = 0 ? V$				
#2	4	0	MDC(4, 0)			quarta chamada
#4	4	0	4			primeiro retorno
#3	8	4	4			
#4	8	4	4			segundo retorno
#3	12	8	4			
#4	12	8	4			terceiro retorno
#7	12	8	4		4	parte principal



Programa em C++:

```
// Exemplo 5.
// Calcular o maximo divisor comum de X e Y recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir de funcao com parametros
int MDC ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    int Resultado;           // maximo divisor comum
    // 1.2 verificar se pode calcular
    if ( Y == 0 )             // # 1
    {
        // 1.2.1 nao pode mais calcular
        Resultado = X;        // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 inverter os dados e continuar
        Resultado = MDC ( Y, X%Y );    // # 3
    } // fim se
    return ( Resultado );        // # 4
} // fim da funcao MDC ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dados locais
    int X,                    // dividendo
        Y;                    // divisor
    // 3. ler dados
    cout << "\nQual o valor de X ? "; cin >> X;    // #5
    cout << "\nQual o valor de Y ? "; cin >> Y;    // #6
    // 4. calcular e mostrar o maximo divisor comum
    cout << "\nM.D.C. = " << MDC ( X, Y );        // #7
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/**
 * Exemplo 5
 * Calcular o maximo divisor comum de X por Y recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_5
{
    // definir funcao com parametros
    public static int MDC ( int X, int Y )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int Resultado; // maximo divisor comum
        // 1.2. verificar se pode subtrair
        if ( Y == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao pode mais calcular
            Resultado = X;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 inverter os dados e continuar
            Resultado = MDC ( Y, X%Y );
        } // fim se
        return ( Resultado );
    } // fim da funcao MDC ( )
}

//
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dados locais
    int X,          // dividendo
        Y;          // divisor

    // 3. ler dados
    Console.Write ( "\nQual o valor de X ?" );
    X = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    Console.Write ( "\nQual o valor de Y ?" );
    Y = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );

    // 4. calcular e mostrar o resto
    Console.WriteLine ( "\nM.D.C. = " + MDC ( X, Y ) );

    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_5 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 5
 * Calcular o maximo divisor comum de X por Y recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_5
{
// definir funcao com parametros
public static int MDC ( int X, int Y )
{
// 1.1. definir dado local
    int Resultado;           // maximo divisor comum
// 1.2. verificar se pode subtrair
    if ( Y == 0 )
    {
// 1.2.1 nao pode mais calcular
        Resultado = X;
    }
    else
    {
// 1.2.2 inverter os dados e continuar
        Resultado = MDC ( Y, X%Y );
    } // fim se
    return ( Resultado );
} // fim da funcao MDC ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dados locais
    int X,           // dividendo
        Y;           // divisor
// 3. ler dados
    System.out.print ( "\nQual o valor de X ? " );
    X = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
    System.out.print ( "\nQual o valor de Y ? " );
    Y = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o resto
    System.out.println ( "\nM.D.C. = " + MDC ( X, Y ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_5 class

```

Programa em Python:

# Exemplo 5.

```
# Calcular o resto inteiro de X por Y recursivamente
#
# definir funcao com parametros
def MDC ( X, Y ):
# parametros:
# int X; # dividendo
# int Y; # divisor
#
# 1.1 definir dado local
    R = 0;          # resto
# 1.2 verificar se pode subtrair
    if ( Y == 0 ):      # 1
        # 1.2.1 nao pode mais calcular
        R = X;          # 2
    else:
        # 1.2.2 inverter os dados e continuar
        R = MDC ( Y, X%Y );      # 3
# retornar o resto
    return ( R );      # 4
# MDC( )
#
# parte principal
#
# 2. definir dados locais
X = 0; # dividendo
Y = 0; # divisor
# 3. ler dados
X = int ( input ( "\nQual o valor de X ? " ) );
Y = int ( input ( "\nQual o valor de Y ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o quociente
print ( "\nResto inteiro = ", MDC ( X, Y ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

Exemplo 6 :

Calcular a soma dos 50 primeiros números naturais por uma função recursiva.

$$S(N) = 1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50$$

Análise do problema:

O somatório pode ser definido recursivamente como:

$$S(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 0 \\ X + S(X + 1), & \text{se } X \in [1:50] \end{cases}$$

- Análise de dados:

- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
S	real		somatório

- Avaliação da solução :

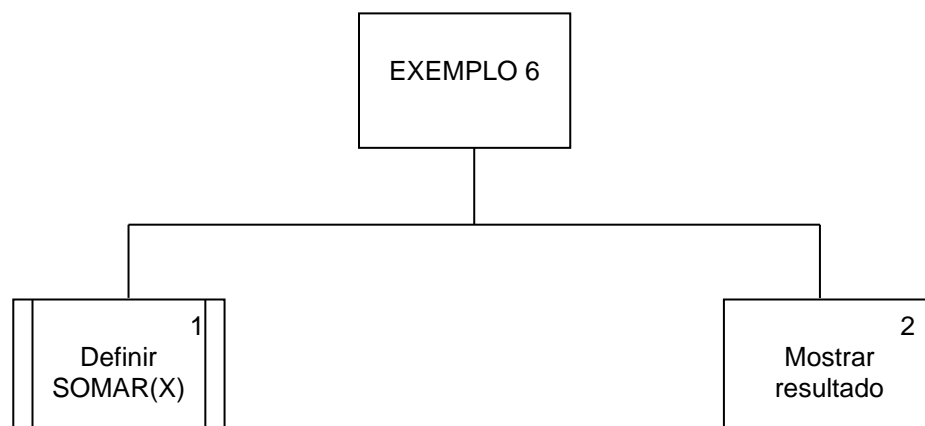
Calculando pela fórmula :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{50} i = \frac{50(50+1)}{2} = 1275$$

Resultado :

$$\text{SOMA} = 1275$$

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 6	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório	2

Segunda versão, com refinamento do segundo bloco.

Exemplo 6	v.2
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "\nS = ", SOMAR ( 1 ) );	2

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 6	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro SOMAR ( inteiro X )	
! definir dado local inteiro S;	1.1
! verificar se X está fora do limite	1.2
X>50? V S = 0;	1.2.1
F S= X + SOMAR( X+1 );	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( 1 ) );	2

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 6.
// Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
//
// definir funcao com parametro
function retorno = SOMAR ( X )
// parametro:
// int X;                // natural
//
// 1.1 definir dado local
    S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X > 50 )
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;            // começar a retornar
    else
        // 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = X + SOMAR ( X+1 );// proxima chamada
    end // fim se
// retornar o resultado
    retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
// parte principal
//
// 2. calcular e mostrar o somatorio
clc; // limpar a area de trabalho
printf ( "\nS(N) = %d ", SOMAR ( 1 ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 6.
// Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X > 50 )                          // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;                            // comecar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = X + SOMAR ( X+1 );            // # 3
    } // fim se
    return ( S );                         // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %d", SOMAR ( 1 ) ); // #5
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```



Execução :

Parâmetros: Linha :	X		SOMAR S	teclado tela	Observação
#5	-				
#6			SOMAR(1)		primeira chamada
#1	1	X>50 ? F	0		
#3			1+SOMAR(2)		segunda chamada
#1	2	X>50 ? F	0		
#3			2+SOMAR(3)		terceira chamada
#1	3	X>50 ? F	0		
#3			3+SOMAR(4)		quarta chamada
			0		
			...		
#1	50	X>50 ? F			
#3			50+SOMAR(51)		última chamada
#1	51	X>50 ? V			
#2			0		
#4			0		primeiro retorno
#3	50		50 + 0		
#4			50		segundo retorno
#3	49		49 + 50		
			...		
#4			(3+4+...+49+50)		penúltimo retorno
#3	2		2+(3+...+50)		
#4			(2+3+...+50)		último retorno
#3	1		1+(2+...+50)		
#4			(1+...+50)		
#5			(1 + ... + 50)		parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 6.
// Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;

//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X > 50 )                          // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;                            // comecar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = X + SOMAR ( X+1 );            // # 3
    } // fim se
    return ( S );                         // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( 1 );    // #5
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 6
 * Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_6
{
    // definir funcao com parametro
    public static int SOMAR ( int X )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int S;          // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X > 50 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar se for termo valido
            S = X + SOMAR ( X+1 );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
} //
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 1 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_6 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 6
 * Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_6
{
// definir funcao com parametro
public static int SOMAR ( int X )
{
// 1.1. definir dado local
    int S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
    if ( X > 50 )
    {
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;
    }
    else
    {
// 1.2.2 somar se for termo valido
        S = X + SOMAR ( X+1 );
    } // fim se
    return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. calcular e mostrar o somatorio
    System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 1 ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_6 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 6.
# Calcular o somatorio dos 50 primeiros numeros naturais, recursivamente.
#
# definir funcao com parametro
def SOMAR ( X ):
# parametro:
# int X; # natural
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X > 50 ):
        # 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;          # comecar a retornar
    else:
        # 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = X + SOMAR ( X+1 );    # proxima chamada
    # fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
# parte principal
#
# 2. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( 1 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

## Exemplo 7 :

Calcular a soma dos 10 primeiros números pares por uma função recursiva.

$$S(N) = 2 + 4 + \dots + 18 + 20$$

Análise do problema:

O somatório pode ser definido recursivamente como:

$$S(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 0 \\ 2 \cdot X + S(X - 1), & \text{se } X \in [1:10] \end{cases}$$

- Análise de dados:

- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
S	real		somatório

- Avaliação da solução :

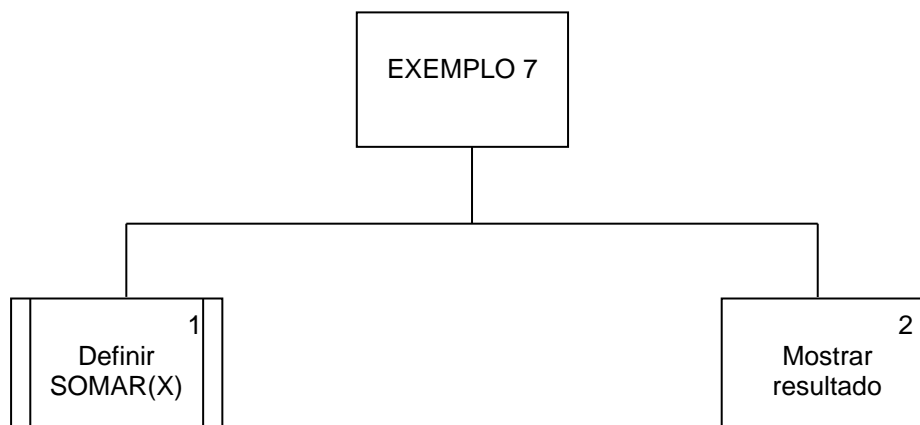
Calculando pela fórmula :

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 \sum_{i=1}^n i = 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} 2i = [10(10+1)] = 110$$

Resultado :

$$\text{SOMA} = 110$$

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 7	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório	2

Segunda versão, com refinamento do segundo bloco.

Exemplo 7	v.2
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "nS = ", SOMAR ( 10 ) );	2

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 7	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro SOMAR ( inteiro X )	
! definir dado local inteiro S;	1.1
! verificar se X está fora do limite	1.2
X==0? V S = 0;	1.2.1
F S= 2*X + SOMAR( X-1 );	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "nS = ", SOMAR ( 10 ) );	2

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 7.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente
//
// definir funcao com parametro
function retorno = SOMAR ( X )
// parametro:
// int X;                // natural
//
// 1.1 definir dado local
    S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;            // comecar a retornar
    else
        // 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = 2*X + SOMAR ( X-1 );    // proxima chamada
    end // fim se
// retornar o resultado
    retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
// parte principal
//
// 2. calcular e mostrar o somatorio
clc; // limpar a area de trabalho
printf ( "\nS(N) = %d ", SOMAR ( 10 ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```



Programa em C:

```
// Exemplo 7.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                     // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )                               // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;                                   // comecar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = 2*X + SOMAR ( X-1 );                 // # 3
    } // fim se
    return ( S );                               // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %d", SOMAR ( 10 ) );      // #5
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Parâmetros: Linha :	X		SOMAR S	teclado tela	Observação
#5	-				
#6			SOMAR(10)		primeira chamada
#1	10	X==0 ? F	0		
#3			20+SOMAR(9)		segunda chamada
#1	9	X==0 ? F	0		
#3			18+SOMAR(8)		terceira chamada
#1	8	X==0 ? F	0		
#3			16+SOMAR(7)		quarta chamada
			0		
			...		
#1	1	X==0 ? F			
#3			2+SOMAR(0)		última chamada
#1	0	X==0 ? F			
#2			0		
#4			0		primeiro retorno
#3	1		2 + 0		
#4			2		segundo retorno
#3	2		4 + 2		
			...		
#4			(16+...+2)		penúltimo retorno
#3	9		18+(16+...+2)		
#4			(18+16+...+2)		último retorno
#3	10		20+(18+...+2)		
#4			(20+18+...+4+2)		
#5			(2+4+... +18+20)		parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 7.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <iostream>
using namespace std;
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                     // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )                               // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;                                   // comecar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = 2*X + SOMAR ( X-1 );                 // # 3
    } // fim se
    return ( S );                                // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( 10 );        // #5
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 7
 * Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_7
{
    // definir funcao com parametro
    public static int SOMAR ( int X )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int S;          // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar se for termo valido
            S = 2 * X + SOMAR ( X-1 );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
} //
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 10 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_7 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 7
 * Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_7
{
// definir funcao com parametro
public static int SOMAR ( int X )
{
// 1.1. definir dado local
    int S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )
    {
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;
    }
    else
    {
// 1.2.2 somar se for termo valido
        S = 2 * X + SOMAR ( X-1 );
    } // fim se
    return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. calcular e mostrar o somatorio
    System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 10 ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_7 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 7.
# Calcular o somatorio dos 10 primeiros pares, recursivamente
#
# definir funcao com parametro
def SOMAR ( X ):
# parametro:
# int X; # natural
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 ):
# 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;      # comecar a retornar
    else:
# 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = 2*X + SOMAR ( X-1 );  # proxima chamada
# fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
# parte principal
#
# 2. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( 10 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

Exemplo 8 :

Calcular a soma dos 10 primeiros números ímpares por uma função recursiva.

$$S(N) = 1 + 3 + \dots + 17 + 19$$

Análise do problema:

O somatório pode ser definido recursivamente como:

$$S(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 0 \\ (2 \cdot X - 1) + S(X - 1), & \text{se } X \in [1:10] \end{cases}$$

- Análise de dados:

- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	Inteiro		valor da vez
S	Real		somatório

- Avaliação da solução :

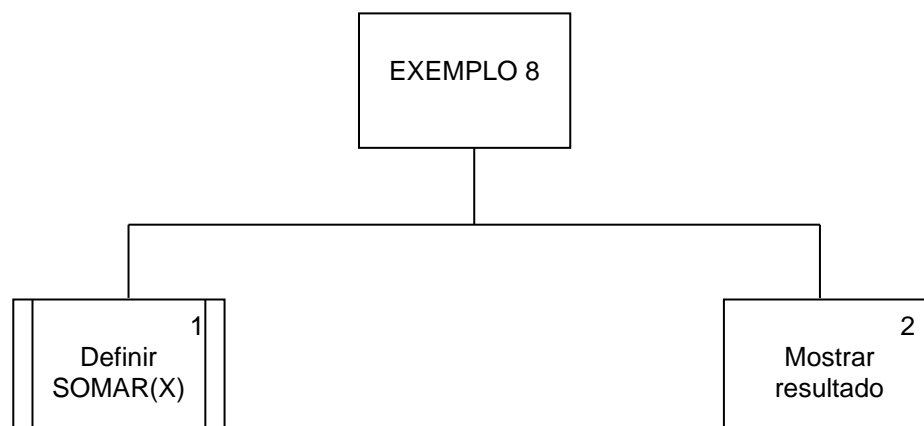
Calculando pela fórmula :

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} 2i - 1 = 10^2 = 100$$

Resultado :

$$\text{SOMA} = 100$$

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 8	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório	2

Segunda versão, com refinamento do segundo bloco.

Exemplo 8	v.2
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( 10 ) );	2

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 8	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
inteiro SOMAR ( inteiro X )	
! definir dado local inteiro S;	1.1
! verificar se X está fora do limite	1.2
X==0? V S = 0;	1.2.1
F S= ( 2*X-1 ) + SOMAR( X-1 );	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( 10 ) );	2



Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 8.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente
//
// definir funcao com parametro
function retorno = SOMAR ( X )
// parametro:
// int X;                // natural
//
// 1.1 definir dado local
    S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;            // comecar a retornar
    else
        // 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = (2*X-1) + SOMAR ( X-1 ); // proxima chamada
    end // fim se
// retornar o resultado
    retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
// parte principal
//
// 2. calcular e mostrar o somatorio
clc; // limpar a area de trabalho
printf ( "\nS(N) = %d ", SOMAR ( 10 ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 8.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                     // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )                             // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha mais o que somar
        S = 0;                               // comecar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = (2*X-1) + SOMAR ( X-1 );         // # 3
    } // fim se
    return ( S );                           // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %d", SOMAR ( 10 ) ); // #5
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Parâmetros: Linha :	X		SOMAR S	teclado tela	Observação
#5	-				
#6			SOMAR(10)		primeira chamada
#1	10	X==0 ? F	0		
#3			19+SOMAR(9)		segunda chamada
#1	9	X==0 ? F	0		
#3			17+SOMAR(8)		terceira chamada
#1	8	X==0 ? F	0		
#3			15+SOMAR(7)		quarta chamada
			0		
			...		
#1	1	X==0 ? F			
#3			1+SOMAR(0)		última chamada
#1	0	X==0 ? F			
#2			0		
#4			0		primeiro retorno
#3	1		1 + 0		
#4			1		segundo retorno
#3	2		3 + 1		
			...		
#4			(15+...+1)		penúltimo retorno
#3	9		17+(15+...+1)		
#4			(17+15+...+1)		último retorno
#3	10		19+(17+...+1)		
#4			(19+17+...+3+1)		
#5			(1+3+... +17+19)		parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 8.
// Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
int SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    int S;                                     // somatorio
    // 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )                             // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha mais o que somar
        S = 0;                                // comecar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar se for termo valido
        S = (2*X-1) + SOMAR ( X-1 );          // # 3
    } // fim se
    return ( S );                             // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( 10 );    // #5
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 8
 * Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_8
{
    // definir funcao com parametro
    public static int SOMAR ( int X )
    {
        // 1.1. definir dado local
        int S;          // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar se for termo valido
            S = ( 2 * X - 1 ) + SOMAR ( X-1 );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
} //
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 10 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_8 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 8
 * Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_8
{
// definir funcao com parametro
public static int SOMAR ( int X )
{
// 1.1. definir dado local
    int S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )
    {
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;
    }
    else
    {
// 1.2.2 somar se for termo valido
        S = ( 2 * X - 1 ) + SOMAR ( X-1 );
    } // fim se
    return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. calcular e mostrar o somatorio
    System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( 10 ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_8 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 8.
# Calcular o somatorio dos 10 primeiros impares, recursivamente
#
# definir funcao com parametro
def SOMAR ( X ):
# parametro:
# int X; # natural
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 ):
# 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;      # comecar a retornar
    else:
# 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = (2*X-1) + SOMAR ( X-1 ); # proxima chamada
# fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
# parte principal
#
# 2. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( 10 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

Exemplo 9 :

Calcular o somatório abaixo por uma função recursiva para (N) termos.

$$S(N) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Análise do problema:

O somatório pode ser definido recursivamente como:

$$S(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 0 \\ 1/X + S(X-1), & \text{se } X > 0 \end{cases}$$

Exemplo:

$$N = 4$$

$$S(5) = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$$

- Análise de dados:

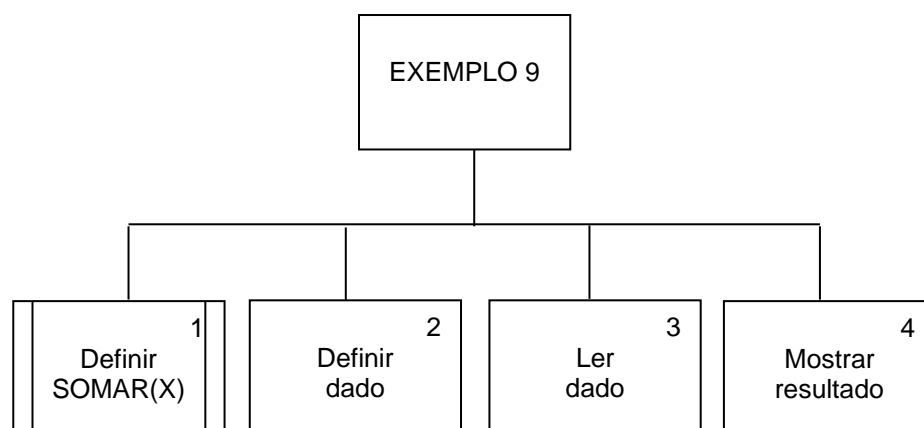
- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
S	real		somatório

- Dados da parte principal:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
N	inteiro		número de termos

Diagrama funcional:





Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 9	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o somatório	4

Segunda versão, com refinamento do segundo, terceiro e quarto blocos.

Exemplo 9	v.2
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X )	1
! parte principal	
! definir dados locais inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N ) );	4

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 9	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
real SOMAR ( inteiro X )	
! definir dado local real S;	1.1
! verificar se X é nulo	1.2
X==0? V S = 0;	1.2.1
F S= 1.0/X+SOMAR( X-1 );	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! definir dado local inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 9.
// Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros naturais, recursivamente
//
// definir funcao com parametro
function retorno = SOMAR ( X )
// parametro:
// int X;                // natural
//
// 1.1 definir dado local
    S = 0.0;              // somatorio
// 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 )
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0.0;          // comecar a retornar
    else
        // 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = 1.0 / X + SOMAR ( X - 1 );    // proxima chamada
    end // fim se
// retornar o resultado
    retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
// parte principal
//
// 2. definir dado local
    N = 0;                // numero de termos
// 3. ler dado
    clc;                  // limpar a area de trabalho
    N = input ( "\nQuantos termos ? " );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(%d) = %f ", N, SOMAR ( N ) );
// pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
    halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 9.
// Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros naturais, recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
float SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    float S; // somatório
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ) // # 1
    {
        // 1.2.1 não há mais o que somar
        S = 0.0; // começar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 se for termo impar
        S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1 ); // # 3
    } // fim se
    return ( S ); // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado local
    int N, // numero de termos
    // 3. ler dado
    printf ( "\nQual o valor de N ? " ); scanf ( "%d", &N ); // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %f", SOMAR ( N ) ); // #6
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Dados : N = 4

Parâmetros:	X		SOMAR	teclado tela	Observação
Linha :			S		
#5	-	-		4	
#6			SOMAR(4)		primeira chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	4		1/4+SOMAR(3)		segunda chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	3		1/3+SOMAR(2)		terceira chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	2		1/2+SOMAR(1)		quarta chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	1		1/1+SOMAR(0)		quinta chamada
#1		X = 0 ? F			
#2	0		0		
#4	0		0		primeiro retorno
#3	1		1/1+0		
#4	1		1/1		segundo retorno
#3	2		1/2+1/1		
#4	2		(1/2+1/1)		terceiro retorno
#3	3		1/3+(1/2-1/1)		
#4	3		(1/3+1/2-1/1)		quarto retorno
#3	4		1/4+(1/3+1/2-1/1)		
#4	4		(1/4+1/3+1/2-1/1)		quinto retorno
#6			(1/1+1/2+1/3+1/4)		parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 9.
// Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros naturais, recursivamente.
//
// bibliotecas necessárias
#include <iostream>
using namespace std;
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
double SOMAR ( int X )
{
    // 1.1 definir dado local
    double S;                // somatório
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 )                // # 1
    {
        // 1.2.1 não há mais o que somar
        S = 0.0;                // começar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 se for termo impar
        S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1 );                // # 3
    } // fim se
    return ( S );                // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado local
    int N,                    // numero de termos
    // 3. ler dado
    cout << "\nQual o valor de N ? ";  cin >> N;                // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( N );                // #6
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 9
 * Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros numeros naturais, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_9
{
    // definir funcao com parametros
    public static double SOMAR ( int X )
    {
        // 1.1. definir dado local
        double S;          // somatorio
        // 1.2. verificar se X e' nulo
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0.0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar se for termo valido
            S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1 );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
}

//
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dado
    int N;          // numero de termos
    // 3. ler um valor inteiro
    Console.Write ( "\nQual o valor de N ?" );
    N = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_9 class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 9
 * Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros numeros naturais, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_9
{
// definir funcao com parametros
public static double SOMAR ( int X )
{
// 1.1. definir dado local
double S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X e' nulo
if ( X == 0 )
{
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
S = 0.0;
}
else
{
// 1.2.2 somar se for termo valido
S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1 );
} // fim se
return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dado
int N;           // numero de termos
// 3. ler dado
System.out.print ( "\nQual o valor de N ? " );
N = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N ) );
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_9 class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 9.
# Calcular o somatorio dos inversos dos N primeiros naturais, recursivamente
#
# definir funcao com parametro
def SOMAR ( X ):
# parametro:
# int X; # natural
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0.0;      # somatorio
# 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ):
        # 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0.0;    # comecar a retornar
    else:
        # 1.2.2 somar se o termo for valido
        S = 1.0 / X + SOMAR ( X - 1 );    # proxima chamada
    # fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
# parte principal
#
# 2. definir dado local
N = 0;          # numero de termos
# 3. ler dado
N = int ( input ( "\nQuantos termos ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(", N, ") = ", SOMAR ( N ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```



Exemplo 10 :

Calcular o somatório abaixo por uma função recursiva para (N) termos.

$$S(N) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \dots - 1$$

Análise do problema:

O somatório pode ser definido recursivamente como:

$$S(X) = \begin{cases} 1/X + S(X-1), & \text{se } X > 0 \text{ e termo par} \\ 0, & \text{se } X = 0 \\ -1/X + S(X-1), & \text{se } X > 0 \text{ e termo ímpar} \end{cases}$$

Exemplo:

N = 4

$$S(5) = 1/4 - 1/3 + 1/2 - 1$$

- Análise de dados:

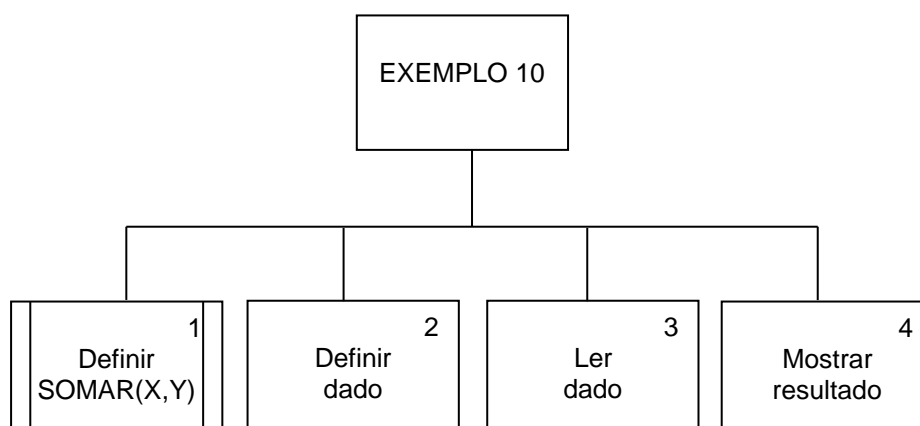
- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
Y	inteiro		ordem do termo
S	real		somatório

- Dados da parte principal:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
N	inteiro		número de termos

Diagrama funcional:



Algoritmo, com função:

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 10	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o somatório	4

Segunda versão, com refinamento do segundo, terceiro e quarto blocos.

Exemplo 10	v.2
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X, inteiro Y )	1
! parte principal	
! definir dados locais inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N, 1 ) );	4

Terceira versão, refinar o primeiro bloco.

Exemplo 10	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
real SOMAR ( inteiro X, inteiro Y )	
! definir dado local real S;	1.1
! verificar se X é nulo	1.2
V S = 0;	1.2.1
X==0? F Y%2==0? V S= - 1.0/X +SOMAR( X-1,Y+1 );	1.2.2
F S= 1.0/X +SOMAR( X-1,Y+1 );	1.2.3
retornar ( S );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N, 1 ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 10a.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// definir funcao com parametros
function retorno = SOMAR ( X, YI )
// parametro:
// int X;                // natural
// int Y;                // ordem do term
//
// 1.1 definir dado local
S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X e' nulo
if ( X == 0 )
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
S = 0;                // comecar a retornar
else
if ( mod ( Y, 2 ) == 0 )
// 1.2.2 se for termo par
S = - 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
else
// 1.2.3 se for termo ímpar
S = 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
end} // fim se
end // fim se
// retornar o resultado
retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
//
// parte principal
//
// 2. definir dadol
N = 0;                // numero de termos
// 3. ler dado
clc;                // limpar a area de trabalho
N = input ( "\nQual o valor de N ? " );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
printf ( "\nS(N) = %f ", SOMAR ( N, 1 ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 10a.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdio.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
float SOMAR ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    float S; // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ) // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0.0; // começar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        if ( Y % 2 == 0 ) // # 3
        {
            // 1.2.2 se for termo par
            S = - 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 ); // # 4
        }
        else
        {
            // 1.2.3 se for termo ímpar
            S = 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 ); // # 5
        } // fim se
    } // fim se
    return ( S ); // # 6
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N, // numero de termos
    // 3. ler dado
    printf ( "\nQual o valor de N ? " ); scanf ( "%d", &N ); // #7
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %f", SOMAR ( N, 1 ) ); // #8
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Programa em C++:

```
// Exemplo 10a.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametro
double SOMAR ( int X, int Y )
{
    // 1.1 definir dado local
    double S;           // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 )           // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0.0;           // começar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        if ( Y % 2 == 0 )           // # 3
        {
            // 1.2.2 se for termo par
            S = - 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 );           // # 4
        }
        else
        {
            // 1.2.3 se for termo ímpar
            S = 1.0/X + SOMAR ( X-1, Y+1 );           // # 5
        } // fim se
    } // fim se
    return ( S );           // # 6
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N,           // numero de termos
    // 3. ler dado
    cout << "\nQual o valor de N ? "; cin >> N;           // #7
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( N, 1 );           // #8
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 10a
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_10a
{
    // definir funcao com parametro
    public static double SOMAR ( int X, int Y )
    {
        // 1.1. definir dado local
        double S;           // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0.0;
        }
        else
        {
            if ( Y % 2 == 0 )
            {
                // 1.2.2 se for termo par
                S = -1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
            }
            else
            {
                // 1.2.3 se for termo impar
                S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
            } // fim se
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
} //
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dado
    int N;           // numero de termos
    // 3. ler dado
    Console.Write ( "\nQual o valor de N ?" );
    N = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 1 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_10a class

```

Programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 10a
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_10a
{
// definir funcao com parametro
public static double SOMAR ( int X, int Y )
{
// 1.1. definir dado local
double S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
if ( X == 0 )
{
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
S = 0.0;
}
else
{
if ( Y % 2 == 0 )
{
// 1.2.2 se for termo par
S = -1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
}
else
{
// 1.2.3 se for termo impar
S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
} // fim se
} // fim se
return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dado
int N;           // numero de termos
// 3. ler dado
System.out.print ( "\nQual o valor de N ? " );
N = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 1 ) );
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_10a class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 10a.
# Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
#
# definir funcao com parametros
def SOMAR ( X, Y ):
# parametro:
# int X; # natural
# int Expoente;
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ):
# 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;      # comecar a retornar
    else:
# 1.2.2 somar sinal e o termo com o resto
        if ( Y % 2 == 0 ):
# 1.2.2 se for termo par
            S = -1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
        else:
# 1.2.3 se for termo impar
            S = 1.0 / X + SOMAR ( X-1, Y+1 );
        # fim se
    # fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR( )
#
# parte principal
#
# 2. definir dadol
N = 0; # numero de termos
# 3. ler dado
N = int ( input ( "\nQual o valor de N ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( N, 1 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```



Outra solução:

- Análise de dados:

- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
Sinal	inteiro		sinal do termo
S	real		somatório

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 10	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR (inteiro X, inteiro Sinal)	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o somatório	4

Segunda versão, manter o resto e refinar o primeiro bloco.

Exemplo 10	v.3
Ação	Bloco
! definir função	1
real SOMAR ( inteiro X, inteiro Sinal )	
! definir dado local real S;	1.1
! verificar se X é nulo	1.2
X==0? V ! não há mais o que somar S=0;	1.2.1
F ! somar um termo com o resto S=Sinal * 1.0/X + SOMAR(X-1,-Sinal);	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N, 1 ) );	4

Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 10b.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// definir funcao com parametros
function retorno = SOMAR ( X, Sinal )
// parametro:
// int X;                // natural
// int Sinal;
//
// 1.1 definir dado local
    S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 )
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;            // comecar a retornar
    else
        // 1.2.2 somar sinal e o termo com o resto
        S = Sinal * 1.0/X + SOMAR ( X-1, -Sinal );
    end // fim se
// retornar o resultado
    retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
//
// parte principal
//
// 2. definir dadol
    N = 0;                // numero de termos
// 3. ler dado
    clc;                  // limpar a area de trabalho
    N = input ( "\nQual o valor de N ? " );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %f ", SOMAR ( N, 1 ) );
// pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
    halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 10b.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
float SOMAR ( int X, int Sinal )
{
    // 1.1 definir dado local
    float S; // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ) // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0; // comecar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar um termo com o resto
        S = Sinal * 1.0/X + SOMAR ( X-1, -Sinal ); // # 3
    } // fim se
    return ( S ); // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N, // numero de termos
    // 3. ler dado
    printf ( "\nQual o valor de N ? " ); scanf ( "%d", &N ); // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %f", SOMAR ( N, 1 ) ); // #6
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    getchar ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Programa em C++:

```
// Exemplo 10b.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//                                     // LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
float SOMAR ( int X, int Sinal )
{
    // 1.1 definir dado local
    float S;                // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 )            // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;              // comecar a retornar    // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar um termo com o resto
        S = Sinal * 1.0/X + SOMAR ( X-1, -Sinal );    // # 3
    } // fim se
    return ( S );           // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N,                  // numero de termos
    // 3. ler dado
    cout << "\nQual o valor de N ? "; cin >> N;      // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( N, 1 );          // #6
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Outra versão do programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 10b
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_10b
{
    // definir funcao com parametro
    public static double SOMAR ( int X, int Sinal )
    {
        // 1.1. definir dado local
        double S;           // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0.0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar um termo com o resto
            S = Sinal * 1.0 / X + SOMAR ( X-1, -Sinal );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
} //
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dado
    int N;           // numero de termos
    // 3. ler dado
    Console.Write ( "\nQual o valor de N ?" );
    N = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 1 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_10b class

```

Outra versão do programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 10b
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_10b
{
// definir funcao com parametro
public static double SOMAR ( int X, int Sinal )
{
// 1.1. definir dado local
    double S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
    if ( X == 0 )
    {
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0.0;
    }
    else
    {
// 1.2.2 somar um termo com o resto
        S = Sinal * 1.0 / X + SOMAR ( X-1, -Sinal );
    } // fim se
    return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dado
    int N;           // numero de termos
// 3. ler dado
    System.out.print ( "\nQual o valor de N ? " );
    N = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
    System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 1 ) );
// pausa para terminar
    System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_10b class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 10b.
# Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
#
# definir funcao com parametros
def SOMAR ( X, Sinal ):
# parametro:
# int X; # natural
# int Expoente;
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ):
# 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;      # comecar a retornar
    else:
# 1.2.2 somar sinal e o termo com o resto
        S = Sinal * 1.0 / X + SOMAR ( X-1, -Sinal );
# fim se

# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
#
# parte principal
#
# 2. definir dadol
N = 0; # numero de termos
# 3. ler dado
N = int ( input ( "\nQual o valor de N ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( N, 1 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

Uma terceira solução:

- Análise de dados:

- Dados da função:

Dado	Tipo	Valor Inicial	Obs.
X	inteiro		valor da vez
Expoente	inteiro		sinal do termo
S	real		somatório

Esboço:

Primeira versão, só comentários.

Exemplo 10	v.1
Ação	Bloco
! definir função SOMAR ( inteiro X, inteiro Sinal )	1
! parte principal	
! definir dados locais	2
! ler dados	3
! calcular e mostrar o somatório	4

Segunda versão, manter o resto e refinar o primeiro bloco.

Exemplo 10	v.2
Ação	Bloco
! definir função	1
real SOMAR ( inteiro X, inteiro Expoente )	
! definir dado local real S;	1.1
! verificar se X é nulo	1.2
X==0? V ! não há mais o que somar S = 0;	1.2.1
F ! somar um termo com o resto S = ( -1 ^ Expoente) / X + SOMAR( X-1,-Expoente+1 );	1.2.2
retornar ( S );	
! parte principal	
! definir dados locais inteiro N; ! número de termos	2
! ler dado tela ← "Quantos termos ? "; N ← teclado;	3
! calcular e mostrar o somatório tela ← ( "S = ", SOMAR ( N, 2 ) );	4



Programa em SCILAB:

```
// Exemplo 10c.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// definir funcao com parametros
function retorno = SOMAR ( X, Expoente )
// parametro:
// int X;                // natural
// int Expoente;
//
// 1.1 definir dado local
S = 0;                // somatorio
// 1.2 verificar se X e' nulo
if ( X == 0 )
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
S = 0;                // comecar a retornar
else
// 1.2.2 somar sinal e o termo com o resto
S = ((-1) ^ Expoente)/X + SOMAR ( X-1, Expoente+1 );
end // fim se
// retornar o resultado
retorno = S;
endfunction // SOMAR( )
//
//
// parte principal
//
// 2. definir dadol
N = 0;                // numero de termos
// 3. ler dado
clc;                // limpar a area de trabalho
N = input ( "\nQual o valor de N ? " );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
printf ( "\nS(N) = %f ", SOMAR ( N, 2 ) );
// pausa para terminar
printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
halt;
// fim do programa
```

Programa em C:

```
// Exemplo 10c.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
float SOMAR ( int X, int Expoente )
{
    // 1.1 definir dado local
    float S; // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ) // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0; // comecar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar sinal e termo com o resto
        S = pow (-1 Expoente)/X+SOMAR ( X-1,Expoente+1 ); // # 3
    } // fim se
    return ( S ); // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N, // número de termos
    // 3. ler dado
    printf ( "\nQual o valor de N ? "; scanf ( "%d", &N ); // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    printf ( "\nS(N) = %f", SOMAR ( N, 2 ) ); // #6
    // pausa para terminar
    printf ( "\nPressionar ENTER para terminar.";
    getchar ( );
    return ( 0 );
} // fim do programa
```

Execução :

Dados : N = 4

Parâmetros: Linha :	X	Expoente	SOMAR S	teclado tela	Observação
#5	-	-		4	
#6			SOMAR(4, 2)		primeira chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	4	1	1/4+SOMAR(3,3)		segunda chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	3	-1	-1/3+SOMAR(2,4)		terceira chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	2	1	1/2+SOMAR(1,5)		quarta chamada
#1		X = 0 ? F			
#3	1	-1	-1/1+SOMAR(0,6)		quinta chamada
#1		X = 0 ? F			
#2	0	6	0		
#4	0	6	0		primeiro retorno
#3	1	5	-1/1+0		
#4	1	5	-1		segundo retorno
#3	2	4	1/2-1		
#4	2	4	(1/2-1)		terceiro retorno
#3	3	3	-1/3+(1/2-1)		
#4	3	3	(-1/3+1/2-1)		quarto retorno
#3	4	2	1/4+(-1/3+1/2-1)		
#4	4	2	(1/4-1/3+1/2-1)		quinto retorno
#6			(1/4-1/3+1/2-1)		parte principal

Programa em C++:

```
// Exemplo 10c.
// Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
//
// bibliotecas necessarias
#include <iostream>
using namespace std;
//
// LINHAS DE PROGRAMA
// definir funcao com parametros
double SOMAR ( int X, int Expoente )
{
    // 1.1 definir dado local
    double S; // somatorio
    // 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ) // # 1
    {
        // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0; // comecar a retornar // # 2
    }
    else
    {
        // 1.2.2 somar sinal e termo com o resto
        S = pow (-1, Expoente)/X+SOMAR ( X-1,Expoente+1 );// # 3
    } // fim se
    return ( S ); // # 4
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
int main ( void )
{
    // 2. definir dado
    int N, // número de termos
    // 3. ler dado
    cout << "\nQual o valor de N ? "; cin >> N; // #5
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    cout << "\nS(N) = " << SOMAR ( N, 2 ); // #6
    // pausa para terminar
    cout << "\nPressionar ENTER para terminar.";
    cin.get ( );
    return EXIT_SUCCESS;
} // fim do programa
```

Uma terceira versão do programa em C#:

```

/*
 * Exemplo 10c
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */
using System;

class Exemplo_10c
{
    // definir funcao com parametro
    public static double SOMAR ( int X, int Expoente )
    {
        // 1.1. definir dado local
        double S;          // somatorio
        // 1.2. verificar se X esta' fora do limite
        if ( X == 0 )
        {
            // 1.2.1 nao ha' mais o que somar
            S = 0.0;
        }
        else
        {
            // 1.2.2 somar sinal e termo com o resto
            S = Math.pow ( -1, Expoente ) / X + SOMAR ( X-1, Expoente+1 );
        } // fim se
        return ( S );
    } // fim da funcao SOMAR ( )
}

//
// parte principal
//
public static void Main ( )
{
    // 2. definir dado
    int N;          // numero de termos
    // 3. ler dado
    Console.Write ( "\nQual o valor de N ?" );
    N = int.Parse ( Console.ReadLine ( ) );
    // 4. calcular e mostrar o somatorio
    Console.WriteLine ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 2 ) );
    // pausa para terminar
    Console.Write ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
    Console.ReadLine ( );
} // end Main ( )

} // fim Exemplo_10c class

```

Uma terceira versão do programa em Java:

```

/**
 * Exemplo 10c
 * Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
 */

// ----- classes necessarias

// ----- definicao de classe

class Exemplo_10c
{
// definir funcao com parametro
public static double SOMAR ( int X, int Expoente )
{
// 1.1. definir dado local
double S;           // somatorio
// 1.2. verificar se X esta' fora do limite
if ( X == 0 )
{
// 1.2.1 nao ha' mais o que somar
S = 0.0;
}
else
{
// 1.2.2 somar sinal e termo com o resto
S = Math.pow (-1, Expoente) / X + SOMAR ( X-1, Expoente+1 );
} // fim se
return ( S );
} // fim da funcao SOMAR ( )
//
// parte principal
//
public static void main ( String [ ] args )
{
// 2. definir dado
int N;           // numero de termos
// 3. ler dado
System.out.print ( "\nQual o valor de N ? " );
N = Integer.parseInt ( System.console( ).readLine( ) );
// 4. calcular e mostrar o somatorio
System.out.println ( "\nS(N) = " + SOMAR ( N, 2 ) );
// pausa para terminar
System.out.print ( "\nPressionar ENTER para terminar." );
System.console ( ).readLine ( );
} // end main ( )

} // fim Exemplo_10c class

```

Programa em Python:

```
# Exemplo 10c.
# Calcular um somatorio com alternancia de sinal, recursivamente.
#
# definir funcao com parametros
def SOMAR ( X, Expoente ):
# parametro:
# int X; # natural
# int Expoente;
#
# 1.1 definir dado local
    S = 0; # somatorio
# 1.2 verificar se X e' nulo
    if ( X == 0 ):
# 1.2.1 nao ha' mais o que somar
        S = 0;      # comecar a retornar
    else:
# 1.2.2 somar sinal e o termo com o resto
        S = ((-1) ** Expoente)/X + SOMAR ( X-1, Expoente+1 );
# fim se
# retornar o resultado
    return ( S );
# SOMAR()
#
#
# parte principal
#
# 2. definir dadol
N = 0; # numero de termos
# 3. ler dado
N = int ( input ( "\nQual o valor de N ? " ) );
# 4. calcular e mostrar o somatorio
print ( "\nS(N) = ", SOMAR ( N, 2 ) );
# pausa para terminar
print ( "\nPressionar ENTER para terminar.\n" );
input ( );
# fim do programa
```

**Exercícios** (mostrar a execução)

- Escrever um algoritmo para :
  - ler do teclado um número inteiro (X);
  - calcular e mostrar o fatorial recursivo definido por :

$$\text{FATORIAL (X)} = \begin{cases} 1 & \text{se } X = 0 \\ X * \text{FATORIAL (X-1)} & \text{se } X > 0 \end{cases}$$

- Escrever um algoritmo para :
  - ler do teclado dois números inteiros (X e Y);
  - calcular e mostrar o máximo divisor comum recursivo :

$$\text{MDC (X,Y)} = \begin{cases} \text{MDC (Y,X)} , & \text{se } X < Y \\ X , & \text{se } X = Y \\ \text{MDC (X-Y,Y)} , & \text{se } X > Y \end{cases}$$

- Escrever um algoritmo para :
  - ler do teclado um número inteiro (N);
  - calcular e mostrar o termo (N) da série de Fibonacci :

$$\text{FIB (N)} = \begin{cases} 1 & \text{para } N = 1 \text{ e } 2 \\ \text{FIB (N-1)} + \text{FIB (N-2)} & \text{para } N > 2 \end{cases}$$

- Utilizar a função acima em um algoritmo para :
  - gerar os 10 primeiros termos da série;
  - ler um inteiro (N) e gerar todos os termos menores que N;
  - ler dois números inteiros M e N e calcular a diferença entre FIB(M) e FIB(N) .
- Escrever uma função recursiva para mostrar os divisores de um número.
- Reescrever a função anterior para contar o número de divisores de um número.
- Escrever um procedimento recursivo para calcular a soma dos divisores de um número.
- Escrever um procedimento recursivo para mostrar a seguinte seqüência :

$$1024 - 512 - 256 - \dots - 4 - 2 - 1$$

- Escrever uma função recursiva para calcular e mostrar o valor de "S", com 20 termos :

$$S = 1 + 1/2 + 2/3 + 3/5 + \dots$$

- Escrever um procedimento recursivo capaz de verificar se um número é palíndromo.