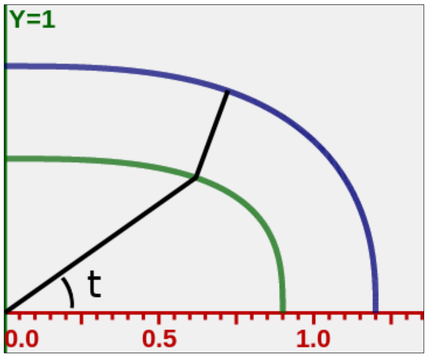
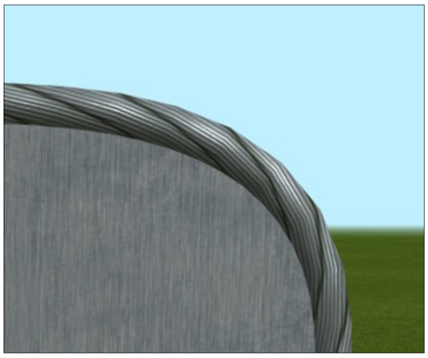
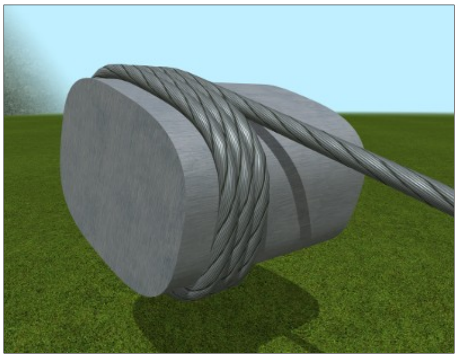
Периметр гиперэллипса и гиперэллипса, покрытого слоем



В связи с симметрией, рассматривается ¼ периметра, $t \in [0, \pi/2]$.
Параметрическое уравнение гиперэллипса:

$$x = \cos(t)\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n}, \quad y = \sin(t)\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n}, \quad n\geqslant 2\ . \tag{1}$$

Параметрическое уравнение гиперэллипса, покрытого слоем толщиной r_1:

$$x = \cos(t)\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n} + r_1\frac{\cos^{n-1} t}{a^n}\left(\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}}+\frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}\right)^{-1/2}, \tag{2}$$

$$y = \sin(t)\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n} + r_1\frac{\sin^{n-1} t}{b^n}\left(\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}}+\frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}\right)^{-1/2}, \quad n\geqslant 2.$$

<u>Задачи</u>:

- Найти длину ¼ периметра.
- По заданному расстоянию по кривой от пересечения с положительным направлением оси X (X+), построить точку и перпендикуляр в этой точке. Это действие будет выполняться каждый кадр для каждого намотанного участка троса на графическом процессоре (GPU), разработка оптимизирована с целью сокращения вычислений, необходимых для выполнения этого действия.
- Найти расстояние по кривой от заданной точки до пересечения с X+.

Для n=2 (эллипс) есть подробное описание в справочной литературе, в т.ч. действия с эллиптическими интегралами.

Для кривых на плоскости, заданных параметрически, длина отрезка периметра L между двумя точками $t=0$ и $t=\varphi$ выражается формулой $L(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}\,dt$. При взятии производных из формулы (1), после упрощения получается формула длины отрезка периметра гиперэллипса:

$$L(\varphi)=\int_0^{\varphi}\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n-1}\sqrt{\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}}+\frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}}\;dt\ . \tag{3}$$

При взятии производных из (2), после упрощения получается формула длины отрезка гиперэллипса, покрытого слоем:

$$L(\varphi)=\int_0^{\varphi}\left(\frac{\cos^n t}{a^n}+\frac{\sin^n t}{b^n}\right)^{-1/n-1}\sqrt{\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}}+\frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}} + r_1(n-1)\frac{\cos^{n-2} t}{a^n}\frac{\sin^{n-2} t}{b^n}\left(\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}}+\frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}\right)^{-1} dt\ . \tag{4}$$

Решений этих интегралов в закрытом виде не было найдено.

Функции (3), (4) раскладываются в ряды Тэйлора:

$$L(t)=L(t_0)+\frac{L'(t)}{1!}(t-t_0)+\frac{L''(t)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{L^{(n)}(t)}{n!}(t-t_0)^n+o(t^{n+1})\ . \tag{5}$$

Здесь $L(t_0)$ - длина кривой от X+ до точки, в которой происхоит разложение в ряд Тэйлора. Производная $L'(t)$ равна интегранду из формулы (3) или (4). При последовательном дифференциировании $L'(t)$ получаются производные следующих порядков.

Нахождение значений первых N производных функции в точке, а также разные методы нахождения верхней границы ошибки на интервале описаны в приложении [].

Для решения задач строится структура данных, состоящая из последовательности интервалов, упорядоченных по возрастанию t. Каждый интервал содержит многочлен Тэйлора порядка N, аппроксимирующий значение функции $L(t)$ с относительной ошибкой не более ε.

Алгоритм построения структуры данных.

1. Берется интервал $t \in [0, \pi/2]$.
2. Вычисляются значения первых N производных функции в точке t_0 в центре интервала, и верхняя граница абсолютной ошибки на интервале.
3. Формируется многочлен Тэйлора $L(t)$, по формуле (5) вычисляется длина отрезка периметра, соответствующего интервалу, и верхняя граница относительной ошибки.
4. В случае, если верхняя граница относительной ошибки превышает заданную величину ε, интервал удаляется. Вместо этого интервала создаются два интервала, равные по параметру t. Для каждого созданного интервала алгоритм переходит к шагу 2.
5. На каждом интервале записывается сумма длин на предыдущих интервалах.

Количество получающихся интервалов зависит от параметров (n, a, b, r_1), заданной верхней границы относительной ошибки ε и порядка многочлена Тэйлора N.

Гиперэллипс

n	a	b	$\varepsilon=10^{-6}$ N=5	$\varepsilon=10^{-6}$ N=10	$\varepsilon=10^{-10}$ N=7	$\varepsilon=10^{-10}$ N=15
2.5*	1	1	16	8	42	18
2.5*	10	0.1	78	23	133	26
3	1	1	16	6	30	6
3	10	0.1	75	21	132	24
10	1	1	32	8	60	14
10	10	0.1	86	24	160	33
50	1	1	42	14	86	24

* сокращенные многочлены Тэйлора (2 производные) на интервалах, содержащих 0 и π/2.

Гиперэллипс, покрытый слоем r_1=0.5

n	a	b	$\varepsilon=10^{-6}$ N=5	$\varepsilon=10^{-6}$ N=10	$\varepsilon=10^{-10}$ N=7	$\varepsilon=10^{-10}$ N=15
2	1	1	1	1	1	1
2	10	0.1	97	26	163	30
3	1	1	20	6	34	6
3	10	0.1	92	24	154	27
10	1	1	46	12	80	18
10	10	0.1	105	27	183	**
15	3	0.3	70	19	135	29
50	1	1	64	22	116	28

** переполнение экспоненты в числах IEEE 754 double

При дробных значениях n функции (3), (4) не являются бесконечно дифференциируемыми на $t \in [0, \pi/2]$.

В случае гиперэллипса в точках $t=0$ и $t=\pi/2$ не бесконечны только $\operatorname{floor}(n)+1$ производные. Решение – сокращать порядок многочленов Тэйлора на интервалах, содержащих эти точки, что приводит к уменьшению этих интервалов. Также в окрестностях этих точек уменьшаются радиусы конвергенции рядов и соответственно дополнительно сокращаются эти и смежные интервалы. Другой эффект - в окрестностях вышеуказанных точек существенно увеличиваются абсолютные значения коэффициентов и требуют внимания к возможному переполнению в используемых типах чисел.

Для гиперэллипса, покрытого слоем, при $n \notin \mathbb{N}$ в точках 0 и π/2 не бесконечны только $\operatorname{floor}(n)-1$ производные. В частности, при $n \in (2,3)$ не бесконечна только 1 производная, тогда как требуется не менее 2 производных для формирования многочлена Тэйлора (порядка $\geqslant 1$) и нахождения верхней границы абсолютной ошибки. Подходы к решению этого вопроса были рассмотрены; реализация и описание оставлены до следующих версий.

Построение точки и перпендикуляра в точке по длине L.

Для нахождения интервала, в котором находится точка, выполняется двоичный поиск по упорядоченной последовательности интервалов.

На каждом интервале из многочлена L(t) по формуле обращения рядов формируется многочлен t(L).

Координаты точки (x, y) в зависимости от t определяются по формулам (1) или (2).

Компоненты вектора-перпендикуляра (N_X, N_Y) одинаковы для обеих кривых:

$$\left(N_X, N_Y\right) = \left[\frac{\cos^{n-1} t}{a^n}, \ \frac{\sin^{n-1} t}{b^n}\right] \Big/ \sqrt{\frac{\cos^{2n-2} t}{a^{2n}} + \frac{\sin^{2n-2} t}{b^{2n}}}\ . \qquad (6)$$

Возможен подход – используя t(L), вычислить t, и далее по формулам вычислить x, y, N_X, N_Y.

С целью сократить возведения в произвольную степень и тригонометрические вычисления, на интервале формируются многочлены Тэйлора x(L), y(L), N_X(L), N_Y(L).
Для этого вычисляются значения первых N производных функций (1) или (2), и (6) в точке t_0, в дополнение к t_0 подставляются производные из t(L) по формуле Фаà ди Бруно.

Длина отрезка периметра от точки до X+.

Эта задача может быть решена одним из методов численного интегрирования по формуле (3) или (4).
С учетом построенной структуры данных, применяется менее затратный метод.
Четверть периметра разделяется на 2 части (“правая” и “верхняя”) точкой, в которой перпендикуляр направлен под углом 45° к X+. Параметр t для этой точки вычисляется по формуле:

$$t = \arctan\left[\left(b^n / a^n \cdot \tan\theta\right)^{1/(n-1)}\right], \ \ \theta = \pi/4. \qquad (7)$$

На интервалах в “правой” части создаются многочлены L(y), в “верхней” L(x), по формуле обращения рядов из y(L) и x(L) соответственно, и на каждом интервале записывается точка (x,y) - конец интервала.

Для нахождения L, сначала методом двоичного поиска по x или y находится нужный интервал. Далее выполняется вычисление многочлена Тэйлора L(x) или L(y) в точке. Для вычисления требуется примерно 2N умножений и N сложений, где N – количество производных.

Пример трехмерного изображения, для формирования которого были проведены вышеописанные вычисления.

Гиперэллиптический цилиндр n=3, a=1.3, b=2, с частично намотанной цепью r_1=0.067.