Расстояние между двумя отрезками в пространстве

Задача вычисления расстояния между двумя отрезками в пространстве, нахождения ближайших точек на этих отрезках появляется при работе с трехмерными геометрическими объектами.

Представляем примененный метод решения задачи и приводим примеры приложений, в которых она возникла.

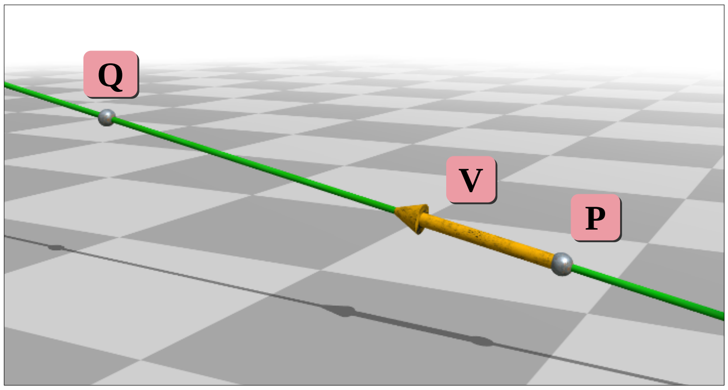
Описание

Прямая задается точкой $\vec{P}$ и единичным направляющим вектором $\vec{V}$. Точка $\vec{Q}$ на прямой задается параметрическим уравнением

$$\vec{Q} = \vec{P} + d\vec{V}, \quad d \in (-\infty, \infty), \qquad (1)$$

где d – расстояние от точки $\vec{P}$ до точки $\vec{Q}$ (отрицательное в случае, если берется в направлении, противоположному $\vec{V}$).

Отрезок задается прямой и длиной отрезка d.



Кратчайшее расстояние между двумя прямыми соответствует отрезку, концы которого находятся на этих прямых и перпендикулярного обеим прямым.

Набросок доказательства

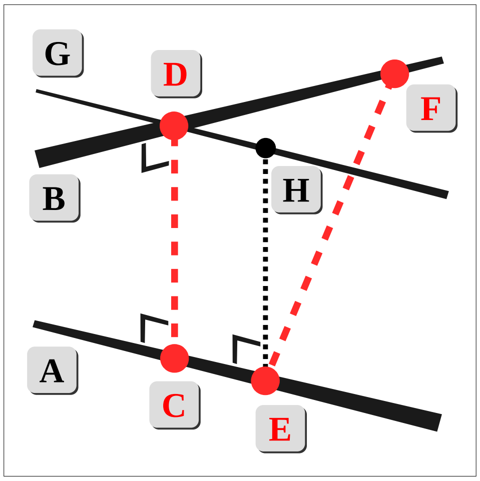
Даны прямые A и B, отрезок CD. Рассмотрим отрезок EF, не совпадающий с CD.

Проведем через точку D прямую G, параллельную A.
Из точки E проведем перпендикуляр к прямой G, построим точку H.

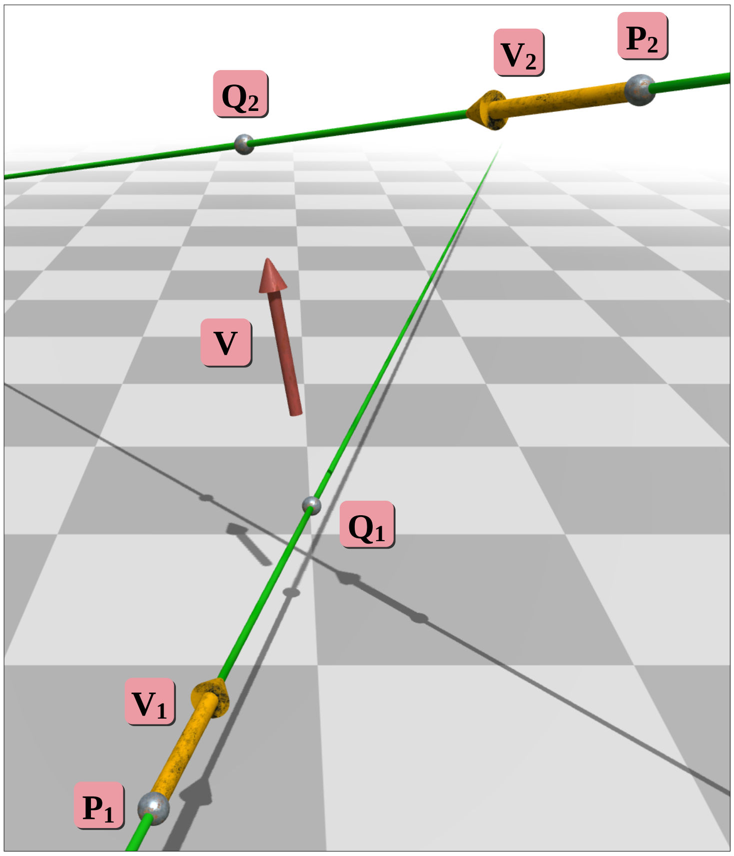
Длина EH равна длине CD.

Угол EHF равен 90°.

Длина EF больше длины EH, следовательно длина EF больше длины CD.



Нахождение единичного вектора V



Векторное произведение двух векторов $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, по определению:

1. Это вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам;
2. Длина векторного произведения равна произведению длин исходных векторов на синус угла между ними: $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \, \|\vec{V}_2\| \sin\theta$.

Пункту (1) соответствуют два противоположных вектора. Для решения этой задачи подойдет любой из них.

Если исходные вектора параллельны, синус угла между ними равен нулю, длина векторного произведения равна нулю.

Фактически в связи с ограниченной точностью чисел на компьютере длина векторного произведения параллельных векторов может оказаться ненулевой. Рассматриваем векторы как параллельные, если длина векторного произведения менее небольшой величины (например, 10^{-9}).

В этом случае решается задача “Расстояние между параллельными отрезками”.

Для получения единичного вектора V векторное произведение делится на его длину:

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|} . \qquad (2)$$

Составление уравнения

Обозначим:

- d_1 – расстояние от точки $\vec{P}_1$ до точки $\vec{Q}_1$;
- d - расстояние от $\vec{Q}_1$ до $\vec{Q}_2$;
- d_2 – расстояние от $\vec{P}_2$ до $\vec{Q}_2$.

Рассуждаем так: если из точки $\vec{P}_1$ пройти по прямой расстояние d_1 (до точки $\vec{Q}_1$), затем расстояние d вдоль вектора $\vec{V}$ (до точки $\vec{Q}_2$), затем расстояние d_2 в направлении, противоположном $\vec{V}_2$, то оказываемся в точке $\vec{P}_2$:

$$\vec{P}_1 + d_1\vec{V}_1 + d\vec{V} - d_2\vec{V}_2 = \vec{P}_2 \qquad (3)$$

Константы переносятся в правую часть:

$$d_1\vec{V}_1 + d\vec{V} - d_2\vec{V}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \qquad (4)$$

Получено уравнение с векторными коэффициентами (3-компонентные векторы) с 3 переменными.

Решение уравнения

Векторные коэффициенты записываются в столбцы матрицы, получается расширенная матрица 3x4:

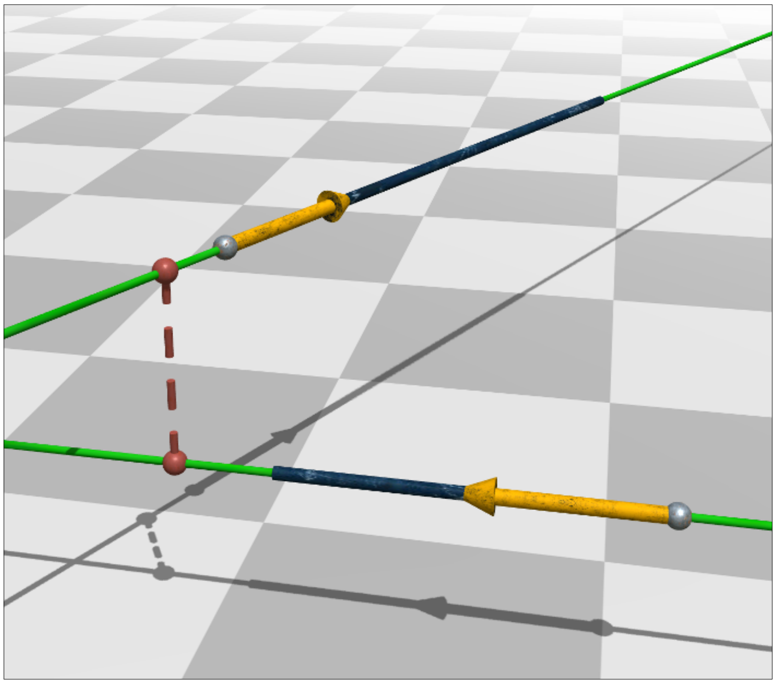
$$\left[\begin{array}{ccc|c} V_{1x} & V_x & -V_{2x} & P_{2x} - P_{1x} \\ V_{1y} & V_y & -V_{2y} & P_{2y} - P_{1y} \\ V_{1z} & V_z & -V_{2z} & P_{2z} - P_{1z} \end{array}\right] \qquad (5)$$

Базисные векторы в левой части расширенной матрицы (матрица коэффициентов) ненулевые и не находятся в одной плоскости, следовательно как матрица коэффициентов, так и расширенная матрица имеют полный ранг и система уравнений имеет 1 решение.

Применяется метод Гаусса с выбором главного элемента, в результате получается вектор искомых значений $\begin{bmatrix} d_1 \\ d \\ d_2 \end{bmatrix}$.

Расстояние между прямыми d может получиться отрицательным в зависимости от того, каким оказалось направление $\vec{V}$. Вычисляется абсолютное значение $|d|$.

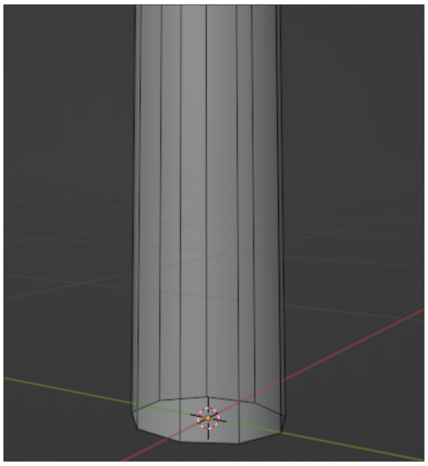
Проверка границ отрезков



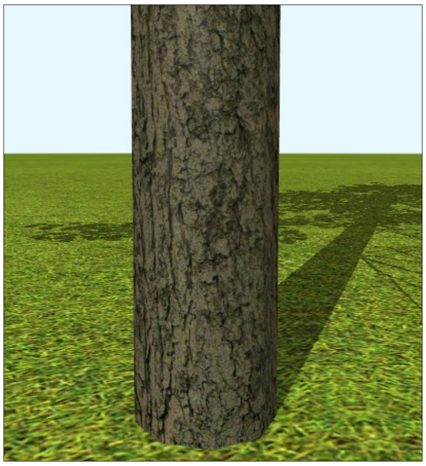
Проверяется – находятся ли ближайшие точки на бесконечных прямых в границах отрезков, то есть выполняется ли условие $d_n \geqslant 0 \wedge d_n \leqslant l_n, \quad n = 1, 2,$ где l_n - длина n-го отрезка. Если хотя бы одна из ближайших точек оказывается за пределами отрезка, то решается задача “Расстояние между отрезком и точкой” или “Расстояние между двумя точками”.

В результате получены не сами ближайшие точки, а расстояния $d_{1,2}$ от точек, которыми заданы прямые, вдоль направляющих векторов. Если нужны сами ближайшие точки, то они вычисляются по уравнению (1).

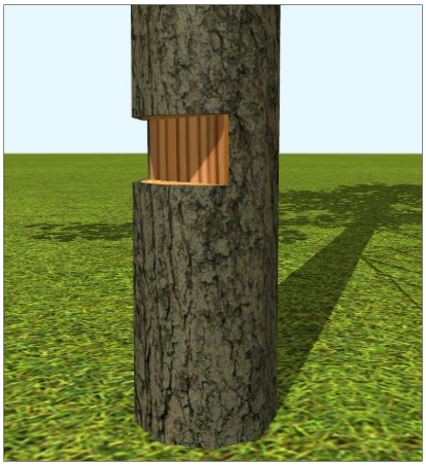
Приложение А. Пример использования в программе



1. Исходный многогранник в программе “Blender”.

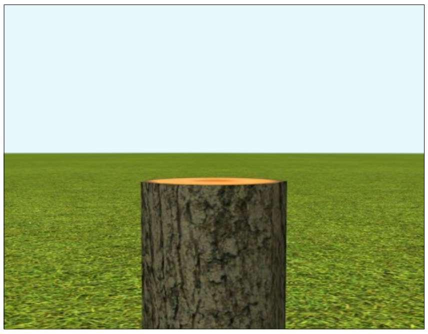


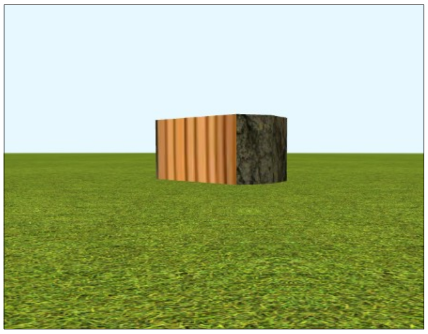
2. Этот же объект в приложении.

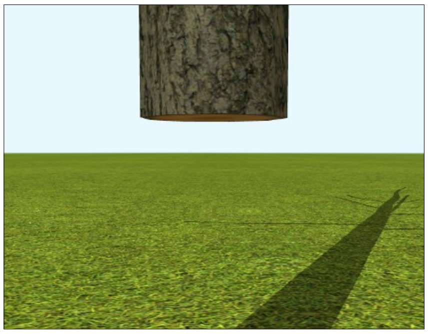


3. Объект был изменен в соответствии с ходом работ над объектом.

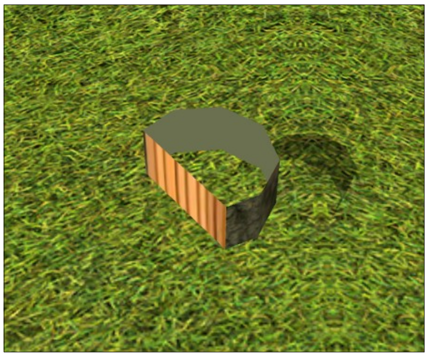
Многогранник для изображения (3) справа состоит из трех частей (трех многогранников). Он был получен созданием копий исходного многогранника и последующим выполнением сечений плоскостью:



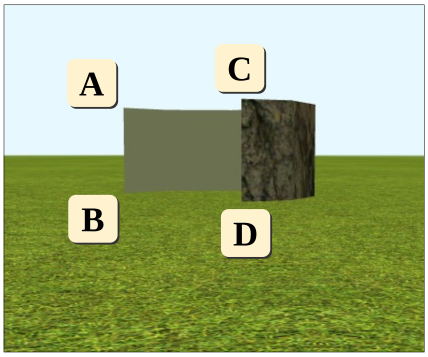


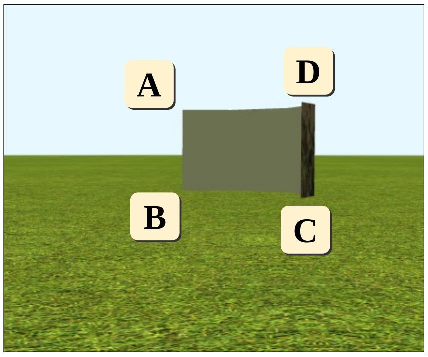


Обращаем внимание на многогранник в центре (см. изображения ниже). Это незакрытый многогранник. В приложении существенное количество незакрытых многогранников, но пользователю этого не видно по понятным причинам.



Незакрытый многогранник – вид сверху.





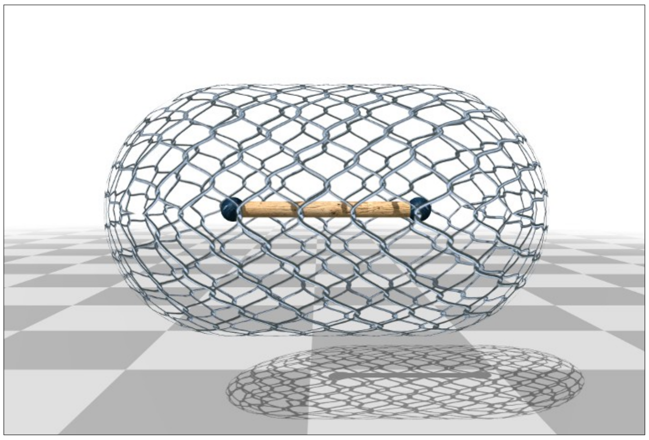
Один из этапов работы алгоритма сечения многогранника плоскостью – создание новой стороны. На изображении - многогранники до создания новой стороны.
Есть отрезки AB и CD. Необходимо определить, какой должен быть многоугольник – ABCD или ABDC.

Для создания новой стороны необходимы грани новой стороны – последовательность отрезков, составляющая многоугольник. При сечении незакрытого многогранника нередко возникает необходимость добавить отрезки, чтобы получился многоугольник.

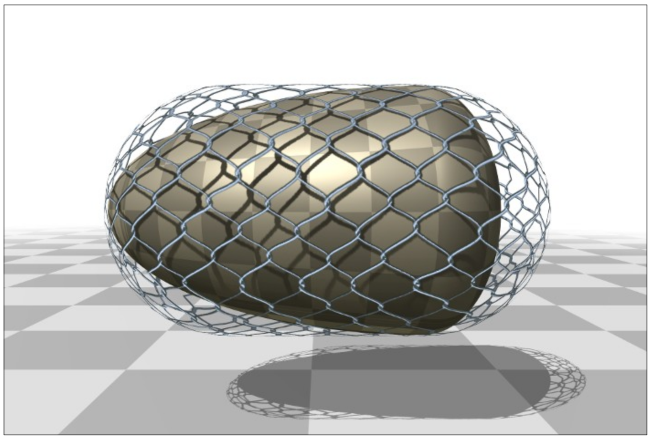
Несмотря на то, что при сечении плоскостью все новые вершины и отрезки должны находиться на этой плоскости, в связи с ограниченной точностью и округлением, они часто оказываются на некотором расстоянии от плоскости. В приложении, в котором объекты размером от миллиметров до сотен метров, и вычисления проводятся с использованием чисел IEEE 754 double, используется значение допуска 10^{-9}.

Пример приложения, в котором регулярно вычисляется расстояние между двумя отрезками в пространстве.

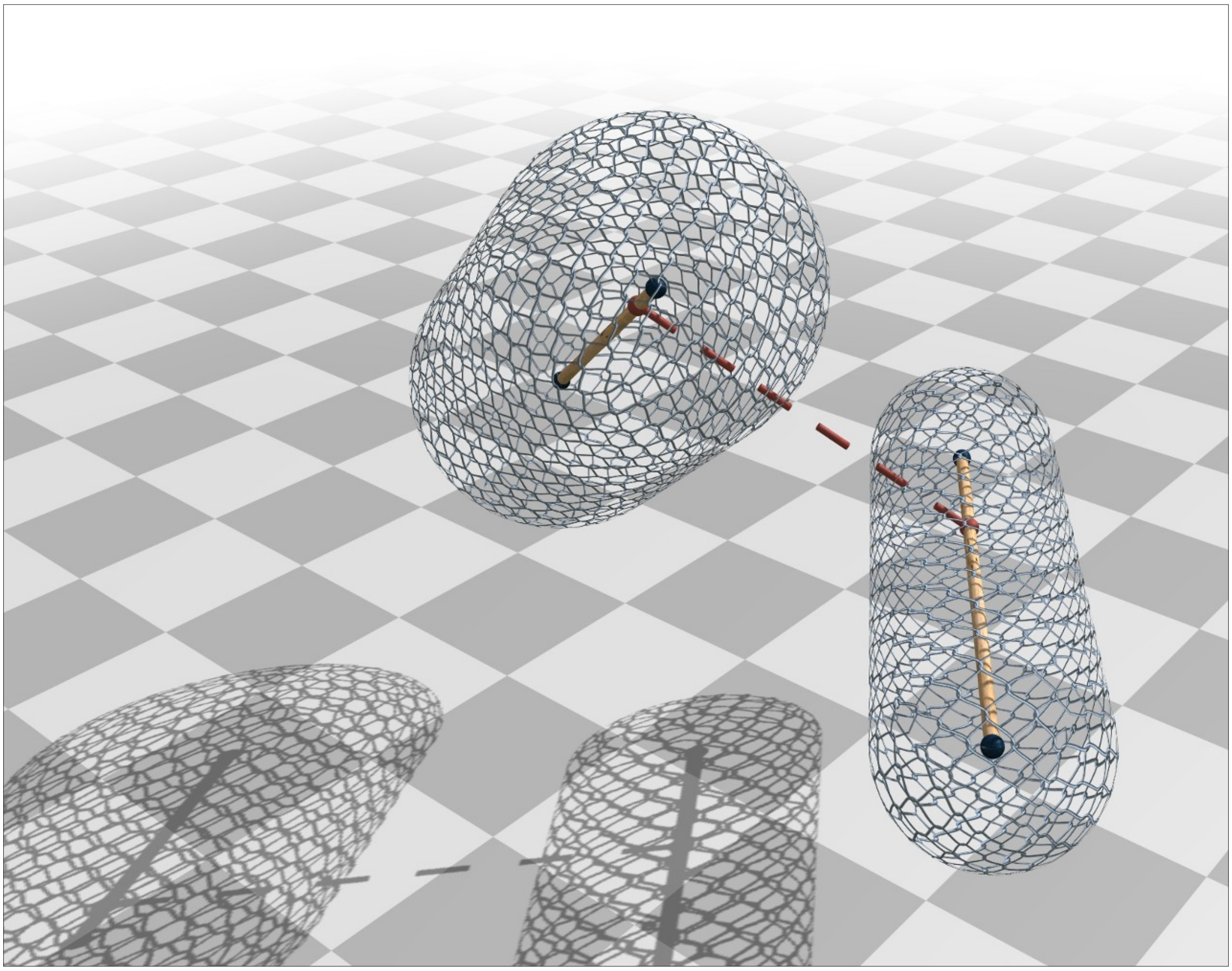
Приложение B. Работа с капсулой (capsule)



Способ задания капсулы – отрезок прямой и расстояние до поверхности *r*.



В капсулу вписан более сложный для вычислений объект.

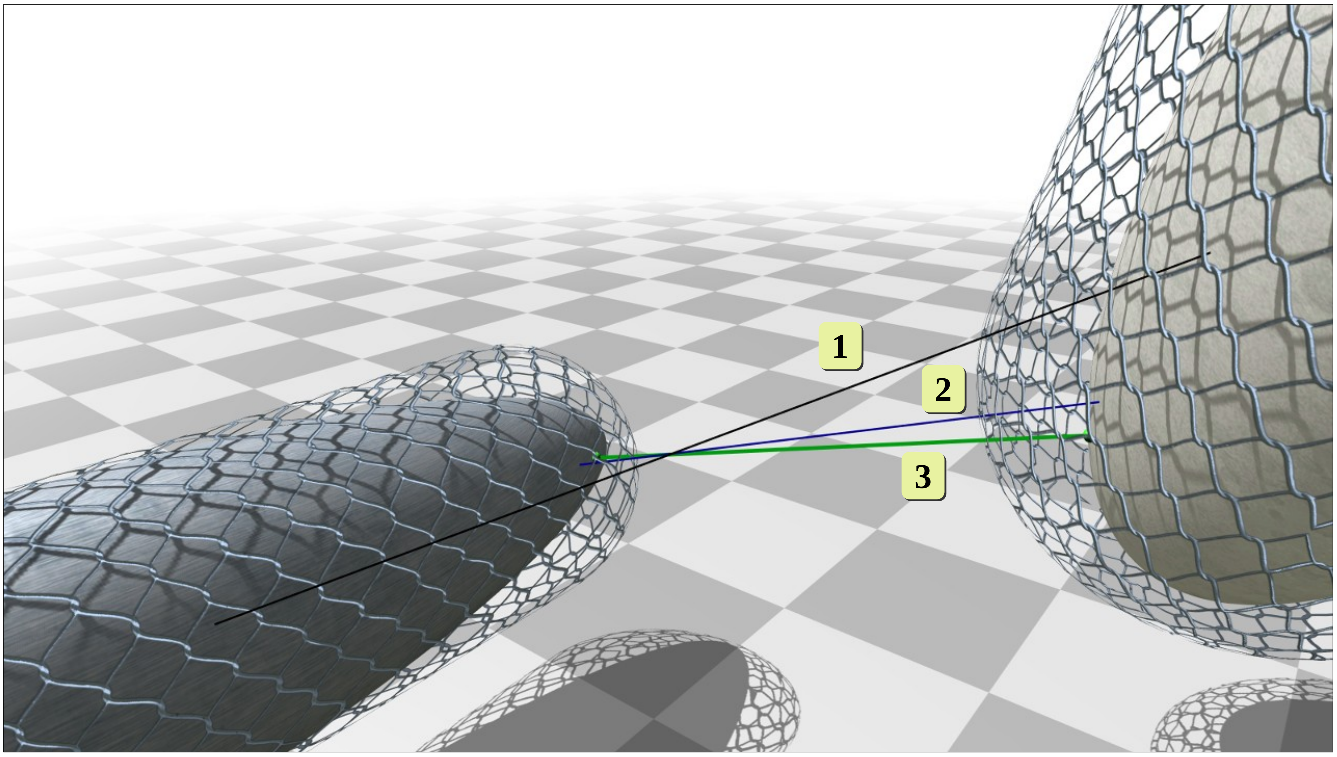


Расстояние между капсулами равно расстоянию между центральными отрезками минус сумма радиусов.

Ближайшие точки на двух эллипсоидах – нахождение начальной аппроксимации

Задача нахождения ближайших точек на двух эллипсоидах решается итеративным численным методом, таким как метод Ньютона в оптимизации.

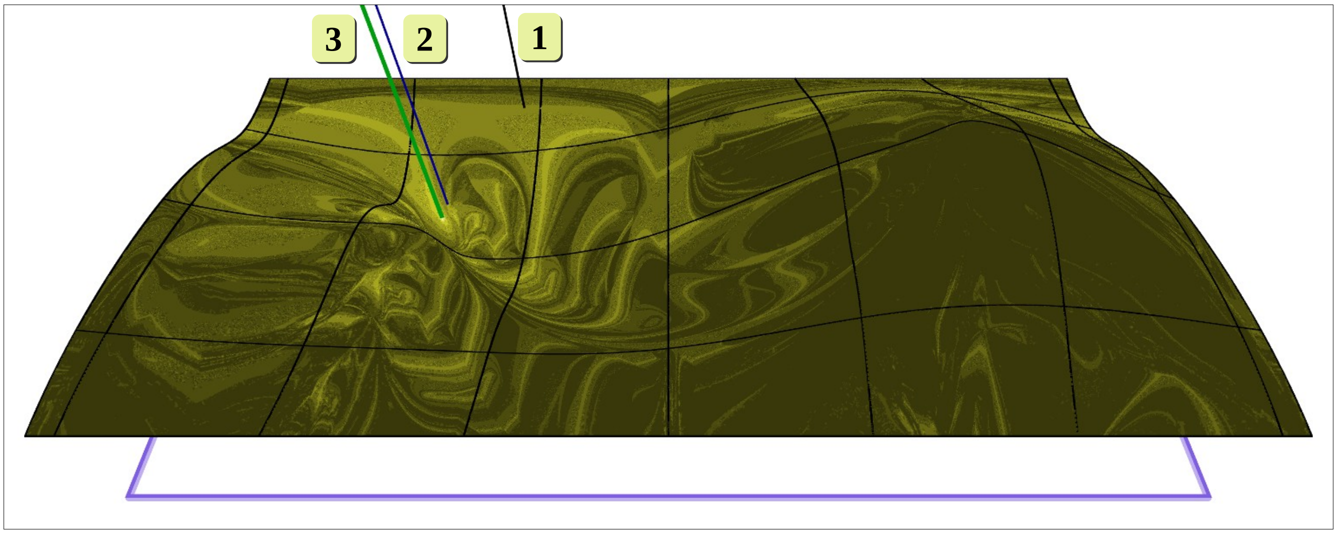
Для работы метода необходимы начальные значения (2 точки на поверхностях), по возможности более-менее приближенных к искомому решению.



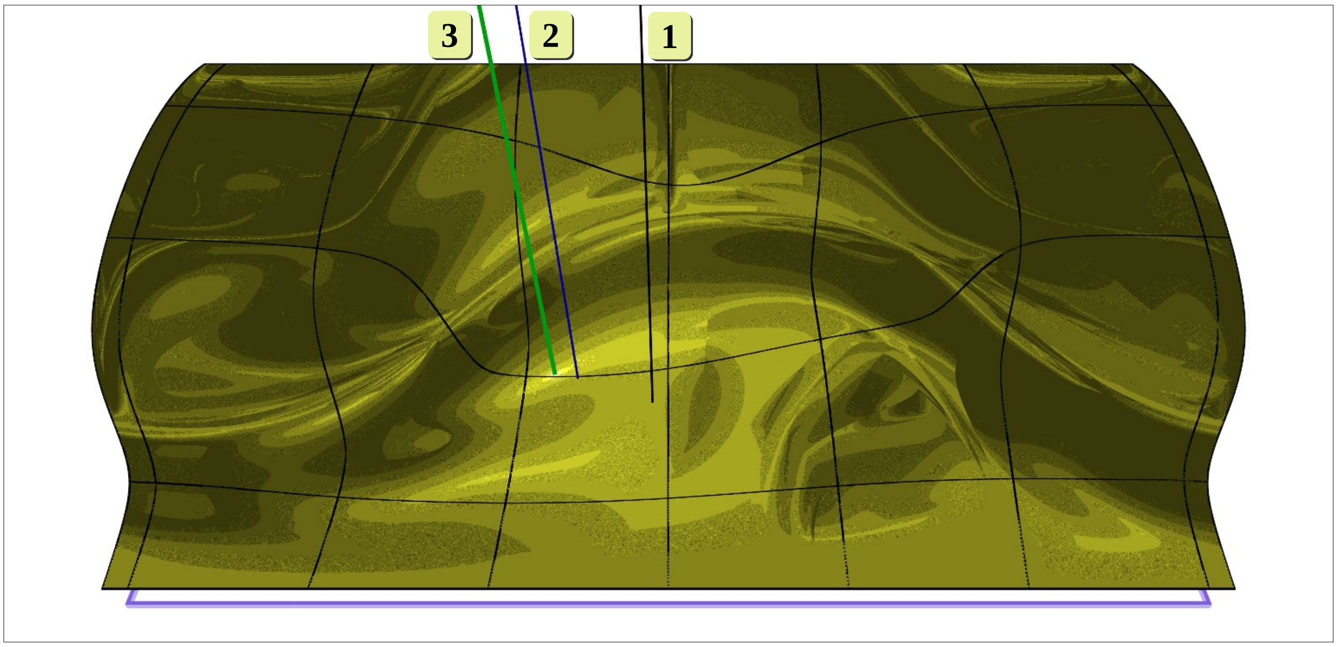
1 – отрезок между центрами фигур. 2 – отрезок между ближайшими точками на отрезках, из которых сформированы капсулы. 3 – отрезок между ближайшими точками на эллипсоидах.

Для нахождения точки пересечения отрезка и эллипсоида достаточно решения алгебраического уравнения 2 степени. Получится 2 решения. В связи с тем, что один конец отрезка находится внутри эллипсоида, а другой снаружи, то строго 1 точка пересечения будет в пределах отрезка.

Графики функции



Точки на эллипсоиде 1.



Точки на эллипсоиде 2.

Шкала яркости в зависимости от количества итераций
(для функций, имеющих одну точку сходимости)