

## Складирование природных ресурсов

В приложении большое внимание уделено не только заготовке природных ресурсов, но и их складированию. Рассмотрим складирование дров и возникающие при этом задачи.

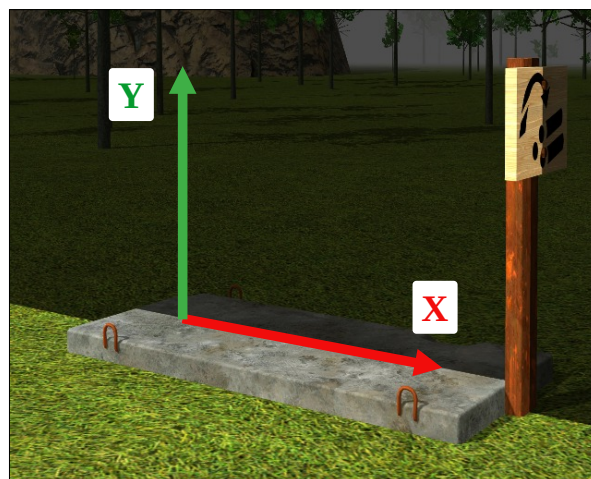


Геометрическая форма дров приблизительно соответствует цилиндрам. Цилиндры размещены в соответствии с законами физики: не пересекаются, не висят в воздухе, центры тяжести и точки опор расположены так, что достигается устойчивое равновесие.

При инициализации хранилища создается вертикальная плоскость, параллельная торцам цилиндров, и на этой плоскости создается двумерная система координат (см. изображение справа).

Есть функции перевода точек в эту систему координат и обратно.

Далее задачи формулируются и решаются в этой двумерной системе координат.

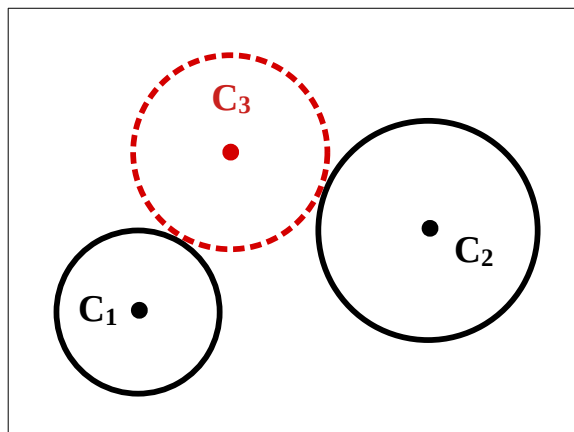


## Размещение круга сверху двух кругов

В хранилище находятся круги  $C_1$  и  $C_2$ , и сверху необходимо положить круг  $C_3$ . Даны:

- $C_1$ : координаты центра  $x_1, y_1$ , радиус  $r_1$ ;
- $C_2$ : координаты центра  $x_2, y_2$ , радиус  $r_2$ ;
- $C_3$ : радиус равен  $r_3$ .

Найти координаты центра  $C_3$  либо сделать вывод, что такое размещение невозможно.



Задачу необходимо решить в общем виде для

дальнейшего написания программного обеспечения.

То есть нужна последовательность действий (шагов),

такая, что задается 7 величин ( $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, r_3$ ), в результате получается либо 2 величины ( $x, y$ ), либо вывод о невозможности удовлетворительного размещения.

Для проверки приводим таблицу – несколько наборов исходных значений и какой должен получиться результат.

[illegible]



## Совершенствование способов складирования

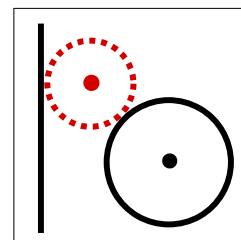
Рассмотренный выше способ складирования не вполне удобен для последующей работы: транспортирование с места заготовки на склад, потребителю и т.д., в том числе с применением механизированных средств.



Направление дальнейшей разработки приложения - использование контейнеров с вертикальными боковыми стенками.

При размещении очередного цилиндра в контейнере он может быть размещен между уже находящимся в контейнере цилиндром и боковой стенкой (см. справа).

В будущем нельзя исключить появление контейнеров с невертикальными боковыми стенками, негоризонтальным дном, а также неплоскими стенками или дном.



## Приложение А. Алгебраическое решение задачи

Создается новая система координат с осями  $u, v$ , такая, чтобы центр круга  $C_1$  находился в начале координат:

$$\begin{aligned} u &= x - x_1 \\ v &= y - y_1 \end{aligned} \quad (1)$$

В эту систему координат переводится центр  $C_2$ :

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 - x_1 \\ v_2 &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Без преобразования координат количество записей и выполняемых арифметических действий существенно увеличится.

Обозначим центр круга  $C_3$  -  $u, v$ .

Запишем уравнения расстояний между центрами  $C_3$  и  $C_1$ , и центрами  $C_3$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2 \\ (u - u_2)^2 + (v - v_2)^2 = (r_3 + r_2)^2 \end{cases} \quad (3)$$

Получается система из 2 уравнений с 2 неизвестными. Раскроем скобки, содержащие неизвестные:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2 \\ u^2 - 2uu_2 + u_2^2 + v^2 - 2vv_2 + v_2^2 = (r_3 + r_2)^2 \end{cases} \quad (4)$$

Обе неизвестные  $u, v$  есть как в 1-й степени, так и в квадрате. Если квадраты неизвестных не сокращаются, решить уравнения будет трудно (получится алгебраическое уравнение 4-й степени). В данном случае у квадратов неизвестных в обоих уравнениях одинаковые коэффициенты и есть возможность их сократить.

Вычтем из второго уравнение первое:

$$-2uu_2 + u_2^2 - 2vv_2 + v_2^2 = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 \quad (5)$$

Далее мы хотим выразить одну переменную через другую и подставить в 1-е уравнение системы (4).

Выразим  $u$  как зависимость от  $v$ . Для этого сначала перенесем все слагаемые, содержащие  $u$ , в левую часть, а все остальные в правую:

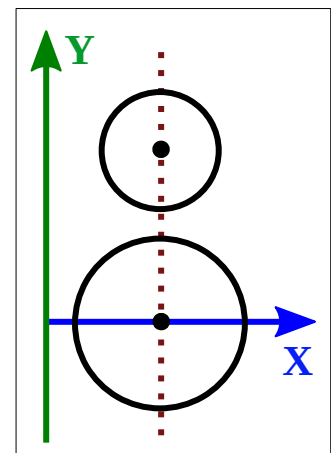
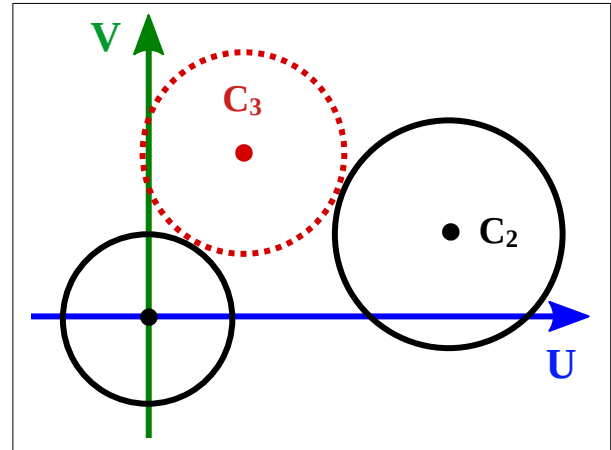
$$-2uu_2 = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 + 2vv_2 - v_2^2 \quad (6)$$

Далее разделим обе части на  $-2u_2$ :

$$u = \frac{(r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 + 2vv_2 - v_2^2}{-2u_2}, \quad u_2 \neq 0. \quad (7)$$

Рассмотрим случай  $u_2 = 0$ . По уравнению (2) это происходит в случае  $x_1 = x_2$  (центры  $C_1$  и  $C_2$  находятся на одной вертикальной линии). Этот случай - на изображении слева.

Расположение кругов таково, что удовлетворительное размещение  $C_3$  невозможно.



$x_1 = x_2$ .

Что будет, если выразить  $v$  как зависимость от  $u$ . Получится выражение, содержащее  $v_2$  в знаменателе. Случай  $v_2=0$  соответствует  $y_1=y_2$ . При таком расположении кругов удовлетворительное размещение  $C_3$  вполне возможно.

Поэтому выражаем  $u$  через  $v$ . Для упрощения создадим переменную  $t$ , в которую соберем все слагаемые, не содержащие  $v$ , из числителя уравнения (7):

$$t = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 - v_2^2. \quad (8)$$

Итого

$$u = \frac{t + 2v v_2}{-2u_2}, \quad u_2 \neq 0. \quad (9)$$

Далее подставляем (9) в 1-е уравнение системы (3):

$$\left( \frac{t + 2v v_2}{-2u_2} \right)^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2. \quad (10)$$

Выполняем ряд алгебраических преобразований с целью в результате получить уравнение, сгруппированное по степеням  $v$  и нулем в правой части:

$$v^2 \left( \frac{v_2^2}{u_2^2} + 1 \right) + v \frac{t v_2}{u_2^2} + \frac{t^2}{4u_2^2} - (r_3 + r_1)^2 = 0. \quad (11)$$

Это алгебраическое уравнение 2-й степени, решение которого широко изучается.

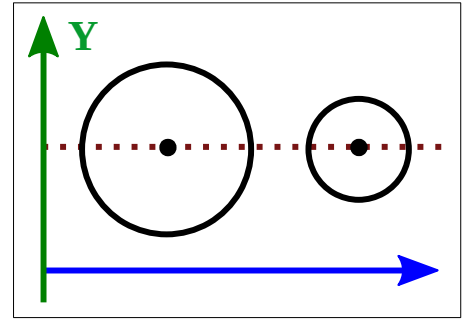
Если уравнение имеет 2 решения, необходимо выбрать решение, соответствующее требованиям устойчивого равновесия. Это решение с наибольшим  $v$ .

Коэффициент при  $v^2$  всегда больше нуля, поэтому уже на этапе разработки понятно, какое из 2 решений (с “+” или “-” у квадратного корня) будет больше.

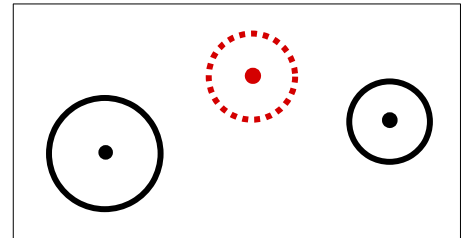
Также нужно сформулировать критерии устойчивого равновесия.

### Итого алгоритм:

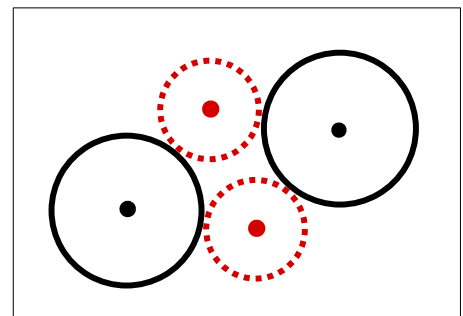
1. По формуле (2) вычислить  $u_2$  и  $v_2$ , при  $u_2=0$  решений нет;
2. По формуле (8) вычислить  $t$ ;
3. Решить уравнение (11), получить  $v$ ;
4. По формуле (9) вычислить  $u$ ;
5. Проверить критерии устойчивого равновесия;
6. Исходя из формулы (1) получить  $x$  и  $y$ .



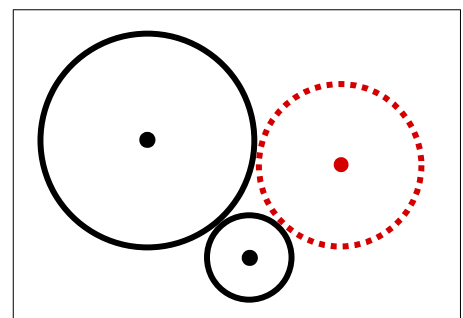
$y_1 = y_2$ .



Уравнение не имеет решений.



Уравнение имеет 2 решения.



Нет устойчивого равновесия.