Расстояние между двумя отрезками в пространстве

Задача вычисления расстояния между двумя отрезками в пространстве, нахождения ближайших точек на этих отрезках может появиться при работе с трехмерными геометрическими объектами.

Представляем примененный метод решения задачи и приводим примеры приложений, в которых она возникла.

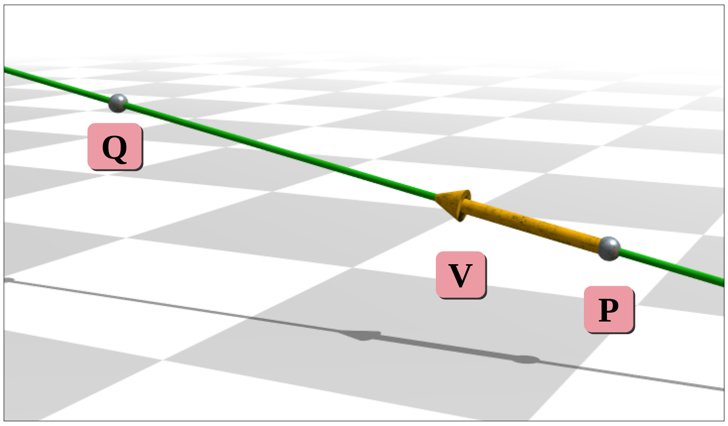
Описание

Прямая задается точкой $\vec{P}$ и единичным направляющим вектором $\vec{V}$. Точка $\vec{Q}$ на прямой задается параметрическим уравнением

$$\vec{Q} = \vec{P} + d\vec{V}, \quad d \in (-\infty, \infty), \qquad (1)$$

где d – расстояние от точки $\vec{P}$ до точки $\vec{Q}$ (отрицательное в случае, если берется в направлении, противоположному $\vec{V}$).

Отрезок задается прямой и длиной отрезка l.



Кратчайшее расстояние между двумя прямыми соответствует отрезку, концы которого находятся на этих прямых и перпендикулярного обеим прямым.

Набросок доказательства

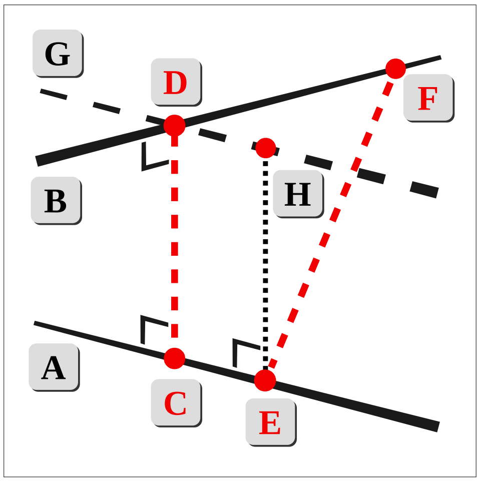
Даны прямые A и B, отрезок CD. Рассмотрим отрезок EF, не совпадающий с CD.

Дополнительные построения.
Проведем через точку D прямую G, параллельную A.
Из точки E проведем перпендикуляр к прямой G, построим точку H.

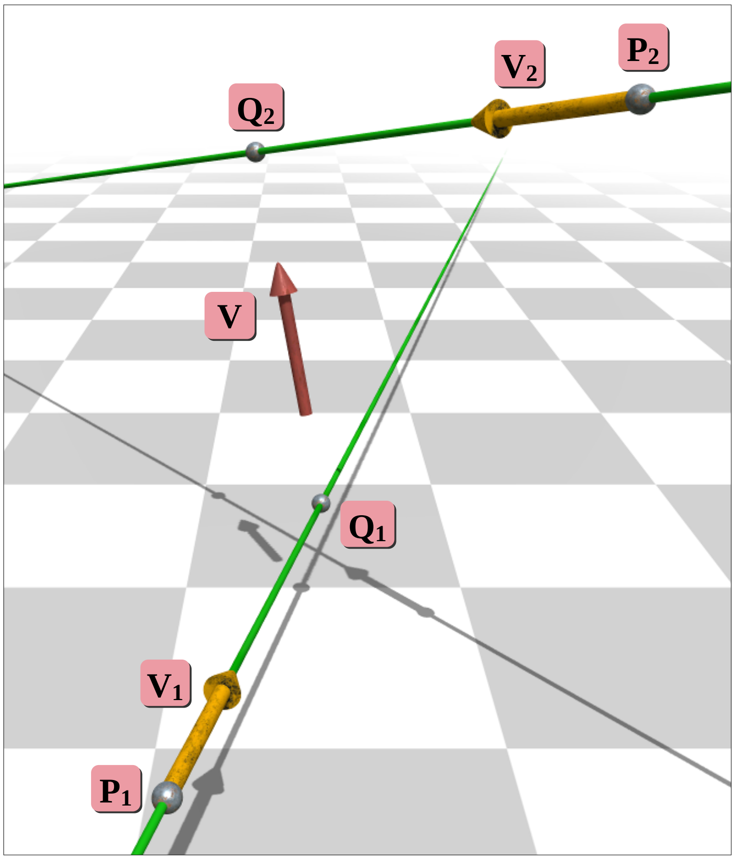
Длина EH равна длине CD.

Угол EHF равен 90°.

Длина EF больше длины EH, следовательно длина EF больше длины CD.



Нахождение единичного вектора V



Векторное произведение двух векторов $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, по определению:

1. Это вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам;
2. Длина векторного произведения равна произведению длин исходных векторов на синус угла между ними: $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \, \|\vec{V}_2\| \sin\theta$.

Пункту (1) соответствуют два противоположных вектора. Для решения данной задачи подойдет любой из них.

Если исходные вектора параллельны, синус угла между ними равен нулю, длина векторного произведения равна нулю.

Чтобы обойти проблемы, связанные с ограниченной точностью чисел на компьютере, рассматриваем векторы как параллельные, если длина векторного произведения менее небольшой величины (например, 10^{-9}).

В этом случае решается задача “Расстояние между параллельными отрезками”.

Для получения единичного вектора *V* векторное произведение делится на его длину:

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|} \,. \qquad (2)$$

Составление уравнения

Обозначим:

- d_1 - расстояние от точки $\vec{P}_1$ до точки $\vec{Q}_1$;
- d - расстояние от $\vec{Q}_1$ до $\vec{Q}_2$;
- d_2 - расстояние от $\vec{P}_2$ до $\vec{Q}_2$.

Рассуждаем так: если из точки $\vec{P}_1$ пройти по прямой расстояние d_1 (до точки $\vec{Q}_1$), затем расстояние d вдоль вектора $\vec{V}$ (до точки $\vec{Q}_2$), затем расстояние d_2 в направлении, противоположном $\vec{V}_2$, то оказываемся в точке $\vec{P}_2$:

$$\vec{P}_1 + d_1\vec{V}_1 + d\vec{V} - d_2\vec{V}_2 = \vec{P}_2 \qquad (3)$$

Константы переносятся в правую часть:

$$d_1\vec{V}_1 + d\vec{V} - d_2\vec{V}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \qquad (4)$$

Получено линейное уравнение с векторными коэффициентами (3-компонентные векторы) с 3 переменными.

Решение уравнения

Векторные коэффициенты записываются в столбцы матрицы, получается расширенная матрица 3x4:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} V_{1x} & V_x & -V_{2x} & P_{2x}-P_{1x} \\ V_{1y} & V_y & -V_{2y} & P_{2y}-P_{1y} \\ V_{1z} & V_z & -V_{2z} & P_{2z}-P_{1z} \end{array}\right] \quad (5)$$

Базисные векторы в левой части расширенной матрицы (матрица коэффициентов) ненулевые и не находятся в одной плоскости (охватывают трехмерное пространство), следовательно как матрица коэффициентов, так и расширенная матрица имеют полный ранг и система линейных уравнений имеет строго одно решение.

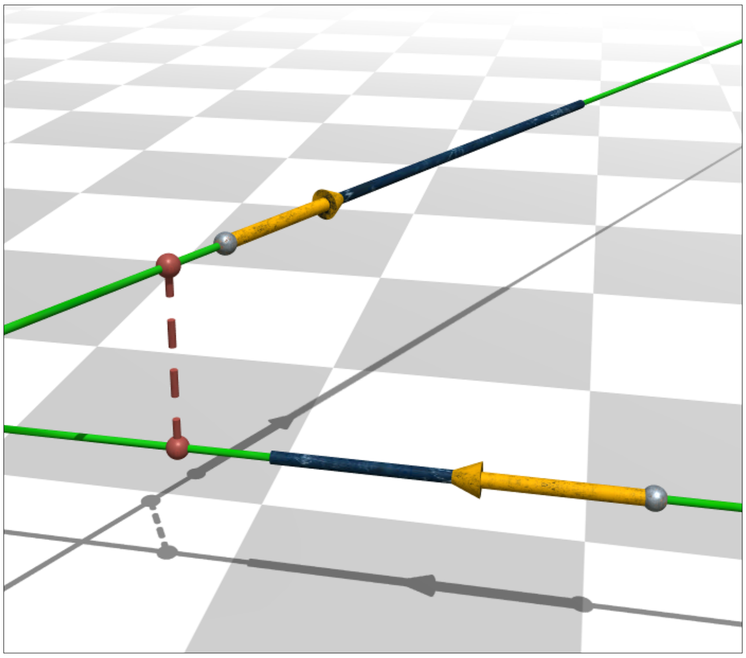
Применяется метод Гаусса с выбором главного элемента, в результате получается вектор искомых значений $\begin{bmatrix} d_1 \\ d \\ d_2 \end{bmatrix}$.

Расстояние между прямыми d может получиться отрицательным в зависимости от того, каким оказалось направление $\vec{V}$. Вычисляется абсолютное значение $|d|$.

Проверка границ отрезков

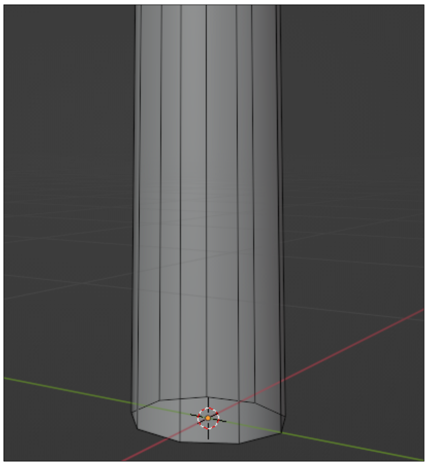
Проверяется – находятся ли ближайшие точки на бесконечных прямых в границах отрезков, то есть выполняется ли условие $d_n \geqslant 0 \wedge d_n \leqslant l_n, \ \ n = 1, 2,$ где l_n - длина n-го отрезка. Если хотя бы одна из ближайших точек оказывается за пределами отрезка, то решается задача “Расстояние между отрезком и точкой” или “Расстояние между двумя точками”.

В результате получены не координаты ближайших точек, а расстояния $d_{1,2}$ от точек $\vec{P}_{1,2}$, которыми заданы прямые, вдоль направляющих векторов. Если нужны координаты ближайших точек, то они вычисляются по уравнению (1).

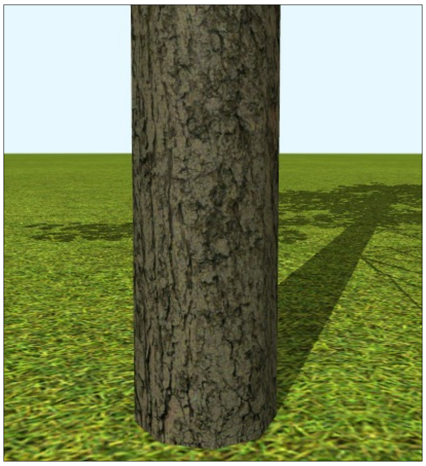


Обе ближайшие точки на бесконечных прямых находятся за пределами отрезков.

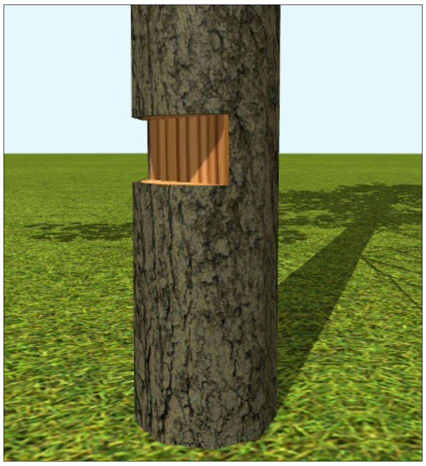
Приложение А. Пример использования в программе



1. Исходный многогранник в программе Blender.

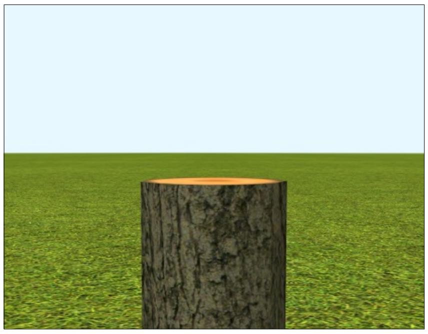


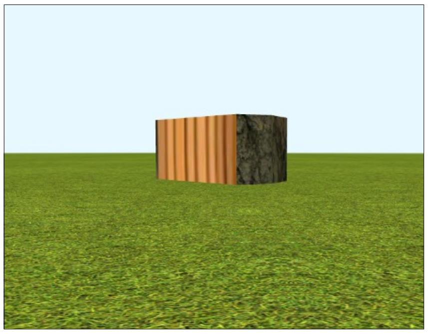
2. Этот же объект в приложении.

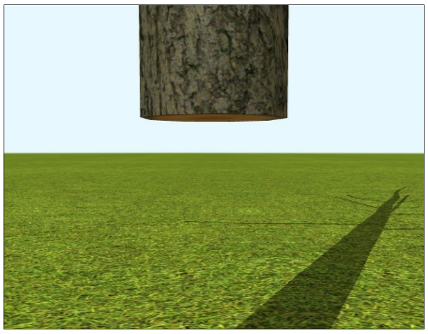


3. Объект был изменен в соответствии с ходом работ над объектом.

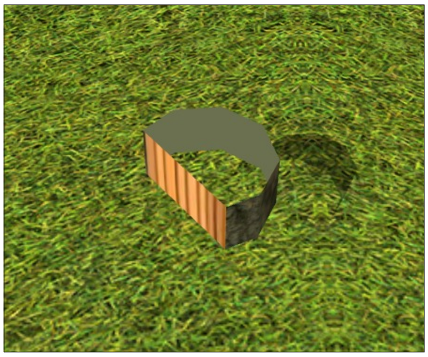
На изображении (3) справа три многогранника. Они были получены созданием копий исходного многогранника и последующим выполнением сечения многогранника плоскостью:



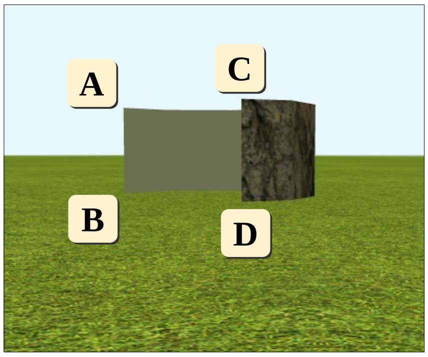


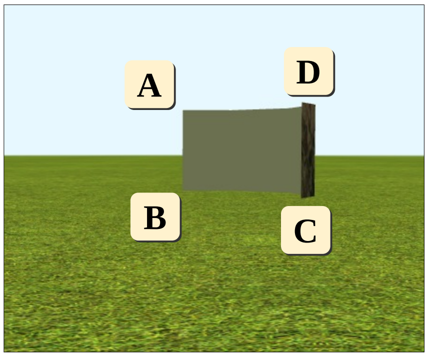


Обращаем внимание на многогранник в центре (см. изображения ниже). Это незакрытый многогранник. В приложении существенное количество незакрытых многогранников, но пользователю этого не видно по понятным причинам.



Незакрытый многогранник – вид сверху.





Один из этапов работы алгоритма сечения многогранника плоскостью – создание новой грани (опционально). На изображении - многогранники после сечения, но до создания новой грани.

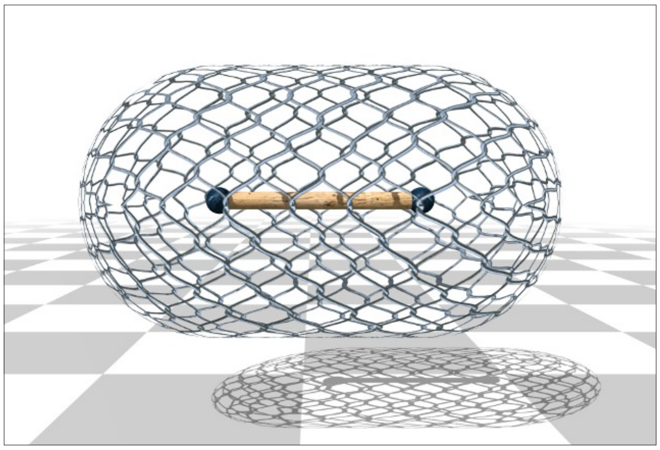
Есть отрезки AB и CD. Необходимо определить, какой должен быть многоугольник – ABCD или ABDC.

Для создания новой грани необходимы ребра новой грани – последовательность отрезков, составляющая многоугольник. При сечении незакрытого многогранника может возникнуть необходимость добавить недостающие отрезки.

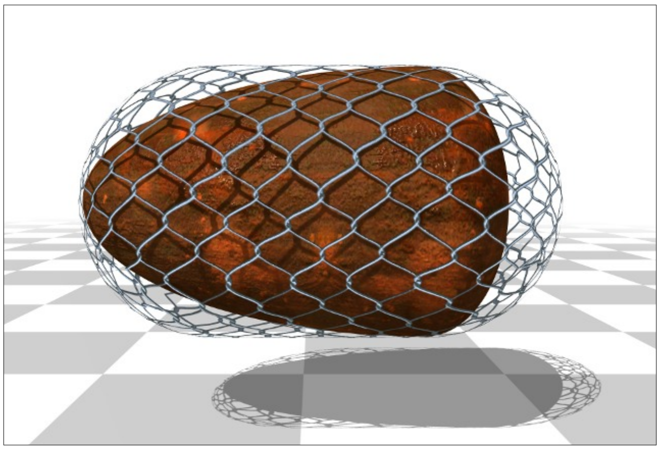
Несмотря на то, что при сечении плоскостью все новые вершины и отрезки должны находиться на этой плоскости, в связи с ограниченной точностью и округлением, они часто оказываются на некотором расстоянии от плоскости. В приложении, в котором объекты размером от долей миллиметра до сотен метров, и вычисления проводятся с использованием чисел IEEE 754 double, используется значение допуска 10^{-9}.

Пример приложения, в котором регулярно вычисляется расстояние между двумя отрезками в пространстве.

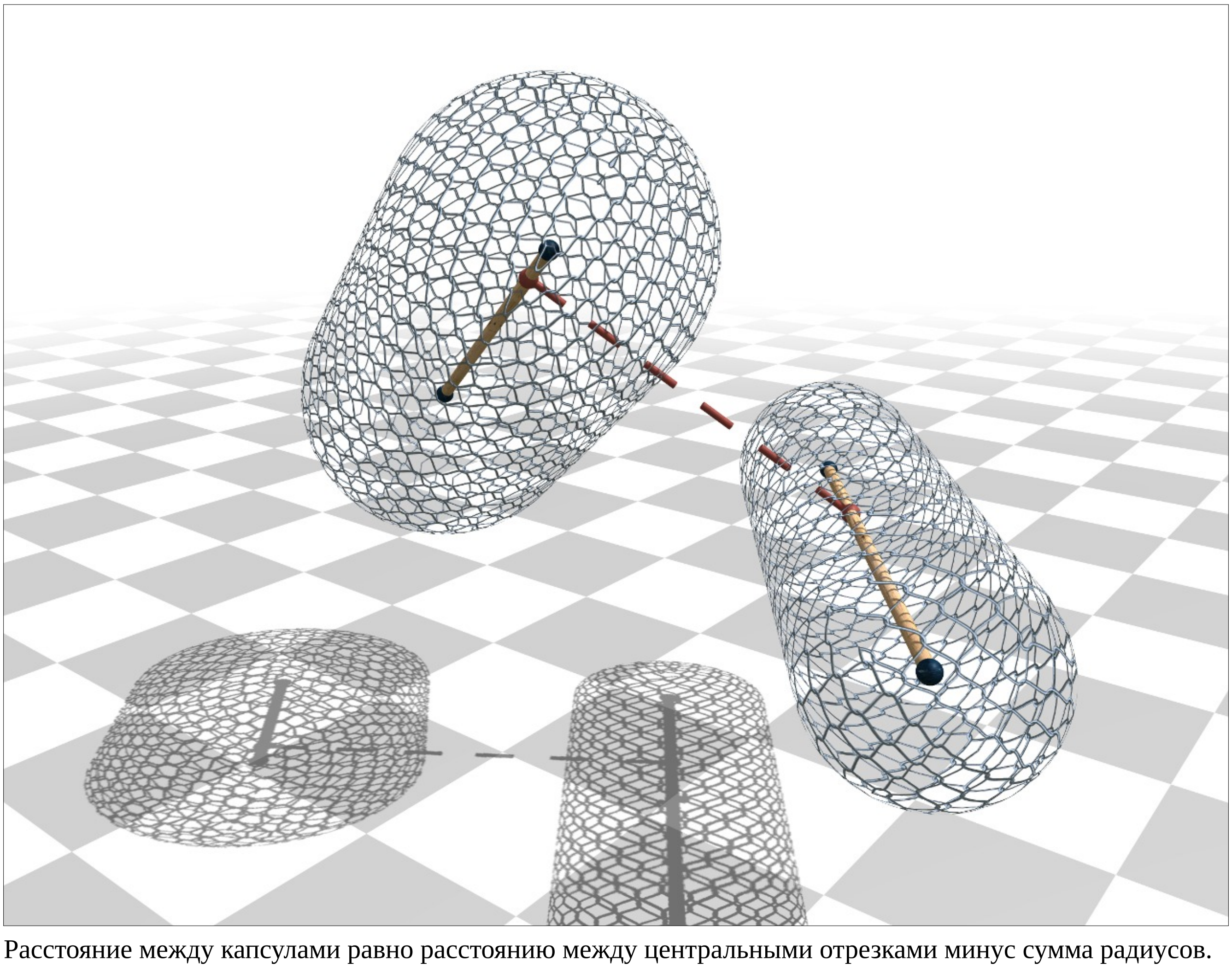
Приложение В. Работа с капсулой (capsule)



Один из способов задания капсулы – отрезок прямой и расстояние до поверхности *r*.



В капсулу вписан более сложный для вычислений объект.

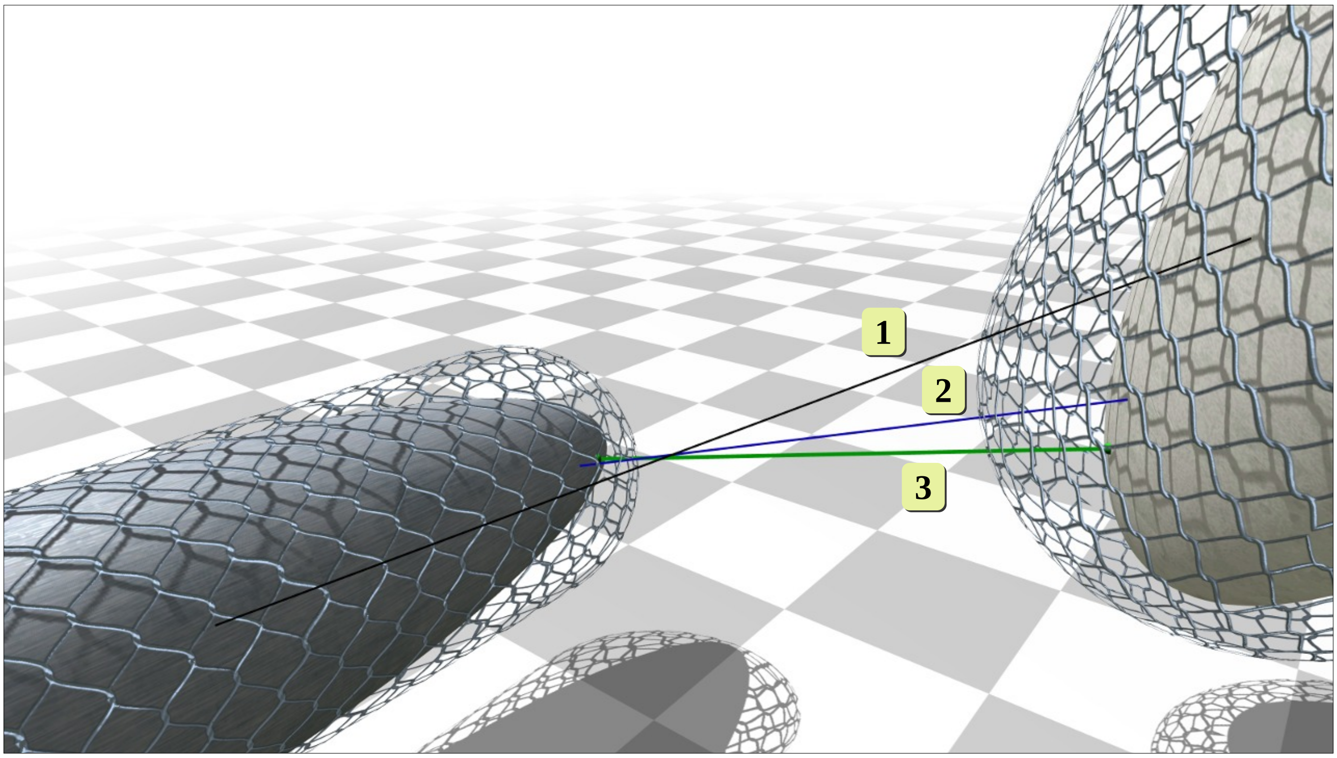


Расстояние между капсулами равно расстоянию между центральными отрезками минус сумма радиусов.

Ближайшие точки на двух эллипсоидах – нахождение начальной аппроксимации

Задача нахождения ближайших точек на двух непересекающихся эллипсоидах решается итеративным численным методом, таким как метод Ньютона в оптимизации.

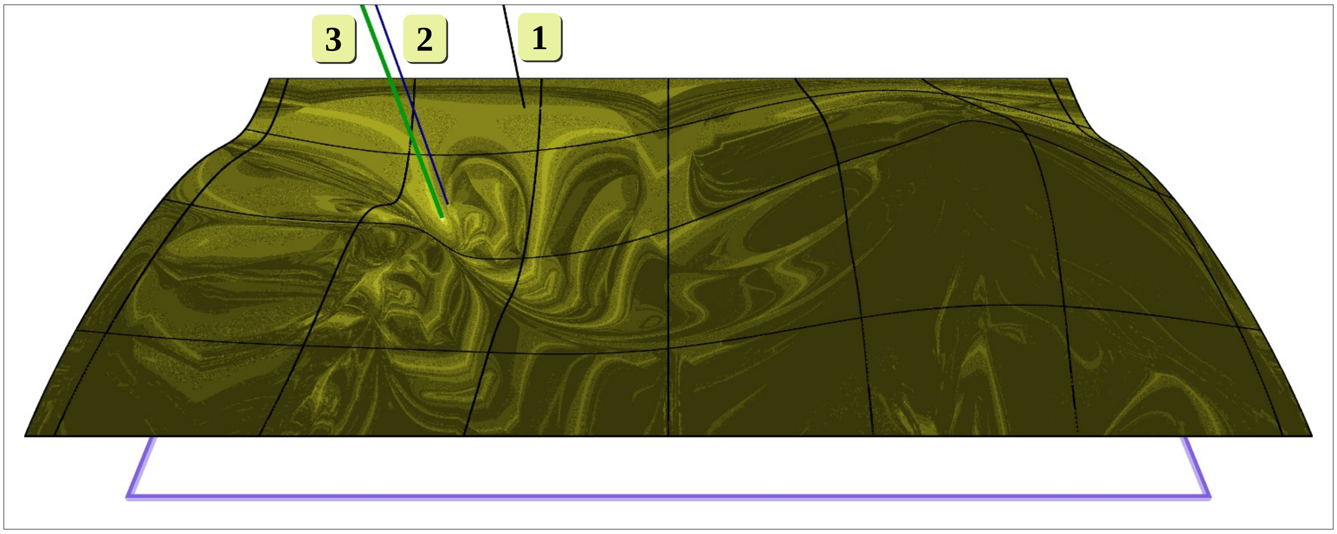
В начале работы метода необходимы начальные значения (2 точки на поверхностях), по возможности более-менее приближенных к искомому решению.



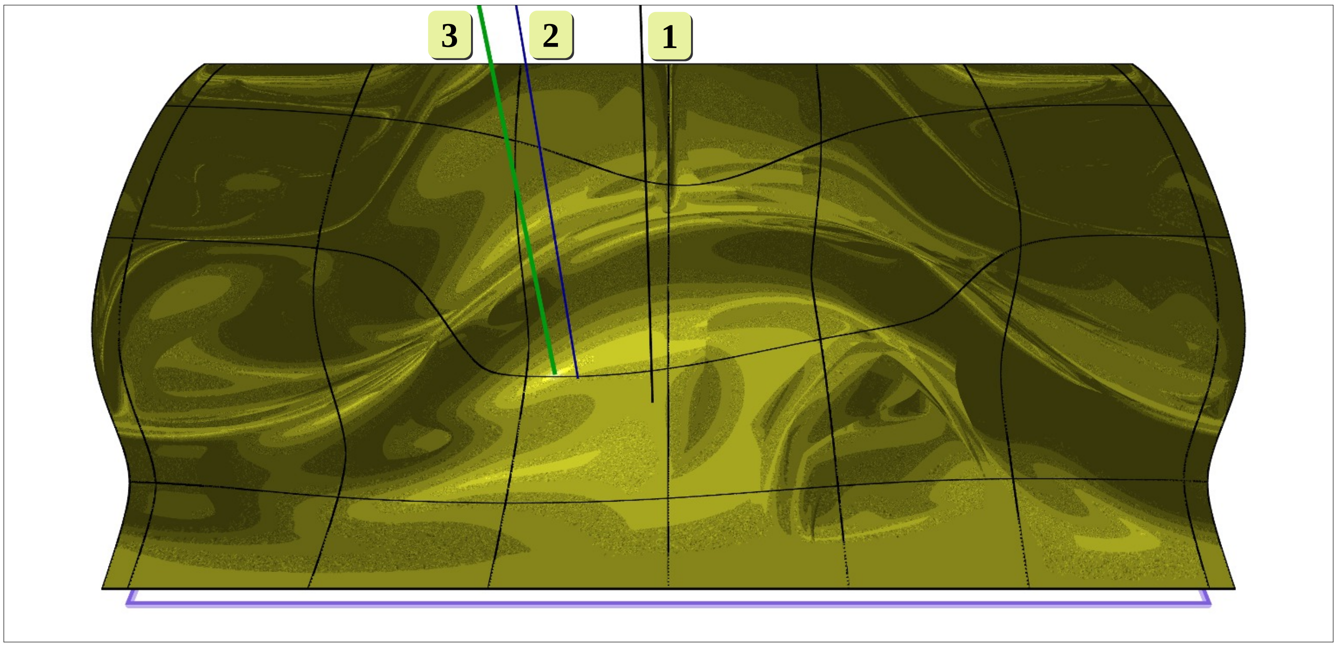
1 – отрезок между центрами фигур. **2** – отрезок между ближайшими точками на отрезках, которыми определены ограничивающие капсулы. **3** – отрезок между ближайшими точками на поверхностях.

Для нахождения точки пересечения отрезка и эллипсоида достаточно решения алгебраического уравнения 2 степени. Получится 2 решения. В связи с тем, что один конец отрезка находится внутри эллипсоида, а другой снаружи, то строго 1 точка пересечения будет в пределах отрезка.

Графики функции



Точки на эллипсоиде 1.



Точки на эллипсоиде 2.

Шкала яркости в зависимости от количества итераций
(для функций, имеющих одну точку сходимости)