Складирование природных ресурсов

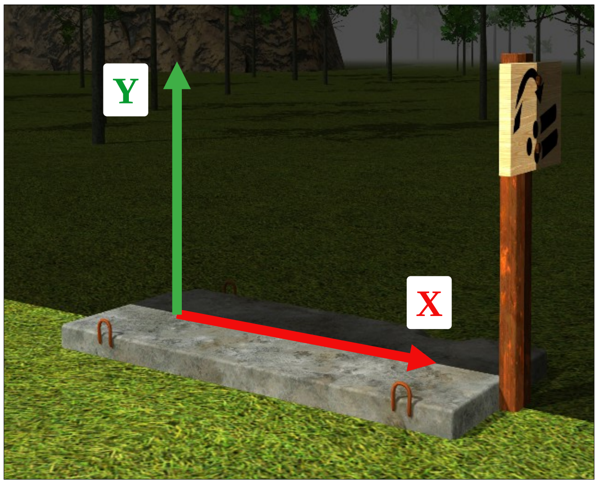
В приложении большое внимание уделено не только заготовке природных ресурсов, но и их складированию. Рассмотрим складирование дров и возникающие при этом задачи.

Геометрическая форма дров приблизительно соответствует цилиндрам. Цилиндры размещены в соответствии с законами физики: не пересекаются, не висят в воздухе, центры тяжести и точки опор расположены так, что достигается устойчивое равновесие.

При инициализации хранилища создается вертикальная плоскость, параллельная торцам цилиндров, и на этой плоскости создается двумерная система координат (см. изображение справа).

Есть функции перевода точек в эту систему координат и обратно.

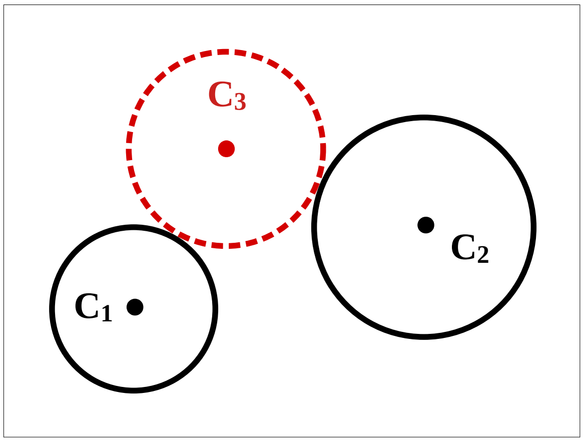
Далее задачи формулируются и решаются в этой двумерной системе координат.



Размещение круга сверху двух кругов

В хранилище находятся круги C_1 и C_2, и сверху необходимо положить круг C_3. Даны:

- C_1: координаты центра x_1, y_1, радиус r_1;
- C_2: координаты центра x_2, y_2, радиус r_2;
- C_3: радиус равен r_3.



Найти координаты центра C_3 либо сделать вывод, что такое размещение невозможно.

Задачу необходимо решить в общем виде для дальнейшего написания программного обеспечения. То есть нужна последовательность действий (шагов), такая, что задается 7 величин (x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2, r_3), в результате получается либо 2 величины (x, y), либо вывод о невозможности удовлетворительного размещения.

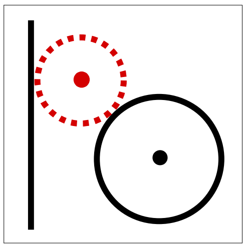
Для проверки приводим таблицу – несколько наборов исходных значений и какой должен получиться результат.

	x_1	y_1	r_1	x_2	y_2	r_2	r_3	x	y
1	2	1	1	5.5	1.5	1.5	0.55	3.450524	1.546334
2	2	1	1	5.5	1.5	1.5	0.5	-	-
3	1.5	1.5	0.25	1.5	4	1	1	-	-
4	4.5	1.5	0.5	2.5	1.5	0.25	1	3.328125	2.436327
5	4.5	1.5	0.5	2.5	1.5	0.25	8	-	-
6	1.5	-0.3	0.5	-2.5	0.8	0.2	2	-0.3717501	1.357272

Совершенствование способов складирования

Рассмотренный выше способ складирования не вполне удобен для последующей работы: транспортирование с места заготовки на склад, потребителю и т.д., в том числе с применением механизированных средств.

Направление дальнейшей разработки приложения - использование контейнеров с вертикальными боковыми стенками.



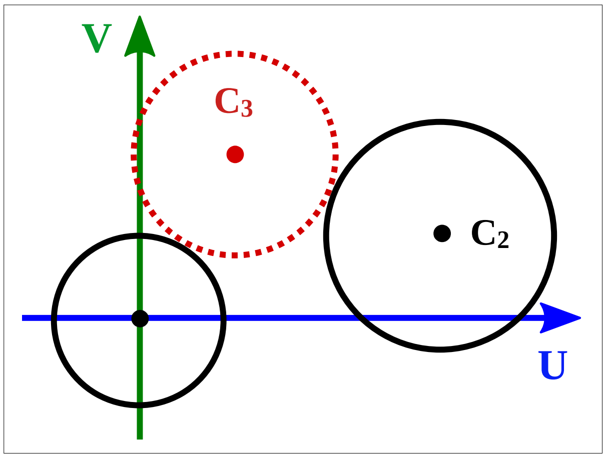
При размещении очередного цилиндра в контейнере он может быть размещен между уже находящимся в контейнере цилиндром и боковой стенкой (см. справа).

В будущем нельзя исключить появление контейнеров с невертикальными боковыми стенками, негоризонтальным дном, а также неплоскими стенками или дном.

Приложение А. Алгебраическое решение задачи

Создается новая система координат с осями *u*, *v*, такая, чтобы центр круга C_1 находился в начале координат:

$$\begin{aligned} u &= x - x_1 \\ v &= y - y_1 \end{aligned} \qquad (1)$$



В эту систему координат переводится центр C_2:

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 - x_1 \\ v_2 &= y_2 - y_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Без преобразования координат количество записей и выполняемых арифметических действий существенно увеличится.

Обозначим центр круга C_3 - *u*, *v*.

Запишем уравнения расстояний между центрами C_3 и C_1, и центрами C_3 и C_2:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2 \\ (u - u_2)^2 + (v - v_2)^2 = (r_3 + r_2)^2 \end{cases} \qquad (3)$$

Получается система из 2 уравнений с 2 неизвестными. Раскроем скобки, содержащие неизвестные:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2 \\ u^2 - 2uu_2 + u_2^2 + v^2 - 2vv_2 + v_2^2 = (r_3 + r_2)^2 \end{cases} \qquad (4)$$

Обе неизвестные *u*, *v* есть как в 1-й степени, так и в квадрате. Если квадраты неизвестных не сокращаются, решить уравнения будет трудно (получится алгебраическое уравнение 4-й степени).
В данном случае у квадратов неизвестных в обоих уравнениях одинаковые коэффициенты и есть возможность их сократить.

Вычтем из второго уравнение первое:

$$-2uu_2 + u_2^2 - 2vv_2 + v_2^2 = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 \qquad (5)$$

Далее мы хотим выразить одну переменную через другую и подставить в 1-е уравнение системы (4).

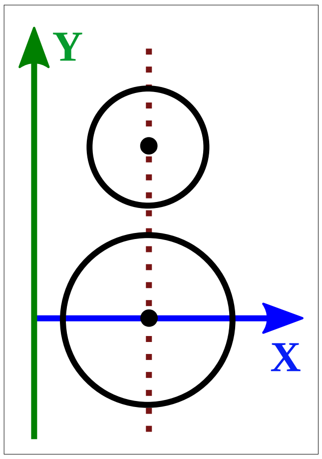
Выразим *u* как зависимость от *v*. Для этого сначала перенесем все слагаемые, содержащие *u*, в левую часть, а все остальные в правую:

$$-2uu_2 = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 + 2vv_2 - v_2^2 \qquad (6)$$

Далее разделим обе части на $-2u_2$:

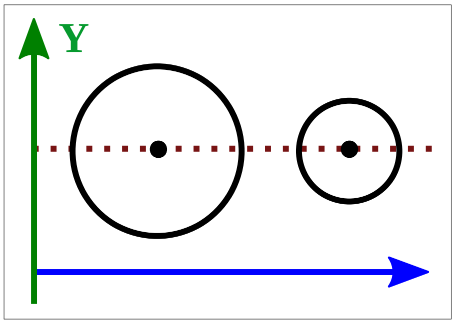
$$u = \frac{(r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 + 2vv_2 - v_2^2}{-2u_2}, \quad u_2 \neq 0\,. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай $u_2 = 0$. По уравнению (2) это происходит в случае $x_1 = x_2$ (центры C_1 и C_2 находятся на одной вертикальной линии). Этот случай - на изображении слева.
Расположение кругов таково, что удовлетворительное размещение C_3 невозможно.



$x_1 = x_2$.

Что будет, если выразить v как зависимость от u. Получится выражение, содержащее v_2 в знаменателе. Случай $v_2=0$ соответствует $y_1=y_2$. При таком расположении кругов удовлетворительное размещение C3 вполне возможно.



y1 = y2.

Поэтому выражаем u через v. Для упрощения создадим переменную t, в которую соберем все слагаемые, не содержащие v, из числителя уравнения (7):

$$t = (r_3 + r_2)^2 - (r_3 + r_1)^2 - u_2^2 - v_2^2 . \qquad (8)$$

Итого

$$u = \frac{t + 2 v v_2}{-2u_2} , \quad u_2 \neq 0 . \qquad (9)$$

Далее подставляем (9) в 1-е уравнение системы (3):

$$\left(\frac{t + 2 v v_2}{-2u_2}\right)^2 + v^2 = (r_3 + r_1)^2 . \qquad (10)$$

Выполняем ряд алгебраических преобразований с целью в результате получить уравнение, сгруппированное по степеням v и нулем в правой части:

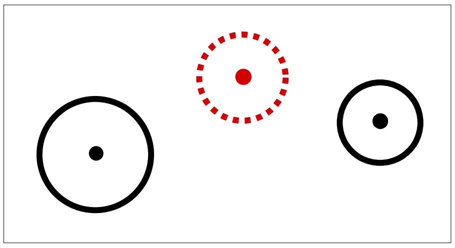
$$v^2 \left(\frac{v_2^2}{u_2^2} + 1\right) + v \frac{t v_2}{u_2^2} + \frac{t^2}{4 u_2^2} - (r_3 + r_1)^2 = 0 . \qquad (11)$$

Это алгебраическое уравнение 2-й степени, решение которого широко изучается.

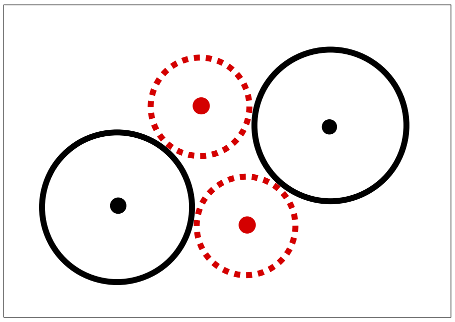
Если уравнение имеет 2 решения, необходимо выбрать решение, соответствующее требованиям устойчивого равновесия. Это решение с наибольшим v.

Коэффициент при v^2 всегда больше нуля, поэтому уже на этапе разработки понятно, какое из 2 решений (с “+” или “-” у квадратного корня) будет больше.

Также нужно сформулировать критерии устойчивого равновесия.



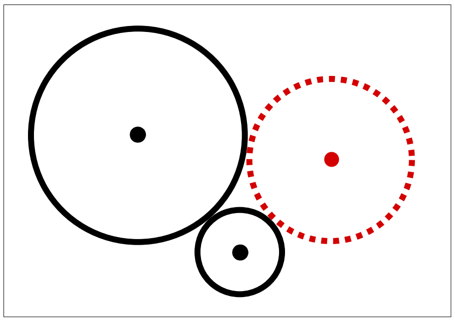
Уравнение не имеет решений.



Уравнение имеет 2 решения.

Итого алгоритм:

1. По формуле (2) вычислить u_2 и v_2, при $u_2=0$ решений нет;
2. По формуле (8) вычислить t;
3. Решить уравнение (11), получить v;
4. По формуле (9) вычислить u;
5. Проверить критерии устойчивого равновесия;
6. Исходя из формулы (1) получить x и y.



Нет устойчивого равновесия.