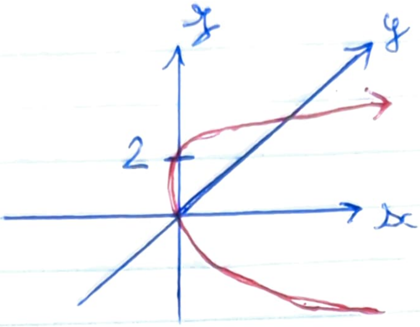
Chan
Witzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
17/02/2024

Fonctions vectorielles, dérivées et intégrales.

Série 4.

10.1) 10)



38) On pose $x = t$
$\Rightarrow y = t^2$ et $z = 4t^2 + t^4$.

Soit $r(t) = (t, t^2, 4t^2 + t^4)$, $t \in \mathbb{R}$.

43) Graphiquement, on observe que les courbes se croisent en un point.
Par le calcul, on résout :

$$\begin{cases} t^2 = 4t - 3 \\ t^2 = 7t - 12 \\ t^2 = 5t - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \quad (1) \\ t^2 - 7t + 12 = 0 \quad (2) \\ t^2 - 5t + 6 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4$
$t_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad t_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

(2) $\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 12 = 1$
$t_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \qquad t_2 = \frac{7-1}{2} = 3$

(3) $\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 6 = 1$
$t_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Ce système est résolu pour $t = 3$.
Donc au point $(9, 9, 9)$, les courbes se croisent.

10.2) 18) On a $\vec{r}(t) = 2\sin(t)\,\vec{i} + 2.\cos(t)\,\vec{j} + \tan(t).\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{r}\,'(t) = (2.\cos(t), -2\sin(t), \cos^{-2}(t))$

Donc $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = (2.\cos(\frac{\pi}{4}), -2\sin(\frac{\pi}{4}), \cos^{-2}(\frac{\pi}{4}))$
$= (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$

Le vecteur tangent unitaire est donc :

$$T(\frac{\pi}{4}) = \frac{\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4})}{\|\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4})\|} = \frac{(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)}{\sqrt{2+2+4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\rightarrow \vec{T}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

32) * Pour savoir si les courbes se croisent, on résout :

$$\begin{cases} t = 3-s \\ 1-t = s-2 \\ s^2 = 3+t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3-s \\ 1-t = s-2 \\ s^2 = 3+(3-s)^2 \Rightarrow s^2 = 3+9-6s+s^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6s = 12 \Rightarrow s = 2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3-s = 3-2 = 1 \\ t = 1-s+2 \Rightarrow t = 1-2+2 = 1. \end{cases}$$

Donc les courbes se croisent au point $(1,0,4)$ lorsque $t=1$ et $s=2$.

* Calculons l'angle entre les deux vecteurs tangents :

$\vec{r_1}\,'(t) = (1, -1, 2t) \Rightarrow \begin{cases} \vec{r_1}\,'(1) = (4, -1, 2) \\ \vec{r_2}\,'(2) = (-1, 1, 4) \end{cases}$

$\vec{r_2}\,'(s) = (-1, 1, 2s)$

Par le produit scalaire :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r_1}\,'(1).\vec{r_2}\,'(2)}{\|\vec{r_1}\,'(1)\|.\|\vec{r_2}\,'(2)\|}\right).$$

$\vec{r_1}\,'(1).\vec{r_2}\,'(2) = 1.(-1) + (-1).1 + 2.4 = 8-2 = 6.$

$\|\vec{r_1}\,'(1)\|.\|\vec{r_2}\,'(2)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} \times \sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}$
$= \sqrt{6} \times \sqrt{18} = 6\sqrt{3}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \simeq 54{,}74°.$$