Dérivée directionnelle et vecteur gradient

Chan
Witzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
/04/2024

Série 10.

11.6) 6) On a $f(x,y) = x \cdot \sin(x \cdot y)$; $P(2,0)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Soit $\vec{u}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ unitaire.
On applique donc :

$$f'_{\vec{u}}(x,y) = f'_x(x,y) \cdot \cos\theta + f'_y(x,y) \cdot \sin\theta.$$

$$\Rightarrow f'_x(x,y) = \sin(xy) + x \cdot y \cdot \cos(x \cdot y).$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = x^2 \cos(x \cdot y)$$

On a donc $f'_{\vec{u}}(2,0) = (\sin(0) + 0) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + (4\cos(0)) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

12) On a $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $P(2,1)$; $\vec{v}(-1,2)$.

Soit $\nabla f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\vec{j}$

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ donc $\vec{v}$ n'est pas unitaire.

$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ est un vecteur unitaire.

Enfin, $f'_{\vec{u}}(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \vec{u}$

$$= \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \cdot (-1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}}{\sqrt{5}} = 0.$$

28) Pour savoir si la profondeur diminue ou augmente, on étudie la variation de z lorsque la barque part du point $(80,60)$ et rejoint la bouée en $(0,0)$.

On cherche donc la dérivée de z au point $(80,60)$ dans la direction de $\vec{v}(-80;-60)$.
On a : $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$.

$\nabla z(x,y) = 0,04x\vec{i} - 0,003y^2\vec{j}$.
$\nabla z(80,60) = (3,2 ; -10,8)$

$\vec{v}$ n'est pas unitaire car $\|\vec{v}\| = \sqrt{80^2+60^2} = 100$
$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Donc $z'_{\vec{u}}(80,60) = (3,2 ; -10,8) \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
$= 3,2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (-10,8)\left(-\frac{3}{5}\right) = 3,92$

La pente est positive, le lac est donc moins profond en rejoignant la bouée.

40) On a la surface :
$y = x^2 - z^2$ et le point $(4,7,3)$.
La surface est de niveau $k=0$.
$\Rightarrow f(x,y,z) = y - x^2 + z^2$.

$\rightarrow f'_x = -2x$; $f'_y = 1$; $f'_z = 2z$.

$\rightarrow f'_x(4,7,3) = -8$; $f'_y(4,7,3) = 1$; $f'_z(4,7,3) = 6$.

Soit : $-8(x-4) + (y-7) + 6(z-3) = 0$.
$\Rightarrow -8x + 32 + y - 7 + 6z - 18 = 0$
$\Rightarrow -8x + y + 6z + 7 = 0$.

Pour la droite normale : $\vec{r}(t) = (4,7,3) + t(-8,1,6)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 4-8t \\ y(t) = 7+t \\ z(t) = 3+6t \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x-4}{8} = y-7 = \frac{z-3}{6}$.

52) Selon les deux surfaces, on a :

$f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2$ avec $k_1 = 9$.

Et $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z$ avec $k_2 = -24$

Et le point $(1,1,2)$.

$\rightarrow f'x = 6x \; ; \; f'y = 4y \; ; \; f'z = 2z$.

$\rightarrow f'x(1,1,2) = 6 \; ; \; f'y(1,1,2) = 4 \; ; \; f'z(1,1,2) = 4$.

Soit le plan tangeant : $6(x-1)+4(y-1)+4(z-2) = 0$

$\Rightarrow 6x-6+4y-4+4z-8 = 0$

$\Rightarrow 6x+4y+4z-18 = 0$

$\rightarrow g'x = 2x-8 \; ; \; g'y = 2y-6 \; ; \; g'z = 2z-8$.

$\rightarrow g'x(1,1,2) = -6 \; ; \; g'y(1,1,2) = -4 \; ; \; g'z(1,1,2) = -4$.

Soit le plan tangeant : $-6(x-1)-4(y-1)-4(z-2) = 0$

$\Rightarrow 6x+4y+4z-18 = 0$

Les plans tangeants sont donc bien commun.