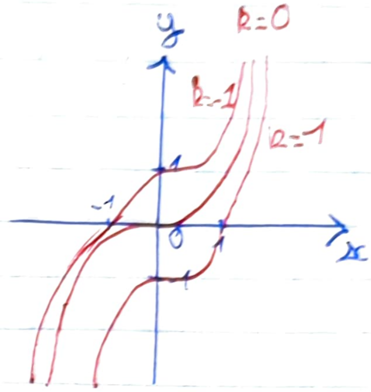
Fonctions de plusieurs variables, limite et continuité.

Ethan
Witzel
Marco
SMAP 107
WITM20040400
22/03/2024

Série 7



11.1) 20) Soit $f(x,y) = x^3 - y$.
On pose $f(x,y) = k$.
$\Rightarrow k = x^3 - y$
$\Rightarrow y = x^3 - k$.
Pour $k = 0, -1$ et 1 :
$y = x^3 + 1$; $y = x^3$; $y = x^3 - 1$.

42) Soit $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$.
On pose $f(x,y,z) = k$
$\Rightarrow k = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
$\Rightarrow \frac{x^2}{k} + \frac{3y^2}{k} + \frac{5z^2}{k} = 1$

On a donc un ellipsoïde centré à l'origine.

11.2) 8) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + \sin^2(y)}{2x^2 + y^2}$

Soit 2 chemins C_1 et C_2.
On a : $\begin{cases} f(0,y) = \dfrac{\sin(y)^2}{y^2} & \text{pour } C_1 \\ f(x,0) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} & \text{pour } C_2 \end{cases}$

Sur C_1, $1 \leq \sin(y)^2 \leq 1$
$\frac{1}{y^2} \leq \frac{\sin(y)^2}{y^2} \leq \frac{1}{y^2}$.

Or, $\lim_{y \to 0} \frac{1}{y^2} = 0$ donc $f(0,y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0$

Sur C_2, $f(x,0) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

Nous n'avons pas la même limite sur tous les chemins, la limite n'existe pas.

11.2) 16) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$.

Soit C_1, les points de la forme $(0,y)$:
On a $f(0,y) = -y^2 \xrightarrow[y \to 0]{} 0$

Soit C_2, de la forme $(x,0)$:
On a $f(x,0) = x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Soit C_3, de la forme (x, mx) :
$f(x,mx) = \dfrac{x^4 - m^4 x^4}{x^2 + m^2 x^2} = \dfrac{x^4(1-m^4)}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{x^2(1-m^4)}{(1+m^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

La limite le long de ces trajectoires converge vers la même valeur donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Par le théorème des gendarmes :
On a : $\dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x^2 - y^2$.

Soit $-|x^2| \leq x^2 \leq |x^2|$
$-|x^2| - y^2 \leq x^2 - y^2 \leq |x^2|$

Or, $-|x^2| - y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

11.2) 18) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Soit C_1 : $f(0,y,0) = 2 \xrightarrow[y \to 0]{} 2$

Et C_2 : $f(0,0,z) = 3 \xrightarrow[z \to 0]{} 3$.

Donc nous n'avons pas la même limite pour les deux trajectoires, elle n'existe donc pas.