Chan
Witzel
Marco
8MAP107
WITM20070405
20/02/2024

Longueur d'arc, courbure et mouvement dans l'espace

Série 5

10.3) 11) Soit : $\begin{cases} x^2 = 2y \\ 3z = x.y \end{cases}$

On pose $x = t$: $\begin{cases} t^2 = 2y \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} \\ z = \frac{x.y}{3} \Rightarrow t.\frac{t^2}{6} = \frac{t^3}{6} \end{cases}$

$\rightarrow \vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6})$

$\begin{cases} \vec{r}(0) = (0,0,0) \\ \vec{r}(6) = (6, \frac{6^2}{2}, \frac{6^3}{2}) = (6, 18, 36) \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 6.$

$\vec{r}'(t) = (1, t, \frac{t^2}{2})$: $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 + 4t^2 + 4t^4}{4}}$

$= \sqrt{\frac{(2+t^2)^2}{2^2}} = \frac{2+t^2}{2} = 1 + t^2$

$L = \int_0^6 1 + \frac{t^2}{2} . dt = [t + \frac{t^3}{6}]_0^6 = 6 + 36 - 0 + 0 = 42.$

24) On cherche la courbure k tel que : $k = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$.
Or, on la cherche au point $(1, 0, 0)$
Donc $t = 1$. $\rightarrow k = \frac{\|\vec{T}'(1)\|}{\|\vec{r}'(1)\|} = \frac{\|\vec{r}'(1) \wedge \vec{r}''(1)\|}{\|\vec{r}'(1)\|^3}$

$\vec{r}(t) = (t^2, \ln(t), t.\ln(t))$
$\vec{r}'(t) = (2t, \frac{1}{t}, \ln(t) + 1) \Rightarrow \vec{r}'(1) = (2, 1, 1)$
Soit $\|\vec{r}'(1)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
$\vec{r}''(t) = (2, -\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}) \Rightarrow \vec{r}''(1) = (2, -1, 1)$

$\vec{r}'(1) \wedge \vec{r}''(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -4)$

$\|r'(1) \wedge r''(1)\| = \sqrt{2^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Donc la courbure en ce point vaut :

$$K = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}^3} = \frac{2\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{18}.$$

48) On a $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ et le point $P(1,1,1)$.

Soit $\begin{cases} \vec{r}\,'(t) = (1, 2t, 3t^2) \Rightarrow \vec{r}\,'(1) = (1,2,3) \\ \vec{r}\,''(t) = (0,2,6t) \Rightarrow \vec{r}\,''(1) = (0,2,6). \end{cases}$

Le plan normal peut-être trouvé grâce au point P et au vecteur normal de ce plan, ici, $\vec{r}\,'(1)$.

On a donc :

$$(1,2,3)(\vec{s} - (1,1,1)) = 0 \quad \text{avec } \vec{s} = (x,y,z)$$

$\Rightarrow 1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0.$

$\Rightarrow \quad x + 2y + 3z - 6 = 0.$

Pour trouver le plan osculateur, on trouve le vecteur normal à ce plan qui est le produit vectoriel entre $\vec{r}\,'(1)$ et $\vec{r}\,''(1)$

$$\vec{r}\,'(1) \wedge \vec{r}\,''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = (6,-6,2)$$
$$= (3,-3,1)$$

$\Rightarrow 3(x-1) - 3(y-1) + (z-1)$

$\Rightarrow \quad 3x - 3y + z - 1 = 0.$

10.4) 18) On sait que $\begin{cases} \vec{v}(t) = r'(t) \\ \text{et } \vec{a}(t) = v'(t) = r''(t) \end{cases}$

Donc $\vec{v}(t) = (3t^2, 2t, 3t^2)$

et $\vec{a}(t) = (6t, 2, 6t)$

Donc selon la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F}(t) = m.\vec{a}(t)$$
$$= m(6t, 2, 6t) = (6m.t, 2m, 6m.t).$$

20) Lorsqu'un point matériel se déplace à une vitesse scalaire constante, cela signifie que le vecteur accélération est nul car :

$\vec{a}(t) = v'(t)$. Or, $\vec{v}(t) = k \Rightarrow \vec{v}'(t) = \vec{a}(t) = \vec{0}$

Pour montrer qu'ils sont orthogonaux, on effectue le produit scalaire :

$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = \|\vec{a}(t)\| \cdot \|\vec{v}(t)\| \cdot \cos\theta$.

Or $\vec{a}(t) = \vec{0}$ donc $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0 \Rightarrow \theta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Donc ces vecteurs sont bien orthogonaux.