Repères, vecteurs et produit scalaire.

Chan
Witzel
Marco
SMAP 107
WITM20040400
18/01/2024

Série 2.

9.1) 10) Nous appliquons l'équation d'une sphère en son centre : (2, -6, 4).

Nous obtenons :

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2} = 5$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 25.$$

Pour l'intersection avec le plan x.y, on aurait $z=0$. On obtiendrait donc : $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 25$.
Pour le plan x.z, $y=0$ donc :
$$(x-2)^2 + (z-4)^2 = 25.$$
De même pour le plan y z, $x=0$ donc :
$$(y+6)^2 + (z-4)^2 = 25.$$

41) La distance entre ces deux sphères correspond à la distance entre leurs deux centres moins la somme de leurs rayons.

Sphère 1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
Centre : (0,0,0) Rayon : $R_1 = \sqrt{4} = 2$.
Sphère 2 : $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 11$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z = -11$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = -11 + 4 + 4 + 4 = 1.$$

Centre : (2,2,2) Rayon : $R_2 = \sqrt{1} = 1$.

Distance entre les deux centres :
$$\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{12}.$$
Donc la distance entre les deux sphères est :
$$\sqrt{12} - (2+1) = \sqrt{12} - 3 = 2\sqrt{3} - 3.$$

9.2) 33) Pour déterminer un vecteur unitaire parallèle à la tangente de cette parabole, on détermine la pente à l'aide de la dérivée :

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x.$$

Au point $(2,4)$, on a $y' = 4$ représentant la pente.
Le vecteur tangent peut donc être $\vec{u} = (1,4)$
Par la suite : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$.
Le vecteur unitaire est donc :

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (1,4) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right).$$

9.3) 18) On sait que :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

Avec $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$:

$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\|\vec{b}\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\times 4 + 0\times 2 + (-2)\cdot(-3) = 10.$

Donc $\theta = \arccos\left(\frac{10}{3\times 5}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48°$.

29) On a $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$

Et $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = (\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b}) \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$.

$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3\times 5 + (-4)\times 0 = 15.$

$\rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$

Donc $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{15}{5} = 3.$

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = 3 \times \frac{1}{5} \times (3,-4) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$