Chan
Witzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
04/04/2024.

Approximation du 1er degré et dérivation de fonctions composées

Série 9.

11.4) 4) On a :
$z = x \cdot e^{x \cdot y}$ et le point $P(2,0,2)$
On cherche à appliquer :
$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Soit $f'_x = e^{xy} + x \cdot y e^{xy}$

$\Rightarrow f'_x(2,0) = e^0 + 0 = 1$

Soit $f'_y = x^2 e^{xy}$

$\Rightarrow f'_y(2,0) = (2)^2 e^{2 \cdot 0} = 4$

On a donc $z - 2 = x - 2 + 4y \Leftrightarrow z = x + 4y$

14) On a : $f(x,y) = \sqrt{x + e^{4y}}$ et le point $P(3,0)$.

Soit $f'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+e^{4y}}}$. Cette dérivée partielle existe et est continue.

Soit $f'_y = \dfrac{4e^{4y}}{2\sqrt{x+e^{4y}}}$. De même pour celle-ci.

Les dérivées partielles par rapport à x et y existent et sont continues donc $f(x,y)$ est différentiable.
$f'_x(3,0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ et $f'_y(3,0) = \frac{4}{4} = 1$

$f(x,y)$ est aussi différentiable au point P.

On applique ~~ensuite~~ la linéarisation :

$$L(x,y) = f(3,0) + f'_x(3,0)(x-3) + f'_y(3,0)(y-0)$$

$$L(x,y) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) + y$$

$$L(x,y) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} + y$$

36) Soit $PV = 8{,}31T \Leftrightarrow P(T,V) = \frac{8{,}31T}{V}$

On utilise donc la différentielle pour estimer la variation de la pression.

$$dP = P'_T\,dT + P'_V\,dV$$

$dT = 305 - 310 = -5K$ et $dV = 12{,}3 - 12 = 0{,}3L$

$P'_T = \frac{8{,}31}{V}$ et $P'_V = 8{,}31T \cdot -\frac{1}{V^2}$

Donc $dP = \frac{8{,}31}{V}(-5) + \frac{-8{,}31T}{V^2}(0{,}3)$

Avec $T = 310K$ et $V = 12L$.

$\Rightarrow \frac{8{,}31}{12}(-5) + \frac{(-8{,}31)\cdot 310}{12^2}(0{,}3) = -3{,}4625 - 5{,}366875$

$= -8{,}829375$ kPa.

11.5) 8) On a : $z = \arcsin(x-y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$.

On applique :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

Et $$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Donc $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

$\frac{\partial x}{\partial s} = 2s$; $\frac{\partial x}{\partial t} = 2t$; $\frac{\partial y}{\partial s} = -2t$; $\frac{\partial y}{\partial t} = -2s$.

Donc $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 2s - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot (-2t)$

$= \frac{2s+2t}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

Et $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 2t - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot (-2s)$.

$= \frac{2t+2s}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$.

36) Selon la formule du volume d'un cône, on a :
$f(r,h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$; $V = f(r,h)$; $r = g(t)$ et $h = k(t)$.

On cherche donc la vitesse de changement du volume :

$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Soit $\frac{dr}{dt} = 1{,}8$ cm/s et $\frac{dh}{dt} = -2{,}5$ cm/s.

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2}{3} \cdot \pi h \cdot r$ et $\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{3} \pi r^2$.

Donc $\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot r\,(1{,}8) + \frac{1}{3} \pi r^2\,(-2{,}5)$

Pour $r = 120$ et $h = 140$:

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (140) \cdot (120)(1{,}8) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (120)^2 (-2{,}5)$

$= 8160\pi$ cm^3/s.