Dérivées partielles

Chan
Wetzel
Marco
SMAP107
WITM20040100
02/04/2024

Série 8 :

11.3) 24) On a $w = \frac{e^v}{u+v^2} = e^v(u+v^2)^{-1}$.

Par rapport à u : $w'_u = -e^v \frac{1}{(u+v^2)^2}$.

Par rapport à v : Selon $(u.v)' = u'v + v'u$, on a :
$w'_v = e^v \cdot \frac{1}{u+v^2} - e^v \cdot \frac{2v}{(u+v^2)^2}$

34) On a $u = x^{\frac{y}{z}}$

$\Rightarrow u'_x = \frac{y}{z} x^{y/z - 1}$.

$\Rightarrow u'_y = \frac{d}{dg}(x^g) \times \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{z}\right)$ avec $g = \frac{y}{z}$.

$= \ln(x) \times x^g \times \frac{1}{z} = \ln(x) . x^{\frac{y}{z}} . \frac{1}{z}$.

$\Rightarrow u'_z = \frac{d}{dg}(x^g) \times \frac{d}{dz}\left(\frac{y}{z}\right)$ avec $g = \frac{y}{z}$.

$= \ln(x) \times x^{\frac{y}{z}} \times \left(-\frac{y}{z^2}\right)$

66) On a $g(x, y, z) = \sqrt{1 + x.z} + \sqrt{1 - x.y}$.
On cherche : g'''_{xyz} :

Soit $g'_x = \frac{z}{2\sqrt{1+x.z}} - \frac{y}{2\sqrt{1-x.y}}$

$\Rightarrow g''_{xy} = \frac{-2\sqrt{1-x.y} - \frac{x.y}{\sqrt{1-xy}}}{(2\sqrt{1-x.y})^2} = \frac{\cancel{x}.y-2}{\sqrt{1-x.y}(4-4xy)}$

Enfin, $g'''_{xyz} = 0$.

88) a) Soit $T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} . \sin(\omega t - \lambda x)$

$T'_x = T_1 [-\lambda e^{-\lambda x} . \sin(\omega t - \lambda x) - e^{-\lambda . x} \lambda \cos(\omega t - \lambda x)]$.

$T'_x = -T_1 . \lambda . e^{-\lambda x} (\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x))$.

Cette dérivée partielle représente la variation de la température en fonction de la profondeur (en pieds)

b) $T'_t = T_1 e^{-\lambda x} . \omega . \cos(\omega t - \lambda x)$.

Celle-ci représente la variation de la température en fonction du temps (en jours)

c) On a $T'_t = T_1 e^{-\lambda x} . \omega . \cos(\omega t - \lambda x)$

Calculons T''_{xx} :

$T''_{xx} = -T_1 \lambda [-\lambda e^{-\lambda x} (\sin(X) + \cos(X)) + e^{-\lambda . x} (-\lambda \cos(X) + \lambda \sin(X))]$

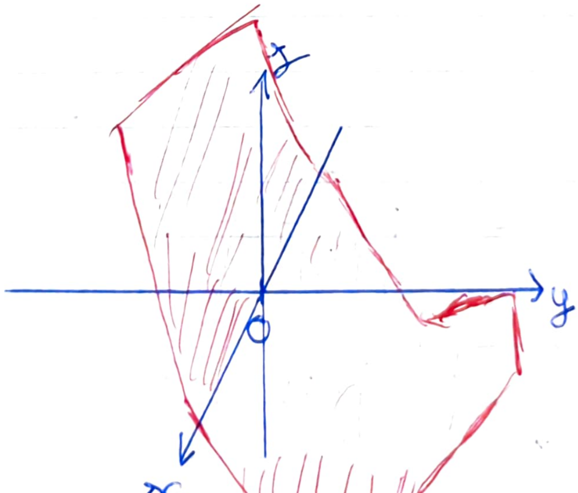
Avec $X = \omega t - \lambda x$.

$\Rightarrow T''_{xx} = T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x} (\sin(X) + \cos(X) + \cos(X) - \sin(X))$

$T''_{xx} = 2 T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$.

Donc $T'_t = k T''_{xx}$ ssi $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

d)



e) Dans l'expression $\sin(\omega t - \lambda . x)$, "$-\lambda x$" représente la limite de froid dans le sol. Plus x est grand plus cette limite sera profonde dans le sol. De même pour λ.