Chan
Wetzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
15/02/2024

Examen 1 - Reprise

1) a) $\cos(x) \cdot \cos^2(y)\, dx + \sin(y) \cdot \sec^2(x)\, dy = 0$

$\Rightarrow \frac{\cos(x)}{\sec^2(x)}\, dx + \frac{\sin(y)}{\cos^2(y)}\, dy = 0.$

$\Rightarrow \int \cos^3(x)\, dx + \int \frac{\sin(y)}{\cos^2(y)}\, dy = \int 0.$

$\Rightarrow \int (1-\sin^2(x)) \cdot \cos(x)\, dx + \sec(y) = K.$

$\Rightarrow \int \cos(x) - \cos(x) \cdot \sin^2(x)\, dx + \sec(y) = K.$

$\Rightarrow \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + \sec(y) = K.$

b) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = 5x^3.$

On repère l'équation différentielle linéaire avec:
$P(x) = -\frac{3}{x}$ et $Q(x) = 5x^3.$
Pour le facteur intégrant:

$$\begin{cases} e^{\int P(x)\, dx} = e^{-3\int \frac{1}{x} dx} = e^{-3\ln(x)} = x^{-3}. \\ e^{-\int P(x)\, dx} = e^{3\int \frac{1}{x} dx} = e^{3\ln(x)} = x^3. \end{cases}$$

$\Rightarrow y = x^3 \left(\int x^{-3} \cdot 5x^3\, dx + K\right)$

$\Rightarrow y = x^3(5x + K)$

$\Rightarrow y = 5x^4 + K \cdot x^3.$

2) a) On a : $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 8z = -2$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = -2 + 4 + 1 + 16$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 19.$

La sphère est centrée en $(-2, 1, -4)$ et son rayon vaut $\sqrt{19}$.

b) La sphère coupe le plan yOz lorsque $x = 0$:
Donc l'équation de cette courbe est:

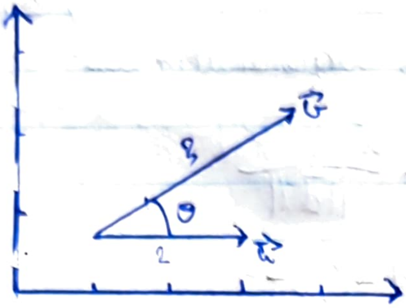
$4 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 19.$

$\Rightarrow (y-1)^2 + (z+4)^2 = 15$

3) a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= 6\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$.

b) $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= 6\times\frac{1}{2} = 3$.

c)



$\theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

4) Soit les deux vecteurs appartenant au plan : $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
$\vec{AB} = (1-1, 2-0, 3-1) = (0,2,2)$
$\vec{AC} = (-1-1, -2-0, 1-1) = (-2,-2,0)$
On peut ensuite déterminer un vecteur perpendiculaire grâce au produit scalaire:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2.0-2.(-2))\vec{i} - (0.0-(-2).2)\vec{j} + (0.(-2)-(-2).2)\vec{k} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Donc un vecteur perpendiculaire au plan est $(4,-4,4)$.

5) ~~Premièrement, on trouve un point au milieu de A(-4,2,1) et B(2,-4,3)~~
Soit $P(x,y,z)$, on pose $P_1(-4,2,1)$ et $P_2(2,-4,3)$
Pour obtenir un plan avec tous les points équidistants, on a: $\|\vec{P_1P}\| = \|\vec{P_2P}\|$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+8x+16+y^2-4y+4+z^2-2z+1 = x^2-4x+4+y^2+8y+16+z^2-6z+9$$

$$\Rightarrow 12x-12y+4z-8=0$$

$\Rightarrow 3x-3y+z-2=0$ est l'équation du plan.

6) Soit $P(-1,-1,3)$ et la droite $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit A sur la droite : $A = (1,2,-1)$
Le vecteur directeur de d est : $\vec{d}(1,-1,2)$.
On a, selon les règles trigonométriques :
$dist = \|\vec{AP}\| \sin\theta$
Or, $dist = \frac{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{AP}\| \cdot \sin\theta}{\|\vec{d}\|} = \frac{\|\vec{d} \wedge \vec{AP}\|}{\|\vec{d}\|}$.

On applique : $\vec{AP} = (-1-1, -1-2, 3+1)$
$= (-2, -3, 4)$

$$\vec{d} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = ((-1).4-(-3).2)\vec{i} - (4-(-2).2)\vec{j} + ((-3).-(-2)(-1))\vec{k}$$
$$= 2\vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k}$$
$\|\vec{d} \wedge \vec{AP}\| = \sqrt{4+64+25} = \sqrt{93}$
$\|\vec{d}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$
Donc $dist = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{62}}{2}$.

7) On a $z^2 = x^2 + y^2$.
Soit l'équation vectorielle d'une droite :
$\vec{r}(t) = (0,0,0) + t(a,b,c)$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
$\Rightarrow \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$

$\Rightarrow c^2t^2 = a^2t^2 + b^2t^2$
$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$.
Soit $25 = 16 + 9$, on a $c = 5$, $a = 4$ et $b = 3$
Une droite entièrement comprise dans le cône serait
donc : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 5t \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

8) a) On a $z^2 = \rho^2 \cdot \cos 2\theta$

$\Rightarrow z^2 = \rho^2 \cdot (2\cos^2\theta - 1)$

$z^2 = 2\rho^2 \cdot \cos^2\theta - \rho^2$

$z^2 = 2x^2 - (x^2 + y^2)$

$z^2 = 2x^2 - x^2 - y^2$

$z^2 = x^2 - y^2$

Car :

$x = \rho \cdot \cos\theta$

$y = \rho \cdot \sin\theta$

$\rho^2 = x^2 + y^2$.

b) Selon l'équation d'un cercle :

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$

$\Rightarrow r^2 \cdot \cos^2\theta - 4r \cdot \cos\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta = 0$.

9) L'équation $y^2 + z^2 = 1 + x^2$ représente une forme hyperboloïde à une nappe sur l'axe des x. Nous pouvons la dessiner :