Produit vectoriel, droites et plans.

Chan
Witzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
23/01/2024

Série 3:

9.4)5) On a une force de 60 N appliquée sur un bras de 18 cm avec un angle de 80°:

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \|\vec{r}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin\theta$$
$$= 0,18 \times 60 \times \sin 80$$
$$= 10,6\ \mathrm{J}$$

24) a) Soit:

$$\vec{PQ} = (0+1)\vec{i} + (5-3)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$$
$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (1,2,1)$$

Et:

$$\vec{PR} = (4+1)\vec{i} + (3-3)\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$$
$$= 5\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k} = (5,0,-2)$$

$$\vec{PQ} \wedge \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4-0)\vec{i} - (-2-5)\vec{j} + (0-10)\vec{k}$$
$$= -4\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Le vecteur orthogonal non nul est $(-4, 7, -10)$

b) L'aire du parallélogramme construit sur les côtés adjacents PQ et RR:

$$\|\vec{PQ} \wedge \vec{PR}\| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + (-10)^2} = \sqrt{165}.$$

L'aire du triangle PQR vaut la moitié de celle-ci:

$$\frac{\|\vec{PQ} \wedge \vec{PR}\|}{2} = \sqrt{165} \cdot \frac{1}{2}.$$

9.5) 10) Pour trouver les équations paramétriques de cette droite, trouvons un point de celle-ci ainsi que son vecteur.

* Soit le système:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+2z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}z \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}z \\ x+\frac{5}{3}z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}z \\ x=1-\frac{5}{3}z. \end{cases}$$

Soit $z=0$, $x=1$ et $y=0$ Donc un point de la droite est $(1,0,0)$.

* Le vecteur de la droite est représenté par le produit vectoriel entre les vecteurs normaux des deux plans:

$\vec{n_1}=(1,2,3)$ et $\vec{n_2}=(1,-1,1)$

$$\Rightarrow \vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2+3)\vec{i}-(1-3)\vec{j}+(-1-2)\vec{k} = 5\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}.$$

Les équations paramétriques sont, $\forall t\in\mathbb{R}$:

$x=1+5t$, $y=2t$ et $z=-3t$.

On en déduit les équations symétriques:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y}{2}=-\frac{z}{3}.$$

24) Le vecteur de la droite est:

$\vec{d}=(1,-1,-3)$

D'après l'équation du plan parallèle, son vecteur normal est:

$\vec{n_1}=(5,2,1)$

Un vecteur normal au plan est représenté par le produit vectoriel:

$$\vec{n}=\vec{d}\wedge\vec{n_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+6)\vec{i}-(1+15)\vec{j}+(2+5)\vec{k} = 5\vec{i}-16\vec{j}+7\vec{k}$$

On obtient un point du plan avec $t=0$:
$x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ donc $P = (1,2,4)$
On a donc :

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$
$$\Rightarrow 5(x-1) - 16(y-2) + 7(z-4) = 0$$
$$\Rightarrow 5x - 16y + 7z - 5 + 32 - 28 = 0.$$
$$\Rightarrow 5x - 16y + 7z - 1 = 0.$$

58) Soit : $(P_1) : -2x + 4y - 6z = 0$
$(P_2) : -3x + 6y - 9z + 1 = 0$
Sur (P_1), pour $z = 0 \Rightarrow 4y = +2x \Rightarrow x = 2y$
Donc $(2,1,0)$ appartient à (P_1).
D'après la formule :

$$D = \frac{|(-3)(2) + (6).(1) + (-9).(0) + 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{126}} = \frac{1}{3\sqrt{14}}$$