

Ghan
Witzel
Marco

Examen 1 - Reprise

8MAP107

WITH 20040400

15/02/2024

$$1) a) \cos(x) \cdot \cos^2(y) \cdot dx + \sin(y) \cdot \sec^2(x) \cdot dy = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x)}{\sec^2(x)} \cdot dx + \frac{\sin(y)}{\cos^2(y)} \cdot dy = 0.$$

$$\Rightarrow \int \cos^3(x) \cdot dx + \int \frac{\sin(y)}{\cos^2(y)} \cdot dy = 0.$$

$$\Rightarrow \int (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) \cdot dx + \sec(y) = K.$$

$$\Rightarrow \int \cos(x) - \cos(x) \cdot \sin^2(x) \cdot dx + \sec(y) = K.$$

$$\Rightarrow \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + \sec(y) = K.$$

$$b) \frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = 5x^3.$$

On repère l'équation différentielle linéaire avec:

$$P(x) = -\frac{3}{x} \text{ et } Q(x) = 5x^3.$$

Pour le facteur intégrant:

$$\begin{aligned} e^{\int P(x) dx} &= e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} = e^{-3 \ln(x)} = x^{-3} \\ e^{-\int P(x) dx} &= e^{3 \int \frac{1}{x} dx} = e^{3 \ln(x)} = x^3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = x^3 \left(\int x^{-3} \cdot 5x^3 \cdot dx + K \right)$$

$$\Rightarrow y = x^3 (5x + K)$$

$$\Rightarrow y = 5x^4 + K \cdot x^3.$$

$$2) a) \text{ On a : } x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 8z = -2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = -2 + 4 + 1 + 16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 19.$$

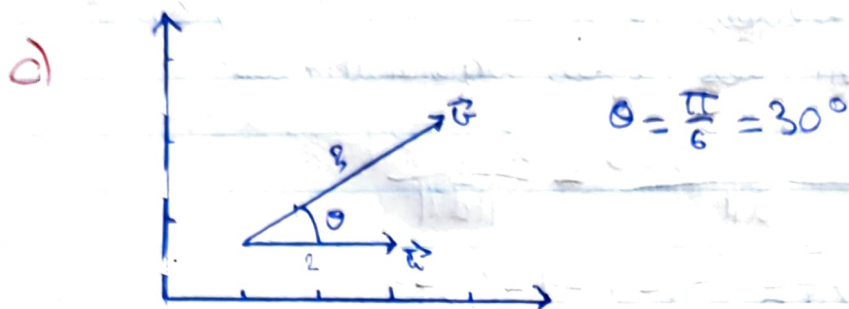
La sphère est centrée en $(-2, 1, -4)$ et son rayon vaut $\sqrt{19}$.

b) La sphère coupe le plan Oz lorsque $x=0$:
Donc l'équation de cette courbe est:

$$(y-1)^2 + (z+4)^2 = 19.$$

$$3a) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ = 6 \cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}.$$

$$b) \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$



4) Soit les deux vecteurs appartenant au plan : \vec{AB} et \vec{AC} .

$$\vec{AB} = (1-1, 2-0, 3-1) = (0, 2, 2)$$

$$\vec{AC} = (-1-1, -2-0, 1-1) = (-2, -2, 0)$$

On peut ensuite déterminer un vecteur perpendiculaire grâce au produit scalaire :

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2))\vec{i} - (0 \cdot 0 - (-2) \cdot 2)\vec{j} + (0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2)\vec{k} \\ = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Donc un vecteur perpendiculaire au plan est $(4, -4, 4)$.

5) ~~Précisément, on trouve un point au milieu de $A(-4, 2, 1)$ et $B(2, -4, 3)$~~

Soit $P(x, y, z)$, on pose $P_1(-4, 2, 1)$ et $P_2(2, -4, 3)$

Pour obtenir un plan avec tous les points équidistants,

on a : $\|\vec{P_1P}\| = \|\vec{P_2P}\|$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 6z + 9$$

$$\Rightarrow 12x - 12y + 4z - 8 = 0$$

$\Rightarrow 3x - 3y + z - 2 = 0$ est l'équation du plan.

6) Soit $P(-1, -1, 3)$ et la droite d : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit A sur la droite: $A = (1, 2, -1)$
Le vecteur directeur de d est: $\vec{d} = (1, -1, 2)$.

On a, selon les règles trigonométriques:

$$\text{dist} = \|\vec{AP}\| \sin \theta$$

$$\text{Or, } \text{dist} = \frac{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{AP}\| \cdot \sin \theta}{\|\vec{d}\|} = \frac{\|\vec{d} \wedge \vec{AP}\|}{\|\vec{d}\|}$$

On applique: $\vec{AP} = (-1-1, -1-2, 3+1)$
 $= (-2, -3, 4)$

$$\vec{d} \wedge \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 - (-3) \cdot 2 \\ (1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-3) - (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{d} \wedge \vec{AP}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc } \text{dist} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

7) On a $z^2 = x^2 + y^2$.

Soit l'équation vectorielle d'une droite:

$$\vec{r}(t) = (0, 0, 0) + t(a, b, c), \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2 t^2 = a^2 t^2 + b^2 t^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Soit $25 = 16 + 9$, on a $c = 5$, $a = 4$ et $b = 3$.

Une droite entièrement comprise dans le cône serait

donc: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 5t \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$

8a) On a $z^2 = \rho^2 \cdot \cos 2\theta$.

$$\Rightarrow z^2 = \rho^2 \cdot (2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$z^2 = 2\rho^2 \cdot \cos^2 \theta - \rho^2$$

$$z^2 = 2x^2 - (x^2 + y^2)$$

$$z^2 = 2x^2 - x^2 - y^2$$

$$z^2 = x^2 - y^2$$

Car :

$$x = \rho \cdot \cos \theta$$

$$y = \rho \cdot \sin \theta$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

b) Selon l'équation d'un cercle :

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \cos^2 \theta - 4x \cdot \cos \theta + x^2 \cdot \sin^2 \theta = 0$$

9) L'équation $y^2 + z^2 = 1 + x^2$ représente une forme hyperboloïde à une nappe sur l'axe des x .
Nous pouvons la dessiner.

