Surfaces paramétrées.

Ethan
Weitzel
Marco
8MAP107
WITM20040400
01/03/2024

Série 6.

10.5) 4) $\vec{r}(u,v) = 2.\sin(u).\vec{i} + 3.\cos(u)\vec{j} + v.\vec{k}$, $0 \leq v \leq 2$.
On obtient les équations paramétriques :
$x = 2.\sin(u)$; $y = 3.\cos(u)$; $z = v$
Soit $a = 2$ et $b = 3$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4\sin^2(u)}{4} + \frac{9\cos^2(u)}{9} = 1$$

En x et y, on trouve une ellipse, sur z il s'agit d'une droite. On a donc un cylindre de hauteur 2 à base elliptique.

20) On a la moitié inférieure de l'ellipsoïde :
$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.
On souhaite obtenir la partie inférieure soit : $z \leq 0$.
$\Rightarrow z^2 = 1 - 2x^2 + 4y^2$
$\Rightarrow z = -\sqrt{1-2x^2-4y^2}$
On a donc $\vec{r}(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-2x^2-4y^2})$

22) On a l'hyperboloïde $x + y^2 + 2z^2 = 4$
Pour trouver la partie en avant du plan $x = 0$:
On a : $x = 4 - y^2 - 2z^2$.
Soit $4 - y^2 - 2z^2 > 0$
$\Rightarrow y^2 < 4 - 2z^2$
$\Rightarrow -\sqrt{4-2z^2} < y < \sqrt{4-2z^2}$ avec $-\sqrt{2} < z < \sqrt{2}$.

Donc $\vec{r}(y,z) = (4 - y^2 - 2z^2, y, z)$.

24) On a la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
On souhaite trouver la zone entre $z = -2$ et $z = 2$
$\Rightarrow z^2 = 16 - x^2 - y^2$ $\Rightarrow z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

On a $\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{16-x^2-y^2})$

avec $x < \sqrt{12-y^2}$ et $y < \sqrt{12}$ en résolvant $-2 < \sqrt{16-x^2-y^2} < 2$

Ou. En sphérique:

Le rayon de la sphère vaut 4, soit:

$$x = 4 \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta$$

$$y = 4 \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$$

$$z = 4\cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2 \Rightarrow \phi = \arccos\left(-\frac{2}{4}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \\ z = 2 \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Donc $\vec{r}(\phi, \theta) = (4\sin\phi \cdot \cos\theta, 4 \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta, 4 \cdot \cos\phi)$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$

et $\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}$.

26) Soit le plan $z = x+3$.

Et le cylindre $x^2+y^2=1$.

$z = x+3 \Rightarrow \vec{r}(x,y) = (x, y, x+3)$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow \vec{r}(x,z) = (x, \sqrt{1-x^2}, z)$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

Par substitution, la représentation paramétrique à l'intérieur du cylindre est $\vec{r}(x,y) = (x, \sqrt{1-x^2}, x+3)$

Avec les y négatif $\vec{r}(x,y) = (x, -\sqrt{1-x^2}, x+3)$

Pour avoir la représentation en une seule équation vectorielle, on utilise les coordonnées cylindriques:

$$\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta)+3).$$