Angewandte Mathematik / Statistik

Dozent: Holger Gerhards

Kurs: TINF22IT1

Zeit: Oktober – Dezember 2023

Organisatorisches

… bzw. Blick in die Zukunft

- Auslandssemester?
  - Infoveranstaltung vom International Office?
- Klausureinsicht → Wann?
- Exkursion?

Herausforderung 2tes Studienjahr

- Praxisbericht 3te und 4te Praxisphase
  - Benotung
  - Stärkerer Fokus auf das techn.-wissenschaftliche Arbeiten

- T2000-Prüfung
  - 10min Vortrag über obigen Praxisbericht
  - Fragen zum Vortrag
  - Fragen zum Stoff aus den ersten 4 Semestern
  - Lax - „Tauglichkeitsprüfung zum Informatiker“

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- Di 10.10.23 09:00-11:00
- Mi 11.10.23 09:00-12:00
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- Do 19.10.23 13:00-16:00
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00
- Di 07.11.23 09:00-11:00 (Wiederholung)
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur) – (alternativ 15.11.)

Termine Statistik

Do	09.11.23	13:00-16:00
Di	14.11.23	09:00-11:00
Mi	15.11.23	09:00-12:00
Do	16.11.23	13:00-16:00
Di	21.11.23	09:00-11:00
Mi	22.11.23	09:00-12:00
Di	28.11.23	09:00-11:00
Mi	29.11.23	09:00-12:00
Di	05.12.23	09:00-11:00
Mi	06.12.23	09:00-12:00
Di	12.12.23	09:00-11:00
Mi	13.12.23	09:00-12:00 (Wiederholung)

- Vor Weihnachten Klausur

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Separation der Konstanten
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Exkurs – Numerik
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Motivation

- Grundannahme:
  - Mathematik zur Beschreibung von Problemen / Sachverhalten aus der Natur- oder Sozialwissenschaften
- Ziele der Vorlesung
  - Vorstellung eines mathematischem „Werkzeugkasten“
  - „Angst“ vor „komplizierter“ Mathematik nehmen
  - Ggf. Flexibilität im Umgang mit Notationen
  - Zentrale Fragen:
    Was bedeutet das?
    Wozu bräuchte man das?

Inhalte heute

- **Wiederholung**
- Funktionen
- Operatoren
- Ableitungen
- Differentialgleichungen (Einstieg)

Wiederholung

- Welche Elementarfunktionen kennen Sie?
- Welche Ableitungsregeln kennen Sie?
- Welche Integrationsregeln kennen Sie?
- Sind alle bekannten (durch elementare Funktionen darstellbare) Funktionen differentierbar?
- Sind alle bekannten (durch elementare Funktionen darstellbare) Funktionen integrierbar?

- (komplexe Zahlen, Summen, Taylor-Reihe, ...)

Inhalte heute

- Wiederholung
- **Funktionen**
- Operatoren
- Ableitungen
- Differentialgleichungen (Einstieg)

Funktionen

- Annahme von Messpunkten
(Beispiel Konzentration mit der Zeit)
  - Wie gehen Sie mit den Messpunkten um?
  - Verbindet man die Messpunkte miteinander?
  - Warum würde man die Messpunkte verbinden?
  - Wie verbindet man die Messpunkte richtig?
  - ...

Synthetisierung

- Wie lautet eine explizite Darstellung einer Funktion $y=f(x)$
  - die mit einer konstanten Frequenz oszilliert während der Nulldurchgang linear ansteigt?
  - die exponentiell ansteigt und ab einer Stelle x_1 konstant bleibt (und durchweg stetig ist)?
  - die linear zwischen (x_1,y_1) und (x_2,y_2) verläuft?
  - welche ein Rechtecksignal beschreibt?
  - welche einen Kreis beschreibt?

Implizite Funktionen

- … Betrachtung im $\mathbb{R}^2$ …
- Allgemein implizite Funktion: $F(x,y) = 0$
- Implizite Definition von $y = f(x)$
- Aber Angabe der Funktion $y = f(x)$ nur unter bestimmten Bedingungen in einer Umgebung eine vorgegebenen x_0

- Nutzung: Darstellung von Kurven im $\mathbb{R}^2$
  - z.B. Kreis, Ellipse, …
  - Oder Elliptische Funktionen

Inhalte heute

- Wiederholung
- Funktionen
- **Operatoren**
- Ableitungen
- Differentialgleichungen (Einstieg)

Operatoren

- Erinnerung: Funktionen
  - Abbildung aus einem Zahlenraum in einen anderen Zahlenraum
  - Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Operatoren
  - Abbildung aus einem Funktionenraum in einen anderen Funktionenraum (bzw. aus einem Vektorraum in einen anderen Vektorraum)
  - „Funktion geht rein, Funktion kommt raus“
  - Kennen Sie bereits Operatoren?

Lineare Operatoren

Definition:

- Es seien X und Y reelle oder komplexe Vektorräume (oder Funktionenräume). Eine Abbildung T von X nach Y heißt linearer Operator, wenn für alle $x,y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) die folgenden Bedingungen gelten:
  - T ist homogen: $T(\lambda x) = \lambda\, T(x)$
  - T ist addititv: $T(x+y) = T(x) + T(y)$

Lineare Operatoren

Aufgaben:

- Wie würden Sie den Integrationsoperator darstellen?
- Zeigen Sie, dass die Ableitung d/dx ein linearer Operator ist!

Inhalte heute

- Wiederholung
- Funktionen
- Operatoren
- **Ableitungen**
- Differentialgleichungen (Einstieg)

Partielles Ableiten

- Problemstellung:
  - Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - Beispiel: $f(x,y) = z = x^2 + y^2 + 20$
  - Gesucht: Ableitung nur nach x oder nur nach y

- Einführung der partiellen Ableitung (in Kurzform)
  - (an der Tafel mit Beispielen etc.)

Implizites Ableiten

- Problemstellung
  - Gegeben sei eine implizite Funktion (z.B. ein Kreis)
    $F(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$
  - Was groß die Ableitung dy/dx an einer gegebenen Stelle (x_1,y_1)?

Implizites Ableiten

- Problemstellung
  - Gegeben sei eine implizite Funktion (z.B. ein Kreis)
    $F(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$
  - Was groß die Ableitung dy/dx an einer gegebenen Stelle (x_1,y_1)?

- Lösungsansätze:
  - Kettenregel oder siehe Internet „implizites Ableiten“

Inhalte heute

- Wiederholung
- Funktionen
- Operatoren
- Ableitungen
- **Differentialgleichungen** (Einstieg)

Differentialgleichungen

- Beispiele bekannter Gleichungsarten
  - Finden Sie die Lösung $\vec{x} = (x, y)^T$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

  - Finden alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{2}$$

- Beispiel für eine Differentialgleichung
  - gegeben ist $v(t) = v_0$ (konstant)
  - gesucht ist $s(t)$ mit $s(0) = s_0$ (Startwert)
  - Gleichung:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad s(t) = v_0\, t + s_0 \tag{3}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Gesucht ist eine Abbildung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$ als Anfangswert und

$$f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad \text{und} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

- **Unterscheidungen**
  - Ordnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung
    - Die höchste vorkommende Ableitung gibt die Ordnung an.
    - Beispiele

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & y' = ax + y & \to \text{DGL 1. Ordnung} \\ \text{b)} & y^{(3)} = \dfrac{y'}{x} - y'' & \to \text{DGL 3. Ordnung} \end{array}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- **Unterscheidungen** - Teil 2
  - Lineare vs. nichtlineare DGLs
    - Bei einer linearen DGL kommt die Funktion $y(x)$ und all ihre Ableitungen mit dem Exponenten 1 vor.
    - Beispiele:

$$\text{a)} \quad x + ay + by'' = 0 \qquad \rightarrow \quad \text{Lineare DGL}$$

$$\text{b)} \quad xy + y' + \frac{2}{y} = 0 \qquad \rightarrow \quad \text{Nichtlineare DGL}$$

  - Homogene vs. inhomogene lineare DGLs
    - Definition:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0 \qquad \rightarrow \quad \text{Homogene lineare DGL}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad \text{Inhomogene lineare DGL}$$

    - Hinweis: $g(x)$ wird Inhomogenität genannt (und entspricht in der Physik Quelltermen).

Übung zur Unterscheidung von DGLs

- Welchem Typ entsprechen die folgenden Differentialgleichungen?

$$\text{a)} \quad \sin(x)\, y + y'' = 0 \tag{5}$$

$$\text{b)} \quad x^2 \left(y^{(3)} + y\right) = x + y' \tag{6}$$

$$\text{c)} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = x^2 - 3\frac{dy}{dx} \tag{7}$$

Gewöhnliche DGLs 1. Ordnung

- Betrachtung des Typs

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{(Anfangswert)} \qquad (8)$$

- Weitere Annahme: $f(x, y)$ sei separierbar

$$\Longrightarrow \qquad f(x, y) = g(x)\, h(y) \qquad (9)$$

- Lösungsverfahren: **Trennung der Variablen**

Achtung: Die folgende Vorgehensart ist mathematisch recht unsauber. ('Pragmatische Physikermethode')

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{H}(y) + C_1 = G(x) + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{H}(y) = G(x) + C$$

Beispiel für Trennung der Variablen

- Integrieren Sie / Lösen Sie die folgenden DGLs

$$\text{a)} \quad y' = -\frac{x}{y} \tag{10}$$

$$\text{b)} \quad y' = x^2\, e^y \tag{11}$$