Vorlesung - Angewandte Mathematik

9. Vorlesung

Holger Gerhards

DHBW Mannheim, TINF22IT1
holger.gerhards@dhbw-mannheim.de

25. Oktober 2023

Themenübersicht

- **Diskrete Fourier-Transformation**
- Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Faltung
- δ-Distribution
- Anwendung der Fourier-Transformation
- Anmerkungen / Ergänzungen

Diskrete Fourier-Transformation

- Problematik für tatsächlich gemessene Signale
  - Eingangsfunktion nicht kontinuierlich sondern diskret
  - Sampling des Signals
  - Darstellung als Paaren von Amplituden x_i zu Zeitpunkten t_i
    - x_0 entspricht Messung bei $t_0 = 0$
    - x_1 entspricht Messung bei $t_1 = \triangle t$
    - x_2 entspricht Messung bei $t_2 = 2\,\triangle t$
    - ...
- Vereinfachungen: $t \to n$ und $T \to N$ (vorerst $\triangle t = 1$)
- Idee:

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos(k\omega n) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(k\omega n) \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{N} \tag{1}$$

Diskrete Fourier-Transformation

- Umformung mit komplexen Koeffizienten $Y_k \in \mathbb{C}$ bzw. $Y_k = a_k + \mathrm{i} b_k$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \, e^{-\mathrm{i}\omega nk} \tag{2}$$

- Plausibilisierung:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} (a_k + \mathrm{i} b_k) \, e^{-\mathrm{i}\omega nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (a_k + \mathrm{i} b_k) \Big(\cos(\omega nk) - \mathrm{i} \sin(\omega nk) \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\omega nk) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(\omega nk) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{N-1} \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Diskrete Fourier-Transformation

- Zentrale Gleichungen der diskreten Fourier-Transformation
  - Rücktransformation (vom Frequenzbereich in den Zeitbereich)
$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \, e^{-\mathrm{i}\omega nk} \tag{4}$$
  - Hintransformation (vom Zeitbereich in den Frequenzbereich)
$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{\mathrm{i}\omega nk} \tag{5}$$
- Hinweise
  - Y_k ist die komplexe Amplitude zur k-ten Frequenz
  - $A_k = |Y_k|$ entspricht der tatsächlichen Amplitude, da $Y_k = A_k e^{\mathrm{i}\varphi_k}$
  - φ_k entspricht der Phasenverschiebung der k-ten Frquenz

Diskrete Fourier-Transformation

Übergang zu physikalischen Größen

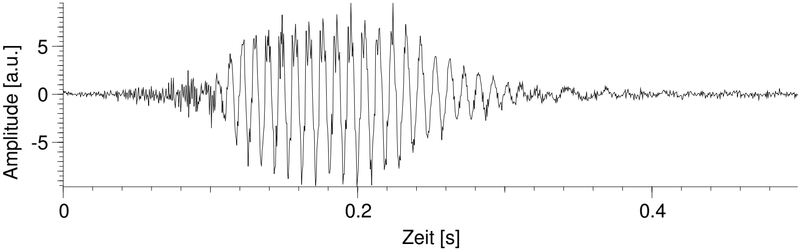
- Zeitbasis - Messamplitude x_n zum Zeitpunkt $t_n = n\triangle t$
- Frequenzbasis - Komplexe Amplitude Y_k zu Frequenz $\omega_k = 2\pi f_k$ mit

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N\triangle t} \qquad \text{bzw.} \qquad f_k = \frac{k}{N\triangle t} \quad \Longrightarrow \quad \triangle f = \frac{1}{N\triangle t}$$

- Implikationen
  - maximale Frequenz von Zeitauflösung $\triangle t$ abhängig
  - Zeitauflösung und Frequenzauflösung nicht beliebig wählbar
  - große Zeitfenster (N groß) bedeutet hohe Frequenzauflösung ($\triangle f$ klein)

Signalanalyse mittels Fourier-Transformation

- Beispielsignal

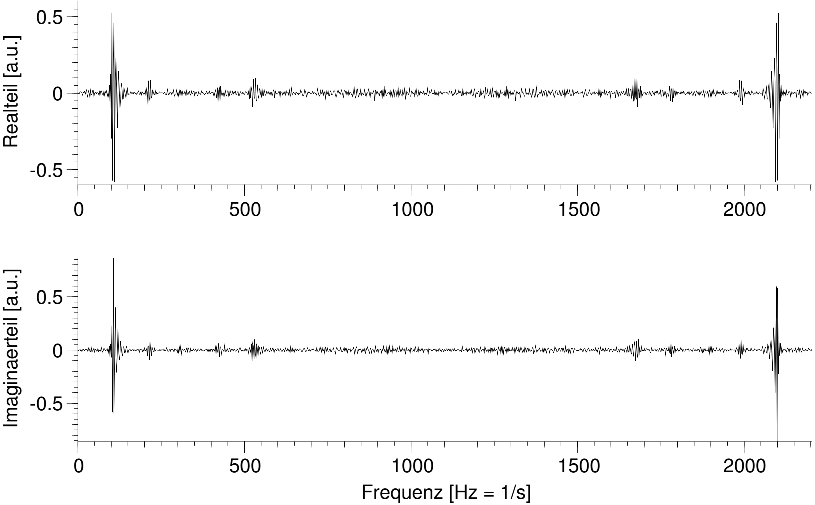


- Diskrete Fourier-Transformation

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\mathrm{i}2\pi nk/N}$$

Signalanalyse mittels Fourier-Transformation

- Diskrete Fourier-Transformation des Beispielsignal



Signalanalyse mittels Fourier-Transformation

Darstellungsformen:

- Real- und Imaginärteil

$$Y_k = \Re\mathrm{e}(Y_k) + \mathtt{i}\ \Im\mathrm{m}(Y_k)$$

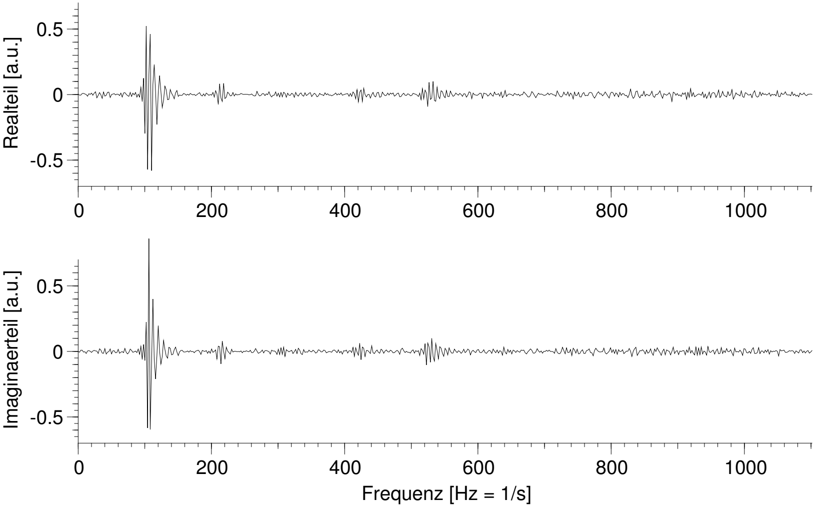
- Betrag und Phase

$$Y_k = A_k\ e^{\mathtt{i}\varphi_k}$$

$$\begin{aligned}
&\text{mit} \qquad && A_k = \sqrt{Y_k\ \bar{Y}_k} \\
&\text{und} \qquad && \varphi_k = \arctan\left(\frac{\Im\mathrm{m}(Y_k)}{\Re\mathrm{e}(Y_k)}\right)
\end{aligned}$$

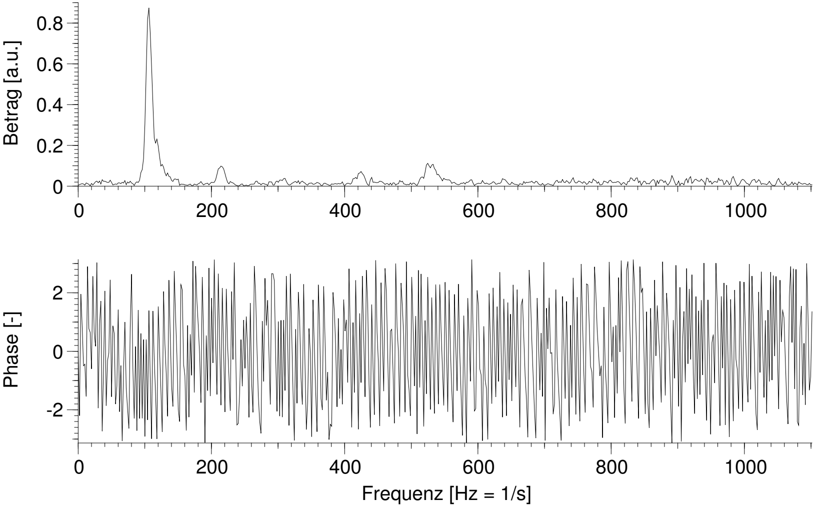
Signalanalyse mittels Fourier-Transformation

- Darstellung bzgl. Real- und Imaginärteil
  (Betrachtung nur der Hälfte der Amplituden Y_k)



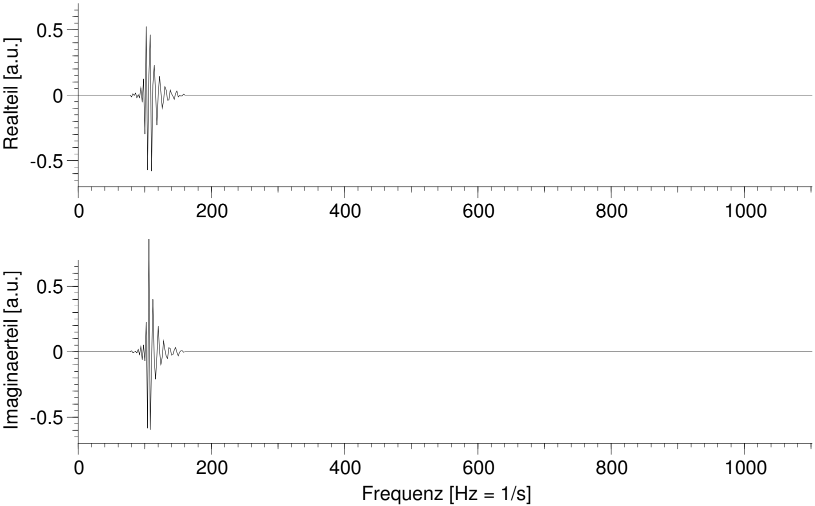
Signalanalyse mittels Fourier-Transformation

- Darstellung bzgl. Betrag und Phase



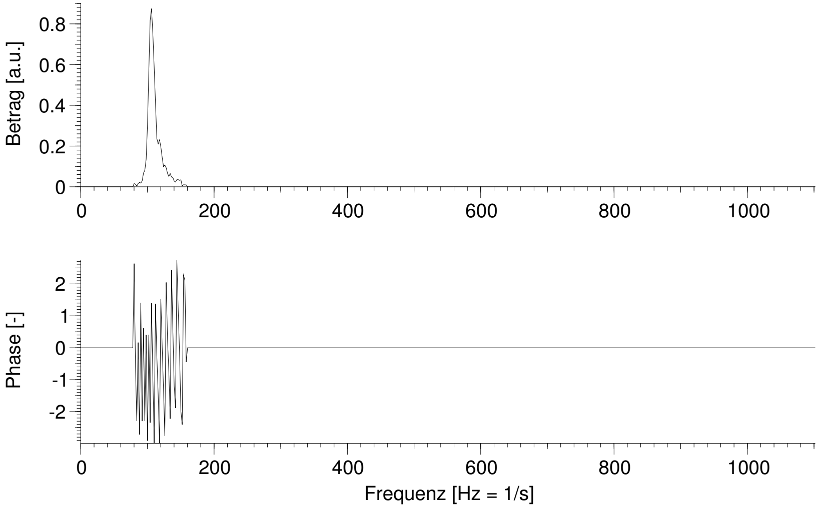
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Bandpass-Filter

- Filterung des Real- und Imaginärteils



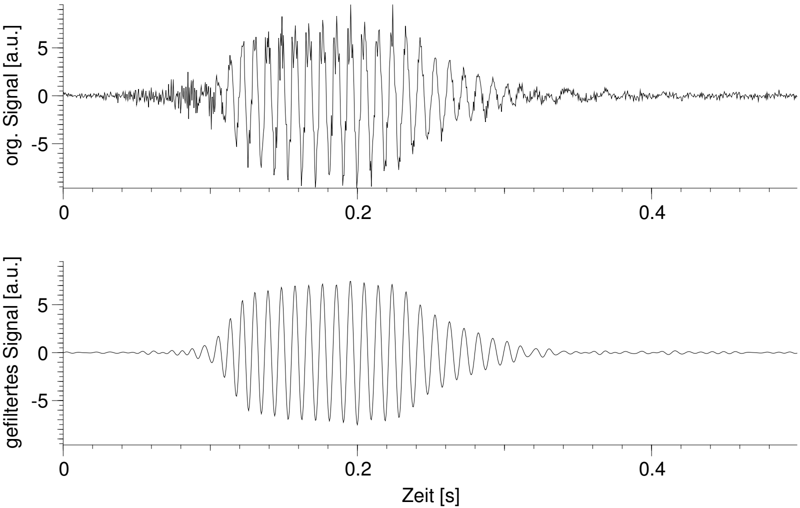
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Bandpass-Filter

- Filterung des Betrages und der Phase



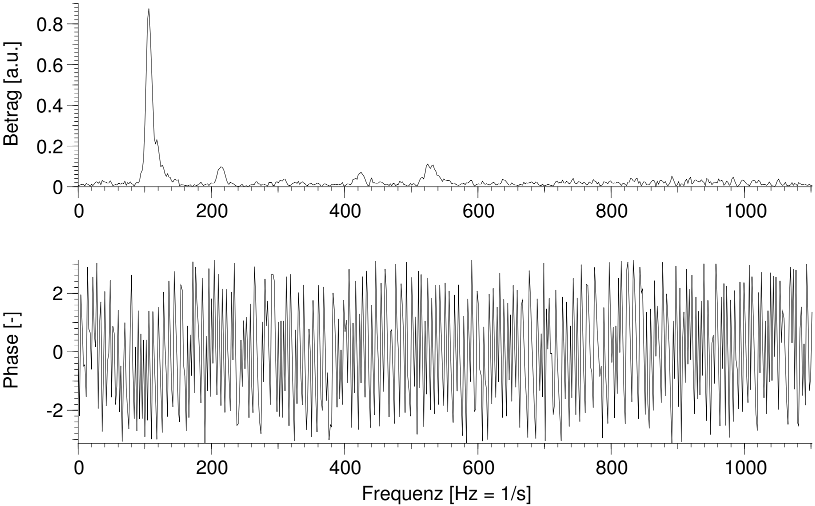
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Bandpass-Filter

- Ergebnis des Filtern (Vorher - Nachher)



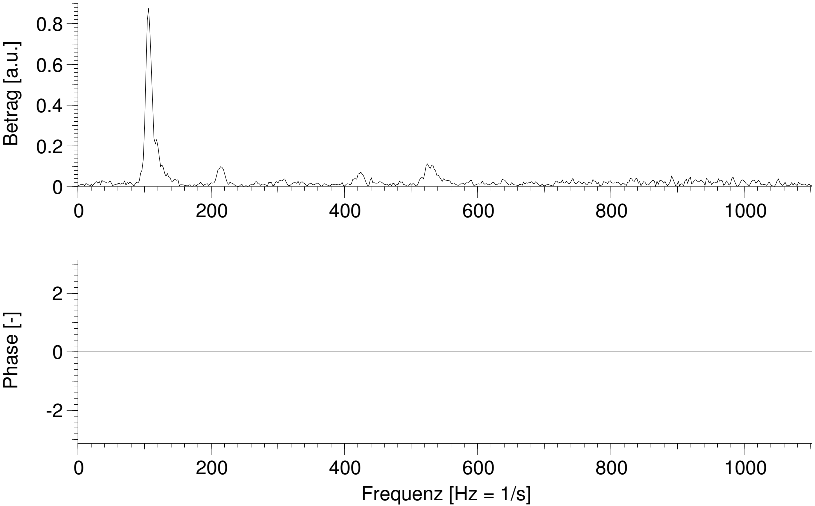
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Phasen-Filter

- Filterung der Phase - Vorher



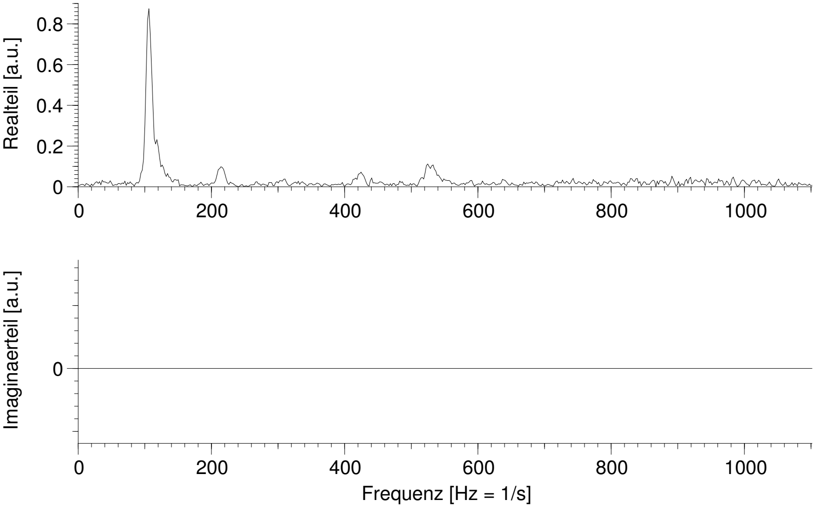
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Phasen-Filter

- Filterung der Phase - Nachher



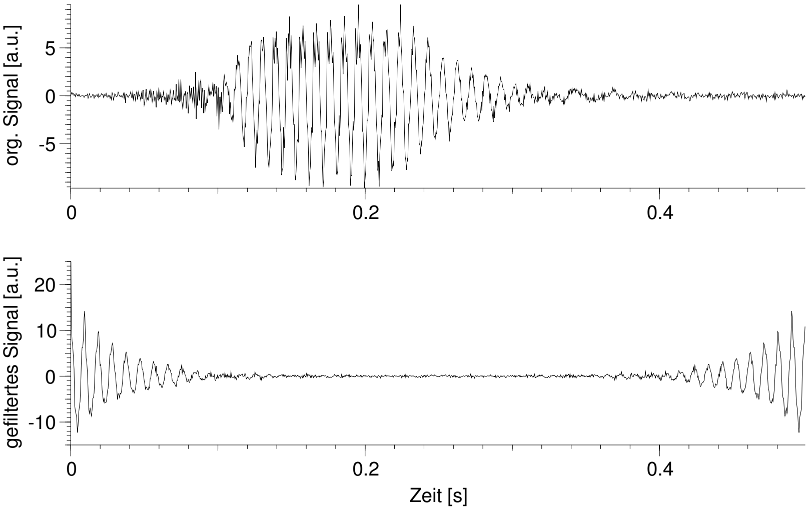
Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Phasen-Filter

- Filterung der Phase - Nachher



Filtern eines Signals im Frequenzbereich
Phasen-Filter

- Ergebnis des Filtern (Vorher - Nachher)



Filtern eines Signals - Ergebnisse

- Betrag der Fourier-Koeffizienten
  - entspricht Wichtung der jeweiligen Frequenz
  - Anwendung diverser Filter
    - Bandpassfilter
    - Tiefpassfilter
    - Hochpassfilter
- Phase der Fourier-Koeffizienten
  - enthält ”Strukturinformationen”
  - Unbedachte Manipulation verändert Signal auf mit unter unvorherzusehende Weise

Diskrete Fourier-Transformation - Anmerkung

- Problematik: N Datenpunkte x_n gehen in die Fourier-Transformation ein
  - $\rightarrow$ Nach Vorschrift scheinbar N komplexe Fourier-Koeffizienten Y_k
  - $\Longrightarrow$ $2N$ verschiede reelle Zahlen möglich
- Realität: nur Y_k für $k = 0, \ldots, \frac{N-1}{2}$ sind verschieden!
  ... und maximal verwertbare Frequenz: $f_{max} = \frac{N-1}{2} \frac{1}{N \triangle t}$
- Beweis:

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{\mathrm{i}\omega nk}$$

$$Y_{N-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{\mathrm{i}\omega n(N-k)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \underbrace{e^{\mathrm{i}\omega nN}}_{=1} \, e^{-\mathrm{i}\omega nk} = \bar{Y}_k$$

$$\text{NR:} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{N} \quad \Longrightarrow \quad e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N} nN} = e^{\mathrm{i}2\pi n} = 1$$

Diskrete Fourier-Transformation - Anmerkung

- Abtastfrequenz
  - Annahme: bandbegrenztes Signal ($0 < f \leq f_{max}$)
  - Ziel: Auflösung von f_{max}
  - Bedingung hinsichtlich der Abtastfrequenz

$$f_{abtast} > 2\, f_{max} \tag{6}$$

- Numerische Laufzeit für

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{\imath \omega n k}$$

  - Es gibt N (eigentlich nur $N/2$) Fourier-Koeffizienten Y_k.
  - Je Koeffizient müss mindestens N Rechnungen ausgeführt werden.
  - Ordnung der Rechnung beträgt N^2
  - Optimierung z.B. Cooley-Tukey-Algorithmus $\mathcal{O}(n \log n)$ bzw. Verwendung entsprechender Bibliotheken (z.B. FFTW)

Diskrete Fourier-Transformation im 2D

- Mathematische Formulierung der Hintransformation

$$Y_{kl} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} x_{nm} e^{\mathrm{i}\omega_M ml} e^{\mathrm{i}\omega_N nk} \tag{7}$$

- Mathematische Formulierung der Rücktransformation

$$x_{nm} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} Y_{kl} e^{-\mathrm{i}\omega_M ml} e^{-\mathrm{i}\omega_N nk} \tag{8}$$

mit

$$\omega_N = \frac{2\pi}{M} \qquad \omega_M = \frac{2\pi}{N} \tag{9}$$

- Stichwörter: Ortsraum, Ortsfrequenzraum, ...

Themenübersicht

- Diskrete Fourier-Transformation
- **Kontinuierliche Fourier-Transformation**
- Faltung
- δ-Distribution
- Anwendung der Fourier-Transformation
- Anmerkungen / Ergänzungen

Kontinuierliche Fourier-Transformation

- Grundlage: Gegeben sei eine Funktion $g(t)$ mit der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt < \infty \tag{10}$$

also

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to-\infty} g(t) = 0$$

- Hintransformation (Transformation in den Frequenzbereich)

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{\mathrm{i}\omega t} dt \tag{11}$$

- Rücktransformation (Transformation in den Zeitbereich)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega \tag{12}$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation

Motivation

- Ausgangssignal (physikalische Zeitsignal) - Ton oder Licht
- System reagiert unterschiedlich auf verschiedene Frequenzen
  - stärkere Dämpfung höherer Frequezen
  - z.B. Relaxation von Wassermolekülen (siehe Mikrowelle)
- Prinzipielle Arbeitsweise in der Physik
  - Eingangssignal .... $g(t)$
  - Spektrum des Eingangssignal .... $G(\omega)$
  - Veränderung der einzelnen Frequenzkomponenten durch das Medium
  - Resultat: Spektrum des Ausgangssignal .... $\tilde{G}(\omega)$
  - Zeitsignal des Ausgangs .... $\tilde{g}(t)$

Video-Empfehlungen fürs Verständnis

- 3Blue1Brown
  But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings
  (https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k)

- 3Blue1Brown
  But what is the Fourier Transform? A visual introduction.
  (https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY)

Themenübersicht

- Diskrete Fourier-Transformation
- Kontinuierliche Fourier-Transformation
- **Faltung**
- δ-Distribution
- Anwendung der Fourier-Transformation
- Anmerkungen / Ergänzungen

Faltung

- Anknüpfungen an Überlegungen zur Fourier-Transformation
  Medien verändern unterschiedliche Frequenzanteile unterschiedlich
- Eingangssignal

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega \qquad \text{bzw.} \qquad G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{\mathrm{i}\omega t} dt$$

- Manipulation / Filterung im Frequenzbereich

$$H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) \tag{13}$$

mit $F(\omega)$ als Filterfunktion (Anwort- bzw. Responsfunktion) und $H(\omega)$ als resultierendes Signal im Frequenzbereich

Faltung

- **Ziel:** Berechnung des resultierenden Signals $h(t)$ im Zeitbereich
- Lösung

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega$$

$G(\omega)$ bzgl. $g(t')$ ausdrücken

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\, e^{\mathrm{i}\omega t'} dt' \right) e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega$$

Integralsachen vertauschen und neu sortieren

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{\mathrm{i}\omega t'} e^{-\mathrm{i}\omega t}\, d\omega \right) dt'$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\, f(t - t')\, dt' \qquad (14)$$

Faltung

- Definition der Faltung

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\, f(t - t')\, dt' \tag{15}$$

- Hinweis: Faltungsintegral üblicherweise ohne Faktor $\frac{1}{2\pi}$

- Eigenschaften:
  - Kommutativität: $f \star g = g \star f$
  - Assoziativität: $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$
  - Distributivität: $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$
  - Ableitungsregel: $D(f \star g) = (Df) \star g = f \star (Dg)$
  - ...

Anwendung der Faltung / Filterung

- **Hintergrund:**

	Eingang	System	Ausgang
Zeitbereich	$e(t)$	$(e \star r)(t)$	$a(t) = (e \star r)(t)$
Frequenzbereich	$E(\omega)$	$E(\omega) \cdot R(\omega)$	$A(\omega) = E(\omega) \cdot R(\omega)$

- **Problem:**
  Messung von $a(t)$, aber $r(t)$ bzw. $R(\omega)$ initial unbekannt
- **Ziel:**
  Bestimmung von $e(t)$ zur Verbesserung der Datenqualität
- **Lösungsidee:**
  - bekanntes Eingangssignal $\tilde{e}(t)$ bzw. $\tilde{E}(\omega)$
  - $\Longrightarrow$ Messung von $\tilde{a}(t)$ bzw. $\tilde{A}(\omega)$
  - $\Longrightarrow$ Bestimmung von $R(\omega) = \tilde{A}(\omega)/\tilde{E}(\omega)$
- **Abschluss:**
  Berechnung von $e(t)$ (unbekanntes Eingangssignal) durch $a(t)$ (bekanntes / gemessenes Ausgangssignal), da $E(\omega) = A(\omega)/R(\omega) \Longrightarrow e(t)$ durch Fourier-Trafo.

Themenübersicht

- Diskrete Fourier-Transformation
- Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Faltung
- **δ-Distribution**
- Anwendung der Fourier-Transformation
- Anmerkungen / Ergänzungen

δ-Distribution

- Definition

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{16}$$

- analog

$$\delta(t-t') = \begin{cases} \infty & \text{für } t = t' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t')\, dt = 1$$

- sowie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, \delta(t-t')\, dt' = f(t) \tag{17}$$

- Anwendung: Punktladung
  Beschreibung der Ladungungsdichte am Punkt $\vec{r}$ als $q\,\delta(\vec{r})$

$$\text{Gesamtladung:} \qquad \int_{\mathbb{R}^3} q\,\delta(\vec{r})\, dV = q$$

δ-Distribution - Rechenbeispiele

- Berechnen Sie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\delta(t)\,dt = \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 1)\,\delta(x-2)\,dx = \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(u)\,\delta(u-\pi)\,du = \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{10}\,\delta(x+2)\,dx = \dots$$

Interpretation der Faltung mit Hilfe der δ-Distribution

- Annahmen
  - $g(t)$ ist Eingangssignal mit $G(\omega)$
  - $f(t)$ ist Antwortfunktion mit $F(\omega)$
  - $h(t)$ ist Ergebnisfunktion mit $H(\omega) = G(\omega) \cdot F(\omega)$

- Beispiel 1:

$$g(t) = \delta(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h(t) = (g \star f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t')\, f(t')\, dt = f(t)$$

- Beispiel 2:

$$g(t) = \sum_i \alpha_i\, \delta(t - t_i) \qquad \Longrightarrow \qquad h(t) = \sum_i \alpha_i\, f(t - t_i)$$

Themenübersicht

- Diskrete Fourier-Transformation
- Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Faltung
- δ-Distribution
- **Anwendung der Fourier-Transformation**
- Anmerkungen / Ergänzungen

Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

- Formulierung

$$\frac{\partial}{\partial t}c(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)c(x,t) = 0 \quad (18)$$

mit $c(x,t)$ als Konzentrationsverteilung in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t
sowei D für die Diffusionskonstante

- Ansatz

$$c(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega)\, e^{-\mathtt{i}kx} e^{-\mathtt{i}\omega t}\, dk\, d\omega \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)c(x,t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega)\, e^{-\mathtt{i}kx} e^{-\mathtt{i}\omega t}\, dk\, d\omega \end{aligned}$$

Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

- ... und weiter geht es ...

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) c(x,t) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega)\, e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dk\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega) \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dk\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega) \left(-\mathrm{i}\omega + k^2 D\right) e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dk\, d\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad C(k,\omega)(-\mathrm{i}\omega + k^2 D) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad C(k,\omega) = C(k,\omega_0)\, \delta(\omega - \omega_0) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = -\mathrm{i}k^2 D
\end{aligned}
$$

Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

- Damit ergibt sich die Lösung zu:

$$
\begin{aligned}
c(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega_0)\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}\omega t}\,dk\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega_0)\,e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega_0)\,e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}(-\mathrm{i}k^2 D)t}\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k,\omega_0)\,e^{-\mathrm{i}kx} e^{-k^2 Dt}\,dk
\end{aligned}
$$

$$
c(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C(k,\omega_0)\,e^{-k^2 Dt} \right) e^{-\mathrm{i}kx}\,dk
$$

Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

Vorgehen zur Berechnung von $c(x,t)$

- Ansatz einer Anfangsverteilung $c(x,0)$
- Berechnung der Koeffizienten $C(k,\omega_0)$ aus $c(x,0)$

$$C(k,\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(x,0)\, e^{\mathrm{i}kx}\, dx$$

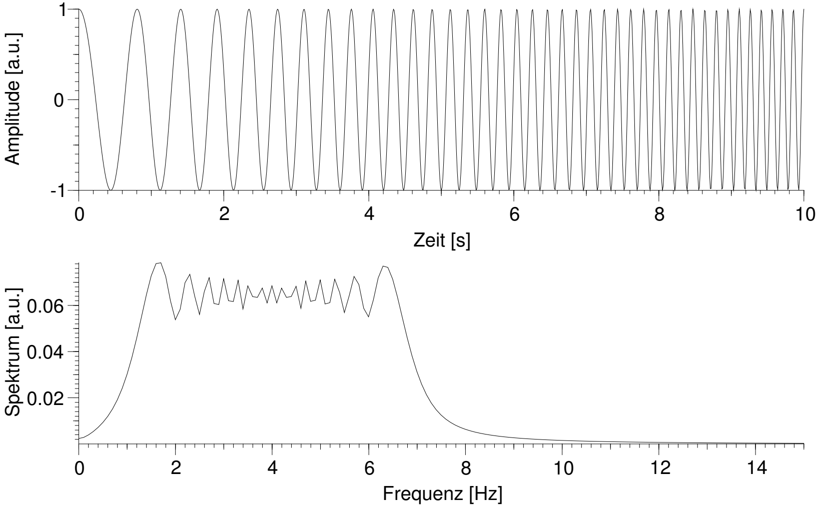
- Berechnung der Werte $g(k,t) = C(k,\omega_0)\, e^{-k^2 Dt}$
- Lösungsberechnung durch

$$c(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k,t)\, e^{-\mathrm{i}kx}\, dk$$

Themenübersicht

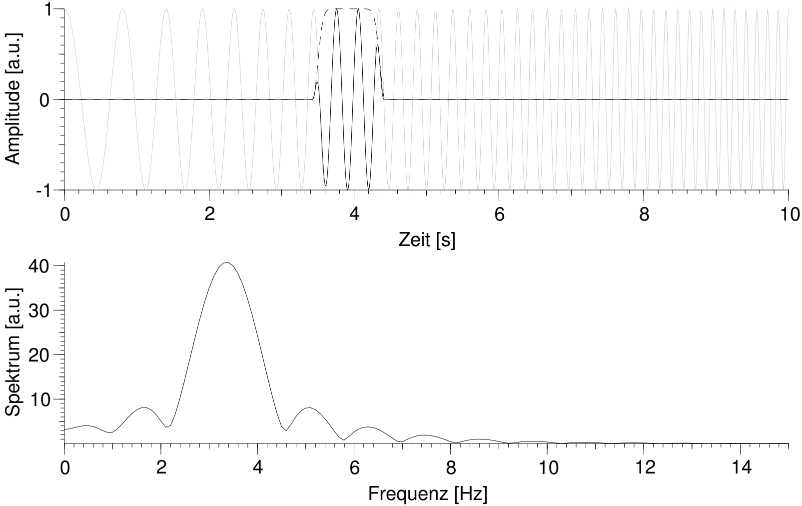
- Diskrete Fourier-Transformation
- Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Faltung
- δ-Distribution
- Anwendung der Fourier-Transformation
- **Anmerkungen / Ergänzungen**

Problem: Chirp-Funktion



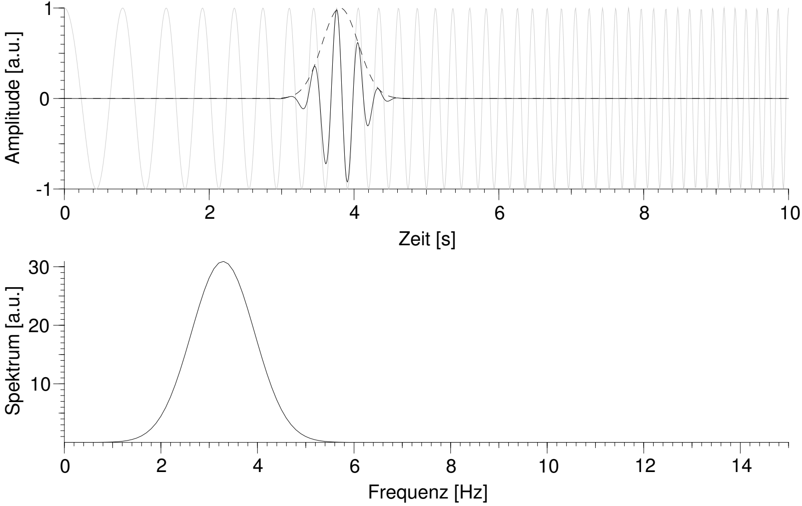
Gefensterte-FourierTransformation der Chirp-Funktion

- Einzel-Fenster-Auswertung mit spezieller Fensterfunktion



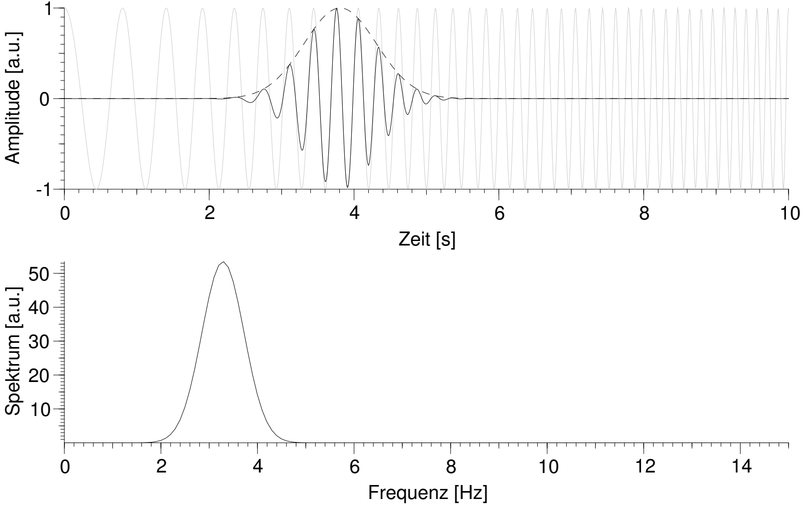
Gabor-Transformation der Chirp-Funktion

- Einzel-Fenster-Auswertung bei $\sigma = 0,25$s



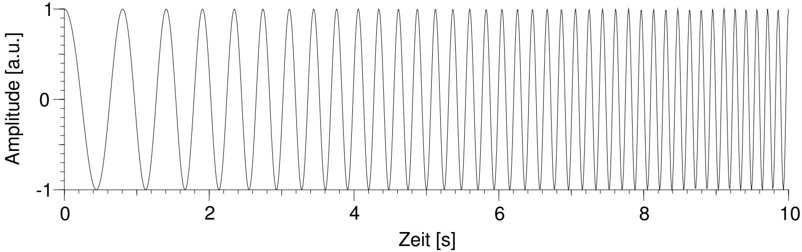
Gabor-Transformation der Chirp-Funktion

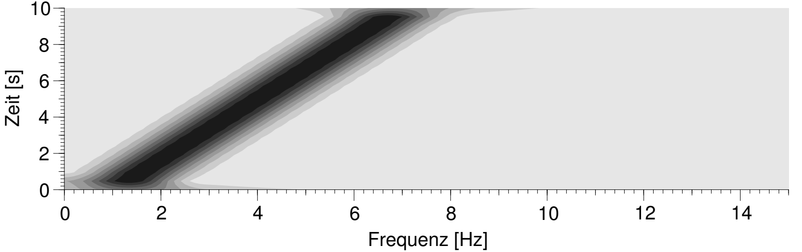
- Einzel-Fenster-Auswertung bei $\sigma = 0,5$s



Gabor-Transformation der Chirp-Funktion

- Spektrogramm bei $\sigma = 0,25$s





Gabor-Transformation der Chirp-Funktion

- Spektrogramm bei $\sigma = 0,5$s