6. Vorlesung - Angewandte Mathematik

Holger Gerhards

DHBW Mannheim, TINF22IT1
holger.gerhards@dhbw-mannheim.de

18. Oktober 2023

Themen dieser Vorlesung

- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - **Tangentialebene**
  - Fehlerberechnung
- Integration in höheren Dimensionen

Tangentialebene

- Ausgangspunkt: Entwicklung einer Funktion in ein Taylorpolynom vom Grade 1

$$\underbrace{T_1 f(x, y; a, b)}_{z} = \underbrace{f(a, b)}_{A} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}}_{B}(x - a) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}}_{C}(y - b)$$

$$z = A + B(x - a) + C(y - A)$$

- Darstellung als Ebenengleichung

$$Bx + Cy - z = \text{konstant} \tag{1}$$

- Normalenvektor auf der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} B \\ C \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ -1 \end{pmatrix}_{(a,b)} \tag{2}$$

Tangentialebene

- Anwendung:
  - Reflektionberechnung an einer Ebene
  - ... bzw. Reflektionberechnung an beliebigen Oberflächen

Themen dieser Vorlesung

- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - Tangentialebene
  - **Fehlerberechnung**
- Integration in höheren Dimensionen

Fehlerberechnung

- Annahme: Geschwindigkeitsmessung
  - Messung einer Strecke s_m
  - Messung einer Zeit t_m
- Ergebnis: Geschwindigkeit $v_m = \frac{s_m}{t_m}$
- aber: s_m und t_m haben Messfehler $\triangle s$ und $\triangle t$
- Ziel: Berechnung des Fehlers $\triangle v$
- Ansatz: Bestimmung der Taylorentwicklung von v bzgl. s und t

$$v(s,t) \approx v(s_m,t_m) + \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{(s_m,t_m)} (s - s_m) + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{(s_m,t_m)} (t - t_m)$$

Fehlerberechnung

- Test an der Stelle: $s = s_m + \triangle s$ und $t = t_m + \triangle t$

$$v(s_m + \triangle s, t_m + \triangle t) \approx v(s_m, t_m) + \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{(s_m,t_m)} \triangle s + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{(s_m,t_m)} \triangle t$$

- Fehler für v ergibt sich zu

$$\triangle v = v(s_m + \triangle s, t_m + \triangle t) - v(s_m, t_m) \tag{3}$$

- Interesse aber nur an den größten Abweichungen $\Longrightarrow$ Beträge der ersten Ableitungen

$$\triangle v = \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{(s_m,t_m)} \triangle s + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{(s_m,t_m)} \triangle t$$

Fehlerberechnung

- Allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz - **Gaußsche Fehlerfortpflanzung**
  - Annahme: Ein Wert g bestimmt sich aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Messfehlern $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_n$.
  - Fehlerberechnung $\triangle g$

$$\triangle g = \left|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right| \triangle x_1 + \left|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right| \triangle x_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right| \triangle x_i \quad , \qquad (4)$$

wobei die Ableitungen an der Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$ ausgewertet werden.

Beispiele für diverse Problemstellungen

- Man befinde sich mitten in einem Rock-Konzert. Ließe sich anhand des Wissens über seine eigene Umgebung und dem Wissen über die Größe des Areals die Anzahl der Konzertbesucher bestimmen?
- Sie sind für ein Waldareal verantwortlich. Wie bestimmen Sie den aktuellen Baumbestand?
- Sie machen einen Ausflug zum Heidelberger Schloss? Wie bestimmen Sie die tatsächlich zurückgelegte Strecke von der alten Brücke bis zum Haupteingang des Schlosses?
- Könnten Sie bzgl. Ihres Ausfluges zum Heidelberger Schloss abschätzen, wievielen Menschen Sie begegnen können?

Themen dieser Vorlesung

- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - Tangentialebene
  - Fehlerberechnung
- **Integration in höheren Dimensionen**

Wiederholung Integration im $\mathbb{R}$

- Integration gleichbedeutend mit Aufsummierung
  - Beispiel: Fläche unter einer Kurve (Kästchen zählen oder Vierecke aufsummieren)
- Integrationsregeln
  - Integration von Polynomen

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{5}$$

  - Integration durch Substitution
  - Partielle Integration

$$\int u' \, v \, dx = u \, v - \int u \, v' \, dx \tag{6}$$

Beispiele für Integrale

- Versuchen Sie folgende Funktionen zu integrieren / Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\text{a)} \qquad \int \left(3x^2 - 3x^3 + 4\right) dx \tag{7}$$

$$\text{b)} \qquad \int x \sin(x)\, dx \tag{8}$$

$$\text{c)} \qquad \int \sin(x^2)\, dx \tag{9}$$

Beispiele für Integrale

- Versuchen Sie folgende Funktionen zu integrieren / Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \displaystyle\int \left(3x^2 - 3x^3 + 4\right) dx \\
\text{b)} & \displaystyle\int x \sin(x)\, dx \\
\text{c)} & \displaystyle\int \sin(x^2)\, dx
\end{array}
$$

- Lösungen

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & = x^3 - \dfrac{3x^4}{4} + 4x + C \\
\text{b)} & = -x \cos(x) + \sin(x) \\
\text{c)} & \text{Keine elementare Stammfunktion vorhanden}
\end{array}
$$

Begriff der Dichte

- Oberflächendichte: Entität bezogen auf eine Fläche
- Volumendichte: Entität bezogen auf ein Volumen

- Beispiel: Bildung der Baumdichte
  - Gehe an einen Punkt $P = (x, y)$ und zähle die Bäume in einem Umkreis R
  - Ergebnis: Baumanzahl $N_R(x, y)$
  - Baumdichte:
$$n(x, y) = \frac{N_R(x, y)}{\pi R^2} \tag{10}$$
  - Hinweis: Jede Art von Umgebungsgebiet (z.B. Quadrat) um den Punkt P ginge auch.

Plausibilisierung von Flächenintegralen

- Beispiel: Bestimmung des Baumbestandes
- Schritt 1: Rasterung der Waldfläche
  - Kleine Flächenelemente $\triangle A_i = \triangle x_i \triangle y_i$, wobei i für ein Rasterelement steht
- Schritt 2: Bestimmung einer representativen Baumdichte n_i je Rasterelement / Flächenelement
- Schritt 3: Berechnung des Baumbestandes N_{gesamt}

$$N_{\text{gesamt}} = \sum_i n_i \triangle A_i = \sum_i n_i \triangle x_i \triangle y_i \tag{11}$$

- Kniff für die Analysis $\rightarrow$ Interpretation als Integral (bei Grenzwertbildung $\lim_{\triangle A_i \rightarrow 0}$)

$$N_{\text{gesamt}} = \int_\Omega n \, dA = \int_\Omega n(x, y) \, dA \tag{12}$$

Flächenintegrale

- Gegeben sei eine (Ober-)Flächendichte $n_\mathrm{E}(x, y)$ einer Entität E
- Berechnung der Gesamtanzahl N_E der Entität E auf der Grundfläche $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$N_\mathrm{E} = \int_\Omega n_\mathrm{E}(x, y)\, dA \tag{13}$$

- Annahme: Rechtwinklige Grundfläche ($x \in [x_1, x_2]$ und $y \in [y_1, y_2]$)

$$\Longrightarrow \qquad N_\mathrm{E} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} n_\mathrm{E}(x, y)\, dx\, dy \tag{14}$$

- Hinweis: Solche Integrale nennen sich auch Mehrfachintegrale.

Volumenintegrale

- Gegeben sei eine Volumendichte $n_\mathrm{E}(x, y, z)$ einer Entität E

- Berechnung der Gesamtanzahl N_E der Entität E im Volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$N_\mathrm{E} = \int_\Omega n_\mathrm{E}(x, y, z)\, dV \tag{15}$$

- Annahme: Betrachtungsvolumen sei ein Würfel ($x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$ und $z \in [z_1, z_2]$)

$$\Longrightarrow \qquad N_\mathrm{E} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} n_\mathrm{E}(x, y)\, dx\, dy\, dz \tag{16}$$

- Hinweis: Solche Integrale nennen sich auch Mehrfachintegrale.

Beispiele einfacher Mehrfachintegrale

- Berechnen Sie folgende Mehrfachintegrale

$$\text{a)} \qquad \int_0^2 \int_0^3 xy^2 \, dx \, dy \tag{17}$$

$$\text{b)} \qquad \int_0^3 \int_0^2 x^2 y \, dy \, dx \tag{18}$$

$$\text{c)} \qquad \int_0^2 \int_0^x xy \, dy \, dx \tag{19}$$

Rechenregeln für Mehrfachintegrale

- Annahme 1: Integrationsgrenzen sind unabhängig von einander

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy \right) dx \tag{20}$$

- Annahme 2: Lineare Unabhängigkeit der Integrationsgrenzen und Separierbarkeit der Funktion ($f(x,y) = g(x)\, h(x)$)

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} g(x)\, h(y)\, dy\, dx = \left(\int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx \right) \left(\int_{y_1}^{y_2} h(y)\, dy \right) \tag{21}$$

Hinweise zu Mehrfachintegralen

- Integrationsgrenzen bestimmen das Gebiet, über welches integriert wird
- Beispiele 1:

$$\int_0^2 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx \tag{22}$$

- Beispiele 2:

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx \tag{23}$$

Hinweise zu Mehrfachintegralen

- Integrationsgrenzen bestimmen das Gebiet, über welches integriert wird
- Beispiele 1: Dreieck

$$\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx \tag{22}$$

- Beispiele 2: Kreis

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx \tag{23}$$

Kurvenintegrale - Längenbestimmung

- Gegeben sei eine parametrierte Kurve $\gamma(t)$ im $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Ziel: Berechnung der Länge der Kurve von einem Startpunkt s_1 bis zu einem Endpunkt s_2

- Berechnungsvorschrift:

$$L = \sum_i \triangle s \qquad \text{Aufsummierung kleiner Längenelemente}$$

$$L = \sum_i \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \tag{24}$$

Kurvenintegrale - Längenbestimmung

- Gegeben sei eine parametrierte Kurve $\gamma(t)$ im $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Ziel: Berechnung der Länge der Kurve von einem Startpunkt s_1 bis zu einem Endpunkt s_2

- Berechnungsvorschrift:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} ds \qquad \text{Aufsummierung kleiner Längenelemente}$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{25}$$

Kurvenintegrale - Längenbestimmung

- Gegeben sei eine parametrierte Kurve $\gamma(t)$ im $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Ziel: Berechnung der Länge der Kurve von einem Startpunkt s_1 bis zu einem Endpunkt s_2

- Berechnungsvorschrift:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} ds \qquad \text{Aufsummierung kleiner Längenelemente}$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (25)$$

Kurvenintegrale - allgemein

- Ein Integral der Form
$$\int_\gamma h\, ds \tag{26}$$
nennt sich Kurvenintegral.
  - γ - Integrationsweg
  - h - Skalarfeld im $\mathbb{R}^n$
  - ds - Wegelement

- Lösungsansatz für Kurven im $\mathbb{R}^2$ (über Parametrisierung der Kurve),
$$\int_\gamma h\, ds = \int_{t_s}^{t_e} h\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{27}$$
wobei $h(x, y)$ als Gewichtung jedes Streckenelementes ds verstanden werden kann.

Kurvenintegrale - Anwendungsmöglichkeit

- Bestimmung der durchschnittlichen Höhe h_m eines Wanderweges

$$h_m = \frac{1}{L} \int_\gamma h(x,y)\, ds \quad , \tag{28}$$

wobei $h(x,y)$ das Skalarfeld für das Höhenfeld / Gebirge darstellt und L die Länge der Kurve $\int_\gamma ds$.

Kurvenintegrale - Rechenbeispiel

- Gegeben sei folgende Funktion / parametrierte Kurve im $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

- Berechen Sie die Länge der Kurve von $t_s = 0$ bis $t_e = 2$