Angewandte Mathematik

Vorlesung Nr. 4 – 11.10.2023

Dozent:	Holger Gerhards
Kurs:	TINF22IT1
Zeit:	Oktober – Dezember 2023

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- Di 10.10.23 09:00-11:00
- **Mi 11.10.23 09:00-11:45 (ab 11:45 – Infoveranstaltung Auslandssemester)**
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- Do 19.10.23 13:00-16:00
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00 (Wiederholung, Übungsaufgaben)
- Di 07.11.23 09:00-11:00
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur)

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Vektoranalysis:
  - Kurven im $\mathbb{R}^n$
  - Skalarfeld, Vektorfeld
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Exkurs – Numerik
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Erinnerungen

- Was ist ein Skalarfeld?
- Nennen Sie Beispiele für Skalarfelder.
- Was ist ein Vektorfeld?
- Nennen Sie Beispiele für Vektorfelder.
- Was ist der Gradient?
  - Ist das Gradientenfeld ein Skalar- oder ein Vektorfeld?
  - Was sagt er aus?
  - Wie ist der Gradient mathematisch definiert?
  - Wo findet der Gradient Anwendung?

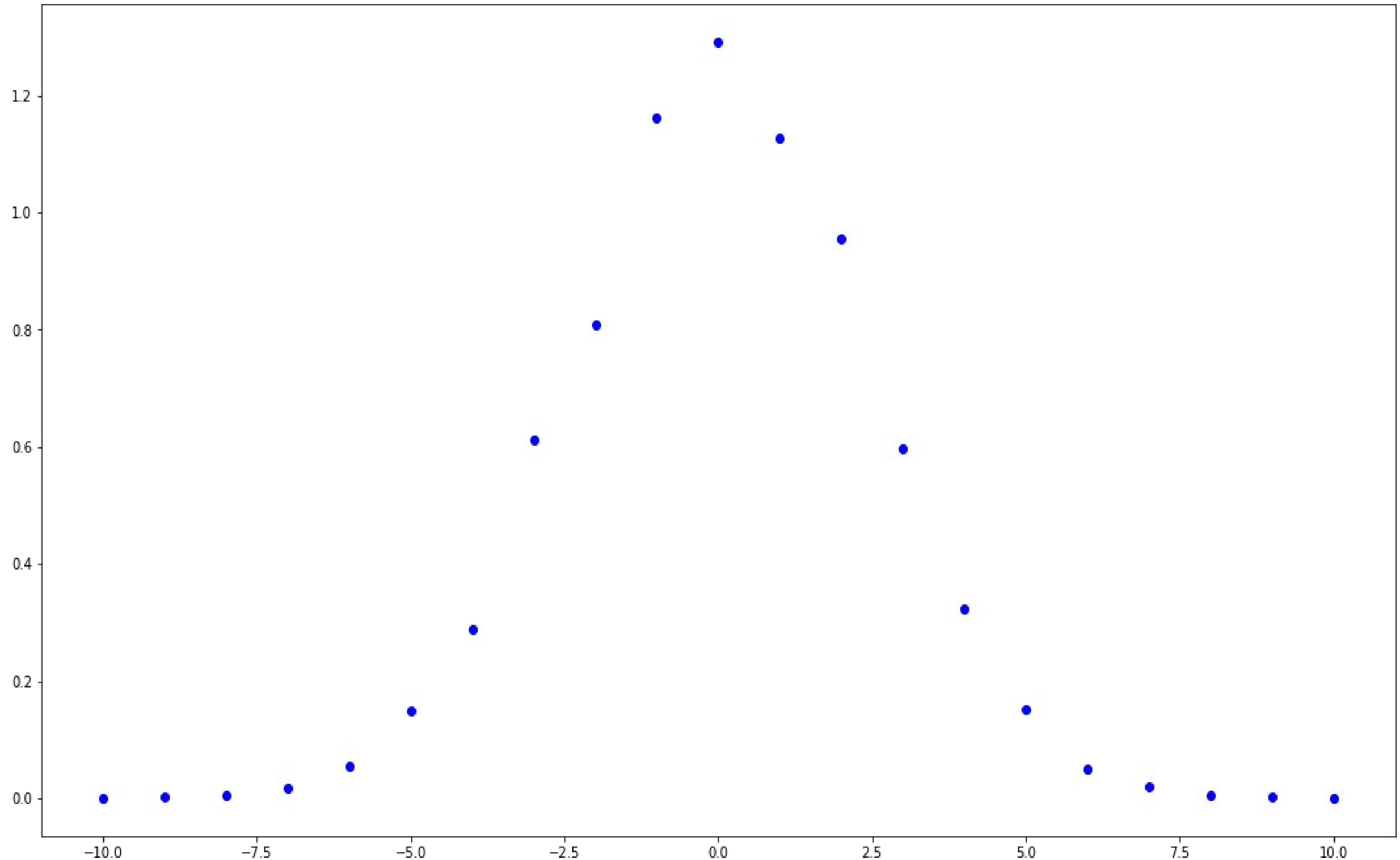
Themen heute

- Exkurs – Optimierung
- Operatoren der Vektoranalysis
- Bespiele für partielle DGLs

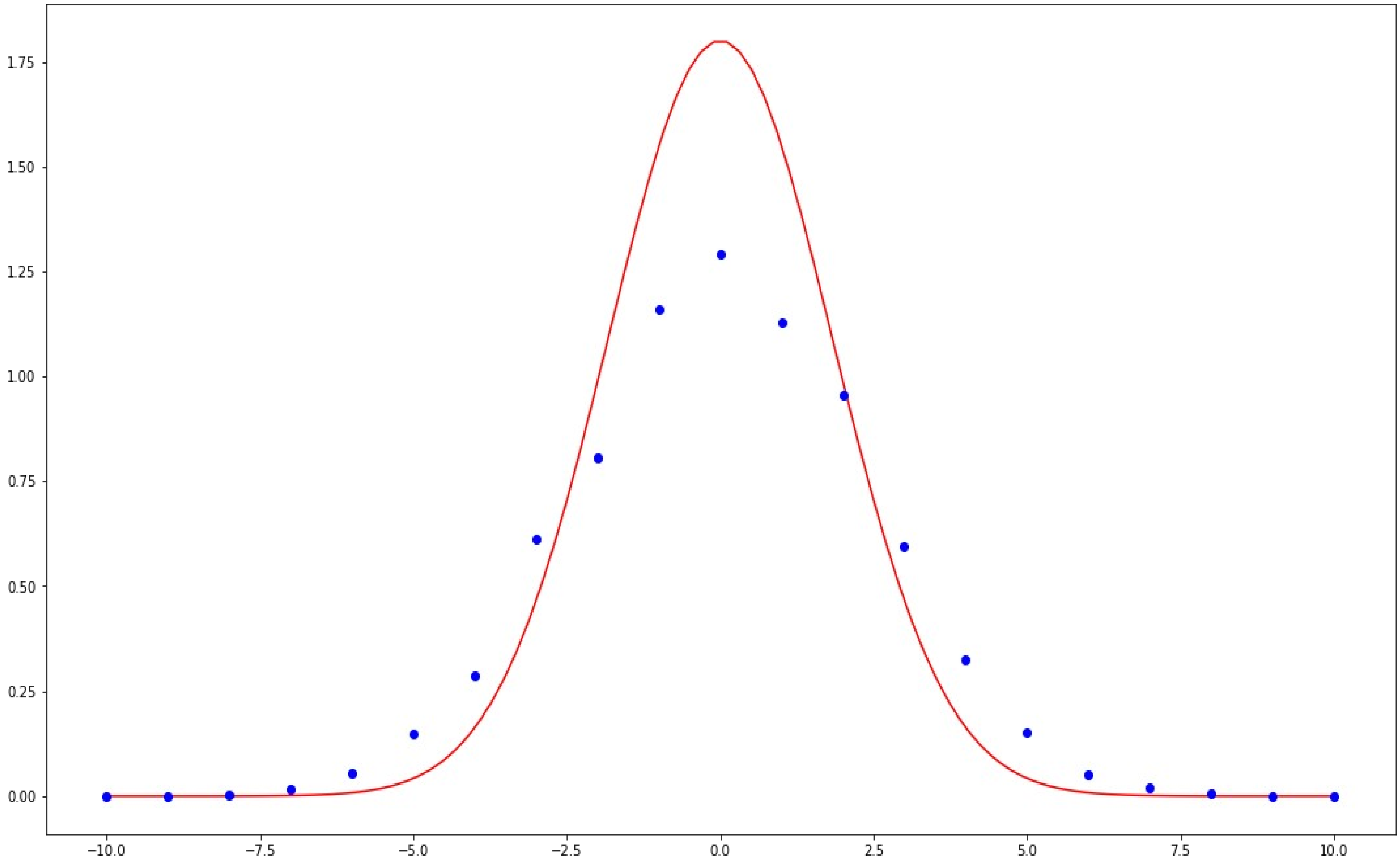
Einführung in die Optimierung

- Idee:
  - Messung gegeben
  - Annahme eines Models mit n-Parametern
  - Bestimmung der „besten“ Parameter durch geeignete Verfahren
- Frage:
  - Wie würden Sie die „besten“ Parameter mit dem bekannten Wissen bestimmen?

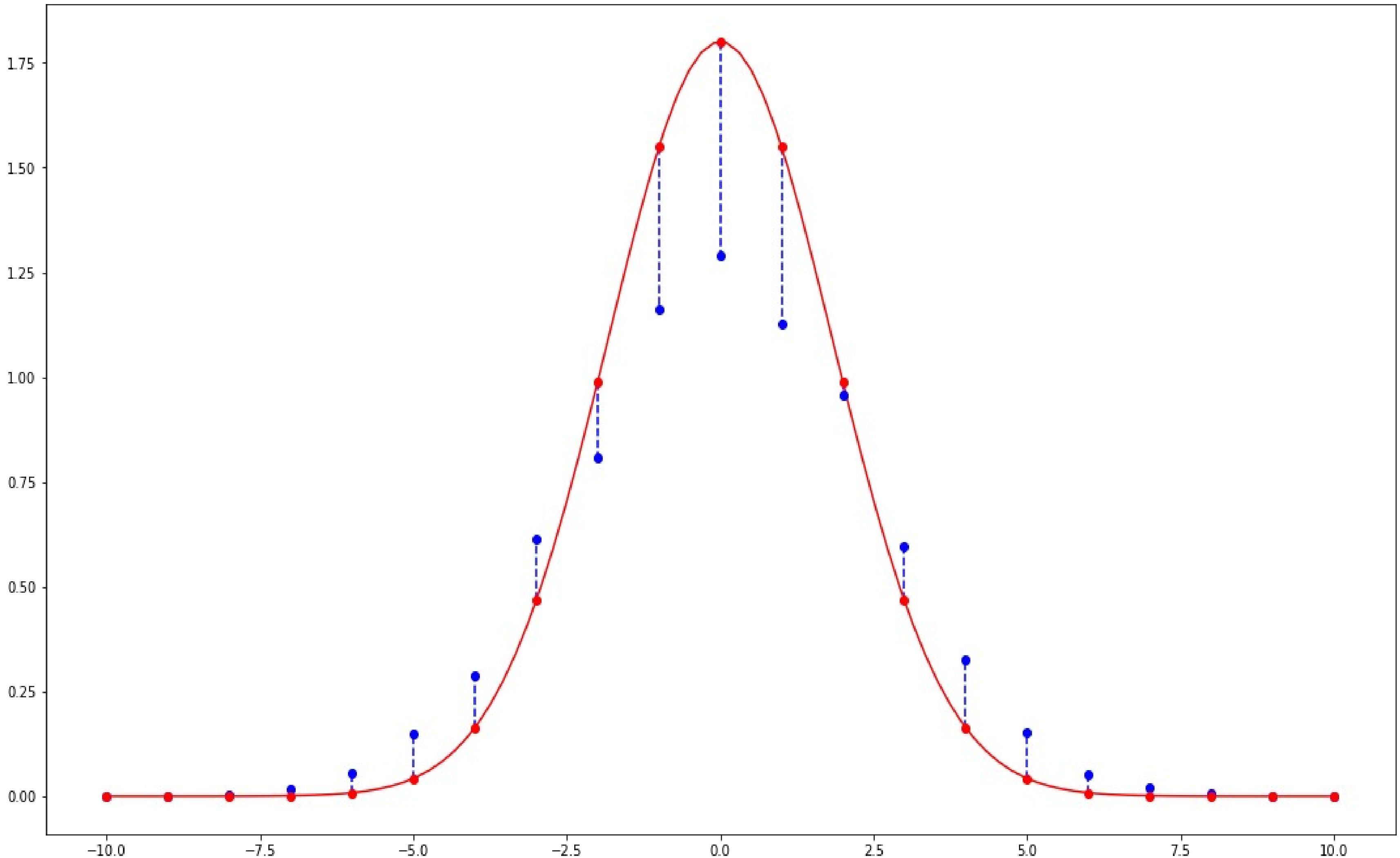
Beispiel: A*exp(-b*x²)



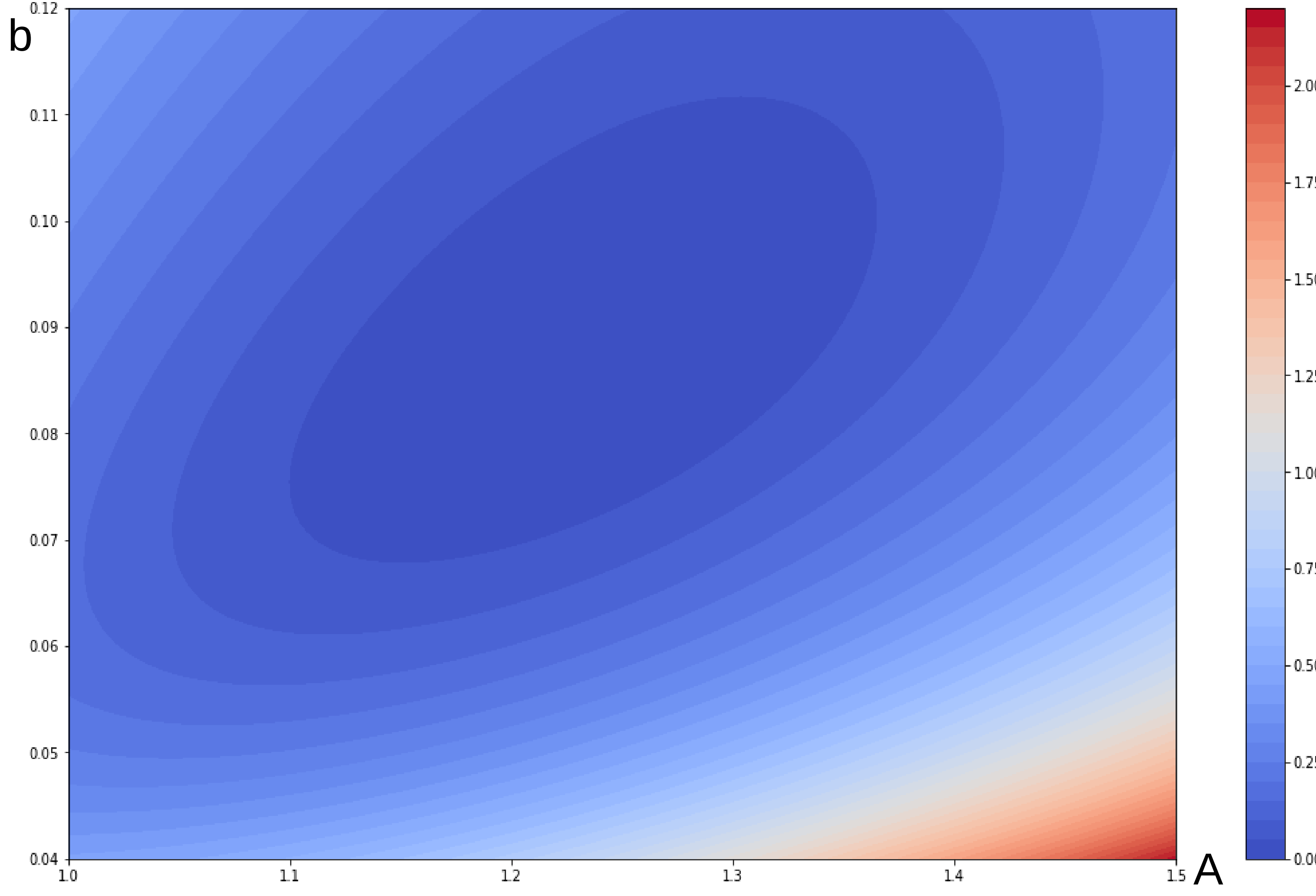
Beispiel: A*exp(-b*x²)



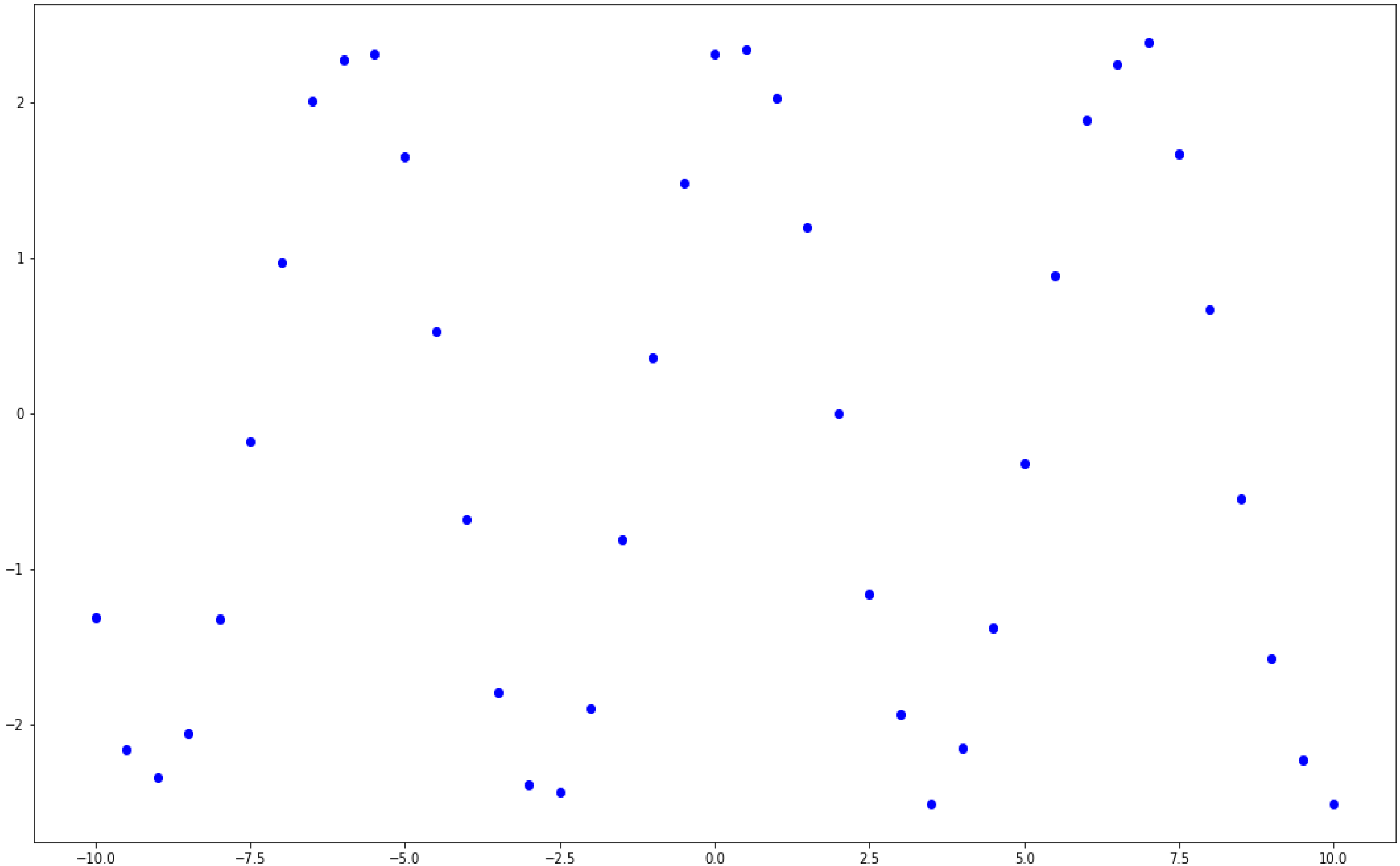
Beispiel: $A*\exp(-b*x^2)$



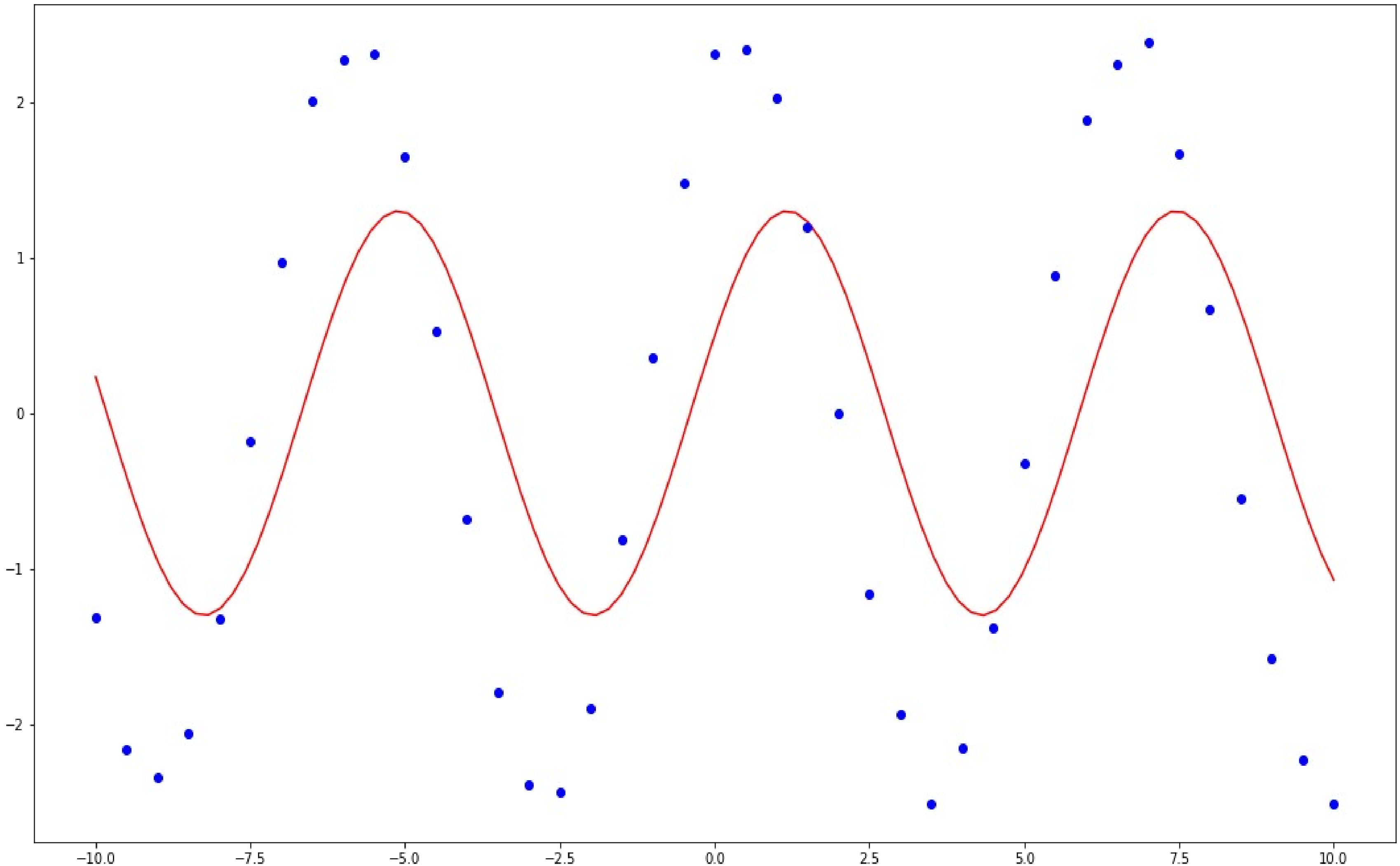
Beispiel: A*exp(-b*x²)



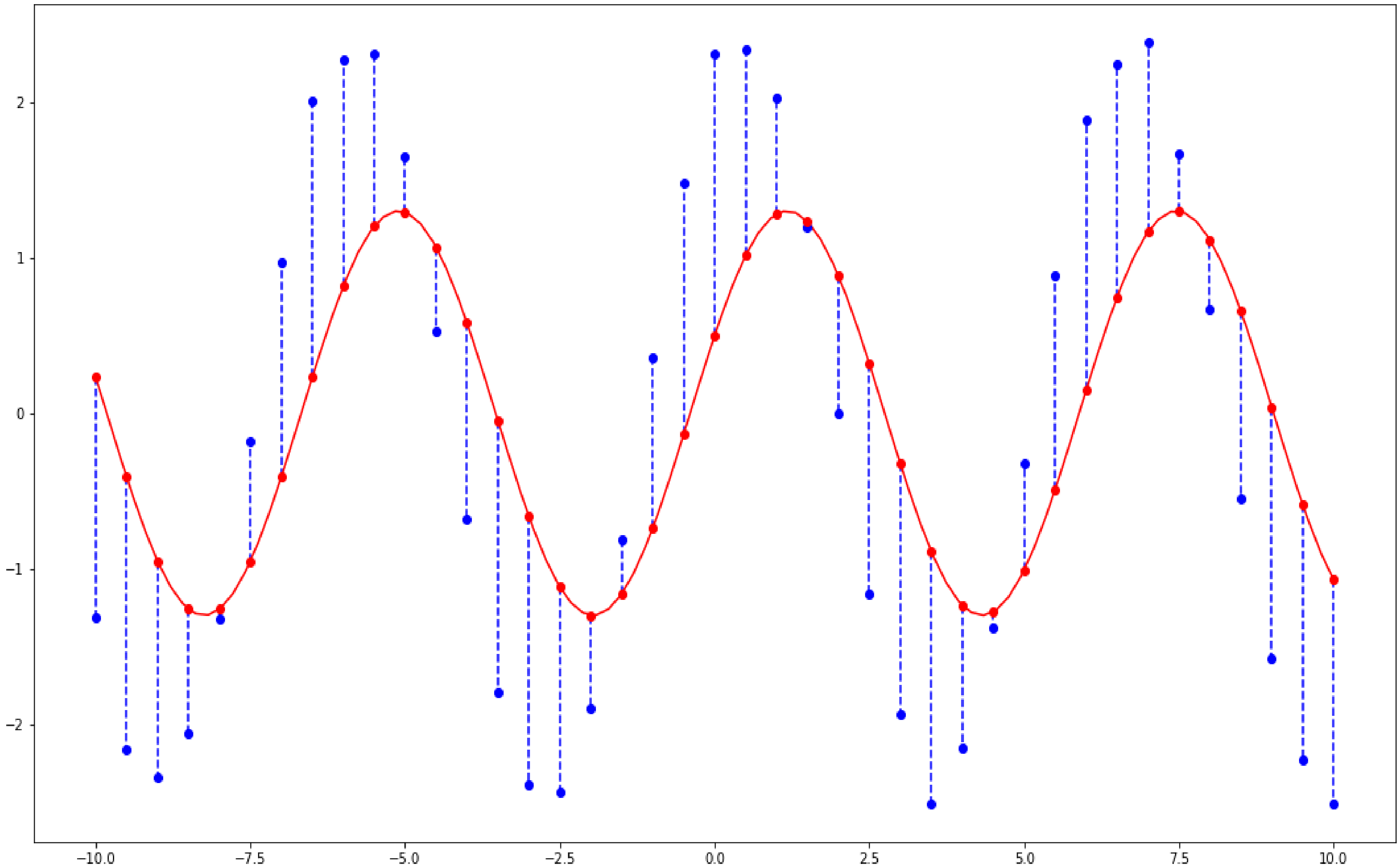
Beispiel: a*sin(t) + b*cos(t)



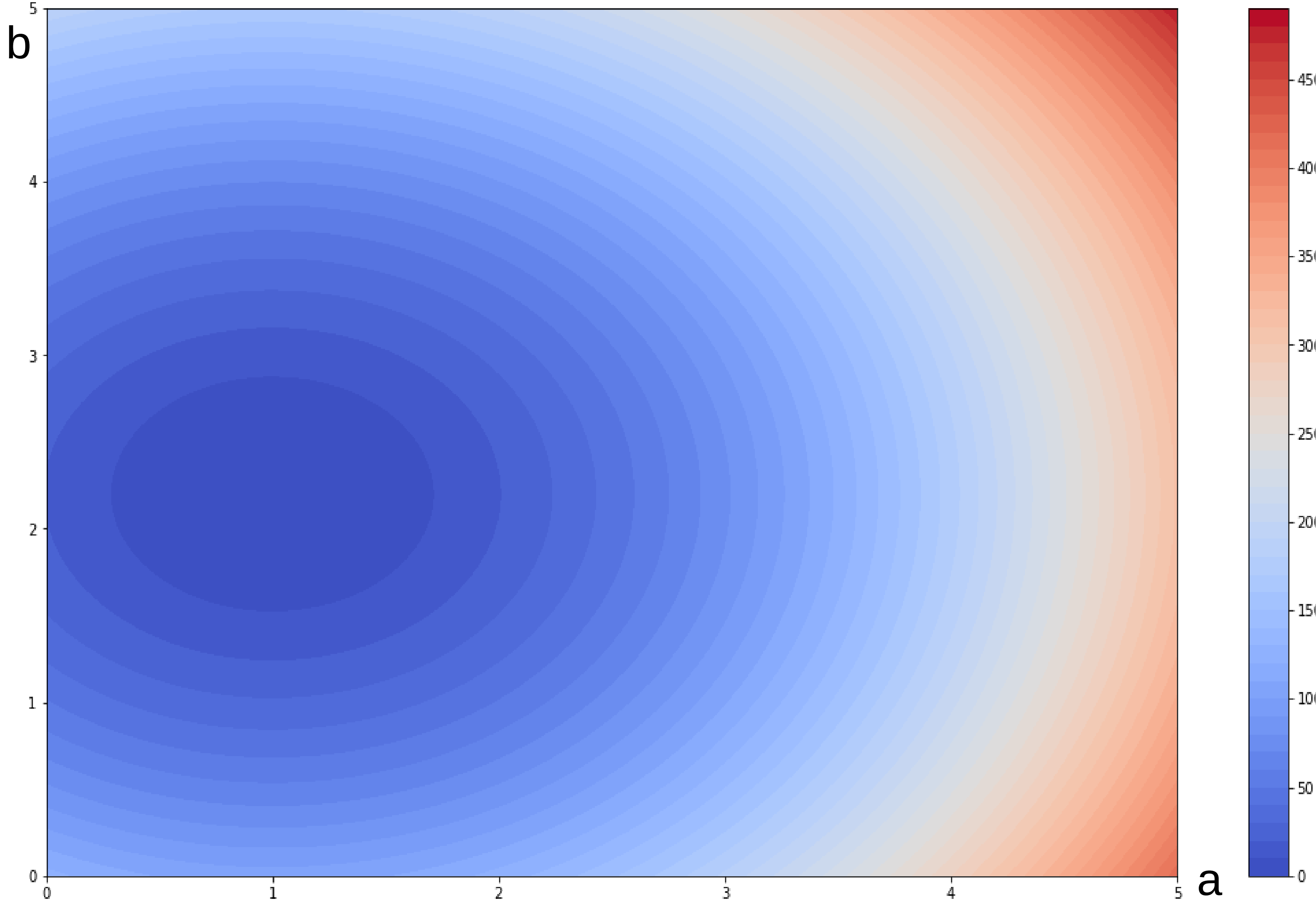
Beispiel: a*sin(t) + b*cos(t)



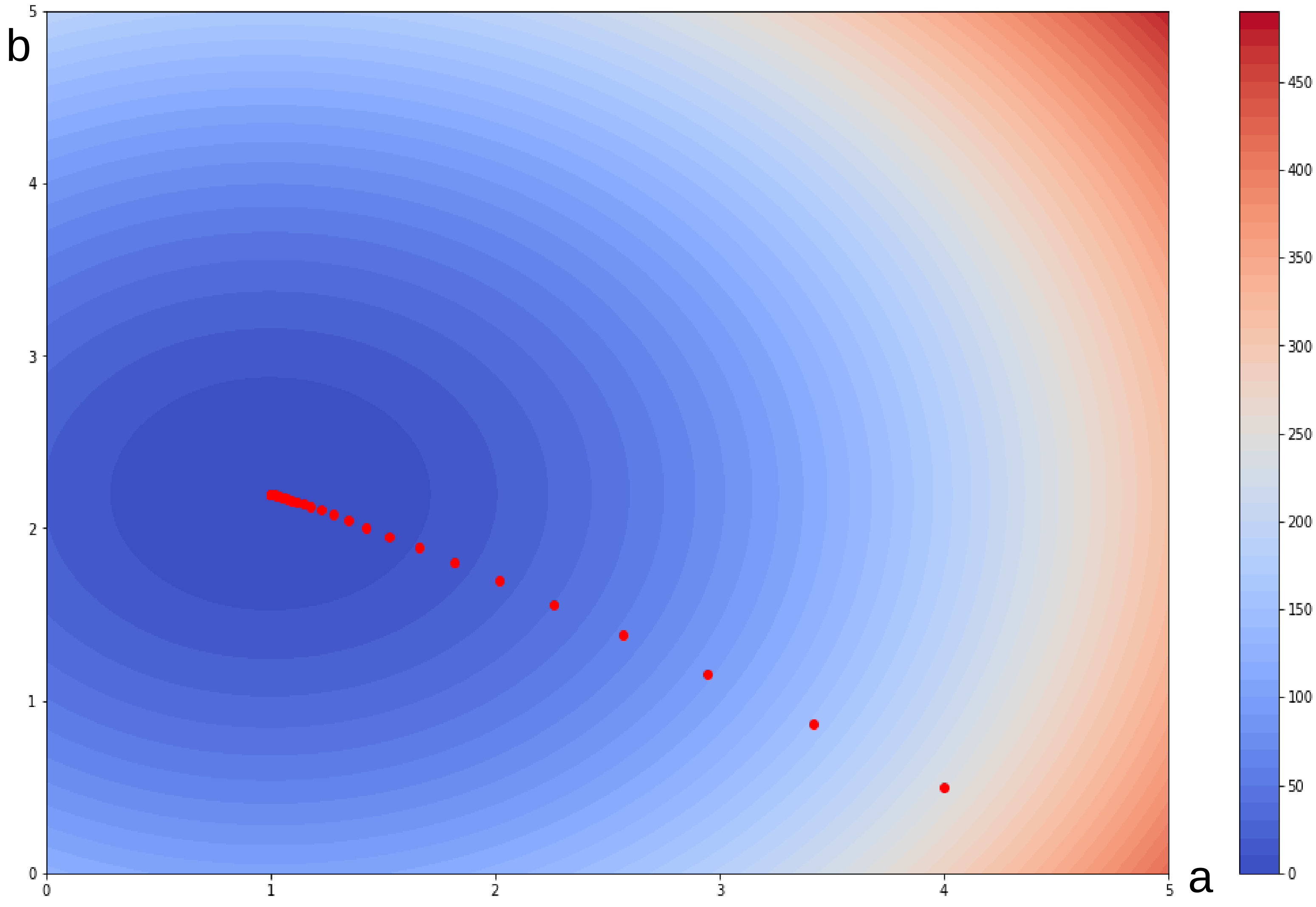
Beispiel: a*sin(t) + b*cos(t)



Beispiel: a*sin(t) + b*cos(t)



Beispiel: a*sin(t) + b*cos(t)



Optimierungsverfahren

- Verfahren 1ster Ordnung
  - Gradientenverfahren
  - ...
- Verfahren 2ter Ordnung
  - Gauss-Newton-Verfahren
  - Levenberg-Marquardt-Verfahren
  - ...

Themen heute

- Exkurs – Optimierung
- Operatoren der Vektoranalysis
- Bespiele für partielle DGLs

Operatoren der Vektoranalysis - Divergenz

- Operator angewendet auf ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- Definition im $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1}$$

Operatoren der Vektoranalysis - Divergenz

- Operator angewendet auf ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- Definition im $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1}$$

- Definition im $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} v_i \tag{2}$$

- Bedeutung:
  - Die Divergenz eines Vektorfeldes sagt etwas über die Quellstärke des Vektorfeldes aus.
- Beispiel aus der Elektrodynamik
  - elektrisches Feld $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, magnetisches Feld $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Operatoren der Vektoranalysis - Rotation

- Operator angewendet auf ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- Definition im $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

Operatoren der Vektoranalysis - Rotation

- Operator angewendet auf ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- Definition im $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Betrachtung nur der z-Komponente

$$\left(\operatorname{rot} \vec{v}\right)_z = \left(\nabla \times \vec{v}\right)_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x \tag{4}$$

- Hinweis: Operator-Bezeichung im englisch-sprachigen Raum 'curl'
- Bedeutung:
  - Die Rotation ist ein Maß für die Rotationsstärke eines Vektorfeldes.

Beispielberechnungen

- Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation für die folgenden Vektorfelder

$$\text{a)} \qquad \vec{v}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\text{b)} \qquad \vec{v}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) + 2y \\ 3y^2 + z \\ 2x + e^z \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Beweisen Sie die folgende mathematische Aussage.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \tag{7}$$

Operatoren der Vektoranalysis - Laplace-Operator

- Operator angewendet auf ein Skalarfeld $v(\vec{x})$ oder ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- ... als Prosa-Ausdruck: Der Laplace-Operator entspricht der Summe der 2ten Ableitungen.
- Definition des Laplace-Operators

$$\triangle \equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \nabla \cdot \nabla \tag{8}$$

Operatoren der Vektoranalysis - Laplace-Operator

- Operator angewendet auf ein Skalarfeld $v(\vec{x})$ oder ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$
- ... als Prosa-Ausdruck: Der Laplace-Operator entspricht der Summe der 2ten Ableitungen.
- Definition des Laplace-Operators

$$\triangle \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla \tag{8}$$

- Umformulierung (Betrachtung im $\mathbb{R}^3$)

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{9}$$

- Verallgemeinerung für den $\mathbb{R}^n$: $\triangle_n = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$

Beispielberechnung zum Laplace-Operator

- Berechnen Sie
$$\triangle \left(x^4 y^3 z^2\right) \tag{10}$$

Hinweise zum Rechnen mit dem Nabla-Operator ∇

a) $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{11}$$

b) $$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \tag{12}$$

c) $$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \triangle \vec{A} \end{aligned} \tag{13}$$

Video-Empfehlungen

- Video zum Verständnis der Divergenz und der Rotation
  https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE
- Video zu Differentialgleichungen
  https://www.youtube.com/watch?v=p_di4Zn4wz4

Themen heute

- Exkurs – Optimierung
- Operatoren der Vektoranalysis
- Bespiele für partielle DGLs

Wellengleichung in der Elektrodynamik

- Ausgangsgleichung: Maxwell-Gleichungen im Vakuum ohne Quellen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{15}$$

- Hinweise:
  - **E** - elektrische Feldstärke
  - **B** - magnetische Flussdichte
  - Notation: $\vec{E} = \mathbf{E}$ (Vektoren können auch dick geschrieben werden.)

Wellengleichung in der Elektrodynamik

- Ausgangsgleichung: Maxwell-Gleichungen im Vakuum ohne Quellen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{17}$$

- Umformungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) - \triangle \mathbf{E} = -\triangle \mathbf{E} \\ &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{B}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\triangle \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(Wellengleichung)} \tag{18}$$

Wellengleichung in der Elektrodynamik

- Propagation einer Feldkomponente im 1D

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{19}$$

- Lösung (allgemein)

$$E_x = E_x(x - ct) \tag{20}$$

Navier-Stokes-Gleichung

- Zentrale Gleichung der Strömngsmechanik / Fluiddynamik
- Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Fluide

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\triangle\mathbf{v} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \tag{21}$$

  - $\mathbf{v}$ steht für das Geschwindigkeitsfeld an jedem Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$
  - ∇p ist der Druckgradient als treibende Kraft auf das Fluid
  - $\mu\triangle\mathbf{v}$ steht für die durch Viskosität bedingte "innere" Reibung
  - $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ steht für externe Kraftdichten (z.B. Gravitationskraft je Volumenelement)
  - Der erste Term steht für die resultiernde Kraftdichte. (siehe nächste Folie)

Navier-Stokes-Gleichung - Erläuterung

- bekannt ist:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad , \tag{22}$$

  mit **F** für die Kraft, **v** für die Geschwindigkeit und m für die Masse.

- Übergang zu einer Kraftdichte mit ρ für die Massendicht:

$$\mathbf{f} = \rho\,\mathbf{a} = \rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{23}$$

- Betrachtung der zeitlichen Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{v}\Big(x(t), y(t), z(t), t\Big) &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \cdots + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ &= \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \end{aligned} \tag{24}$$

Wärmeleitungsgleichung

- Das Temperaturfeld $u(\mathbf{r}, t)$ an einem Ort $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ und zur Zeit t ergibt sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{r}, t) - a \triangle u(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad , \tag{25}$$

  wobei a (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$) der Temperaturleitfähigkeit entspricht und weiterhin Quellterme berücksichtigt werden.
- ... und die Propagation im 1D (ohne Quellen)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{r}, t) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{26}$$