Themenübersicht

- Spezielle Koordinatensysteme
  - Poloarkoordinaten
  - Zylinderkoordinaten
  - Kugelkoordinaten

Spezielle Koordinatensysteme - Motivation

- Wie würden Sie eine automatisiserte Kirschplatzierungssoftware programmieren, deren Ziel es ist, auf runden Torten möglichst gleichmäßige Kirschen zu platzieren?
- Wir würden Sie die Software (also koordinatentechnisch) konzipieren, welche sich mit dem Bemalen von Christbaumkugeln beschäftigt?
- An einem Punkt auf einer Arbeitsfläche ist ein Roboterarm installiert. Wie geben Sie vom Roboterarm am einfachsten die zu erreichenden Positionen auf der Arbeitsfläche an?
- Wie beschrieben Sie einen Punkt auf der Erde?
- Wie würden Sie die Kraftwirkung der Erde auf Weltraumschrott beschreiben?

Polarkoordinaten

- Koordinatensystem analog zu Beschreibung der komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene
- Umrechnung

$$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi) \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

mit $r \in [0, \infty)$ als den Abstand vom Koordinatenursprung und $\varphi \in [0, 2\pi)$ als entsprechende Winkelangabe

- Beschreibungsänderung eines Skalarfeldes
  - $f(x, y)$ in kartesischen Koord. - z.B. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$
  - $f(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten - z.B. $f(r, \varphi) = r^{-2}$

Polarkoordinaten - Basisvektoren

- Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten

$$\vec{a} = a_r \, \vec{e}_r + a_\varphi \, \vec{e}_\varphi \tag{3}$$

- Anwendung für die Beschreibung von Vektorfeldern im $\mathbb{R}^2$
- Beispiel:

$$\vec{F} = \frac{\vec{e}_r}{r^2} \tag{4}$$

  als rein radialsymmetrisches Vektorfeld
- Umrechnungen

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi) \, \vec{e}_x + \sin(\varphi) \, \vec{e}_y \tag{5}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \, \vec{e}_x + \cos(\varphi) \, \vec{e}_y \tag{6}$$

- Hinweis: Operatoren der Vektoranalysis lassen sich in Polarkoordinaten umrechnen

$$\mathrm{grad} f(r, \varphi) = \nabla f(r, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \tag{7}$$

Integration über eine Kreisfläche

- Beispiel:
  - Gegeben sei eine Teilchenzahldichte $n(x, y)$ in einer Petrischale mit dem Radius R.
  - Gesucht ist die Gesamtteilchenanzahl N.
  - Lösungsansatz

$$N = \int_{\Omega=\text{Kreis}} n(x, y)\, dA = \int_{\Omega=\text{Kreis}} n(r, \varphi)\, dA \tag{8}$$

- Bestimmung des Flächenelementes dA

$$\begin{aligned} \text{Höhe:} \quad & dr \\ \text{Breite:} \quad & r\, d\varphi \\ \Longrightarrow \quad & dA = r\, d\varphi\, dr \end{aligned} \tag{9}$$

- Resultierendes Integral

$$N = \int_0^R \int_0^{2\pi} n(r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr \tag{10}$$

Beispiel: Integration über eine Kreisfläche

- Integrieren Sie die Funktion

$$n(r, \varphi) = A\, e^{-\alpha r} \tag{11}$$

über eine Kreisfläche vom Radius R.

Beispiel 2: Fläche unter der Gaußeschen Glockenkurve

- Integration über den gesamten $\mathbb{R}$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{12}$$

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)$$

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$$

- Substitutionen (Umformulierung der Integration über $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} dxdy &\quad\rightarrow\quad r\, d\varphi\, dr \\ x^2 + y^2 &\quad\rightarrow\quad r^2 \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} &\quad\rightarrow\quad \int_0^R \int_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Fläche unter der Gaußeschen Glockenkurve

- Lösung des Integrals durch Integration durch Substitution

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \Longrightarrow \quad A^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\varphi \, dr$$

- Ergebnis

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{13}$$