Angewandte Mathematik

Vorlesung Nr. 7 – 19.10.2023

Dozent: Holger Gerhards
Kurs: TINF22IT1
Zeit: Oktober – Dezember 2023

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- Di 10.10.23 09:00-11:00
- Mi 11.10.23 09:00-11:45
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- **Do 19.10.23 13:00-16:00**
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00 (Wiederholung, Übungsaufgaben)
- Di 07.11.23 09:00-11:00
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur)

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Vektoranalysis:
  - Kurven im $\mathbb{R}^n$
  - Skalarfeld, Vektorfeld
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Exkurs – Numerik
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Erinnerungen

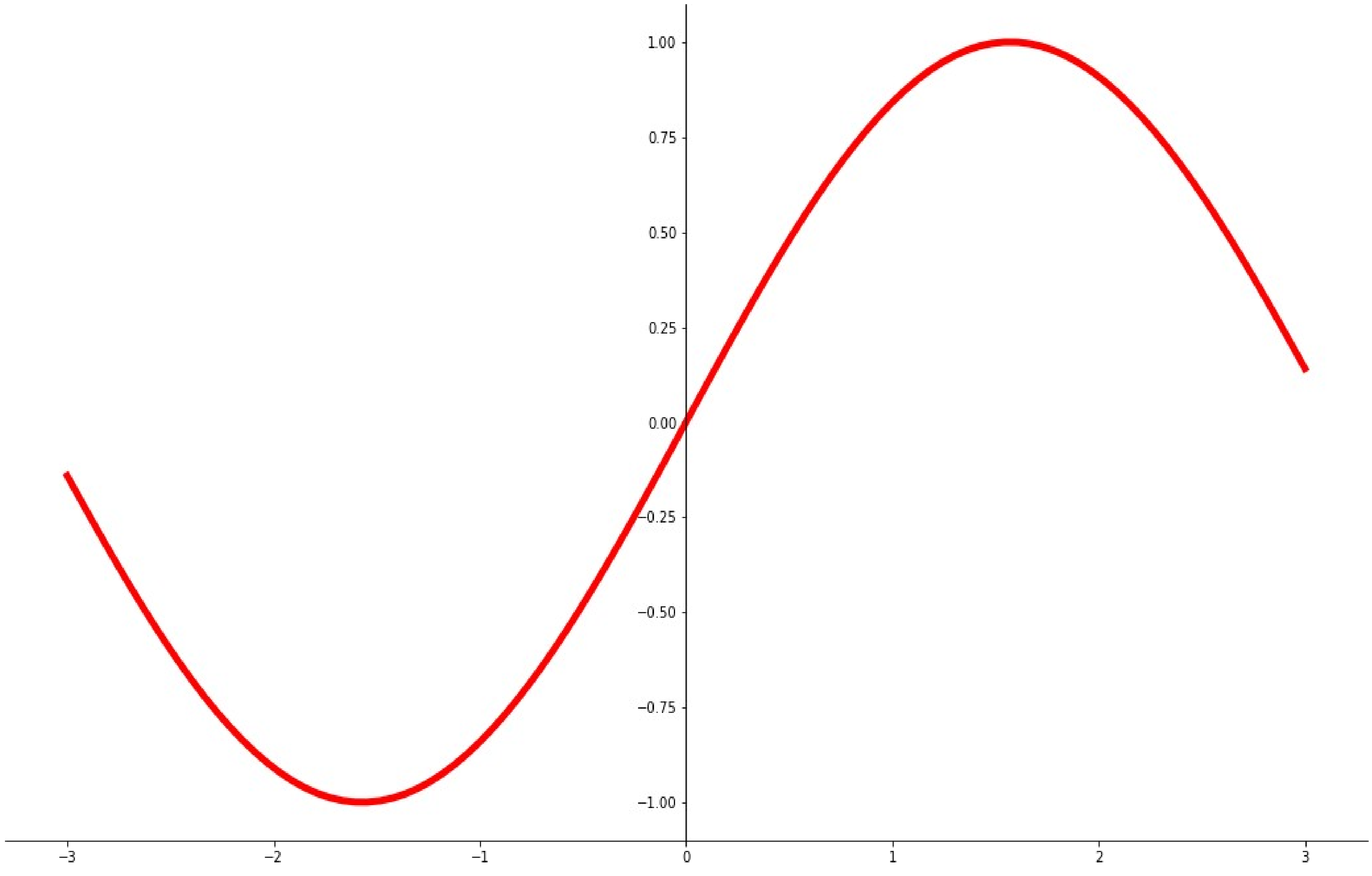
- Für was steht das Integralzeichen?
- Was wird mit einem Integral berechnet?
- Was wäre eine Anwendung für ein Kurvenintegral?

- Wann kann man die Integration bei einer Mehrfachintegration vertauschen?
- Warum kann es sinnvoll sein, angepasste Koordinatensysteme (wie Polarkoordinaten) zu verwenden?

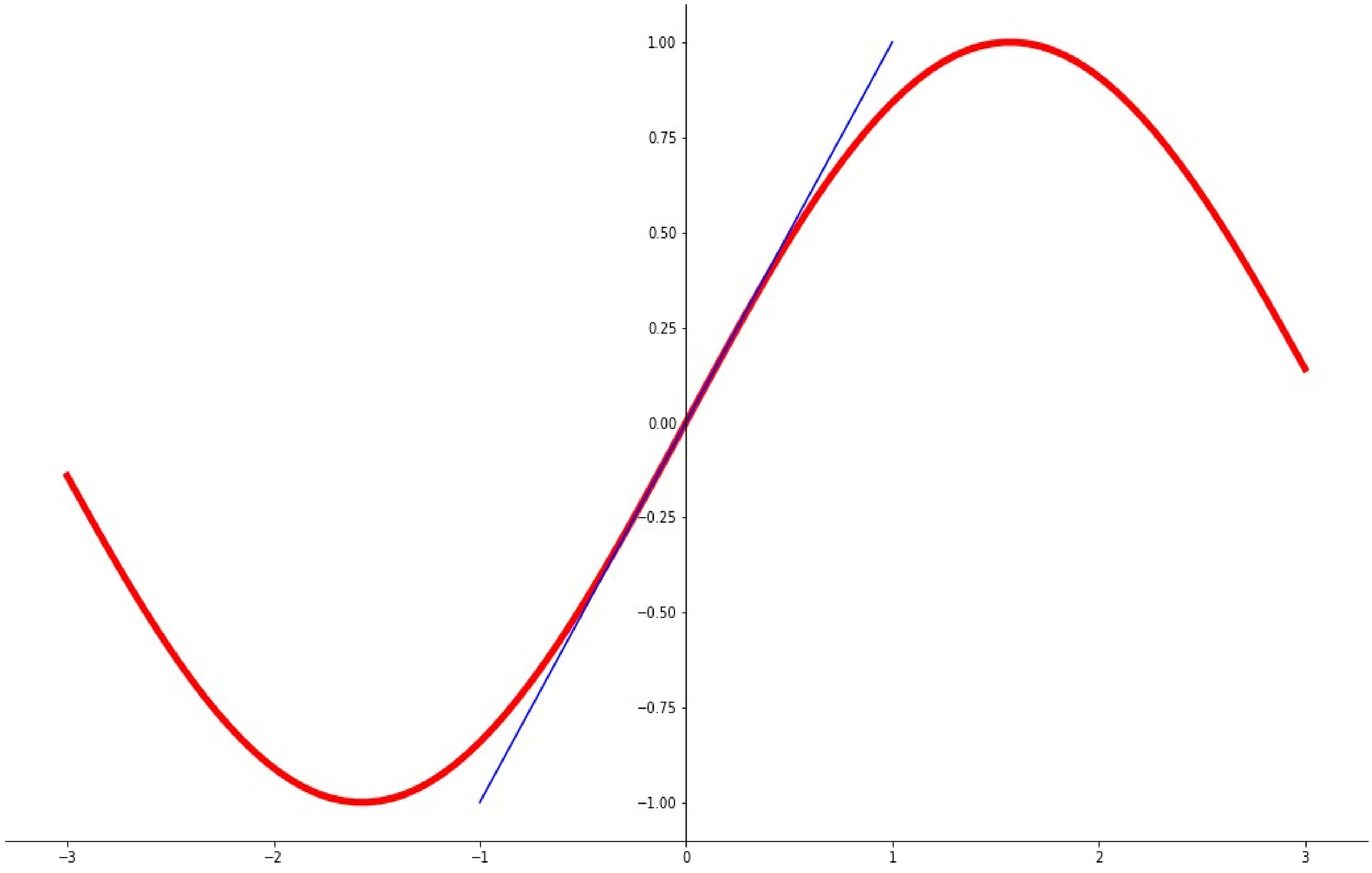
Themen heute

- **Visualisierung der Taylor-Entwicklung**
- Spezielle Koordinatensysteme
- Numerik (sehr kurz)

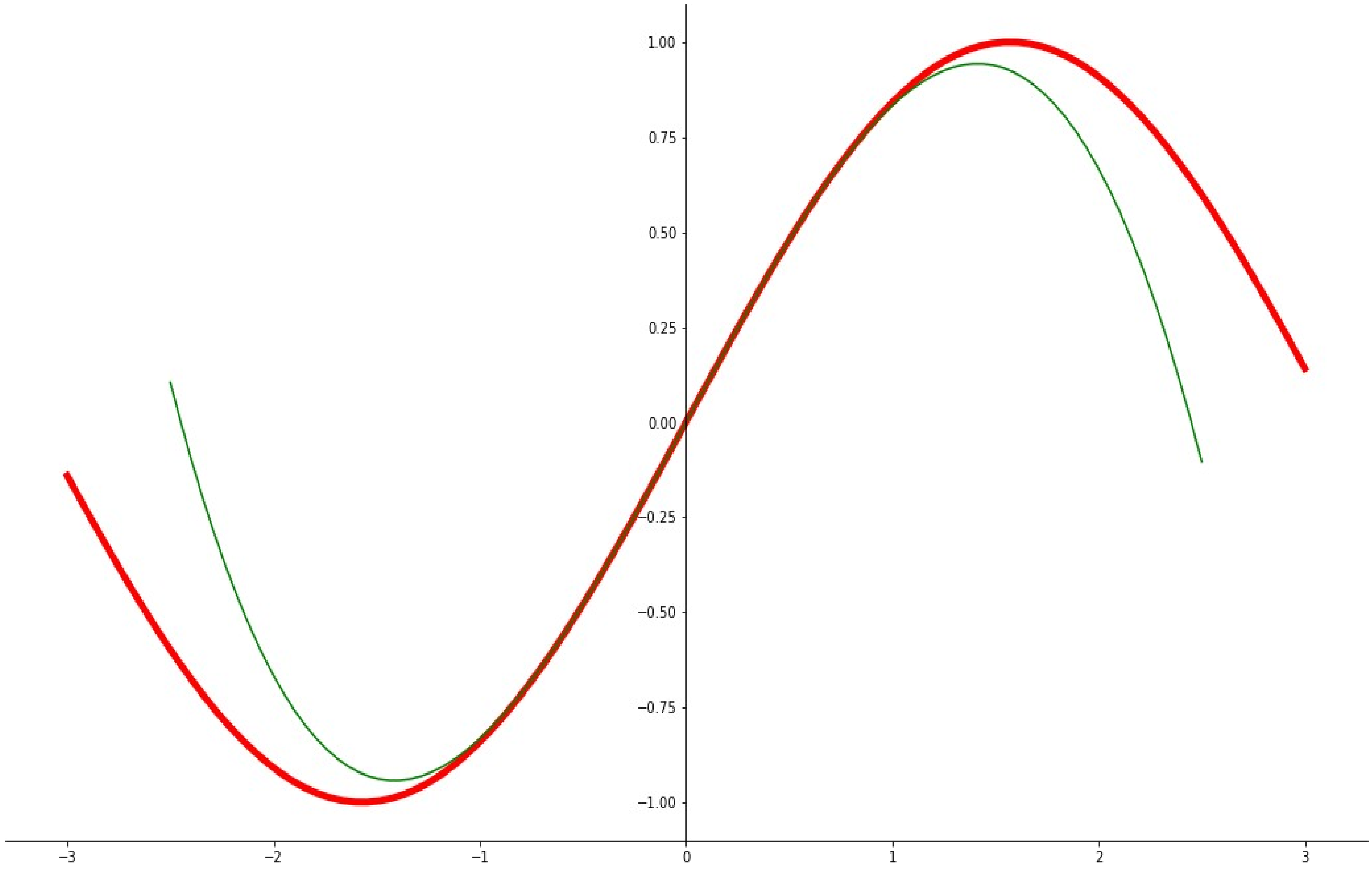
Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion



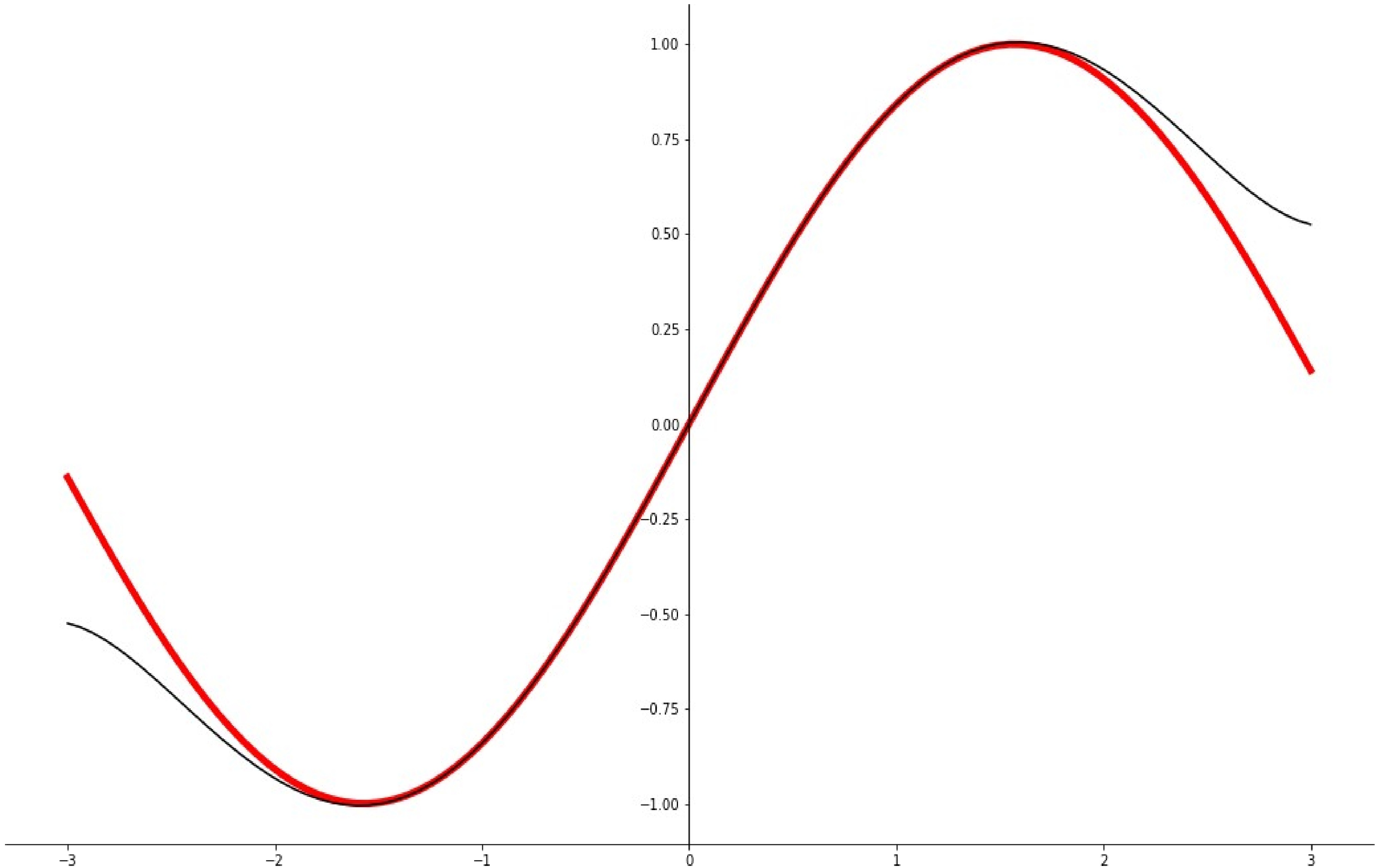
Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion



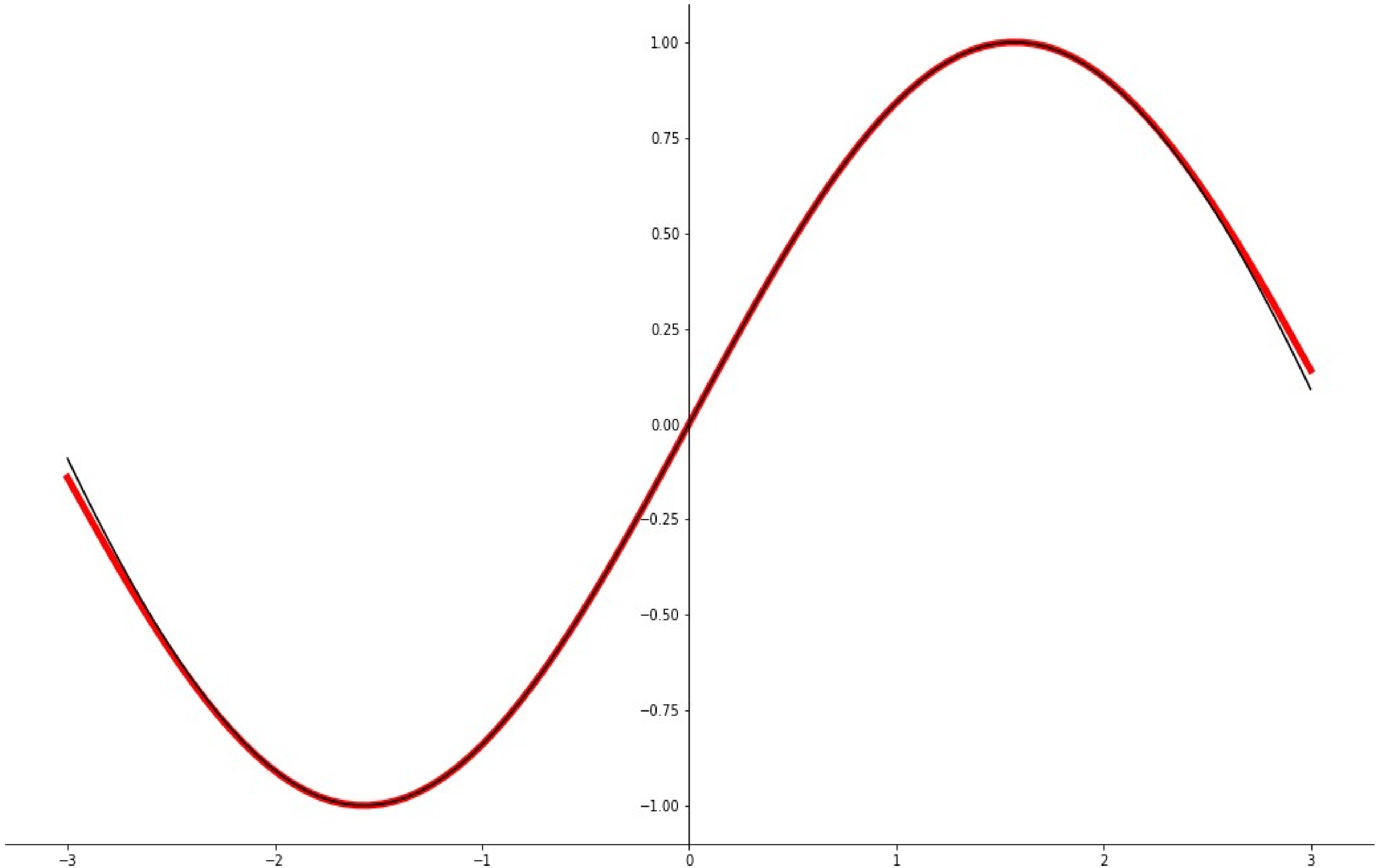
Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion



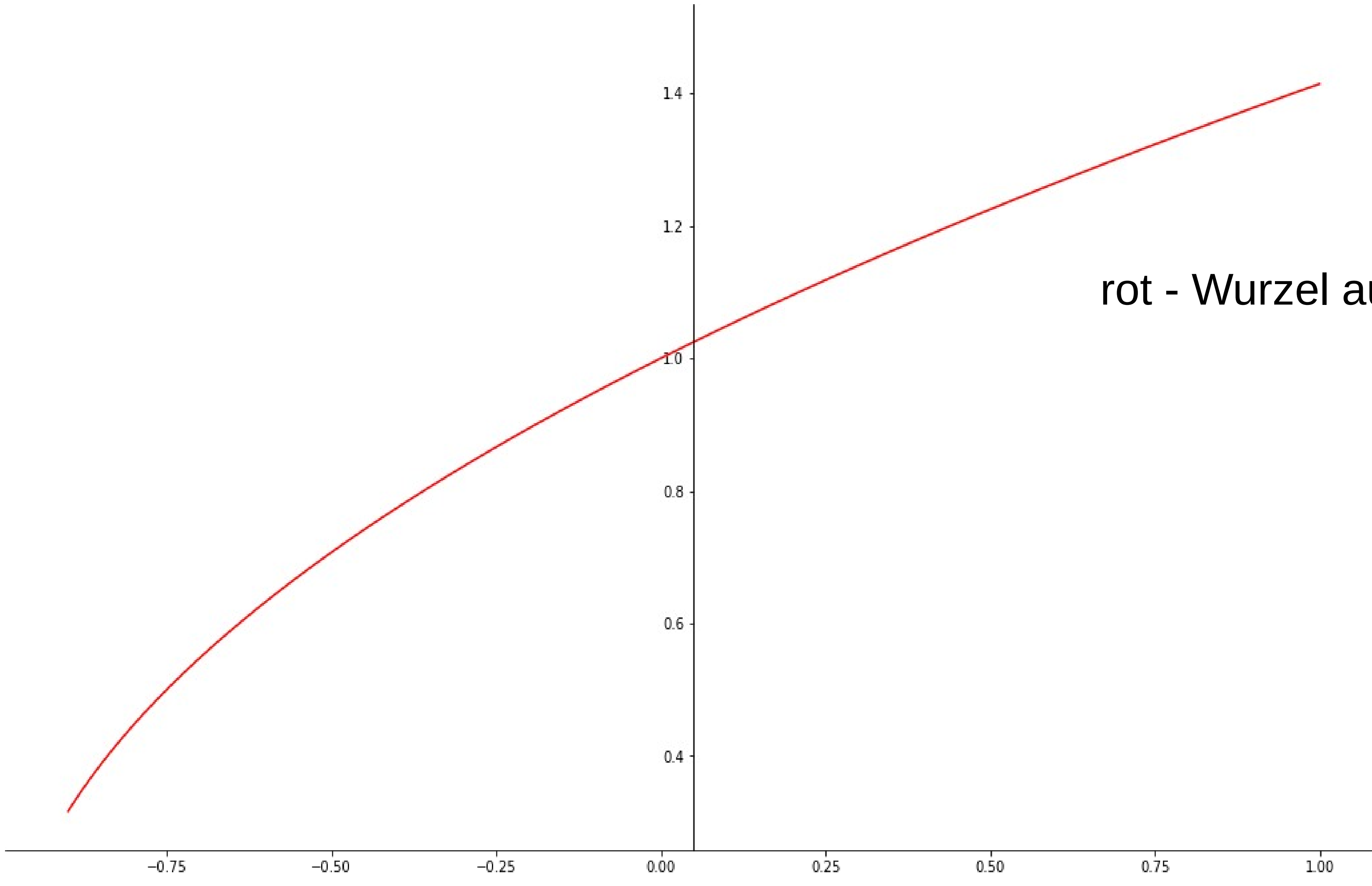
Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion



Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion

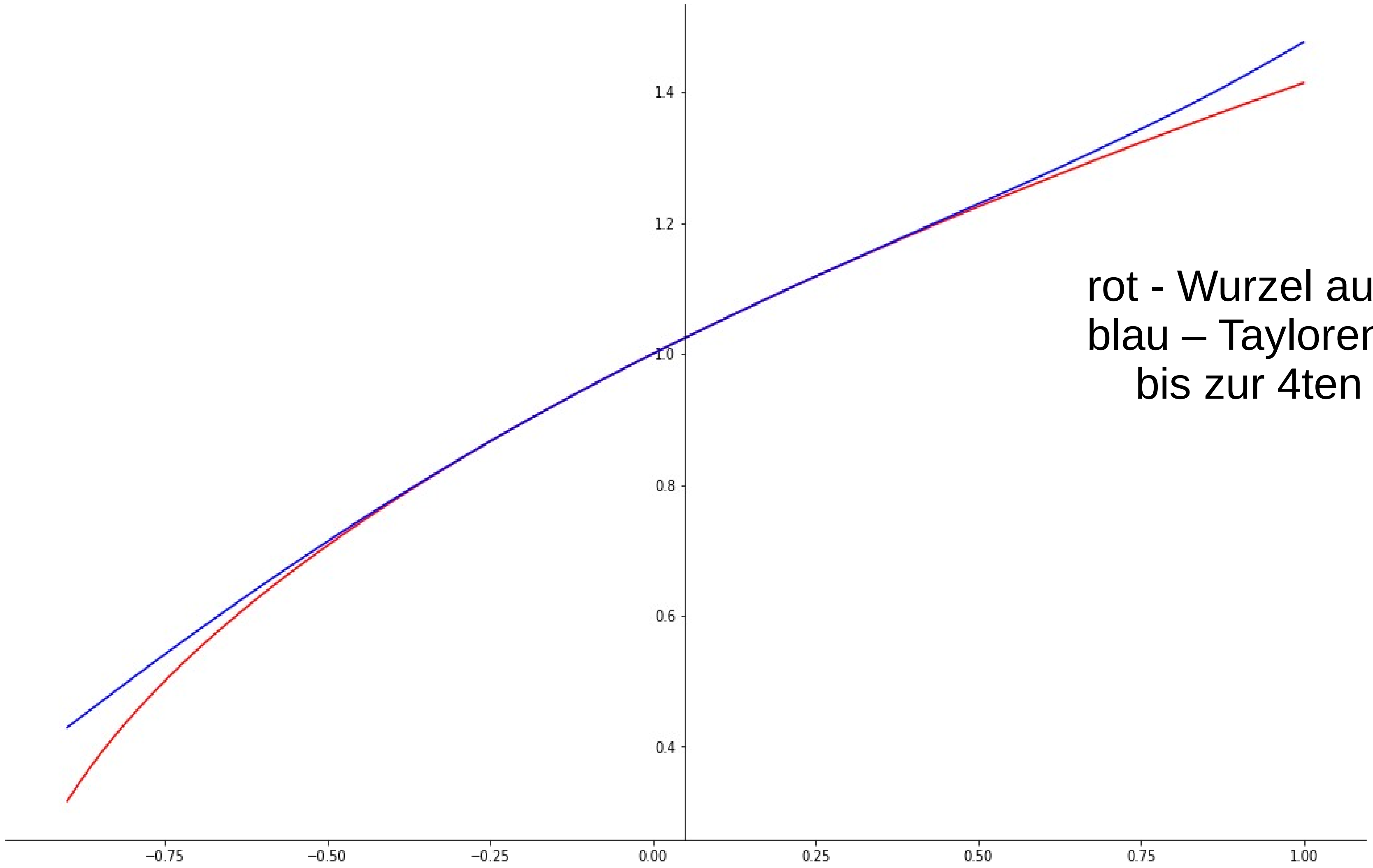


Taylor-Entwicklung der Wurzelfunktion



rot - Wurzel aus (1+x)

Taylor-Entwicklung der Wurzelfunktion



rot - Wurzel aus (1+x)
blau – Taylorentwicklung
bis zur 4ten Potenz

Themen heute

- Visualisierung der Taylor-Entwicklung
- **Spezielle Koordinatensysteme**
- Numerik (sehr kurz)

Zylinderkoordinaten

- Erweiterung der Polarkoordinaten für den $\mathbb{R}^3$
- Anwendung für zylindrische Problem (Röhren, Spiralen, ...)
- Umrechnung

$$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi) \qquad z = z$$

$$\text{und} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mit $r \in [0, \infty)$ als den Abstand von der z-Achse
und $\varphi \in [0, 2\pi)$ als entsprechende Winkelangabe
sowie z für die Höhe

- Beschreibungsänderung eines Skalarfeldes
  - $f(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten
  - $f(r, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten

Kugelkoordinaten

- Anwendung auf sphärische Probleme
  z.B. Beschreibung der Bewegung auf einer Kugeloberfläche
- Umwandlung $(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, \vartheta)$ mit

$$r \in [0, \infty) \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

- Skizze:

- Welche Flächen entstehen, wenn man stets eine der 3 Koordinatenachsen konstant lässt, aber die anderen beiden variiert?

Kugelkoordinaten

- Kurvenintegrale
- Koordinatenfläche
  - Konstruktionsvorschrift: Fixiere eine Koordinate und variiere die anderen beiden
  - wenn r konstant - Kugeloberfläche
  - wenn ϑ konstant - Kegel
    (oder Ebene bei $\vartheta = \pi/2$ oder Gerade bei $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$)
  - wenn φ konstant - Ebene durch die z-Achse

- Umrechnungen

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$
$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$
$$z = r \cos(\vartheta)$$

Integration über eine Kugeloberfläche

- Problemstellung:
  - Gegeben sei eine Dichteverteilung $n(\varphi, \vartheta)$ einer Entität auf einer Kugeloberfläche.
  - Gesucht ist die Berechnungsvorschrift für die Gesamtzahl der Entität.
  - Lösungsansatz

$$N = \int_{\Omega=\text{Kugelob.fl.}} n(\varphi, \vartheta)\, dA$$

- Flächenelement: $dA = r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$
- Resultierendes Integral:

$$N = \int_{\Omega} n(\varphi, \vartheta)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n(\varphi, \vartheta)\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$

Integration über ein Kugelvolumen

- Problemstellung:
  - Gegeben sei die Masseverteilung $\rho(r, \varphi, \vartheta)$ eines Planeten
  - Gesucht ist die Berechnungsvorschrift für die Gesamtmasse
  - Lösungsansatz

$$M = \int_{\Omega=\text{Kugel}} \rho(r, \varphi, \vartheta)\, dV$$

- Volumenelement: $dV = dA\, dr = r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$
- Resultierendes Integral:

$$M = \int_{\Omega} \rho(r, \varphi, \vartheta)\, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(r, \varphi, \vartheta)\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

Integration über ein Kugelvolumen - Test

- Annahme: $\rho(r, \varphi, \vartheta) = 1$
- Berechnung des Volumens einer Kugel

$$V_{\text{Kugel}} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

Themen heute

- Visualisierung der Taylor-Entwicklung
- Spezielle Koordinatensysteme
- **Numerik (sehr kurz)**

Numerische Differentiation

- Approximation einer Ableitung durch einen Näherungswert
- Vorwärtsquotient

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Zentraler Differenzenquotient

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Hinweis: Zentraler Differenzenquotient hat eine höhere Genauigkeit

Fragen

- Annahme:
  - Sie dürfen als Operationen nur die Addition (inkl. Subtraktion) und die Multiplikation (inkl. der Division) verwenden.

- Fragen:
  1) Wie würden Sie den Sinus an der Stelle 0,1 berechnen?
  2) Wie würden Sie die Wurzel von 12 berechnen?
  3) Wie würden Sie das Integral von 0 bis 1 der Funktion $f(x) = x^2$ ohne Kenntnis der Integrationsregeln berechnen?

  - Wie garantieren Sie bei all Ihren Ansätzen eine vorgegebene Genauigkeit?

Fragen

- Fragen:
  1) Wie würden Sie den Sinus an der Stelle 0,1 berechnen?
  2) Wie würden Sie die Wurzel von 12 berechnen?
  3) Wie würden Sie das Integral von 0 bis 1 der Funktion $f(x) = x^2$ ohne Kenntnis der Integrationsregeln berechnen?

- Lösungen:
  1) Nutzung des Taylorpolynoms
  2) Nutzung des Newton-Verfahrens (Nullstelle von $f(x) = x^2 - 12$)
  3) Nutzung numerischer Integration

Themen heute

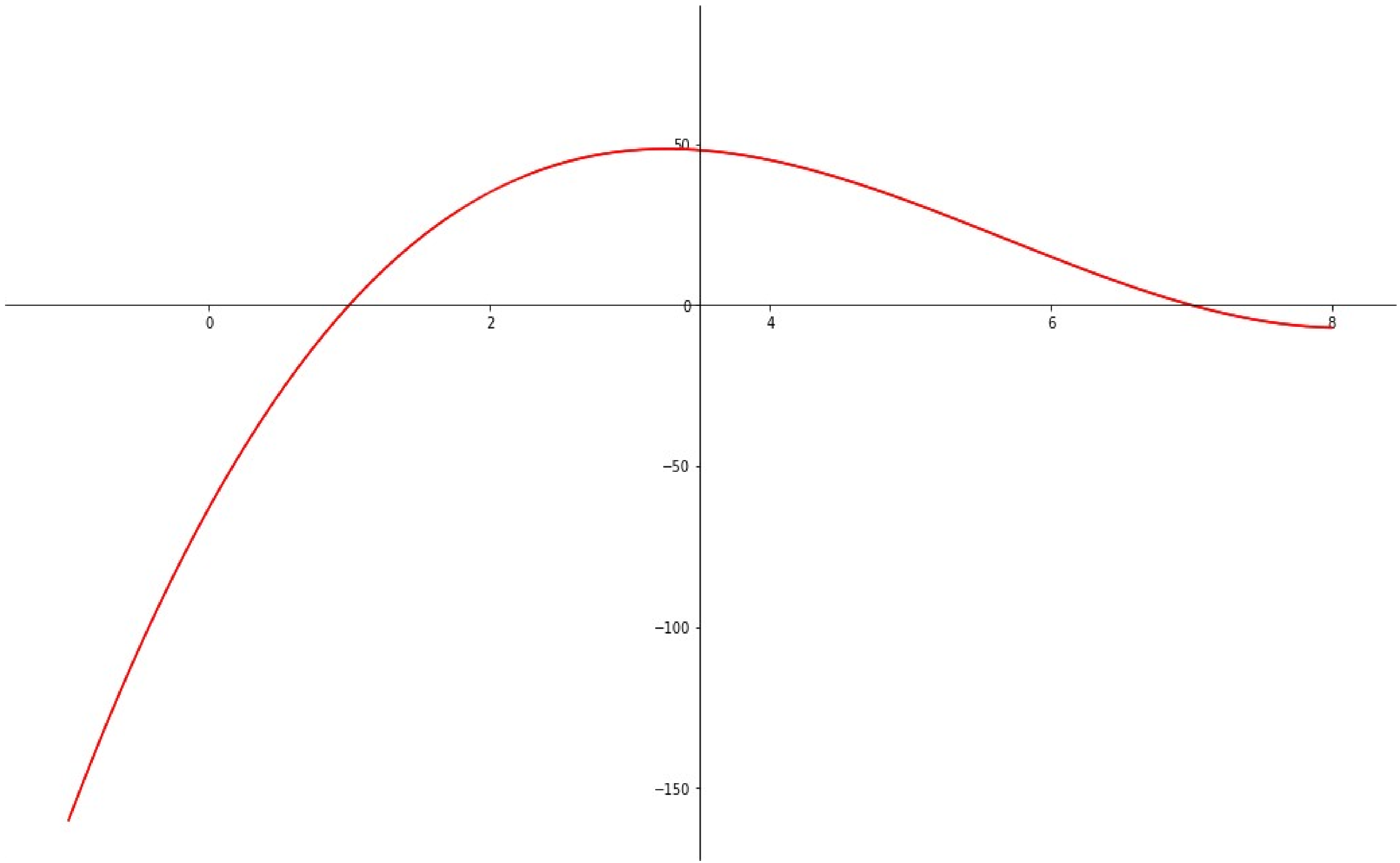
- Visualisierung der Taylor-Entwicklung
- Spezielle Koordinatensysteme
- **Numerik (sehr kurz)**
  - **Newton-Verfahren**
  - Numerische Integration

Newton-Verfahren

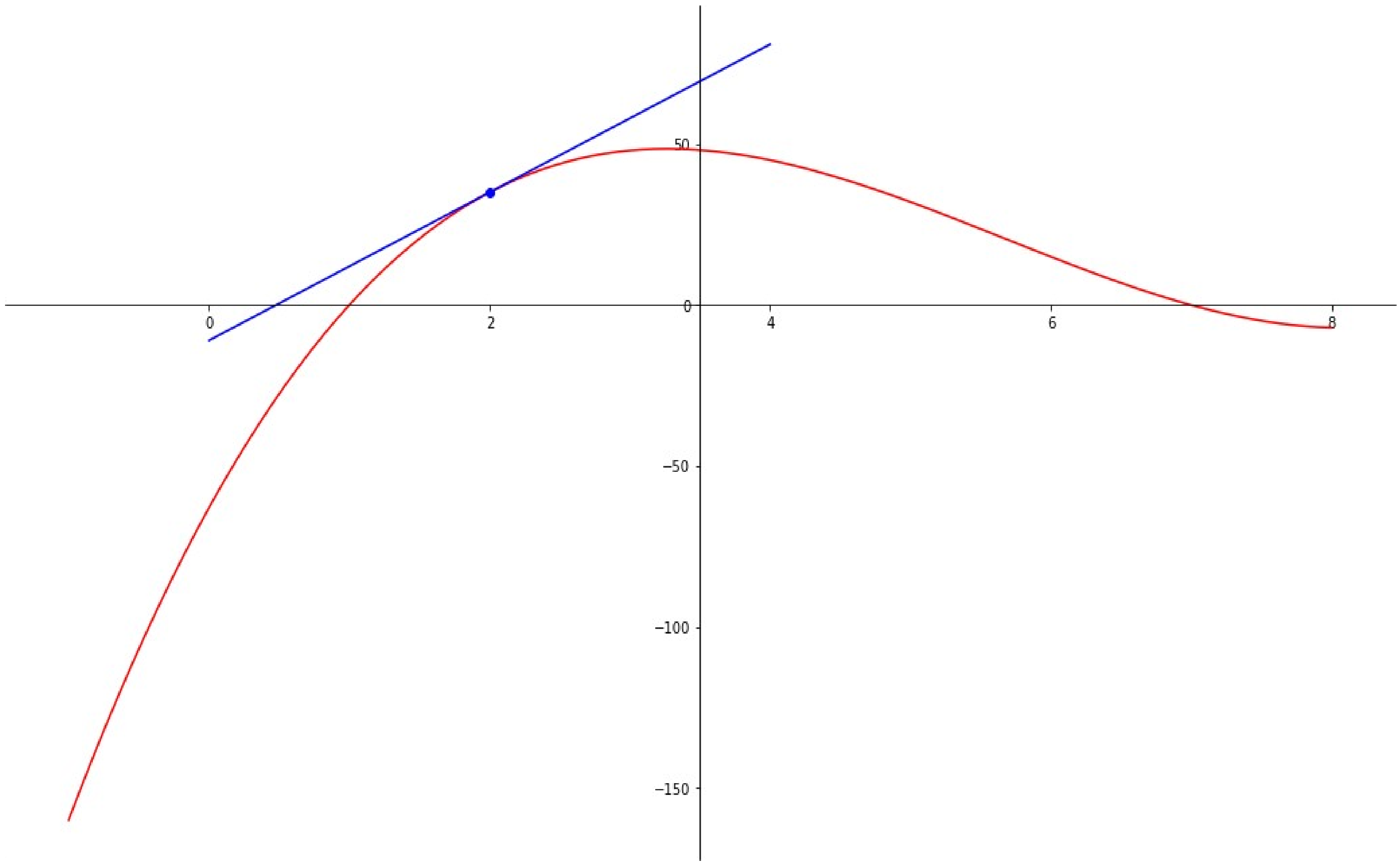
- Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen
- Iteratives Verfahren
- Vorgehen:
  - Gegeben sei eine Funktion f(x) mit von der eine Nullstelle gesucht ist.
  - Wähle eine beliebigen Startpunkt x_0
  - Bilde Tangente an dem Punkt x_0
  - Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse sei der folgende Punkt x_1
  - Bilde am Punkt x_1 die Tangente.
  - Wiederhole die Schritte … und brich an einer geeigneten Stelle ab.

    Zum Beispiel bei $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$

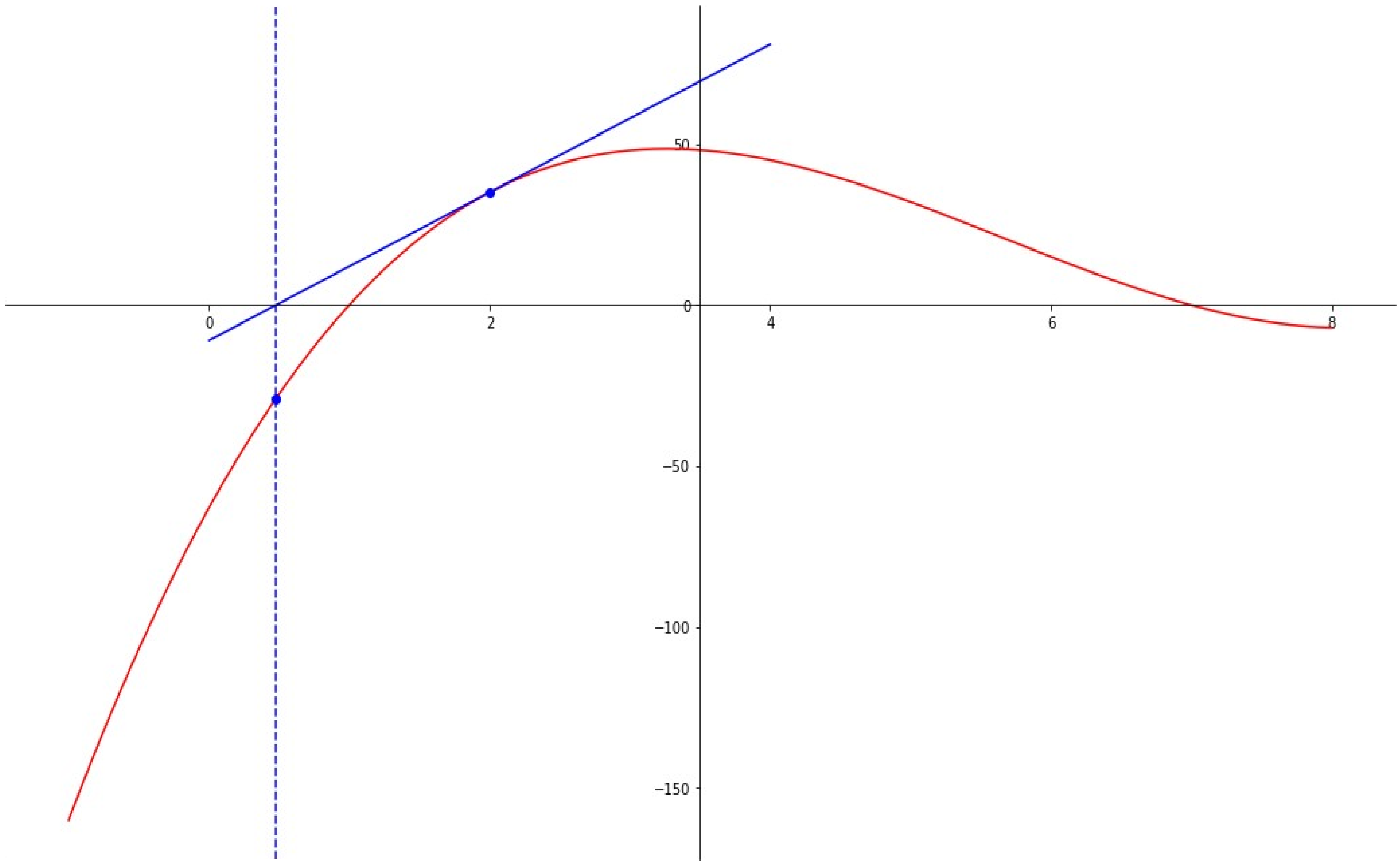
Newton-Verfahren - Vorgehen



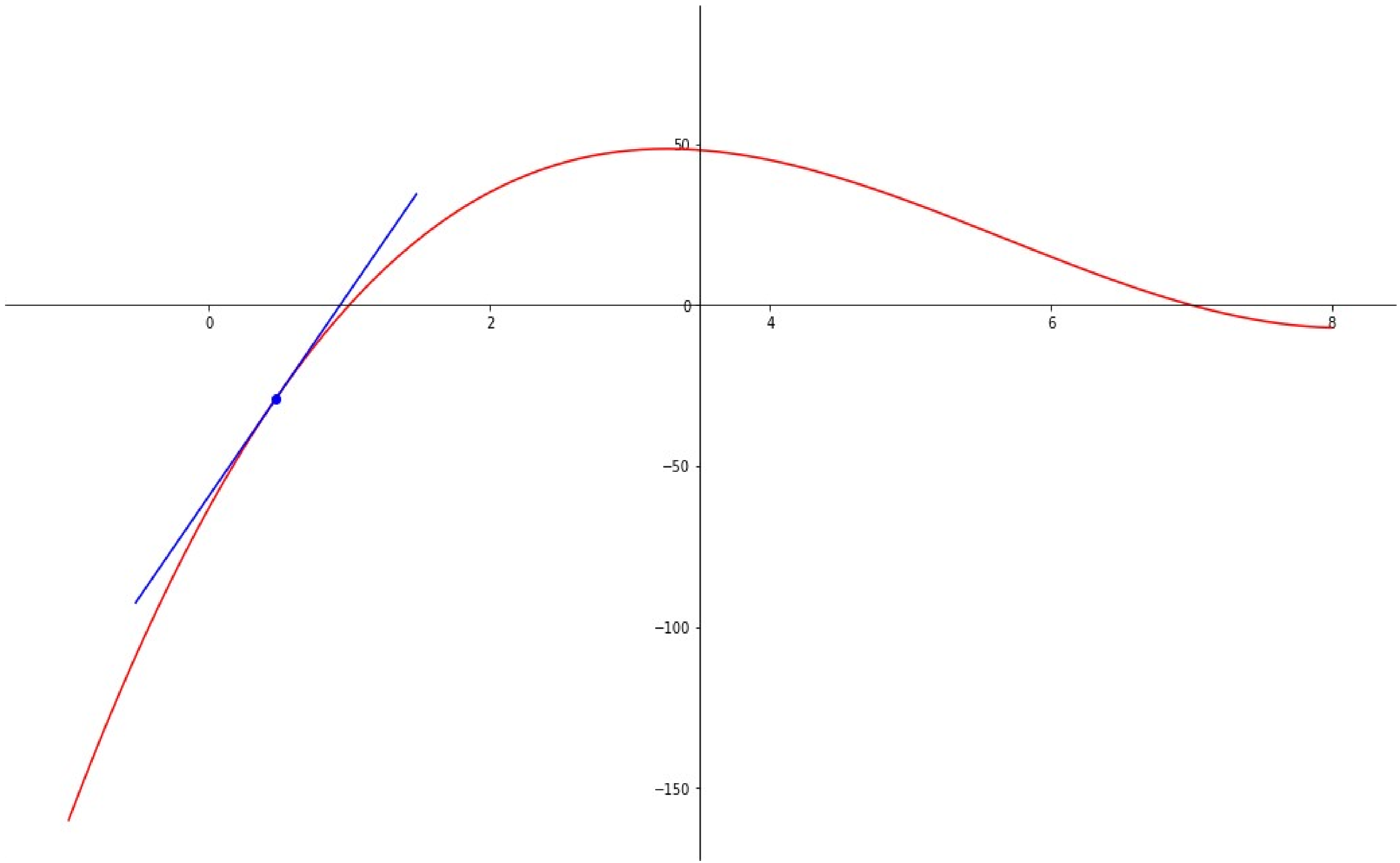
Newton-Verfahren - Vorgehen



Newton-Verfahren - Vorgehen



Newton-Verfahren - Vorgehen



Newton-Verfahren

- Verfahren zu approximativen Bestimmung einer Nullstelle
- Idee - Geradenapproximation am Punkt x_0

$$T_1 f(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Annahme: Nullstelle bei x_1 der Geraden zumindest nah am tatsächlichen Wert

$$T_1 f(x_1, x_0) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

- Berechnung von x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Nun: Geradenapproximation am Punkt x_1 usw.

Newton-Verfahren

- Allgemeine Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Abbruchkriterium

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \qquad \text{mit} \quad \varepsilon > 0$$

- Hinweis: Ergebnis sowie Konvergenzverhalten hängt vom gewählten Startwert x_0 ab

Newton-Verfahren - Beispiel

- Finden Sie eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$$

- Die Ableitung $f'(x)$ ergibt sich zu

$$f'(x) = 6x^2 + 8x - 2$$

- Iterationen

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
-2	9	6	-3,5	1,5
-3,5	-24,75	43,5	-2,93103	0,56897
-2,93103	-5,13490	26,09750	-2,73428	0,19676
-2,73428	-0,51074	20,98339	-2,70994	0,02434
-2,70994	-0,00732	20,38303	-2,70958	0,00036

Themen heute

- Visualisierung der Taylor-Entwicklung
- Spezielle Koordinatensysteme
- **Numerik (sehr kurz)**
  - Newton-Verfahren
  - **Numerische Integration**

Numerische Integration

- Aus Analysis:
  - Methoden zur Integration diverser Funktionen
- Hinweis:
  - Analytische Methoden schwer zu generalisieren und schwer zu implementieren
  - Nicht jedes Integral lässt sich analytisch bestimmen.
  - Einsatz numerischer Integration.

- Idee - Schrittfolge:
  1) Vorstellung der Integration über finite Teilstücke (Summationsbildung)
  2) Bildung der Integraldarstellung als Grenzübergang (Integralzeichen)
  3) Einsatz numerischer Verfahren (Effizientere Summationsbildung)

Numerische Integration

- Approximation eines Integrals
- Erinnerung: Integral als Grenzwert der Obersumme

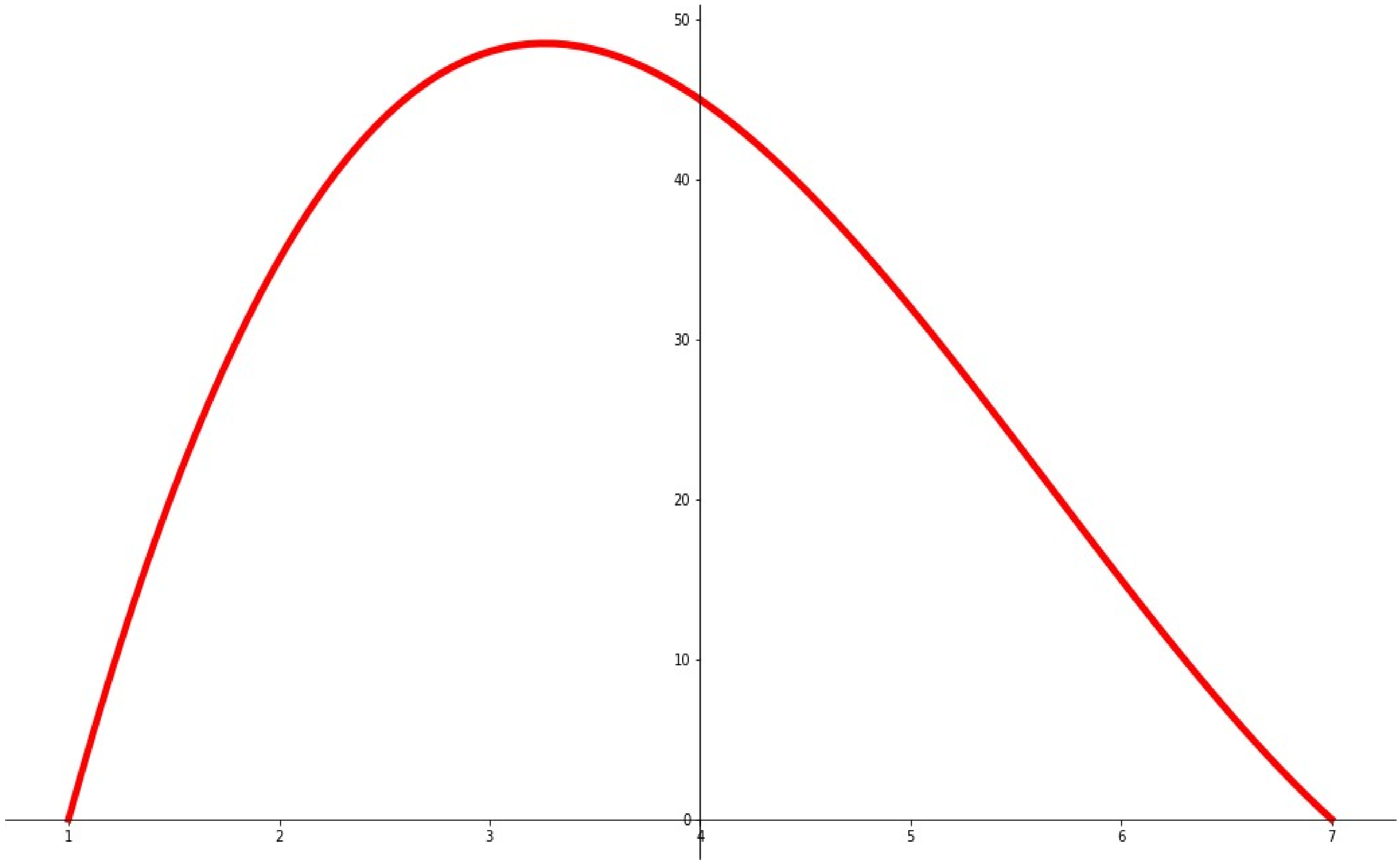
$$\lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_i + \triangle x)} (f(x)) \triangle x = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx$$

- Einfache (ungenaue) numerische Berechnung auf $[x_0, x_n]$

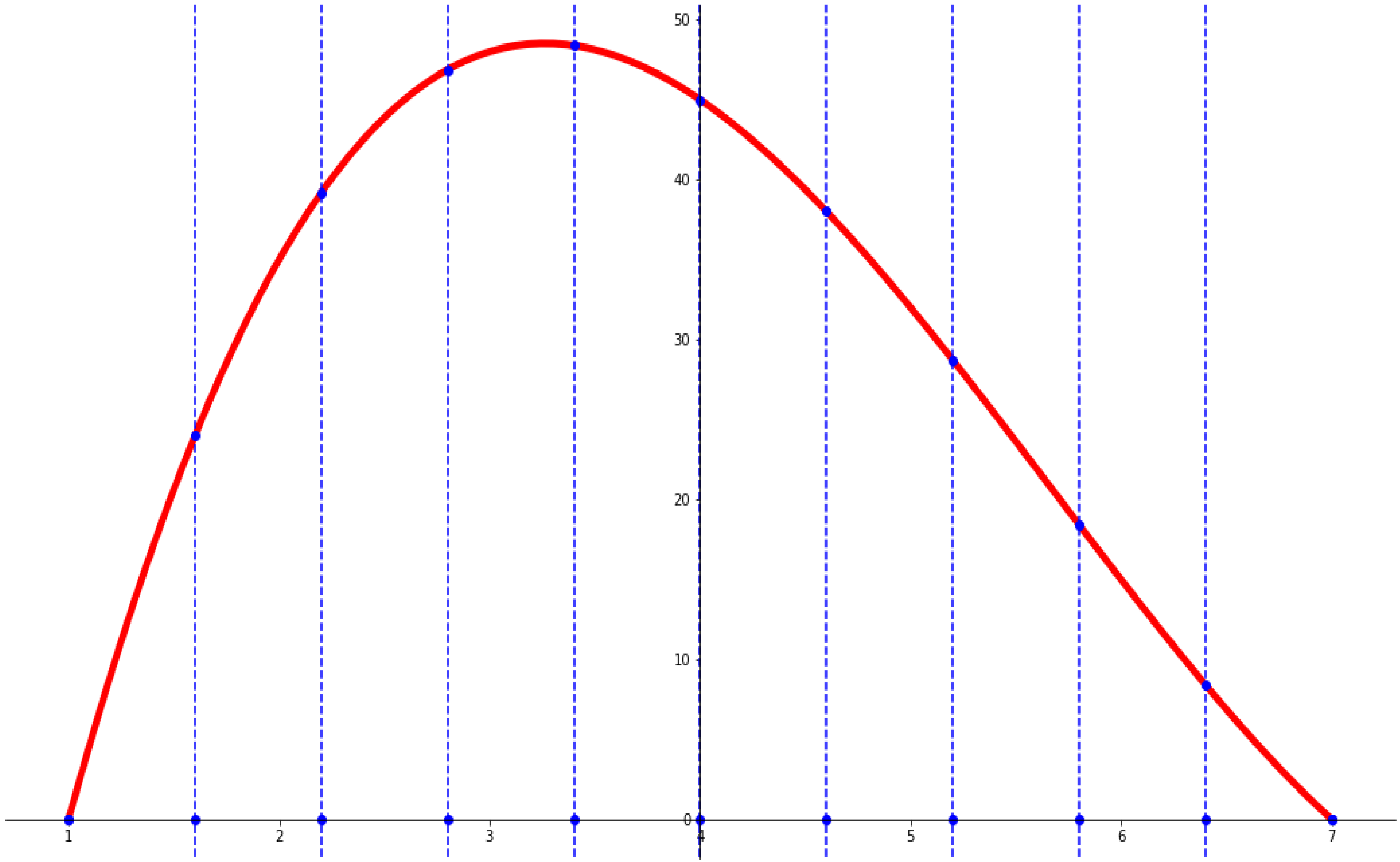
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, \triangle x$$

bei äquidistanter Unterteilung des Integrationsintervals

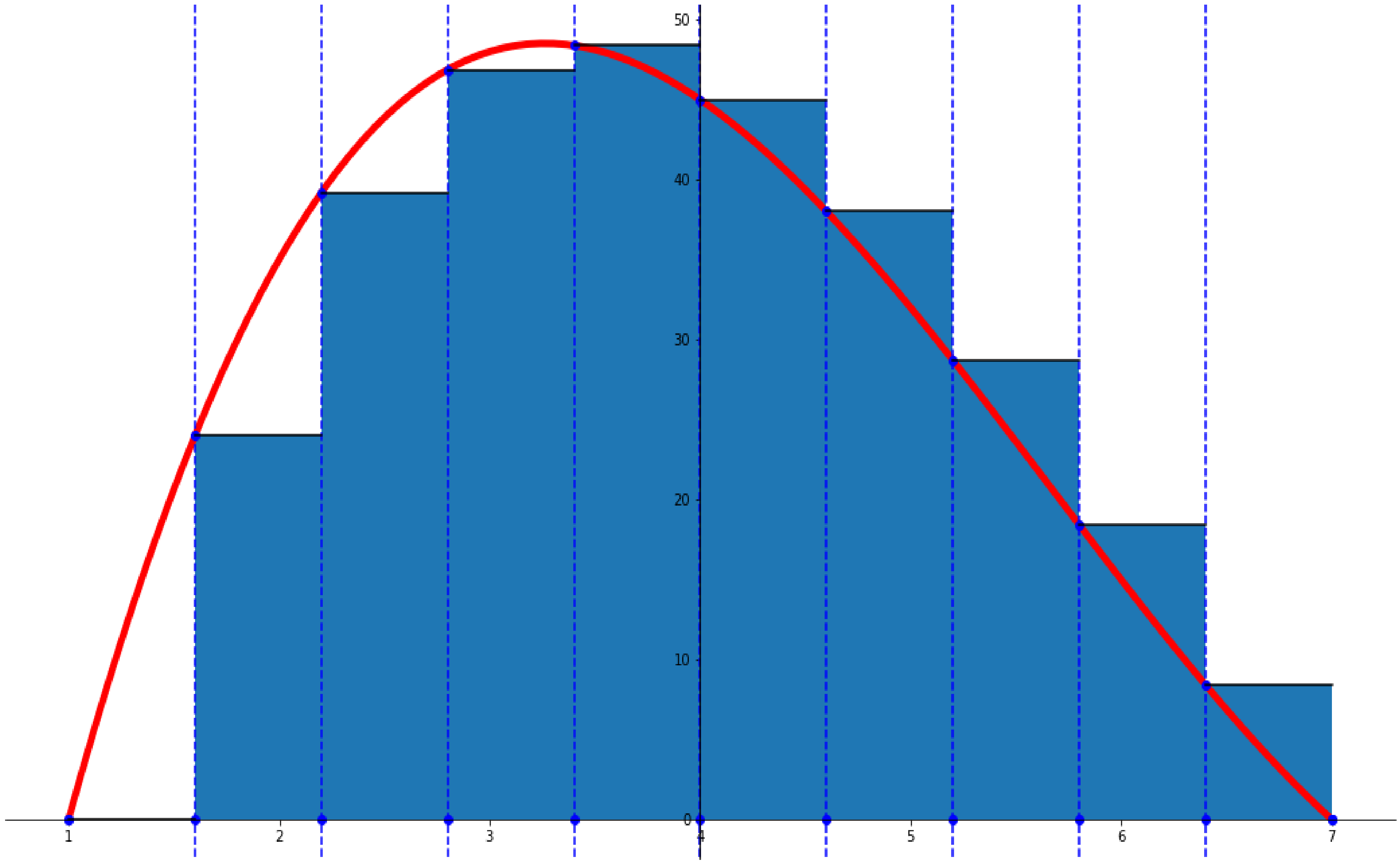
Numerische Integration



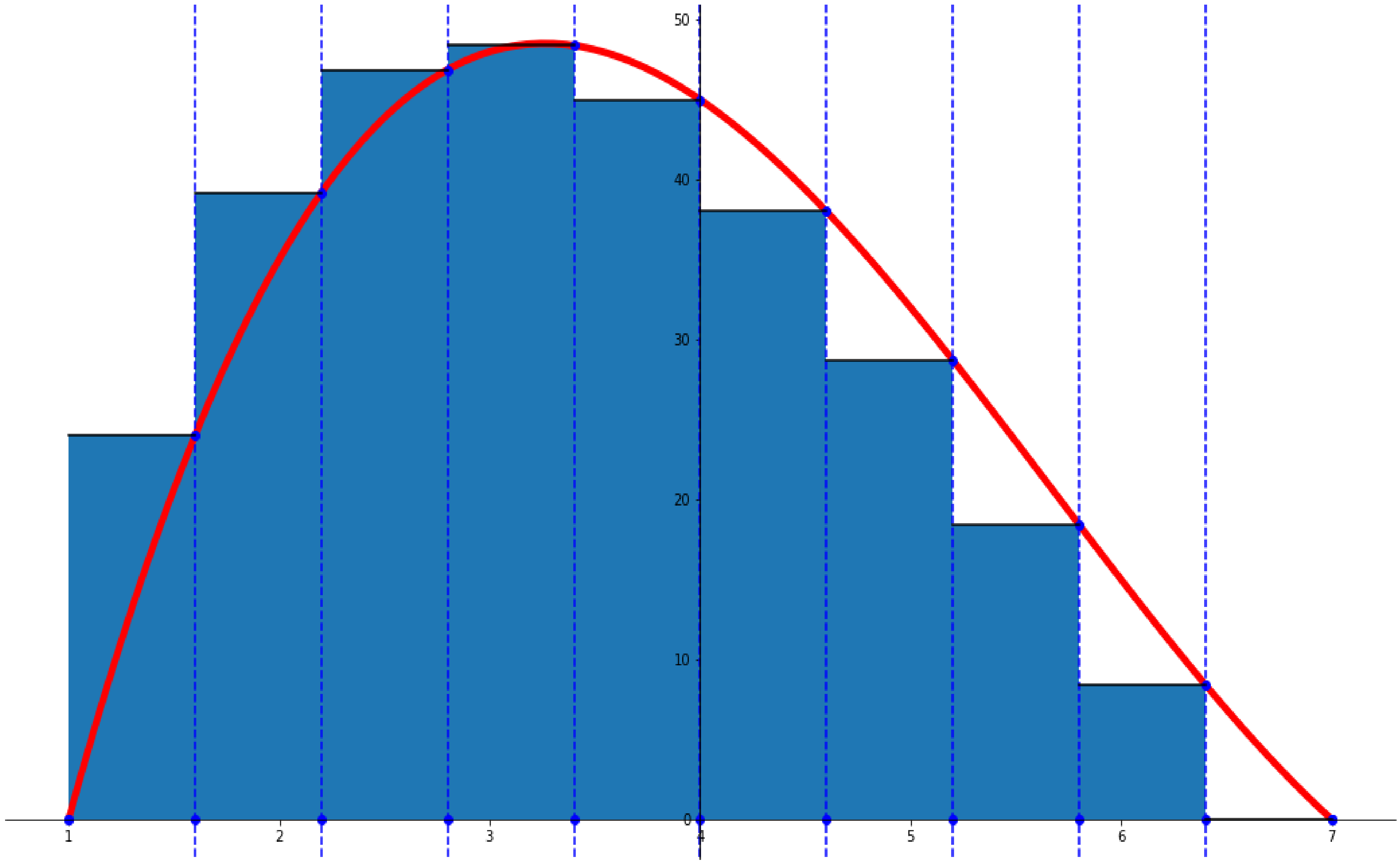
Numerische Integration



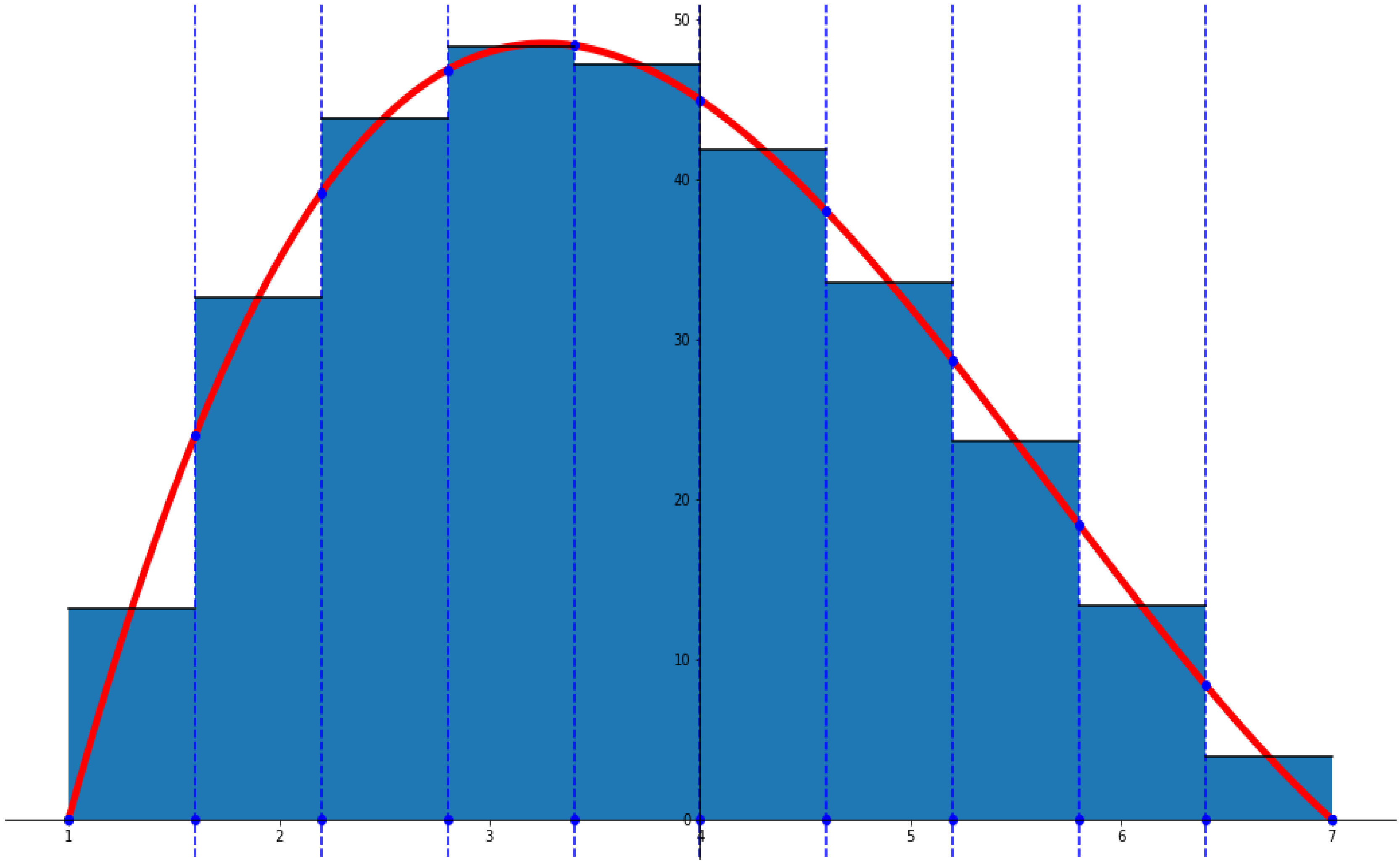
Numerische Integration



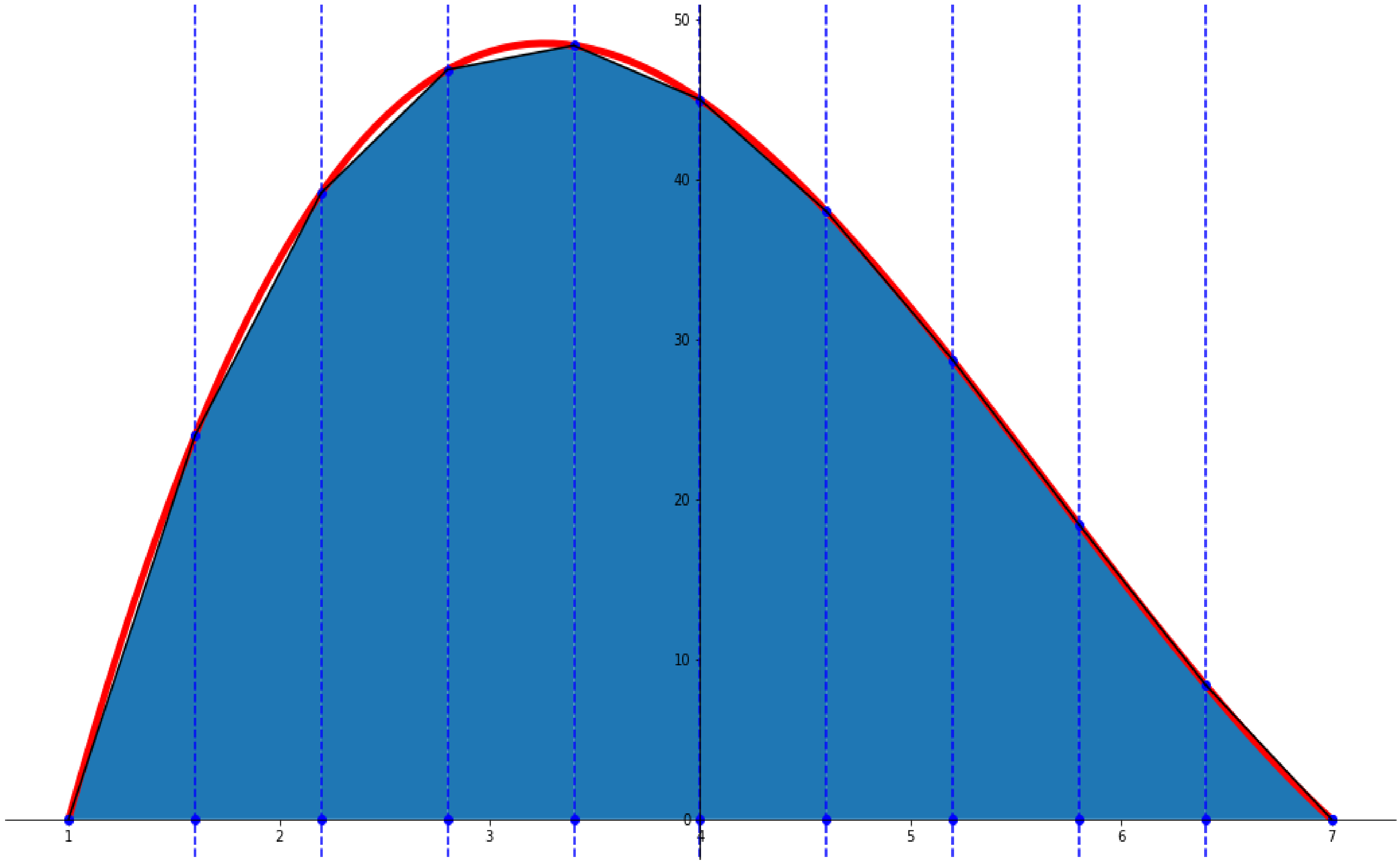
Numerische Integration



Numerische Integration



Numerische Integration



Numerische Integration - Trapezregel

- Annahme: Lineare Approximation zwischen den beiden Punkten $f(x_i)$ und $f(x_{i+1})$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \triangle x$$

$$= \triangle x \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})}{2} \right)$$

$$= \triangle x \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

mit $\triangle x = (x_n - x_0)/n$, wobei n die Anzahl der Unterteilungsschritte angibt

Numerische Integration - Simsonsche Regel

- Annahme: Quadratische Approximation zwischen den Punkten $f(x_i)$, $f(\bar{x}_i)$, $f(x_{i+1})$ mit $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$
- Formel zur Berechnung der Fläche A_i im Interval $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$A_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

- Gesamtformel

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx \approx \frac{\triangle x}{3} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Numerische Integration - Simsonsche Regel

- Berechnen Sie das folgende Integral auf analytischem und numerischem Weg

$$A = \int_0^1 x^2 \, dx \tag{43}$$

  Nutzen Sie bei der numerischen Integration eine Schrittweite $\triangle x = 0,1$

- Ergebnisse:

Analytisches Ergebnis	$\approx 0,3333$
Einfache Variante	0,385
Trapezformel	0,335
Simsonsche Regel	$\approx 0,3333$