Angewandte Mathematik

Vorlesung Nr. 3 – 10.10.2023

Dozent: Holger Gerhards
Kurs: TINF22IT1
Zeit: Oktober – Dezember 2023

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- **Di 10.10.23 09:00-11:00**
- Mi 11.10.23 09:00-11:45 (ab 11:45 – Infoveranstaltung Auslandssemester)
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- Do 19.10.23 13:00-16:00
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00 (Wiederholung, Übungsaufgaben)
- Di 07.11.23 09:00-11:00
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur)

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Vektoranalysis:
  - Kurven im $\mathbb{R}^n$
  - Skalarfeld, Vektorfeld
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Exkurs – Numerik
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Erinnerungen

- Begrifflichkeiten
  - Anfangswertproblem
  - Randwertproblem
- Lösen von Differentialgleichungen 1ster Ordung
  - Grafische Betrachtung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Variation der Konstanten (lineare DGLs)
- Einstieg Vektoranalysis (sehr kurz)

Themen heute

- **Wiederholung (kurz)**
- Kurven im 3D
- Skalarfelder
- Gradient
- Vektorfelder

Wiederholung der Grundlagen - Lineare Algebra

- Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \tag{1}$$

- Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Skalarprodukt
  - Verwendung für Orthogonalitätstest
  - Berechnung einer Projektion
- Vektorprodukt
  - Konstruktion einer orthogonalen Basis
  - Flächenberechnung

Wiederholung der Grundlagen - Analysis

- Ableitung = Differentiation
  - Anstiegsberechnung, Anstieg der Tangente
  - Resultat einer Grenzwertberechnung
    $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$
- Ableitungen von Polynomen

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{für} \quad n \neq 0 \tag{3}$$

- Produktregel

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)g(x)\Big) = g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{4}$$

- Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(z(x)) = \frac{df(z)}{dz}\frac{dz(x)}{dx} \tag{5}$$

Themen heute

- Wiederholung (kurz)
- **Kurven im 3D**
- Skalarfelder
- Gradient
- Vektorfelder

Kurven im 3D

- Bisher
  - Funktion entspricht $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - Darstellung im kartesischen Koordinatensystem mit $y=f(x)$
- Erweiterung
  - Implizite Funktionen: $F(x,y) = 0$
  - Darstellung von Kurven im $\mathbb{R}^2$
  - (Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen)

Fragen:

- **Welchen Möglichkeiten kennen / vermuten Sie,**
  um Kurven im $\mathbb{R}^3$ darzustellen?
- **Wie können Sie beispielsweise eine Wurfparabel im $\mathbb{R}^3$ darstellen?**

Kurven im 3D

- **Ziel der Betrachtung**
  - **Vorstellung der Möglichkeiten im 3D**
- Darstellung als Tabelle

Zeit	Punkt
0 s	$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
1 s	$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
2 s	$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

- Analytische Darstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t, x, y, z \in \mathbb{R} \tag{6}$$

- Darstellung als Abbildung

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

Kurven im 3D - Beispiel: Wurfparabel

- $y = 0$ für Bewegung in der x-z-Ebene
- entlang x-Achse: $x(t) = v_x\, t + x_0$
- entlang z-Achse: $z(t) = -\frac{a}{2}\, t^2 + v_z\, t + z_0$
- zusammenfassend

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x\, t + x_0 \\ 0 \\ -\frac{a}{2}\, t^2 + v_z\, t + z_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- Wichtig: lineare Unabhängigkeit der Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$
- Darstellung als Wurfparabel für $x_0 = z_0 = 0$

$$z(x) = \frac{v_z\, x}{v_x} - \frac{a}{2}\frac{x^2}{v_x^2} \tag{9}$$

Kurven im 3D - Beispiel: Wurfparabel

- Mögliche Fragestellungen
  - Wie schnell ist das Teilchen an jedem Punkt?
  - Was ist der Absolutbetrag der Geschwindigkeit an jedem Punkt?
  - Wo landet das Teilchen?
  - Wo ist der höchste Punkt des Teilchens?
  - Welche Strecke legt das Teilchen bis zu seinem Auftreffen zurück?

Kurven im 3D - Beispiel: Wurfparabel

- Mögliche Fragestellungen
  - Wie schnell ist das Teilchen an jedem Punkt?

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ 0 \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z - a\,t \end{pmatrix} \tag{10}$$

  - Was ist der Absolutbetrag der Geschwindigkeit an jedem Punkt? ... $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
  - Wo landet das Teilchen? ... $z_a = z(x = 0)$
  - Wo ist der höchste Punkt des Teilchens? ... $z'(x_{max}) = 0$
  - Welche Strecke legt das Teilchen bis zu seinem Auftreffen zurück?

$$s = ??? \tag{11}$$

Themen heute

- Wiederholung (kurz)
- Kurven im 3D
- **Skalarfelder**
- Gradient
- Vektorfelder

Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$

- **Ziel der Betrachtung**
  - **Wichtiges Konzept für die folgenden Themen**
  - Konzeptverständnis, Differentierung von ”Konstrukten” im $\mathbb{R}^n$

- Skalarfeld als Abbildung
  - im $\mathbb{R}^2$ ... $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - im $\mathbb{R}^3$ ... $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- Mathematische Beispiele
  - im $\mathbb{R}^2$ ... $z(x, y) = d - \alpha x - \beta y$
  - im $\mathbb{R}^3$ ... $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

- Physikalische Beispiele

  ...

Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$

- **Ziel der Betrachtung**
  - **Wichtiges Konzept für die folgenden Themen**
  - Konzeptverständnis, Differentierung von "Konstrukten" im $\mathbb{R}^n$

- Skalarfeld als Abbildung
  - im $\mathbb{R}^2$ ... $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - im $\mathbb{R}^3$ ... $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

- Mathematische Beispiele
  - im $\mathbb{R}^2$ ... $z(x, y) = d - \alpha x - \beta y$
  - im $\mathbb{R}^3$ ... $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

- Physikalische Beispiele
  - Temperaturverteilung im Raum
  - CO_2-Verteilung im Raum
  - Gravitationspotential der Erde (nicht die Gravitationskraft)

Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$

- Beispiel Wurfparabel $z(x, v)$ bei gleichem Abschusswinkel
- Wie würden Sie die verschiedenen Wurfparabel bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten darstellen?

Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$

- Beispiel Wurfparabel $z(x, v)$ bei gleichem Abschusswinkel
- Darstellungsmöglichkeiten
  - separat: $z_1(x, v_1)$ und$z_2(x, v_2)$
  - Funktionenschar: $z_v(x, v)$
  - 3D-Plot: Fläche im $x - v - z$-Raum
  - Countour-Plot / Intensitätsverteilung
    - Jedem Punkt (x, v) wird ein Farbwert für z zugeordnet.

Themen heute

- Wiederholung (kurz)
- Kurven im 3D
- Skalarfelder
- **Interludium: Partielle Ableitung (Erinnerung)**
- Gradient
- Vektorfelder

Partielle Ableitungen

- **Ziel der Betrachtung**
  - Spezielle Art von Ableitung von Skalarfeldern
  - (Wichtiges Konzept für die folgenden Themen)

- Problemstellung

$$y(t, x(t)) = \alpha\, t + \beta\, x(t) \tag{12}$$

- Ableitung nach der Zeit

$$\frac{d}{dt}\, y(t, x(t)) = \alpha + \beta\, \frac{d}{dt}\, x(t) \tag{13}$$

- Bezeichnung

$\frac{d}{dt}$ entspricht der totalen Ableitung nach t

Partielle Ableitungen

- Problemstellung

$$y(t, x(t)) = \alpha\, t + \beta\, x(t) \tag{14}$$

- Ableitung nach t, wobei x festgehalten werden soll (sozusagen eine Ableitung nach expliziten Variablen)

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, x(t)) = \alpha \tag{15}$$

  - x wird hier als Konstante betrachtet.
- Bezeichnung

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{entspricht der partiellen Ableitung nach t}$$

- Schreibweisenabkürzung: $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$

Partielle Ableitungen

- Hinweis zur gemischten 2ten partiellen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \tag{16}$$

bzw. $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y) \tag{17}$$

bzw. $$\partial_x \partial_y f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y) \tag{18}$$

- Bedingung: Die Funktion $f(x,y)$ ist bzgl. x und y 2 mal stetig differenzierbar.

Themen heute

- Wiederholung (kurz)
- Kurven im 3D
- Skalarfelder
- **Gradient**
- Vektorfelder

Gradient von Skalarfeldern

- Ziel der Betrachtung ... kommt später
- Ausgangsbeispiel im $\mathbb{R}^2$ - Paraboloid

$$z(x,y) = x^2 + y^2 \tag{19}$$

- Ableitung nach x bei konstantem y

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2\,x \tag{20}$$

- Ableitung nach y bei konstantem x

$$\frac{\partial}{\partial y} z(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2\,y \tag{21}$$

Gradient von Skalarfeldern

- Zusammenlegung der beiden Ergebnisse als Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \tag{22}$$

- Informationsgehalt in diesem Vektor
  - Extremstelle bei $x_e = y_e = 0$
  - für beliebige Punkt $P = (x, y)$
    - Richtung des steilsten Anstieges
    - bzw. in entgegengesetzter Richtung: "schnellste Richtung nach unten"

Gradient von Skalarfeldern

- Schreibweisenanpassung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} z(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} z(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} z(x,y) \equiv \nabla z(x,y) \tag{23}$$

- Darf ich vorstellen: Der **Nabla**-Operator ∇.
  - im $\mathbb{R}^2$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \tag{24}$$

  - im $\mathbb{R}^3$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \tag{25}$$

Gradient von Skalarfeldern

- Der Gradient eines Skalarfeldes entspricht

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \tag{26}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{27}$$

- Der Gradient ist ein Vektor, **der in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt.**
- Anwendung für
  - Bestimmung von Extremstellen
  - Optimierungsprobleme (z.B. Gradientenverfahren bei Neuronale Netzwerke)

Themen heute

- Wiederholung (kurz)
- Kurven im 3D
- Skalarfelder
- Gradient
- **Vektorfelder**

Vektorfelder (Richtungsfeld) im $\mathbb{R}^n$

- **Ziel der Betrachtung**
  - **Wichtiges Konzept für die folgenden Themen**
  - Konzeptverständnis, Differentierung von ”Konstrukten” im $\mathbb{R}^n$

- Der Gradient ist ein Vektorfeld!

- Veranschaulichung - Strömungsmechanik
  - An jedem Punkt im $P = (x, y, z)$ im $\mathbb{R}^3$ befinde sich ein ”Teilchen”?
  - Jedes Teilchen hat eine Geschwindigkeit $\vec{v}(x, y, z)$.
  - Die Geschwindigkeit hängt vom Ort des Teilchens ab.
  - z.B. Flüssigkeitsstrom durch eine Röhre

Vektorfelder (Richtungsfeld) im $\mathbb{R}^n$

- Vektorfeld als Abbildung
  - im $\mathbb{R}^2$ ... $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  - im $\mathbb{R}^3$ ... $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Mathematische Beispiel im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{28}$$

- Physikalische Beispiele
  - Kraftfelder
  - Geschwindigkeitsfelder
  - ...