Angewandte Mathematik / Statistik

Vorlesung Nr. 2 – 05.10.2023

Dozent:	Holger Gerhards
Kurs:	TINF22IT1
Zeit:	Oktober – Dezember 2023

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- Di 10.10.23 09:00-11:00
- Mi 11.10.23 09:00-12:00
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- Do 19.10.23 13:00-16:00
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00 (Wiederholung, Übungsaufgaben)
- Di 07.11.23 09:00-11:00
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur)

Organisatorisches:
Klausureinsicht 20.10.23 nach einer Mittagspause vllt. ab 13:15?

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Vektoranalysis:
  - Kurven im $\mathbb{R}^n$
  - Skalarfeld, Vektorfeld
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Exkurs – Numerik
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Erinnerung zur letzten Vorlesung

- Wiederholung
  - Nicht alle Funktionen sind integrierbar
- Nutzung von Funktionen zur Modellierung
- Implizite Funktionen – Darstellung von Kurven im $\mathbb{R}^2$
- Lineare Operatoren
- Partielles Ableiten und Implizites Ableiten
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (Einstieg)
  - Unterscheidung
  - Lösungsansatz: Trennung der Variablen
  - Hinweis: Lösen von DGLs meist als Integrieren bezeichnet.

Themenüberblick

- **Beispiel, natürliches Wachstum**
- Geometrische / grafische Betrachtung
- Parameterproblem
  - Anfangswertprobleme, Randwertprobleme
- Lineare DGLs 1ster Ordnung
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Einstieg in die Vektoranalysis (Analysis im $\mathbb{R}^n$)

Beispiel, natürliches Wachstum

- *f(t)* sei Population einer Spezies zum Zeitpunkt t
- Gesucht: $f(t+\Delta t)$
- Überlegung: $f(t+\Delta t) = f(t) + \alpha\, f(t)\, \Delta t$
- α entspricht einer Zuwachsrate je Zeit
- Rest (siehe Tafel):
  - Umstellen
  - Grenzwertbildung
  - Lösung der DGL durch Trennung der Variablen

Themenüberblick

- Beispiel, natürliches Wachstum
- **Geometrische / grafische Betrachtung**
- Parameterproblem
  - Anfangswertprobleme, Randwertprobleme
- Lineare DGLs 1ster Ordnung
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Einstieg in die Vektoranalysis (Analysis im $\mathbb{R}^n$)

Geometrische / grafische Betrachtung für DGLs 1ster Ordnung

- Grobe Idee:
  - Setze eine Menge an möglichen *x*- und *y*-Werten an
  - Berechne die Ableitung *y*\` an den Stellen
  - Zeichne in einem Koordinatensystem an den Stellen kleine (kurze) Geraden mit dem entsprechenden Anstieg
- Beispiele:

  a) $y` = -x/y$

  b) $y` = -2y$

  c) $y` = 2x$

Themenüberblick

- Beispiel, natürliches Wachstum
- Geometrische / grafische Betrachtung
- **Parameterproblem**
  - Anfangswertprobleme, Randwertprobleme
- Lineare DGLs 1ster Ordnung
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Einstieg in die Vektoranalysis (Analysis im $\mathbb{R}^n$)

Parameterproblem

- Erinnerung:
  - Gesucht war Funktion mit linearem Anstieg und konstanter Osizillation
  - Wie viele Parameter brauchten Sie um die Form anzupassen?
- Frage:
  - Wie viele voneinander unabhängige Parameter hat eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung?

Parameterproblem

- Annahme: Gewöhnliche DGL nter-Ordnung

- **Definition**:
  a) Allgemeine Lösung, wenn noch *n* voneinander unabhängige Parameter vorkommen
  b) Spezielle Lösung oder partikuläre Lösung (Parikulärlösung)
    - Wird aus der allg. Lösung gewonnen
    - Durch zusätzliche Bedingungen werden den n-Parametern feste Werte zugewiesen

- Mögliche Bedingungen:
  - Anfangswertbedingungen → Anfangswertproblem
  - Randwertbedingungen → Randwertproblem

Anfangswertproblem

- Beispiel 1:
  - Bewegung mit konstanter Beschleunigung
  - Anfangsbedingung: $s(0) = 0$ und $v(0) = v_0$
- Beispiel 2:
  - Schwingung ohne Dämpfung
  - Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$ und $x'(0) = 0$

Randwertproblem

- Bei *n*-Parametern $\rightarrow$ *n* vorgegebene Stellen

  $y(x_1) = y_1, \ldots, y(x_n) = y_n$

- Beispiel:
  - Biegelinie $y = y(x)$ eines Balkens der Länge l auf 2 Stützstellen bei gleicher Belastung
  - Randbedingungen: $y(0) = 0$ und $y(l) = 0$

Themenüberblick

- Beispiel, natürliches Wachstum
- Geometrische / grafische Betrachtung
- Parameterproblem
  - Anfangswertprobleme, Randwertprobleme
- **Lineare DGLs 1ster Ordnung**
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Einstieg in die Vektoranalysis (Analysis im $\mathbb{R}^n$)

Lineare DGLs 1ster Ordnung

- Definition: $y` + f(x)\, y = g(x)$
- $g(x)$ entspricht Inhomogenität

- Lösungsvorgehen
  - Integration / Lösung der homogenen linearen DGL
  - Integration der inhomogenen linearen DGL
    - Lösungsverfahren: Variation der Konstanten

Themenüberblick

- Beispiel, natürliches Wachstum
- Geometrische / grafische Betrachtung
- Parameterproblem
  - Anfangswertprobleme, Randwertprobleme
- Lineare DGLs 1ster Ordnung
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- **Einstieg in die Vektoranalysis (Analysis im $\mathbb{R}^n$)**

Grundlagen

- Verständnis zu Vektoren
  - Darstellung, Bedeutung, Länge, ...
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis (Orthonormalbasis)
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- Geradengleichung, Ebenengleichung

Kurven im 3D

- **Ziel der Betrachtung**
  - **Vorstellung der Möglichkeiten im 3D**
- Darstellung als Tabelle

Zeit	Punkt
0 s	$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
1 s	$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
2 s	$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

- Analytische Darstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t, x, y, z \in \mathbb{R}$$

- Darstellung als Abbildung

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

Kurven im 3D - Beispiel: Wurfparabel

- $y = 0$ für Bewegung in der x-z-Ebene
- entlang x-Achse: $x(t) = v_x\, t + x_0$
- entlang z-Achse: $z(t) = -\frac{a}{2}\, t^2 + v_z\, t + z_0$
- zusammenfassend

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x\, t + x_0 \\ 0 \\ -\frac{a}{2}\, t^2 + v_z\, t + z_0 \end{pmatrix}$$

- Wichtig: lineare Unabhängigkeit der Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$
- Darstellung als Wurfparabel für $x_0 = z_0 = 0$

$$z(x) = \frac{v_z\, x}{v_x} - \frac{a}{2}\frac{x^2}{v_x^2}$$

Ausgangsproblem für weitere Betrachtungen

- Ausgangslage: Messpunkte
- Modellannahme:
  - Konstante Oszillation bei konstanter Steigung
  - $f(x) = ax + b + c \sin(dx + e)$
  - (5 unbekannte Parameter)

- **Frage:**
  - Wie erhalten Sie den besten Parametersatz für die gegebenen Messpunkte?
    (An der Stelle soll aber das Problem noch nicht gelöst, sondern vielmehr angedacht werden.)