Angewandte Mathematik

Vorlesung Nr. 8 – 24.10.2023

Dozent: Holger Gerhards
Kurs: TINF22IT1
Zeit: Oktober – Dezember 2023

Termine Angewandte Mathematik

- Mi 04.10.23 09:00-12:00
- Do 05.10.23 13:00-16:00
- Di 10.10.23 09:00-11:00
- Mi 11.10.23 09:00-11:45
- Di 17.10.23 09:00-11:00
- Mi 18.10.23 09:00-12:00
- Do 19.10.23 13:00-16:00
- Di 24.10.23 09:00-11:00
- Mi 25.10.23 09:00-12:00
- Do 26.10.23 13:00-16:00
- Di 31.10.23 09:00-11:00 (Wiederholung, Übungsaufgaben)
- Di 07.11.23 09:00-11:00
- Mi 08.11.23 zwischen 09:00-12:00 (Klausur)

Überblick über Inhalte der Vorlesung

- Funktionen
  - Synthetisierung
  - Implizite Funktionen
- Operator (grobe Begriffseinführung)
- Ableitungen
  - Partielles Ableiten
  - Implizites Ableiten
- Differentialgleichungen
  - Kategorisierung
  - Lösung durch Trennung der Variablen
  - Lösung durch Variation der Konstanten
- Vektoranalysis:
  - Kurven im $\mathbb{R}^n$
  - Skalarfeld, Vektorfeld
- Differentialoperatoren
  - Gradient
  - Divergenz, Rotation, Laplace-Operator
- Polynome
  - Horner-Schema
  - Taylor-Entwicklung
- Extremwerte eines Skalarfeldes
  - Hesse-Matrix
- Gaußsche-Fehlerfortpflanzung
- Integration
  - Mehrfachintegrale
  - Pfadintegrale
- Exkurs – Numerik
  - Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten
- Spezielle Koordinatensysteme
  - Numerische Integration, Newton-Verfahren
- Fourier-Analysis
  - Fourier-Zerlegung, Diskrete und Kontinuierliche Fourier-Transformation
- Optimierungsproblem
  - Summe der quadratischen Abweichungen
  - Gradienten-Verfahren

Erinnerungen

- Welche Ansätze zur numerischen Integration kennen Sie?
- Welche Ideen stecken hinter der numerischen Integration?

- Wie ließe ich ein Skalarprodukt auf einem Funktionenraum definieren?

Themenübersicht

- **Hilbertraum und Co.**
- Beispiel für Orthogonalsystem auf einem Funktionenraum – Legende-Polynome
- Fourier-Analysis
  - Motivation
  - Synthese von Signalen
  - Fourier-Zerlegung
  - Diskrete Fourier-Transformation
  - Kontinuierliche Fourier-Transformation

Vektorraum

Definition eines Vektorraumes (ganz grob)

- Vektorraum entspricht einer Menge von Elementen, bei denen folgendes möglich ist:

- Vektoraddition
  - (wenn $a \in V$ und $b \in V$, dann ist auch $a + b = c \in V$)
  - Es gilt das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz.
  - Es existiert ein neurales und ein inverses Element.

- Skalarmultiplikation
  - (wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ und $b \in V$, dann ist auch $\alpha\, b = c \in V$)
  - Es gilt das Distributivgesetz.
  - Es gilt die Neutralität der 1.
  - ...

Banachraum

Definition eines Banachraums:

- Ein Banachraum ist ein Vektorraum, der vollständig und normiert ist.

Vollständigkeit meint,

- dass jede Folge auch in dem Banachraum konvergiert.

Normierung meint,

- dass jedem Element einer Norm zugeordnet werden kann.

Hinweise:

- Die Norm kann zum Beispiel den Abstand zum Koordinatenursprung sein.
- Die Norm kann zur Vergleichbarkeit von Elementen herangezogen werden.
- Die Norm eines Elementes x wird $|x|$ geschrieben.

Hilbertraum

Definition:

- Ein Hilbertraum ist ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird.

Skalarprodukt (allgemein):

- mit $x \in V$ und $y \in V$
- dann wird das Skalarprodukt wie folgt geschrieben

$$\langle x \mid y \rangle \in \mathbb{R}$$

- und die Norm ist dann

$$|x| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

- Beispiel $\mathbb{R}^n$: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$

Hilbertraum und Orthonormalbasis

- Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.
- Es gibt eine Menge von Basisvektoren $e_1, e_2, e_3, \ldots$ mit

$$
\begin{aligned}
& |e_i|^2 = \langle e_i \,|\, e_i \rangle = 1 \\
\text{und} \quad & \left\langle e_i \,\middle|\, e_j \right\rangle = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq j \\
\text{bzw.} \quad & \left\langle e_i \,\middle|\, e_j \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

  (δ_{ij} wird *Kronecker-Delta* genannt.)
- Jedes Element a aus dem Hilbertraum V ist darstellbar als eine Linearkombination aus den Basisvektoren:

$$a \in V \quad \Longrightarrow \quad a = \sum_i \alpha_i \, e_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Hilbertraum und Orthonormalbasis

Beispiel (abstrakt):

- Angenommen, es gäbe eine Orthonormalbasis mit den Basisvektoren $e_1, e_2, e_3, \ldots$
- Ein bestimmter Vektor v im Hilbertraum sei gegeben:

$$v = 2\,e_1 + 3\,e_2 - e_3$$

- Berechnen Sie:

(a) $\langle v \,|\, e_1 \rangle = 2$

(b) $\langle v \,|\, e_3 \rangle = -1$

(c) $v - \langle v \,|\, e_2 \rangle\, e_2 = 2\,e_1 - e_3$

Themenübersicht

- Hilbertraum und Co.
- **Beispiel für Orthogonalsystem auf einem Funktionenraum – Legende-Polynome**
- Fourier-Analysis
  - Motivation
  - Synthese von Signalen
  - Fourier-Zerlegung
  - Diskrete Fourier-Transformation
  - Kontinuierliche Fourier-Transformation

Legende Polynome

- Vorgehensweise
  - Definition des Funktionenraums
  - Einführung eines Skalarproduktes
  - Konstruktion der Legende-Polynome
  - Allgemeine Darstellung einer Funktion als Summe von Legende-Polynomen
  - Beispiel für eine konkrete Funktion

Themenübersicht

- Hilbertraum und Co.
- Beispiel für Orthogonalsystem auf einem Funktionenraum – Legende-Polynome
- **Fourier-Analysis**
  - **Motivation**
  - Synthese von Signalen
  - Fourier-Zerlegung
  - Diskrete Fourier-Transformation
  - Kontinuierliche Fourier-Transformation

Fourier-Transformation - Allgemein

- Anwendungsbereiche
  - Signalanalyse
  - Signalübertragung
  - Bild- und Tonbearbeitung (z.B. mp3-Format)
- Grundverständnis: Tonsignalen sind zusammengesetzt
  - verschiedene Frequenzen / Signalen unterschiedlicher Tonhöhe
  - unterschiedlicher Amplitude / Lautstärke
- Physikalische Realität
  - Übertragung eines Zeit - Amplitude - Signals
- Grundidee
  - Zeit - Amplitude - Signals ist eine Mischung aus Signalen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude
  - Ziel: Rückgängigmachung dieser Mischung

Fourier-Transformation - Allgemein

- Grundidee: Zusammensetzung eines Signals aus Teilsignalen unterschiedlicher Frequenzen mit jeweils unterschiedlichen Amplituden (Intensitäten)
- Konkrete Anwendungsmöglichkeiten
  - Filterung von Signalen
  - Tiefpass-, Hochpassfilter, Bandpassfilter
  - Detektion von periodischen Signalen
  - Synthetisierung von Signalen
  - Verschiebung von akustischen Signalen (z.B. Voice Changer)
  - ...

Themenübersicht

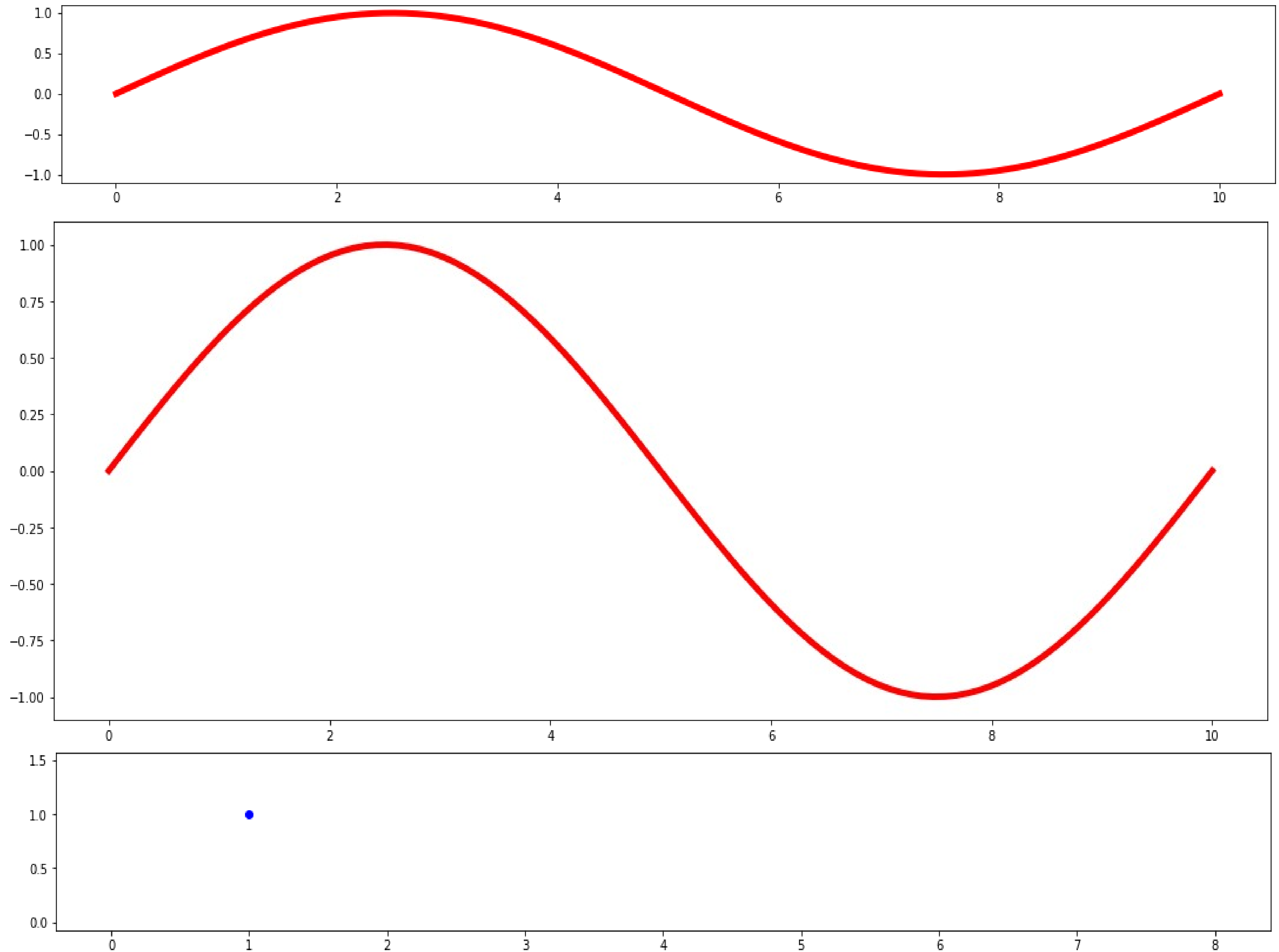
- Hilbertraum und Co.
- Beispiel für Orthogonalsystem auf einem Funktionenraum – Legende-Polynome
- **Fourier-Analysis**
  - Motivation
  - **Synthese von Signalen**
  - Fourier-Zerlegung
  - Diskrete Fourier-Transformation
  - Kontinuierliche Fourier-Transformation

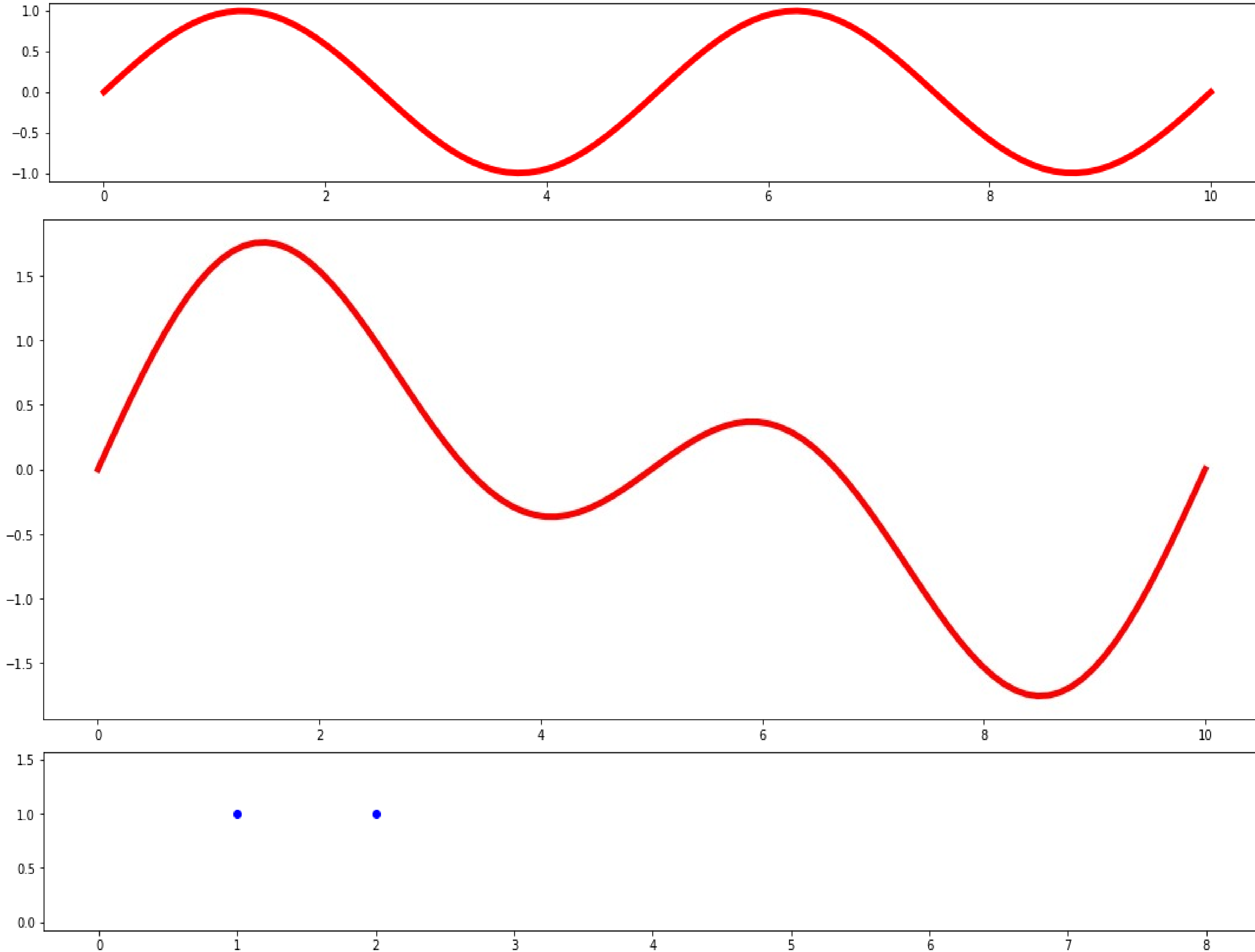
Synthese von Signalen – Teil 1

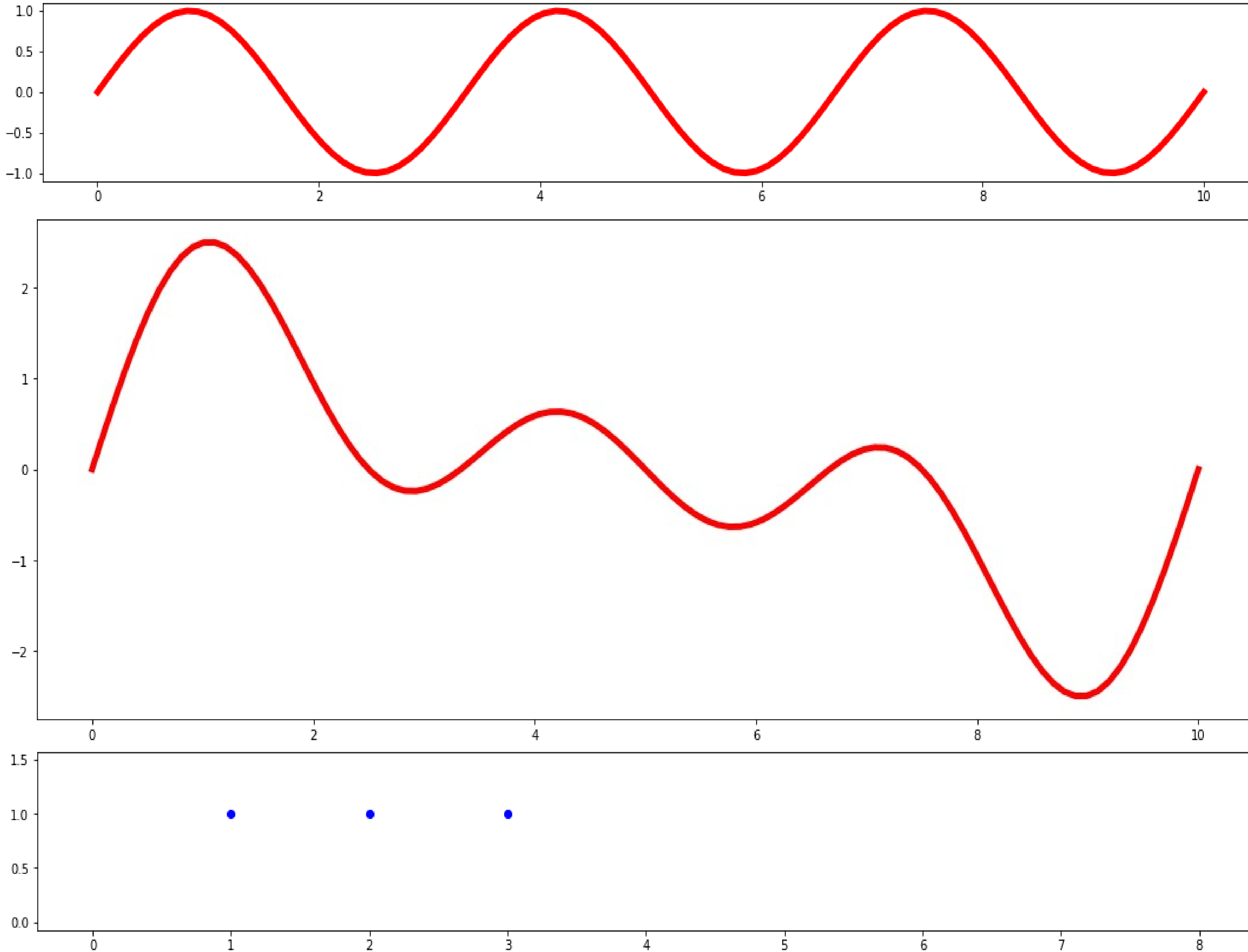
- Idee:
  - Baue aus Sinus-Funktionen unterschiedlicher Frequenzen (im Intervall [0,T]) ein neue Funktion zusammen
  - Ansatz:

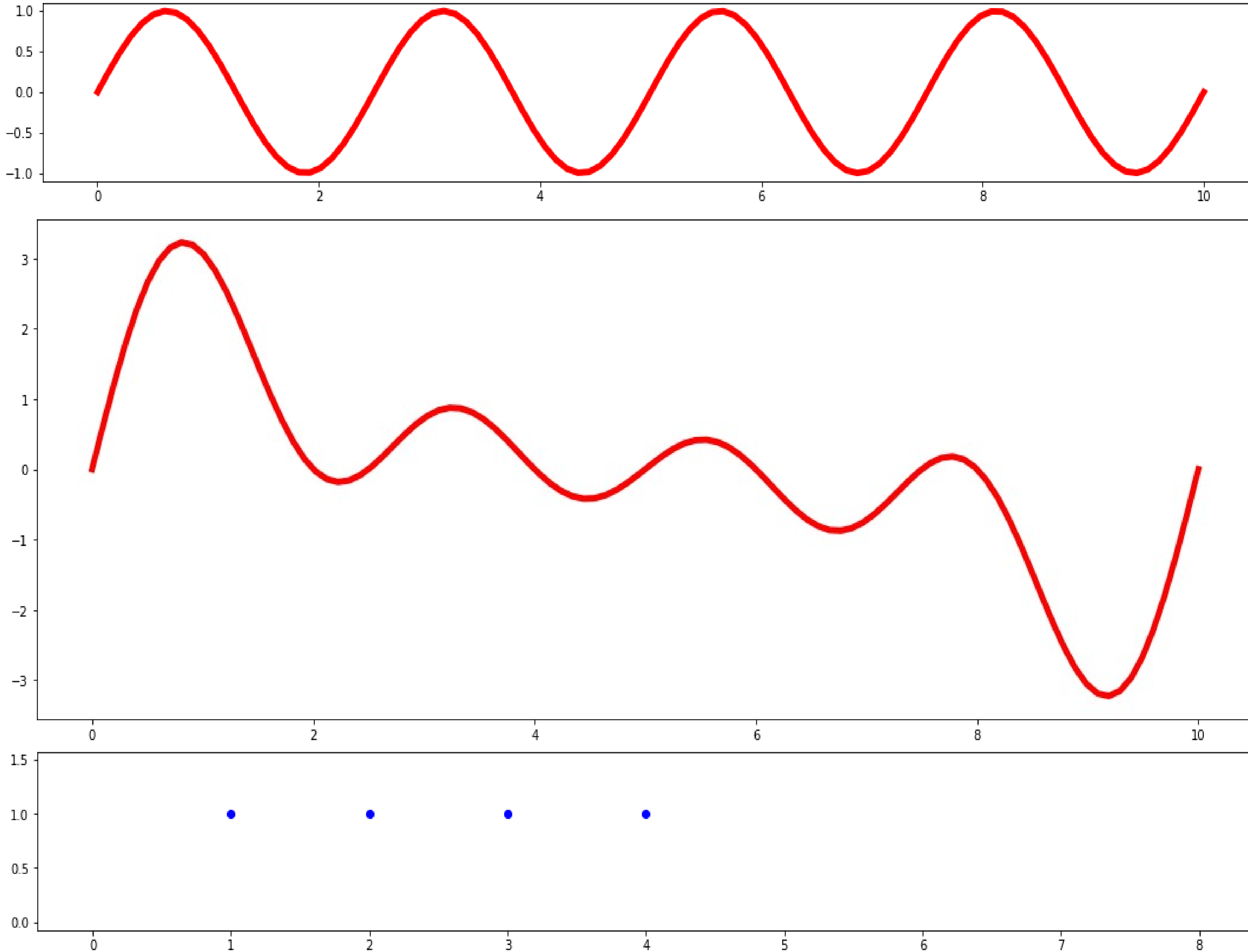
$$s(t) = \sum_{k=1} b_k \sin(k\omega t)$$

$$2\pi f = 2\pi / T = \omega$$


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

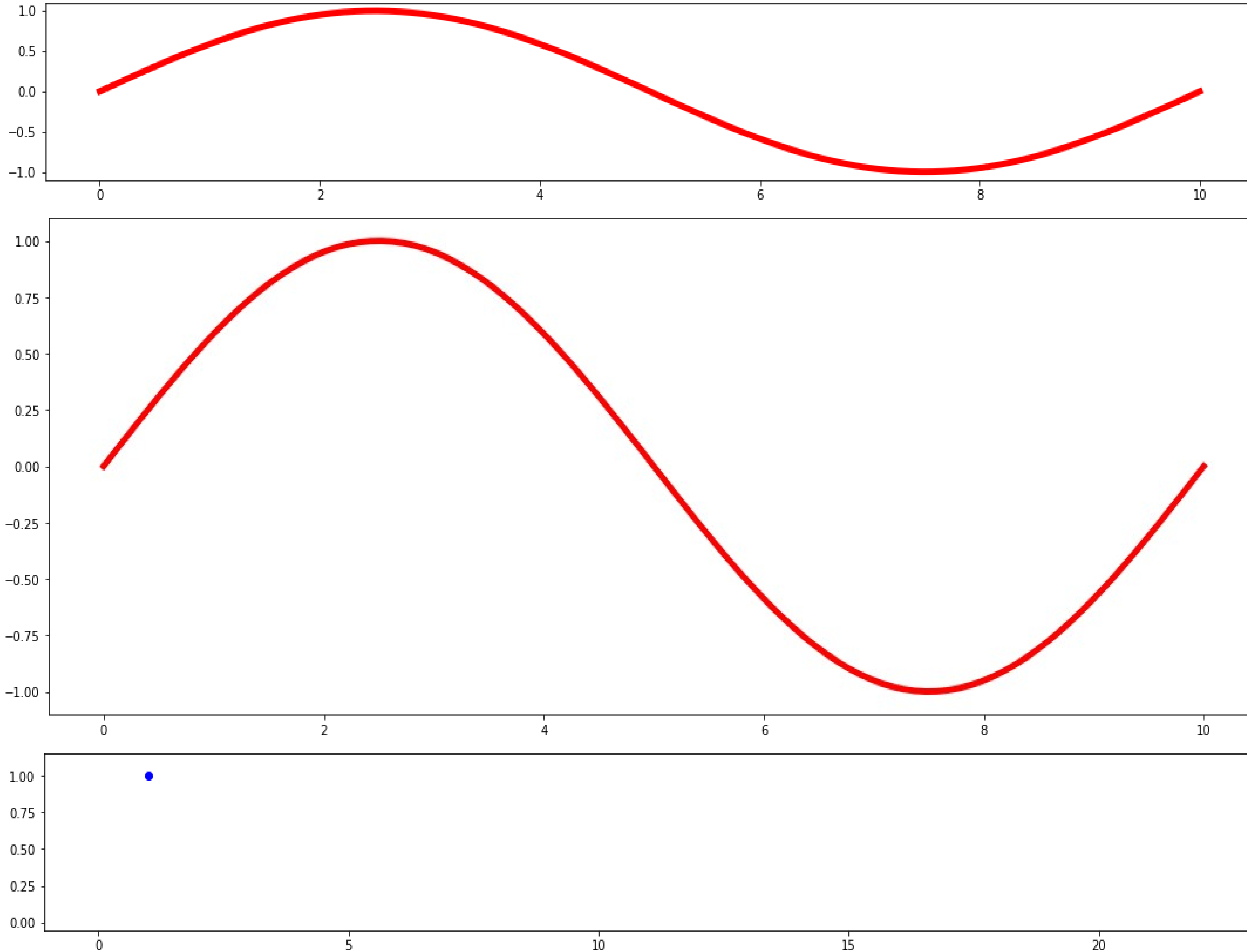

1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0
2
4
6
8
10
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

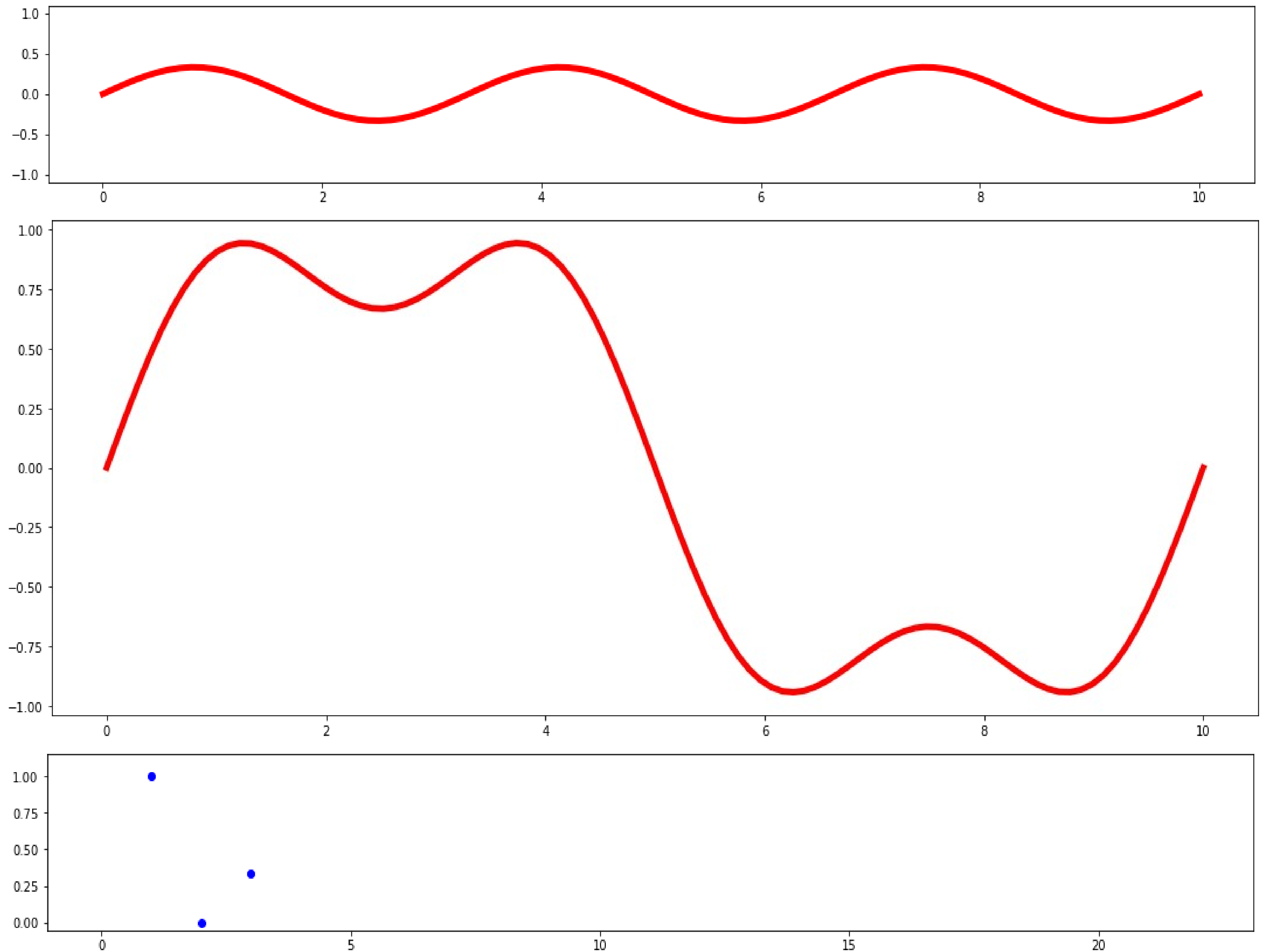

1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
2
1
0
−1
−2
0
2
4
6
8
10
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
2
4
6
8
10
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

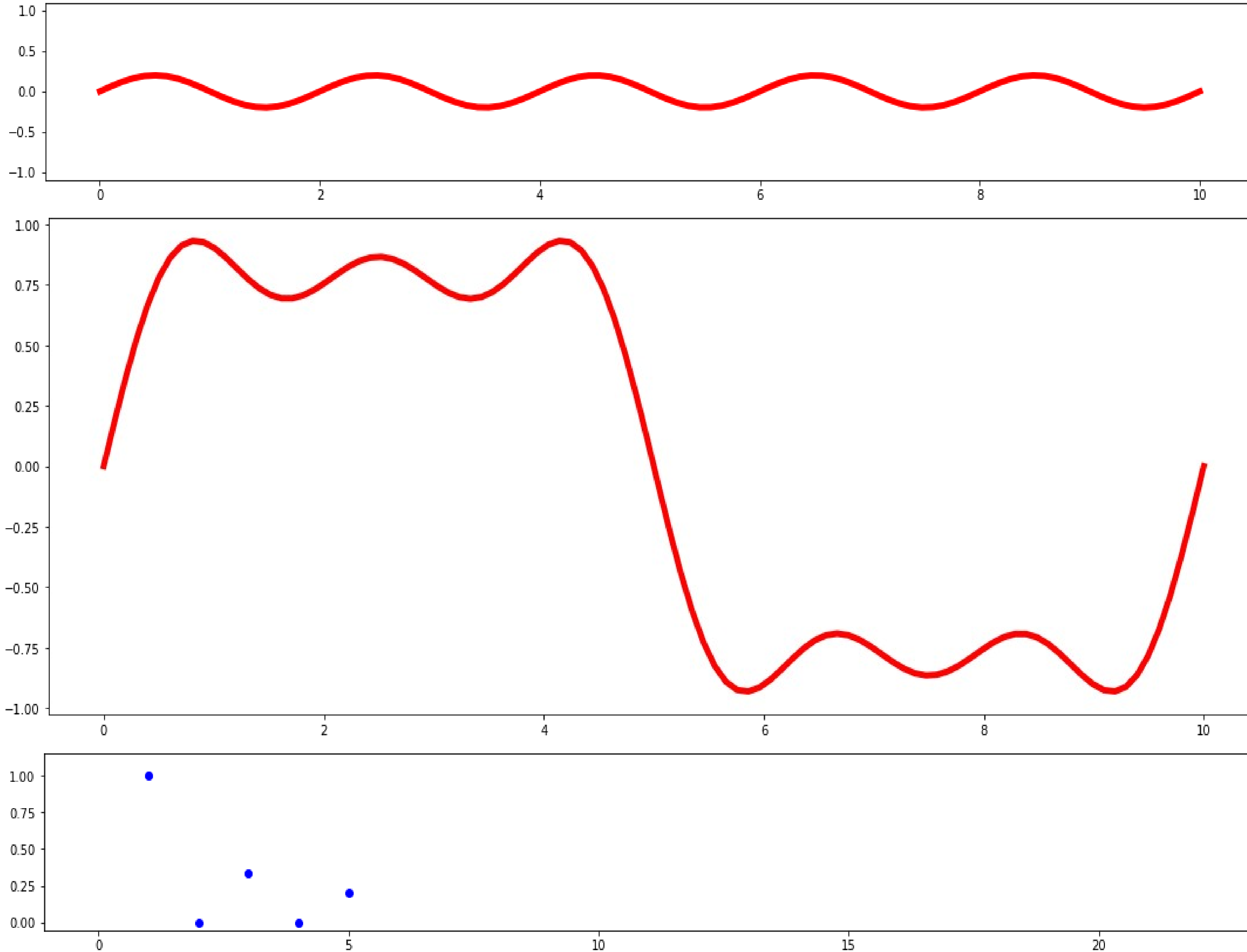
Synthese von Signalen – Teil 2

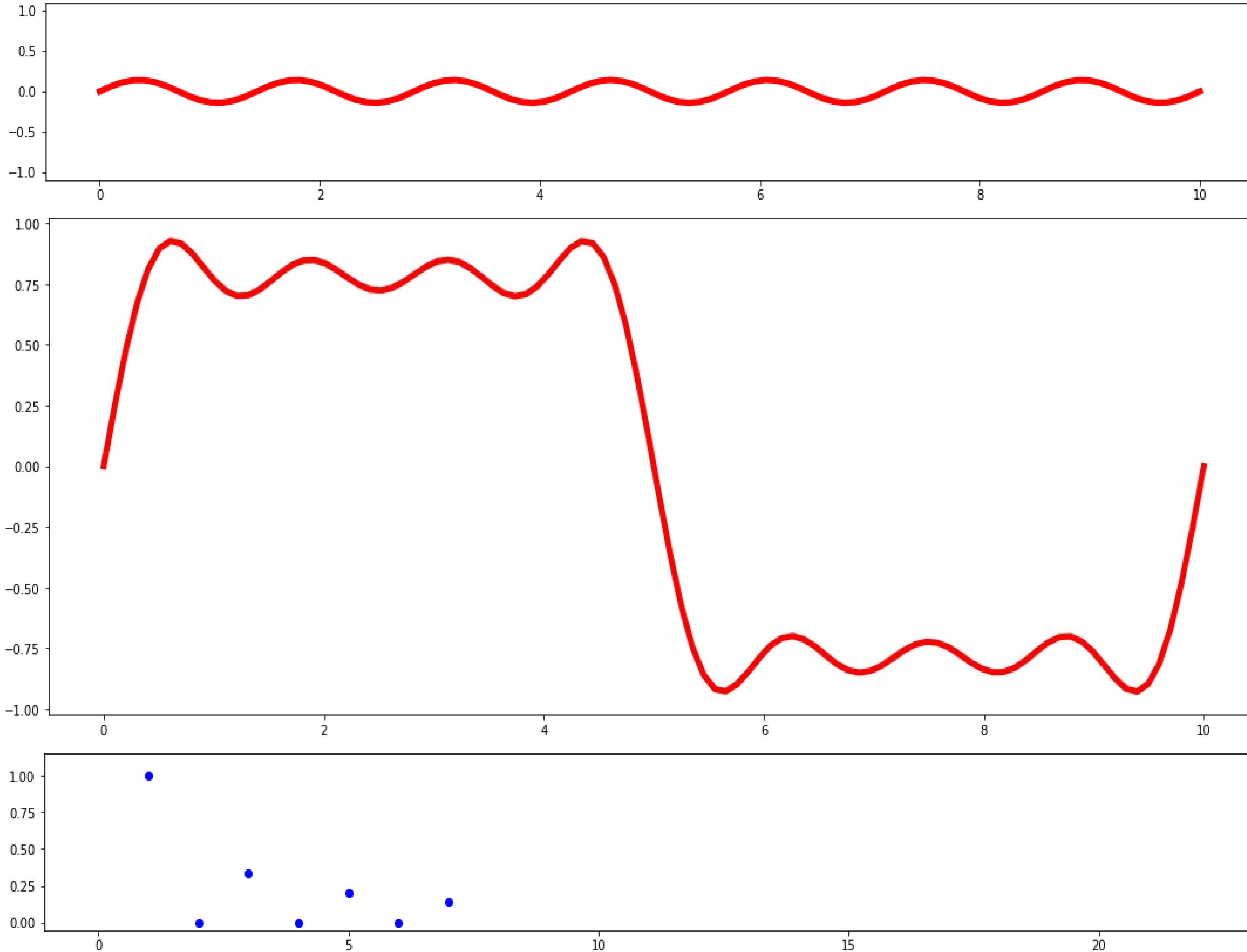
- Ergebnis:
  - Zielloses Vorgehen nicht sinnstiftend
- Überlegung:
  - Vllt. solange „herumspielen“ bis man ein bestimmtes Signal synthetisieren kann


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
5
10
15
20



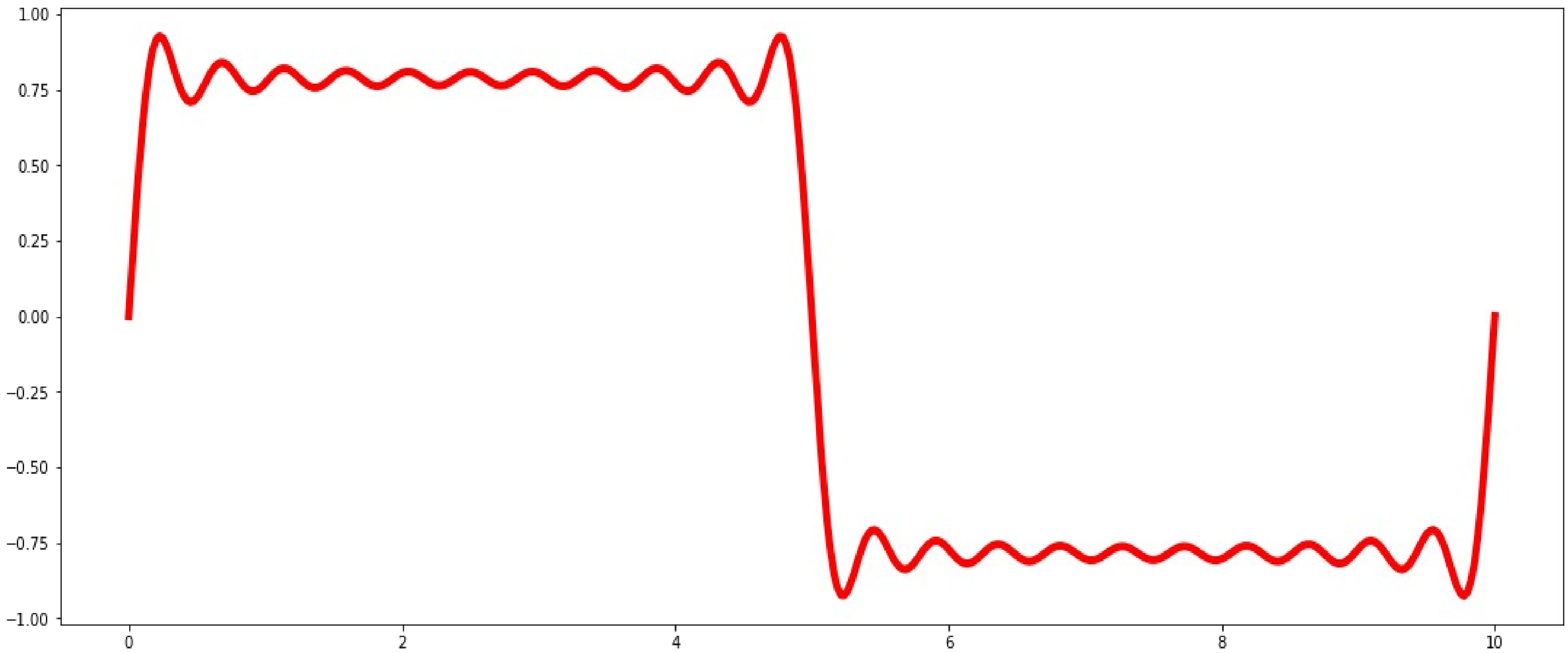
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
5
10
15
20

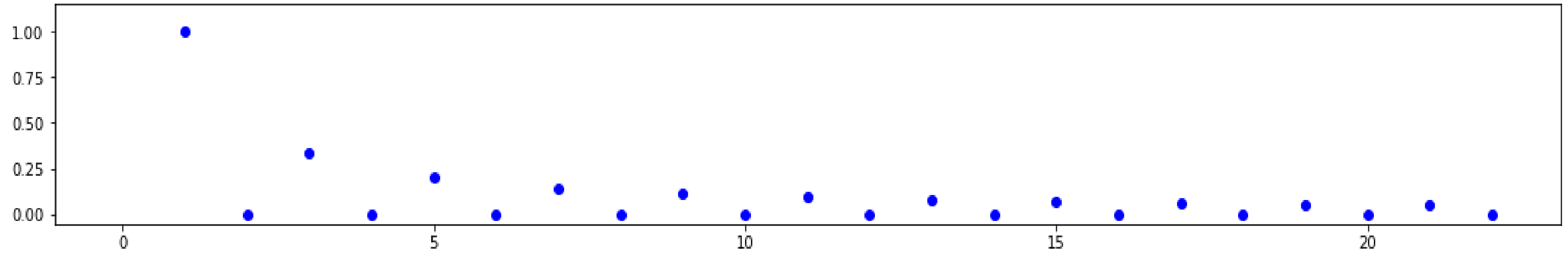

1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
5
10
15
20



1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
5
10
15
20

Synthetisierung eines Rechtecksignals
über eine Summe von Sinus-Funktionen





Synthese von Signalen

- Fazit:
  - Bei Kenntnis der richtigen Koeffizienten lassen sich theoretisch unterschiedliche Signale erzeugen
  - Aber aktuell nur punktsymmetrische Funktionen zur Intervallmitte synthetisierbar

Synthese von Signalen

- Fazit:
  - Bei Kenntnis der richtigen Koeffizienten lassen sich theoretisch unterschiedliche Signale erzeugen
  - Aber aktuell nur punktsymmetrische Funktionen zur Intervallmitte synthetisierbar
- Lösung:
  - Jede Funktion ist durch eine gerade und eine ungerade Funktion darstellbar. → Ergo: Es braucht noch einen geraden Anteil.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1} b_k \sin(k\omega t)$$

Alternativer Ansatz

- Grundidee:
  - Jede (stetige) und beschränkte Funktion im Intervall [0,T] lässt sich als eine Summe von Elementarschwingungen unterschiedlicher Frequenz und unterschiedlicher Phase darstellen.
  - Frequenz → entspricht Anzahl der Schwingen je Zeiteinheit
  - Phase → meint die Verschiebung entlang der Zeit-Achse

Themenübersicht

- Hilbertraum und Co.
- Beispiel für Orthogonalsystem auf einem Funktionenraum – Legende-Polynome
- **Fourier-Analysis**
  - Motivation
  - Synthese von Signalen
  - **Fourier-Zerlegung**
  - Diskrete Fourier-Transformation
  - Kontinuierliche Fourier-Transformation

Fourier-Zerlegung

- Grundidee: Zusammensetzung eines Signals aus Teilsignalen unterschiedlicher Frequenzen mit jeweils unterschiedlichen Amplituden (Intensitäten)

- Einzelschwingung:

$$s(t) = A\cos(2\pi\, f\, t + \varphi)$$

  mit $f = 1/T$ für die Frequenz des Signals und T für die Periodendauer des Signals, sowie t für die Zeit und φ für die Phasenverschiebung

- Substitution $2\pi f = 2\pi/T = \omega$

$$\Longrightarrow \qquad s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1\, t + \varphi_1)$$

Fourier-Zerlegung

- Umsetzung des Grundgedankens - Zusammensetzung aus Einzelschwingungen

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \cdots = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots$$
$$= \sum_k s_k(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

- Abwandlung - anstatt irgendwelcher Schwingungen Vielfache einer Grundschwingung $f_k = kf_1 = kf$ bzw. $\omega_k = k\omega_1 = k\omega$

$$s(t) = \sum_{k=1} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

Fourier-Zerlegung

- Anwendung des Additionstheorems

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

- Einsetzen ...

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_k A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \\ &= \sum_{k=1} A_k \Big(\cos(k\omega t)\cos(\varphi_k) - \sin(k\omega t)\sin(\varphi_k) \Big) \\ &= \sum_{k=1} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1} b_k \sin(k\omega t) \end{aligned}$$

- Berücksichtigung eines konstanten Offsets

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1} b_k \sin(k\omega t)$$

Komplexe Zahlen - Auffrischung

- Imaginäre Einheit $\mathtt{i} = \sqrt{-1}$
- Darstellung einer komplexen Zahl z als

$$z = a + b\mathtt{i}$$
$$z = r\, e^{\mathtt{i}\varphi}$$

- Spezielle Schreibweisen
  - Realteil von z: $\Re e z = a$
  - Imaginärteil von z: $\Im m z = b$
  - Betrag von z: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Eulersche Formel

$$e^{\mathtt{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathtt{i}\sin(\varphi)$$

Komplexe Zahlen - Auffrischung

- Wichtige Formel: $e^{2\pi \mathrm{i}} = 1$
- Beispielhafte Anwendung für Additionstheoreme:

$$
\begin{aligned}
\cos(a+b) &= ???\\
\cos(a+b) &= \Re\mathrm{e}\Big(\cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)\Big)\\
&= \Re\mathrm{e}\Big(e^{\mathrm{i}(a+b)}\Big) = \Re\mathrm{e}\Big(e^{\mathrm{i}a}\, e^{\mathrm{i}b}\Big)\\
&= \Re\mathrm{e}\Big(\big(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\big)\big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big)\Big)\\
&= \Re\mathrm{e}\Big(\cos(a)\cos(b) + \cos(a)\mathrm{i}\sin(b) +\\
&= \qquad\qquad \mathrm{i}\sin(a)\cos(b) + \mathrm{i}^2\sin(a)\sin(b)\Big)\\
&= \Re\mathrm{e}\Big(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \mathrm{i}(\dots)\Big)\\
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}
$$

Fourier-Zerlegung

- Idee: Die Menge aller beschränkten Funktionen auf dem Interval $I \in [0, T)$ ist ein Funktionenraum F mit Hilbertraumeigenschaften.

- Definition folgende Basisvektoren auf dem Funktionenraum

$$e_0 = 1 \qquad e_{1k} = \cos(k\omega t) \qquad e_{2k} = \sin(k\omega t)$$

  mit $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $\omega = 2\pi/T$

- Definition des Skalarproduktes auf dem Funktionenraum

$$\langle f(t) \,|\, g(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, g(t)\, dt \qquad \text{mit} \quad f(t), g(t) \in F$$

Fourier-Zerlegung

- Bei der Basis handelt es sich um eine orthogonale Basis (siehe Übungsaufgabe)

$$
\begin{array}{lll}
\langle e_0 \mid e_0 \rangle = 2 & & \\
\langle e_0 \mid e_{1k} \rangle = 0 & \langle e_0 \mid e_{2k} \rangle = 0 & \forall\, k \\
 & \langle e_{1k} \mid e_{2l} \rangle = 0 & \forall\, k, l \\
\langle e_{1k} \mid e_{1l} \rangle = \delta_{kl} & \langle e_{2k} \mid e_{2l} \rangle = \delta_{kl} &
\end{array}
$$

- Eine Funktion $f(t) \in F$ läßt sich darstellen als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

mit $\omega = 2\pi / T$

Fourier-Zerlegung

- Behauptung - Darstellung einer beliebigen Funktion (beschränkt und stetig) auf dem Interval $I \in [0, T)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

- Frage: Wie lassen sich die Koeffizienten a_k und b_k bestimmen?

- Ansatz: Ausnutzung des Skalarprodukts und der Orthogonalität der Basisfunktionen

$$\begin{aligned}\langle e_0 \mid f(t)\rangle &= \langle 1 \mid f(t)\rangle = a_0\\ \langle e_{1k} \mid f(t)\rangle &= \langle \cos(k\omega t) \mid f(t)\rangle = a_k\\ \langle e_{2k} \mid f(t)\rangle &= \langle \sin(k\omega t) \mid f(t)\rangle = b_k\end{aligned}$$

Fourier-Zerlegung

- Begründung für die Berechnung der Koeffizienten

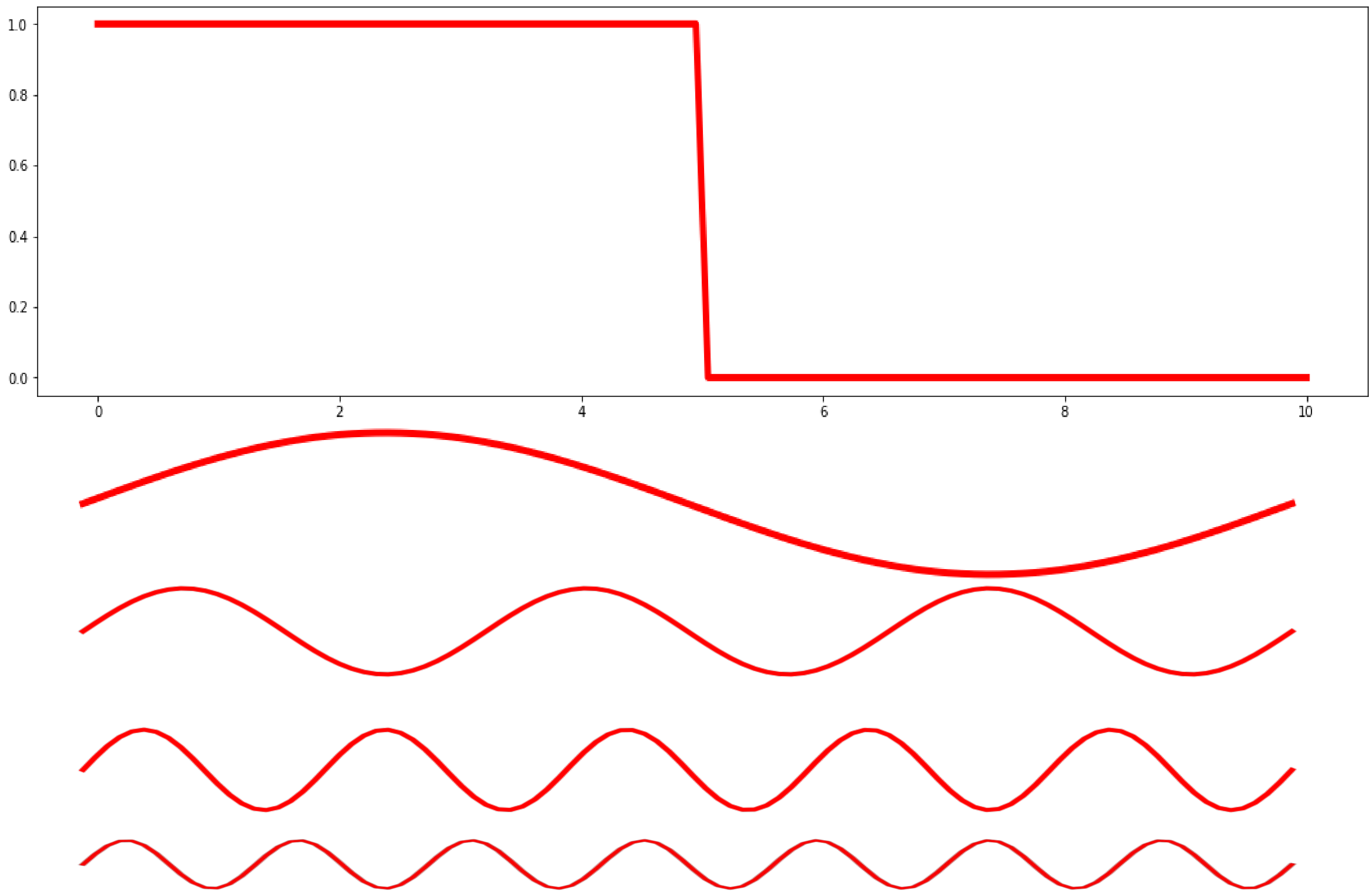
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$
$$= \frac{a_0}{2} e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e_{2k}$$

- Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation

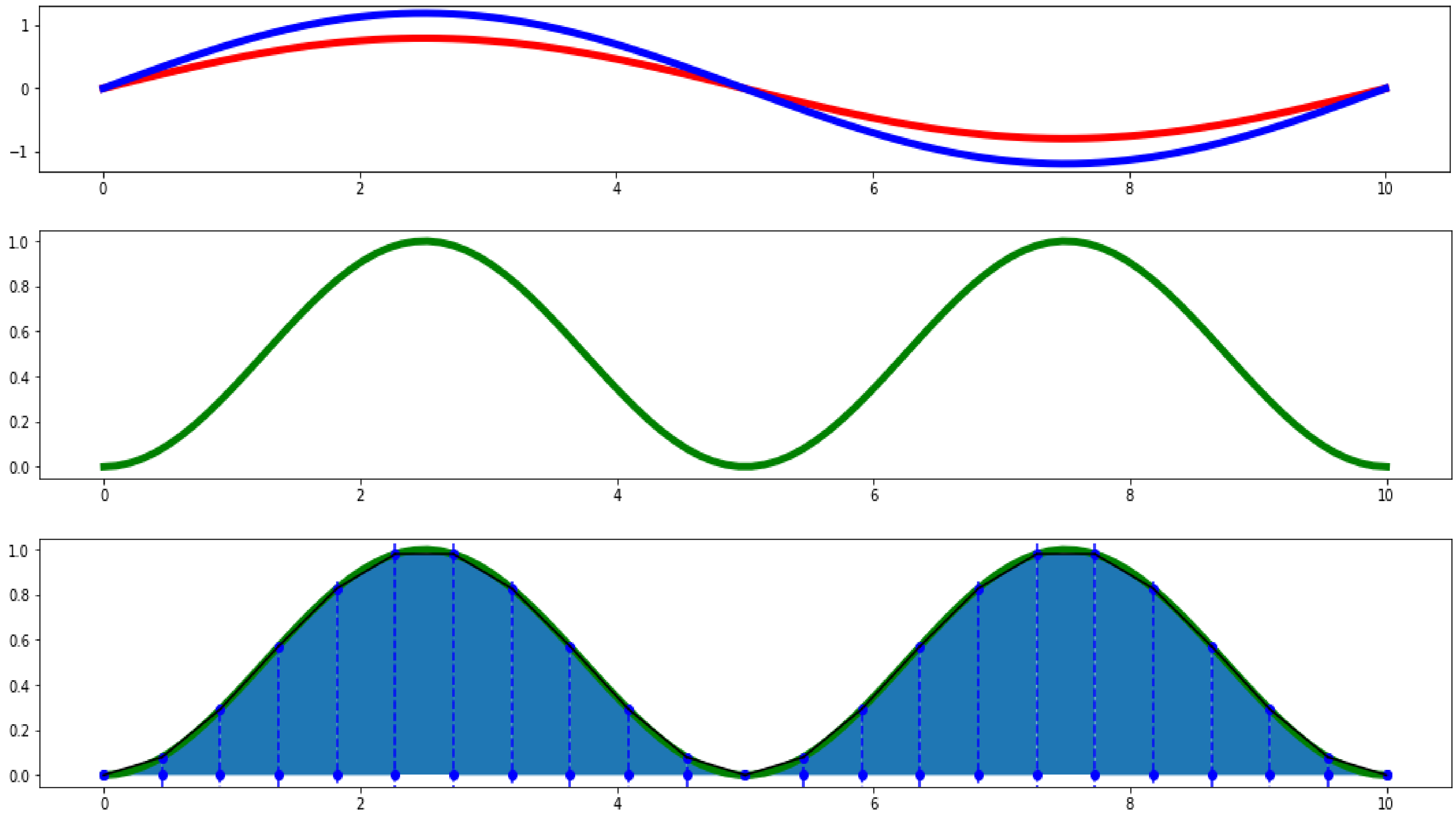
$$\begin{aligned}\left\langle e_{1j} \,\middle|\, f(t) \right\rangle &= \left\langle e_{1j} \,\middle|\, \tfrac{a_0}{2} e_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e_{2k} \right\rangle \\ &= \left\langle e_{1j} \,\middle|\, \tfrac{a_0}{2} e_0 \right\rangle + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle e_{1j} \,\middle|\, a_k\, e_{1k} \right\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle e_{1j} \,\middle|\, b_k\, e_{2k} \right\rangle \\ &= \tfrac{a_0}{2} \underbrace{\left\langle e_{1j} \,\middle|\, e_0 \right\rangle}_{=0} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\left\langle e_{1j} \,\middle|\, e_{1k} \right\rangle}_{=\delta_{jk}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\left\langle e_{1j} \,\middle|\, e_{2k} \right\rangle}_{=0}\end{aligned}$$

$$\left\langle e_{1j} \,\middle|\, f(t) \right\rangle = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{jk} = a_j$$

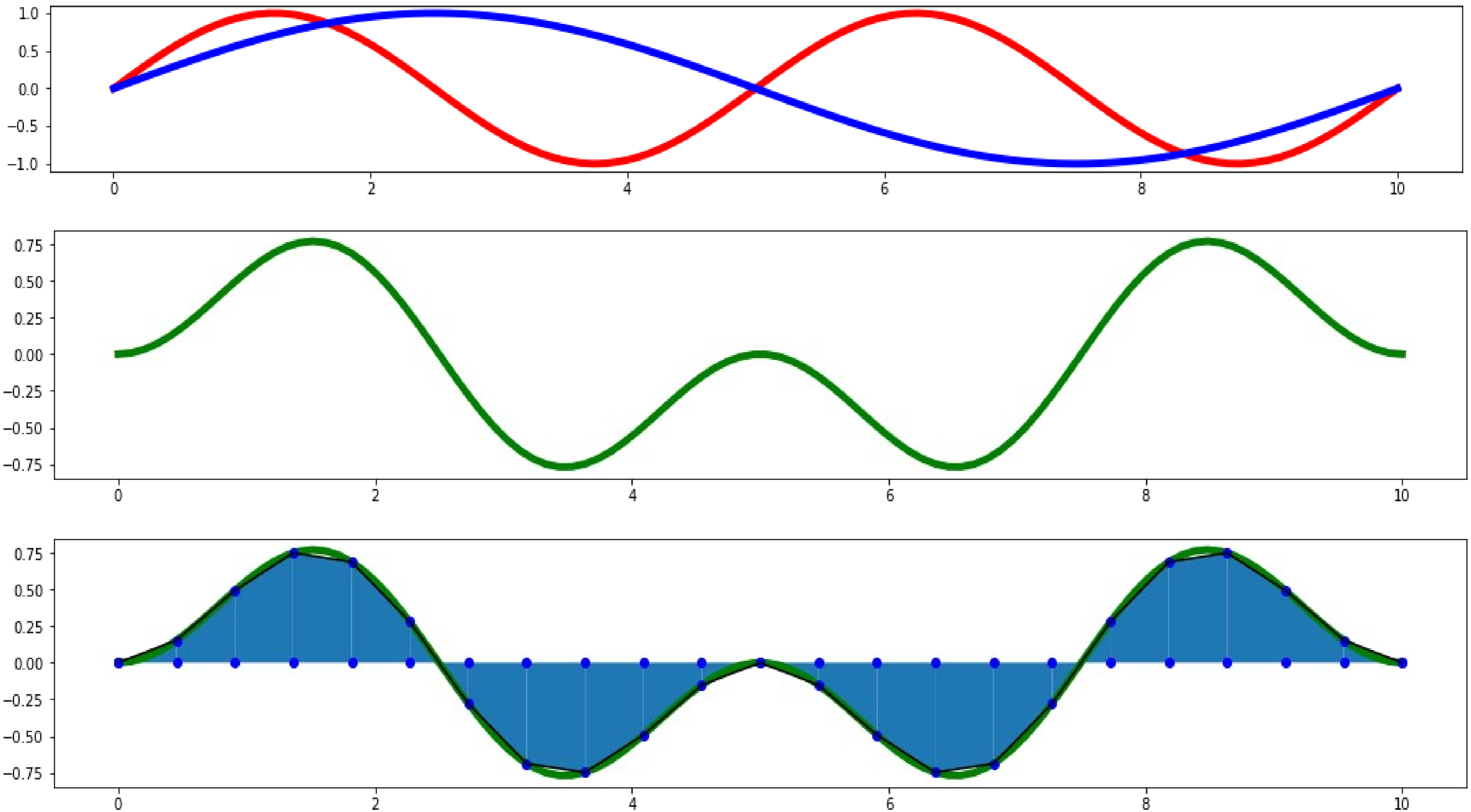
Fourier-Zerlegung – grafische Zerlegung



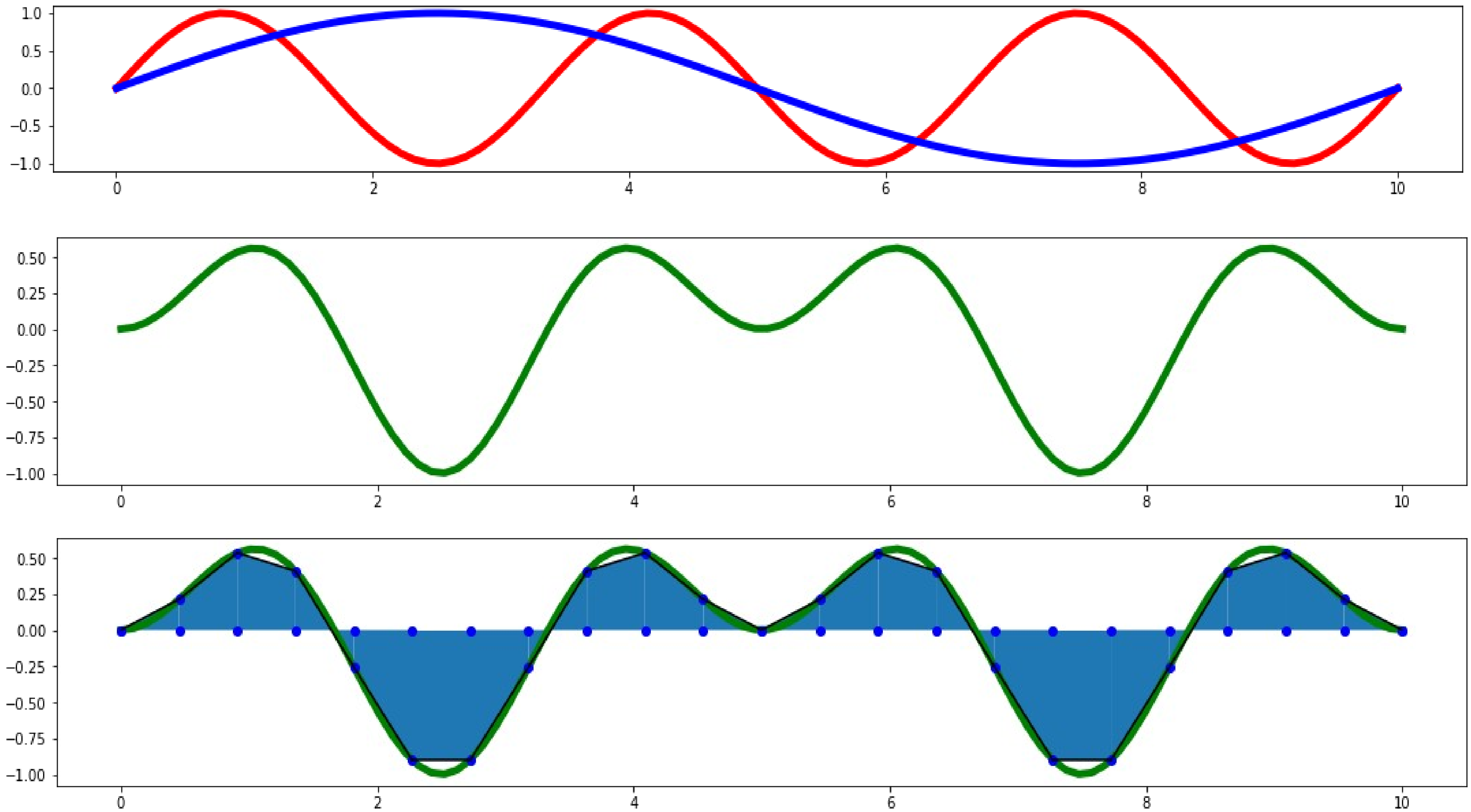
Test durch Integration: <sin(wt)|sin(wt)> = 1



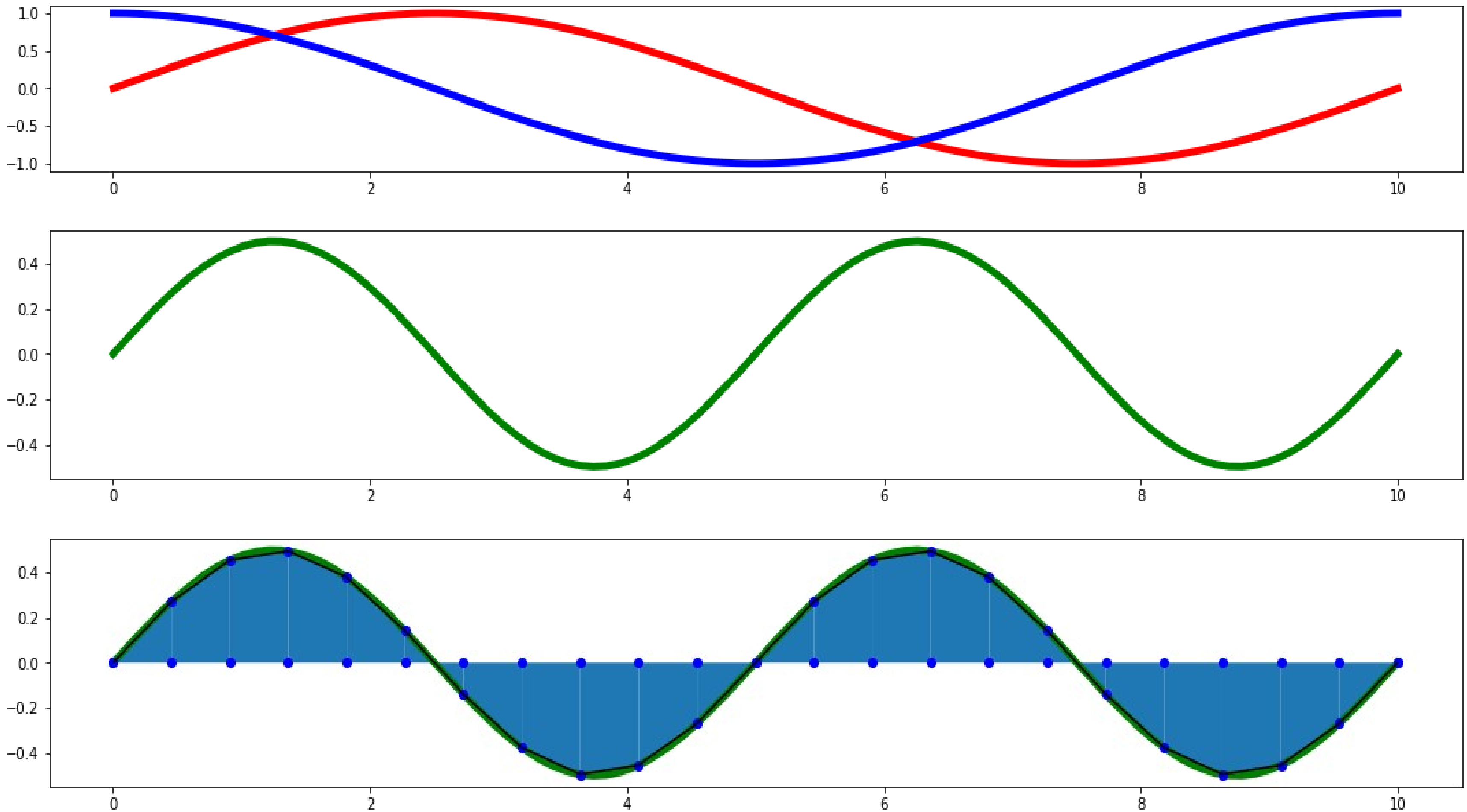
Test durch Integration: <sin(wt)|sin(2wt)> = 0



Test durch Integration: <sin(wt)|sin(3wt)> = 0



Test durch Integration: <cos(wt)|sin(wt)> = 0



Test durch Integration: <cos(wt)|sin(2wt)> = 0