5. Vorlesung - Angewandte Mathematik

Holger Gerhards

DHBW Mannheim, TINF22IT1
holger.gerhards@dhbw-mannheim.de

17. Oktober 2023

Erinnerungen

- Was verstehen Sie unter einem Skalarfeld?
  Nennen Sie ein mathematisches und ein physikalisches Beispiel für ein Skalarfeld.
- Was verstehen Sie unter einem Vektorfeld?
  Nennen Sie ein mathematisches und ein physikalisches Beispiel für ein Vektorfeld.
- Was verstehen Sie unter dem Begriffe Gradient? Was bedeutet er?
- Welche weiterne Differentialoperatoren kennen Sie noch?

Beispielaufgaben

- Ableitung von Trajektorien nach einem Parameter

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin(t) \\ cos^2(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\vec{r}(t) =$$

- Berechnung der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy + y\sin(x) + \cosh(y)) =$$

- Berechnung des Gradienten

$$f(x,y) = xy + y\sin(x) + \cosh(y)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} f(x,y) =$$

Themen dieser Vorlesung

- **Wiederholung zu Polynomen**
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - Anwendungen

Wiederholung zu Polynome

- Konstant $p(x) = a_0$
- Gerade $p(x) = a_0 + a_1\, x$
- Parabel $p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x$
- ...
- Beispiel: $p(x) = x^4 - 6x^3 - 41x^2 + 150x + 400$

  Aufgabe: Bestimmen Sie $p(8)$ ohne Taschenrechner.

Wiederholung zu Polynome

- Konstant $p(x) = a_0$
- Gerade $p(x) = a_0 + a_1\, x$
- Parabel $p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x$
- ...
- Beispiel: $p(x) = x^4 - 6x^3 - 41x^2 + 150x + 400$

Aufgabe: Bestimmen Sie $p(8)$ ohne Taschenrechner.

Lösung: Horner-Schema

	1	-6	-41	150	400
8					

Themen dieser Vorlesung

- Wiederholung zu Polynomen
- **Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$**
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - Anwendungen

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$

- Approximation von Funktionen zur leichteren Berechnung
  - Approximation ausgehend von einem Entwicklungspunkt
- ”Komplexere” Funktion soll durch ein Polynom angenähert werden.
- Allgemeine Berechnungsvorschrift für ein Taylorpolynom vom Grade n ausgehend vom Entwicklungspunkt a

$$T_n f(x;a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

- Bedingung: Funktion $f(n)$ ist n-stetig differenzierbar
- Taylor-Reihe: $n \to \infty$
  wichtig: Berücksichtigung des Konvergenzradius

Beispiel für die Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$

- Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$ in ein Taylorpolynom vom Grade 5.

Weiterführende Links zur Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$

- https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjIBzJ4
  - Sehr gutes Erklärvideo (auf englisch) bzgl. der Taylorpolynome
- https://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe
  - Erklärung und anschauliche Gifs zur Approximation
- https://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel
  - Guter Überblick über diverse Aspekte des Taylor-Polynoms (auch Betrachtungen für den mehrdimensionalen Fall)

Ergänzung zur Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$

- Entwicklung eriner Funktion in ein Taylorpolynom vom Grade 2

$$T_2 f(x;a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \tag{2}$$

- Annahme: a sei Extremum von $f(x) \Longrightarrow f'(a) = 0$

$$\Longrightarrow \quad T_2 f(x;a) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \tag{3}$$

- Ergebnis: Parabel, die nach unten oder oben geöffnet ist.
- Hinweis: Vorzeichen der 2ten Ableitung gibt Auskunft über Minumum oder Maximum.

Themen dieser Vorlesung

- Wiederholung zu Polynomen
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$
- **Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$**
  - Anwendungen

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- **Zielsetzung:**
  - Verständnis der Bedeutung der einzelnen Terme (konstanter, linearer, quadratischer Term)
  - Verständnis hinsichtlich der allgemeinen Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - (Talylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$ bis zum Grade 2 ausführen können)
  - (Vorarbeit für die Berechnung von Extremstellen im $\mathbb{R}^n$)

- Ausgangspunkt: Gegeben sei Skalarfeld $f(x, y)$ im $\mathbb{R}^2$
  - Fixierung von y und Entwicklung von $f(x, y)$ an der Stelle a in ein Taylorpolynom vom Grade 2

$$T_{x,2}f(x, y; a) = f(a, y) + \frac{f'(a, y)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a, y)}{2!}(x - a)^2 \quad (4)$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Nochmal zur Ausgangsentwicklung

$$T_{x,2}f(x,y;a) = f(a,y) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=a}(x-a)^2 \tag{5}$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Nochmal zur Ausgangsentwicklung

$$T_{x,2}f(x,y;a) = f(a,y) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=a}(x-a)^2 \tag{5}$$

- Entwicklungen von $f(a,y)$ an der Stelle b

$$T_{y,2}f(a,y;b) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=b}(y-b) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=b}(y-b)^2 \tag{6}$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Nochmal zur Ausgangsentwicklung

$$T_{x,2}f(x,y;a) = f(a,y) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=a}(x-a)^2 \tag{5}$$

- Entwicklungen von $f(a,y)$ an der Stelle b

$$T_{y,2}f(a,y;b) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=b}(y-b) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=b}(y-b)^2 \tag{6}$$

- Entwicklungen von $\partial_x f(a,y)$ an der Stelle b

$$T_{y,1}\partial_x f(a,y;b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a,y=b} + \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a,y=b}(y-b) \tag{7}$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammenfassung: Entwicklung von $f(x, y)$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an Stelle (a, b)

  $T_2 f(x, y; a, b) = f(a, b)$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammenfassung: Entwicklung von $f(x, y)$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an Stelle (a, b)

$$
\begin{aligned}
T_2 f(x, y; a, b) = & f(a, b) \\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x - a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b} (y - b)
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammenfassung: Entwicklung von $f(x, y)$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an Stelle (a, b)

$$
\begin{aligned}
T_2 f(x, y; a, b) = & f(a, b) \\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x-a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b} (y-b) \\
& + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} (x-a)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} (y-b)^2
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammenfassung: Entwicklung von $f(x, y)$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an Stelle (a, b)

$$
\begin{aligned}
T_2 f(x, y; a, b) = & f(a, b) \\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x - a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b} (y - b) \\
& + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} (x - a)^2 + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} (y - b)^2 \\
& + \left.\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x - a)(y - b)
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammenfassung: Entwicklung von $f(x, y)$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an Stelle (a, b)

$$
\begin{aligned}
T_2 f(x, y; a, b) = & f(a, b) \\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x - a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b} (y - b) \\
& + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} (x - a)^2 + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} (y - b)^2 \\
& + \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} (x - a)(y - b)
\end{aligned}
$$

- Alternative Schreibweise

$$
T_2 f(x, y; a, b) = f(a, b) + \nabla f|_{(a,b)} \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r}^T \mathbf{H}_f \, \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \tag{8}
$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammensetzung
  - konstanter Anteil $f(a, b)$
  - linearer Anteil = Ebene im Raum

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b}(y-b)$$
$$=\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}_{(a,b)}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}=\nabla f|_{(a,b)}\cdot\vec{r} \quad (9)$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammensetzung
  - konstanter Anteil $f(a,b)$
  - linearer Anteil = Ebene im Raum

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b}(y-b)$$
$$=\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}_{(a,b)}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}=\nabla f|_{(a,b)}\cdot\vec{r} \quad (9)$$

  - quadratischer Anteil = ”Paraboloid” im Raum

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)}(x-a)^2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)}(y-b)^2+\left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}(x-a)(y-b)$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-a & y-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x^2 f & \partial_x\partial_y f\\ \partial_y\partial_x f & \partial_y^2 f\end{pmatrix}_{(a,b)}\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix} \quad (10)$$

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammensetzung (Ergänzung)
  - Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ ist Matrix der 2ten Ableitungen

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y^2 f \end{pmatrix} \tag{11}$$

Achtung: o.B.d.A. $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
(Gleichheit der 2ten gemischten Ableitungen)

Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Zusammensetzung (Ergänzung)
  - Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ ist Matrix der 2ten Ableitungen

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_y \partial_x f & \partial_y^2 f \end{pmatrix} \tag{11}$$

  Achtung: o.B.d.A. $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$
  (Gleichheit der 2ten gemischten Ableitungen)

- Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$

$$T_2 f(\vec{x};\vec{a}) = f(\vec{a}) + \nabla f\Big|_{\vec{a}} \cdot (\vec{x}-\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T \mathbf{H}_f\Big|_{\vec{a}} (\vec{x}-\vec{a}) \tag{12}$$

Beispiel zur Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ in ein Taylorpolynom vom Grade 2 an der Stelle $x = 0$ und $y = 0$.

Themen dieser Vorlesung

- Wiederholung zu Polynomen
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}$
- Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$
  - **Bestimmung von Extrempunkten im $\mathbb{R}^n$**
  - Tangentialebene
  - Fehlerberechnung

Bestimmung von Extrempunkten im $\mathbb{R}^n$

- **Zielsetzung:**
  - Explizite Berechnung von Extrempunkten von Skalarfeld im $\mathbb{R}^n$
  - qualitative Bewertung hinsichtlich der Art des Extremums

Bestimmung von Extrempunkten im $\mathbb{R}^n$

- **Zielsetzung:**
  - Explizite Berechnung von Extrempunkten von Skalarfeld im $\mathbb{R}^n$
  - qualitative Bewertung hinsichtlich der Art des Extremums

- Bedingung für einen Extrempunkt $\vec{x}_0$

$$\nabla \cdot f\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \stackrel{!}{=} 0 \tag{13}$$

Bedeutung: Es gibt keine Richtung des steilsten Anstieges.

Bestimmung von Extrempunkten im $\mathbb{R}^n$

- Bewertung hinsichtlich der Art des Extremums durch Auswertung der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ positiv definit $\Longrightarrow$ Minimum (alle Eigenwerte > 0)
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ negativ definit $\Longrightarrow$ Maximum (alle Eigenwerte < 0)
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ infinit $\Longrightarrow$ Sattelpunkt (alle Eigenwert > 0 und < 0 existieren)
  - Ansonsten ist auf diese Weise keine Aussage möglich.

Bestimmung von Extrempunkten im $\mathbb{R}^n$

- Bewertung hinsichtlich der Art des Extremums durch Auswertung der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ positiv definit $\Longrightarrow$ Minimum (alle Eigenwerte > 0)
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ negativ definit $\Longrightarrow$ Maximum (alle Eigenwerte < 0)
  - wenn $\mathbf{H}_f$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ infinit $\Longrightarrow$ Sattelpunkt (alle Eigenwert > 0 und < 0 existieren)
  - Ansonsten ist auf diese Weise keine Aussage möglich.
- Hinweis zur Berechnung der Eigenwerte
  - Anspruch: Erkennen von Eigenwerten, wenn die Matrix nur Einträge auf der Hauptdiagonalen hat
  - Für kompliziertere Sachverhalte: Siehe Eigenwertberechnung aus dem 1sten Semester

Beispiel zur Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$

- Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.
  - Handelt es sich bei dem Punkt $P = (0.0)$ um ein Extremum?
  - Um was für ein Extremum handelt es sich?