从赌徒输光问题到阶级跨越难题

part 1 赌徒输光

赌徒输光问题：A、B两人进行“公平”赌博，A、B两人最关心的一个问题：对方什么时候输光，或者自己获得赌场上所有资金？

- 定理：在“公平”的赌博中，任意一个拥有赌本的赌徒和一个拥有无限赌本的赌徒进行长期赌博，那么有限赌本的赌徒输光的概率是100%。
- 推理：在“公平”的赌博中，两个拥有不一样的赌本进行长期赌博，赌本相对少的赌徒输光的概率比另一个赌徒要高。
- 推论：当A、B双方获胜概率相等时，A获得所有资本的概率为$\frac{a}{a+b}$，B获得所有资本的概率为$\frac{b}{a+b}$。 其中a、b分别为A、B的初始赌本。

证明：

假设A、B两人进行赌博，每场A获胜的概率为p，则B获胜的概率为q，且$p+q=1$。每一赌盘输家要给赢家 1 元，即A、B两人的初始赌本分别为a,b，记$a+b = c$。

设$P(i|c)$为在资金为i情况下，资金变成c的概率（即在自己赌本为i时能获得赌场上所有资金的概率），并简记$P(i|c)$为f_i。已知初始条件

$$\begin{cases} f_0 = P(0|c) = 0 \\ f_c = P(c|c) = 1 \end{cases}$$

以 A 为对象举例分析，在资金变为为i元时有两种情况：

- 上一局赌博中拥有 $i-1$元赢得赌本，赌本资金+1；
- 上一局赌博中拥有 $i+1$元赢得赌本，赌本资金-1；

即：

$$f_i = p \cdot f_{i-1} + q \cdot f_{i+1}$$

上式两边同时除q，得到：

$$\frac{f_i}{q} = \frac{p}{q} \cdot f_{i-1} + f_{i+1}$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} = \frac{1}{q} \cdot f_i - \frac{q}{q} \cdot f_{i-1}$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} = \frac{q+p}{q} \cdot f_i - \frac{q}{q} \cdot f_{i-1}$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} - f_i = \frac{p}{q} \cdot f_i - \frac{q}{q} \cdot f_{i-1}$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} - f_i = \frac{p}{q}(f_i - f_{i-1})$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} - f_i = \frac{p}{q} \cdot \left[\frac{p}{q}(f_{i-1} - f_{i-2})\right]$$

$$\Rightarrow \qquad f_{i+1} - f_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i (f_1 - f_0)$$

由上面的推导得：

$$f_i - f_{i-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}(f_1 - f_0)$$

$$f_{i-1} - f_{i-2} = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-2}(f_1 - f_0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_1 - f_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{0}(f_1 - f_0)$$

把上面各式全部相加，得到：

$$(f_i - f_{i-1}) + (f_{i-1} - f_{i-2}) + \cdots + (f_1 - f_0) = \sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k}(f_1 - f_0)$$

$$\Rightarrow \qquad f_i - f_0 = \sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k}(f_1 - f_0)$$

$$\Rightarrow \qquad f_i = f_1 \textstyle\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}$$

Note：上面用到初值条件公式：$f_0 = P(0|c) = 0$。

引用另一条初值条件公式：$f_c = P(c|c) = 1$，代回上面函数式子（即$i = c$时）：

$$f_c = f_1 \sum_{k=1}^{c}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad f_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}}$$

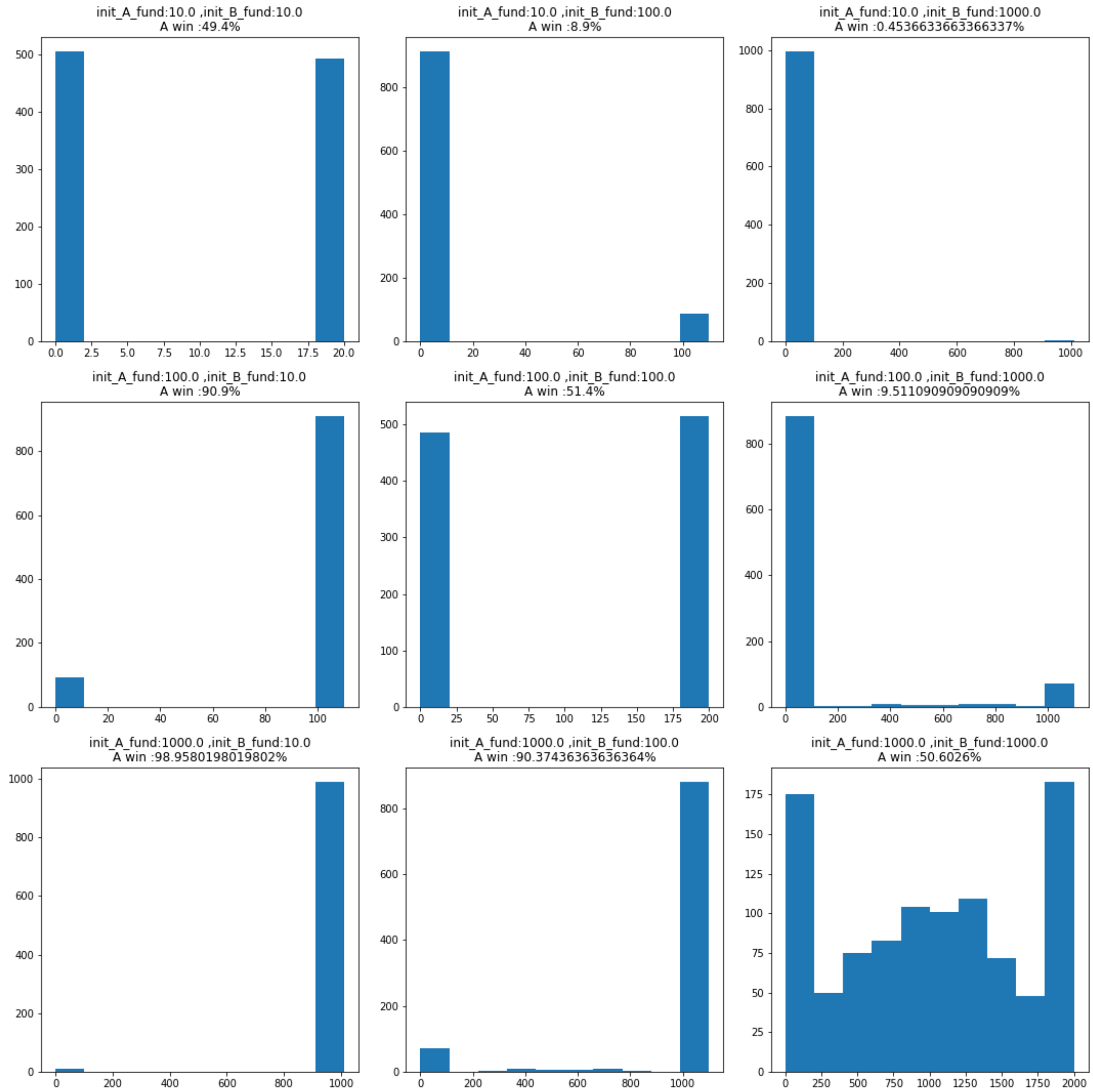
求得f_1后代回f_i的通项函数式子，得到结果：

$$f_i = \frac{\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}}{\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}} = \begin{cases} \dfrac{i}{c} = \dfrac{i}{a+b}, & p = q = 0.5 \\ \dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{i}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{c}}, & p \neq q \end{cases}$$

结论：在赌博“公平”时，谁的初始赌本多，则其最终胜率高。若去赌场跟庄家对赌（假定庄家具有无限赌本），则赌徒必输。

实例模拟：抛硬币游戏。假设 A、B 两人进行抛硬币，抛到正面，则 B 输给 A 一单位资金，问在进行 max_epoch 次游戏后，问 A、B 口袋里各有几钱？ 假定 A 初始时有 init_A_fund 资本，B 初始时有 init_B_fund 资本，任意一方输光后游戏停止。

下面是以 A 的角度进行模拟分析的程序结果，假定每次赌局进行 max_epoch = 50 万次赌博，并进行了 1000 场赌局。在每场赌局中 A、B 初始赌本资金一致，分析在 A、B 初始赌本不同情况下，最后资金的分布情况。并以 1000 场赌局后拥有的资金占全赌场的总资金比例作为赌博胜率。



启示：即使游戏规则是公平的，但是先天拥有资本越多的富二代，到最后他们大概率也是富二代。

part 2 阶级跨越

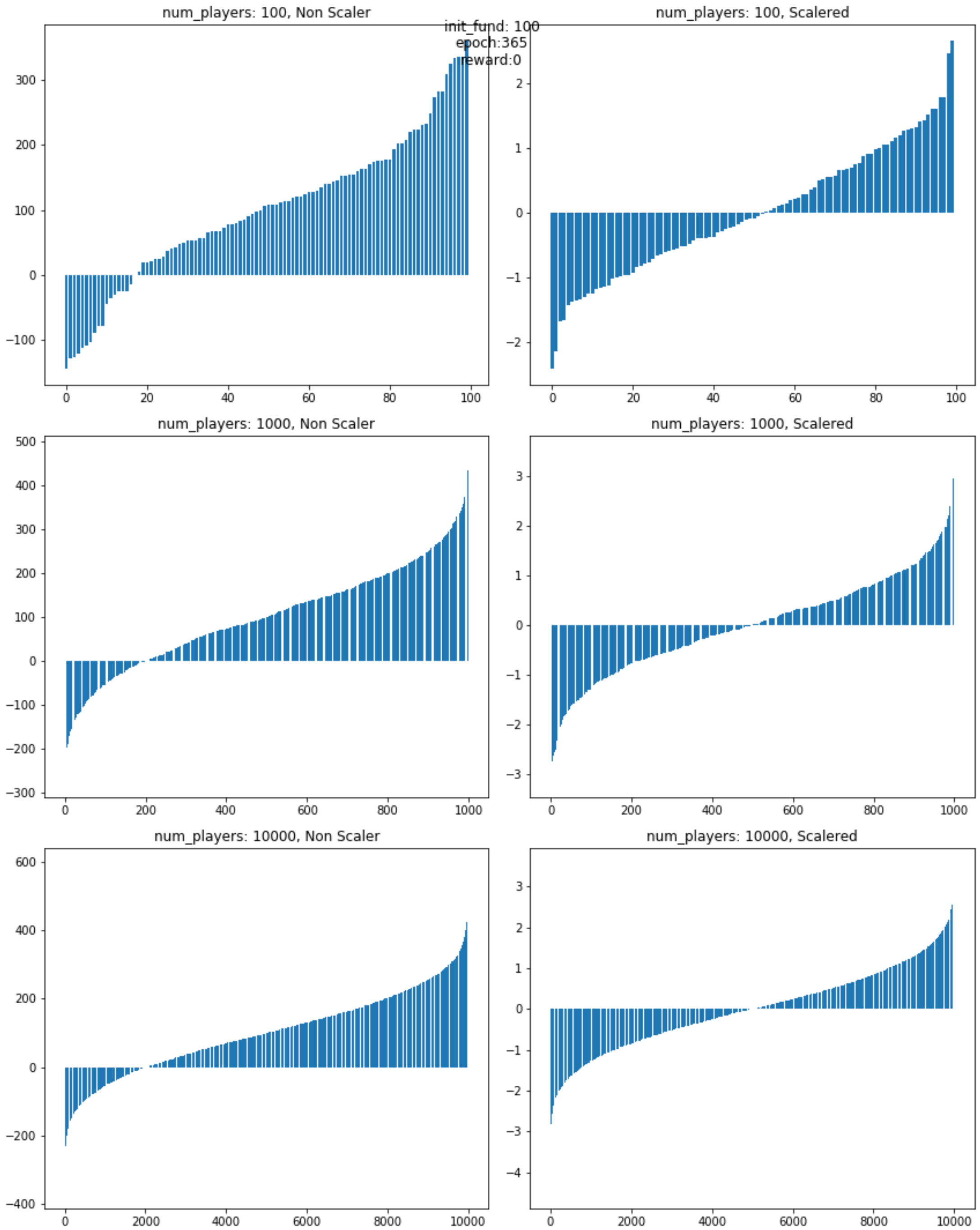
阶级跨越难题：一个集体里有n人，每人都有$init_fund$元，他们在玩一个游戏，每轮游戏每个人都要拿出一块钱随机给到另一人。假设允许负债下，问 $epoch$ 轮后这n个人分别对应的现金是多少？

上面控制到参数有三个：

- 玩家数量：n
- 各个玩家的初始金额：$init\_fund$
- 游戏盘数：$epoch$

分布控制某二个参数，改变剩余一个参数，看程序模拟结果。

情况一：固定参数为各个玩家的初始金额$init_fund = 100$，游戏盘数$epoch = 365\times40$（考虑人的一生从 20 岁奋斗到 60 岁）。分别模型玩家人数$n = 100$、1000、10000人的时候，其 40 年后的资金分布如下：

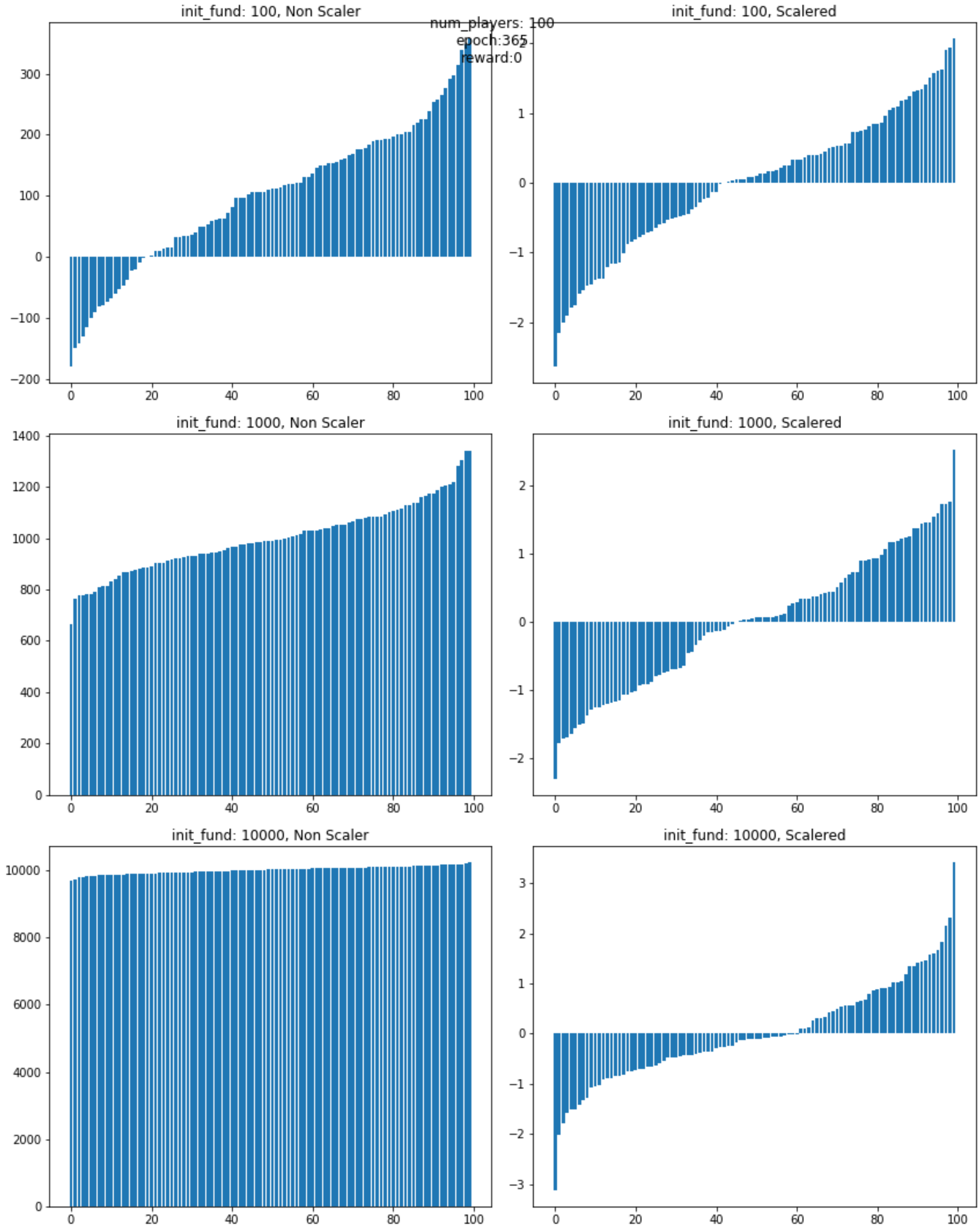


上图中左边是真实结果分布图，右边是经过标准化后处理后的分布图。你可以这场游戏看做是真实世界财富分配的简化模型，假设每个人出身一样，机会资源都一样，奋斗一生之后，你会发现无论这个社会多少人，只要总社会资源不变，到最后整个社会财富接近幂律分布。从分布结果能发现一些特征：

- ✓ 前 10%的人掌握着三分之一的财富，前 20%的人掌握着超过半数的财富；
- ✓ 最富有的人的财富为 400 元左右，是初始值的 4 倍；
- ✓ 而大约四分之一的人背负债务，最多为负债为初始值的 2 倍。

情况二：固定参数为游戏的玩家数$n = 100$，游戏盘数$epoch = 365\times 40$（考虑人的一生从 20 岁奋斗到 60 岁）。分别模拟各个玩家的初始金额$init_fund =$ 100、1000、10000，其实也就是每次游戏的收益或损失分别对应为 1%、0.1%、

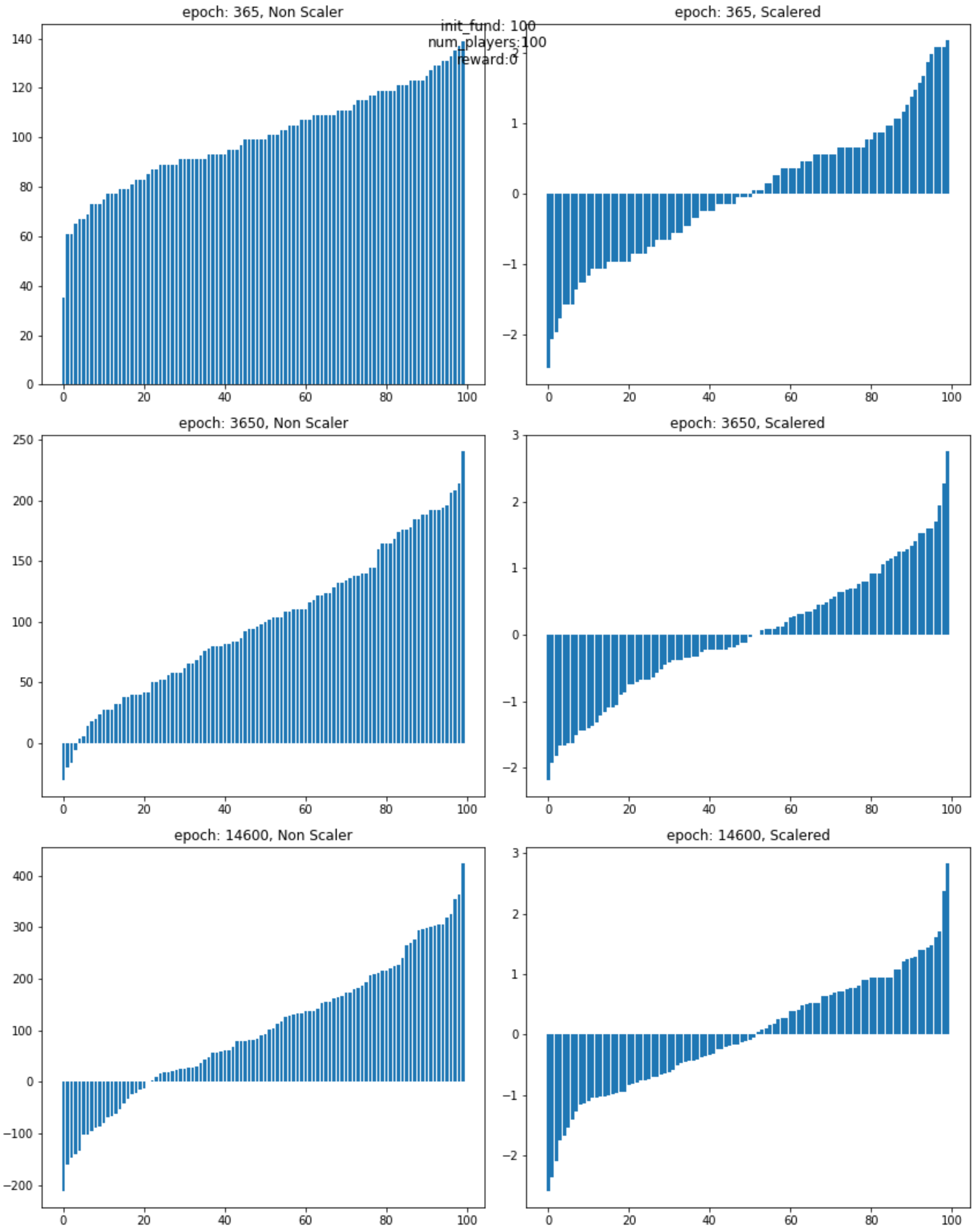
0.01%，其 40 年后的资金分布如下：



当每次游戏的收益或损失分别对应为 1%时，会出现负债的情况，其分布特征与情况一的结论一致。收益率或损失率越小的时候，贫富差距越小。这个也很好理解，比如大家只是玩玩游戏，没有输赢胜负之分，到最后大家的财产也是不变的。但从右边标准化后的图可以知道，社会真正的相对贫富差距依然没变，或者跟情况一一致。

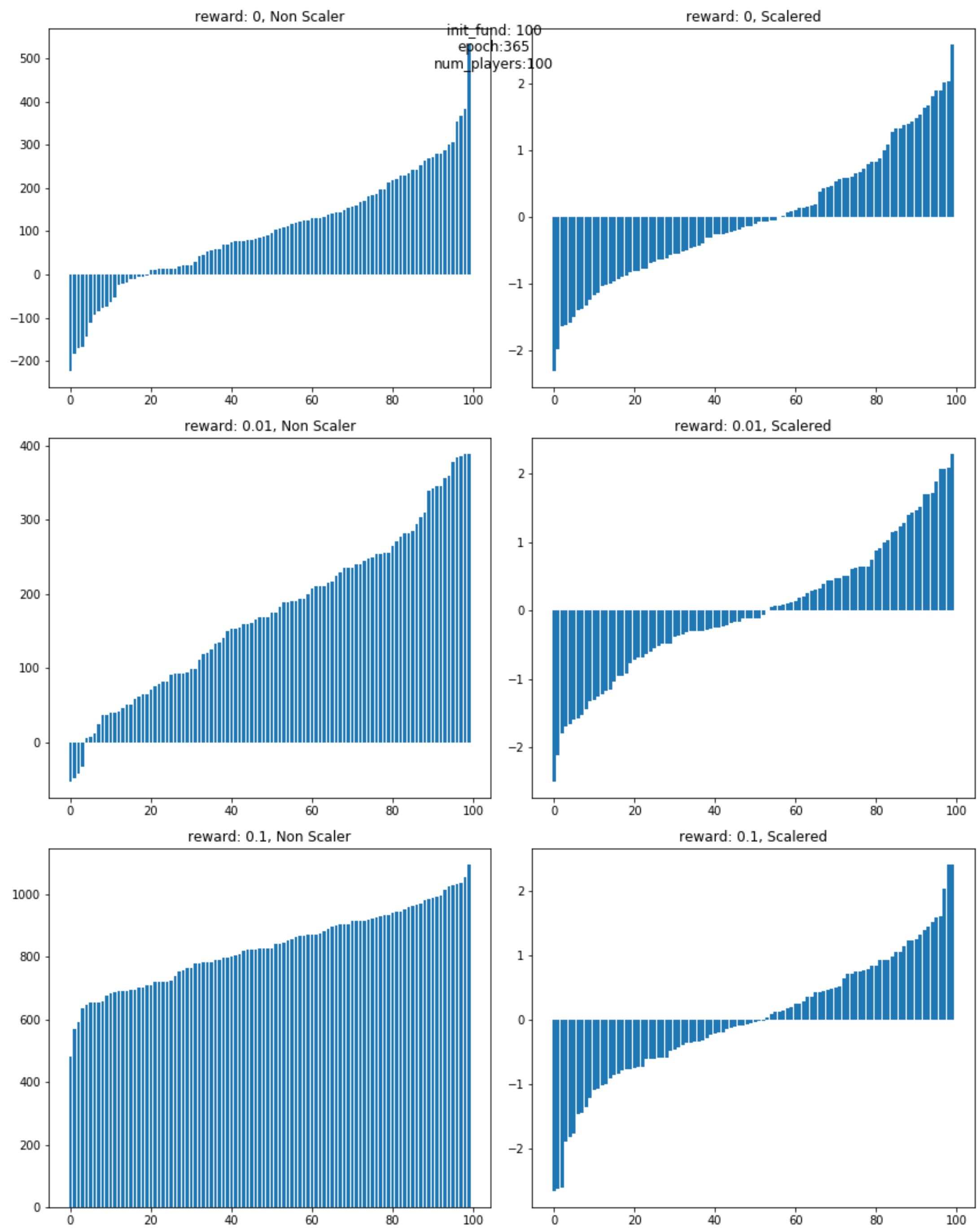
这个举个例子就是，如果大概都有全班玩家（100 个人）都有 8000 元，但只有 30 个玩家有 9000 以上，目前市场上只有 20 个商品，而这商品是所有玩家都需要的。那么市场商品定价会在 9000 元以上，那么不够钱买到商品的玩家有钱也没用，因为兑换不到商品。此时相对贫富指标更具参考价值。

情况三：固定参数为游戏的玩家数$n = 100$，各个玩家的初始金额$init_fund = 100$，也即是每次游戏的收益或损失分别对应为 1%。改变游戏盘数$epoch = 365、365\times10、365\times40$，其最后资金分布如下：



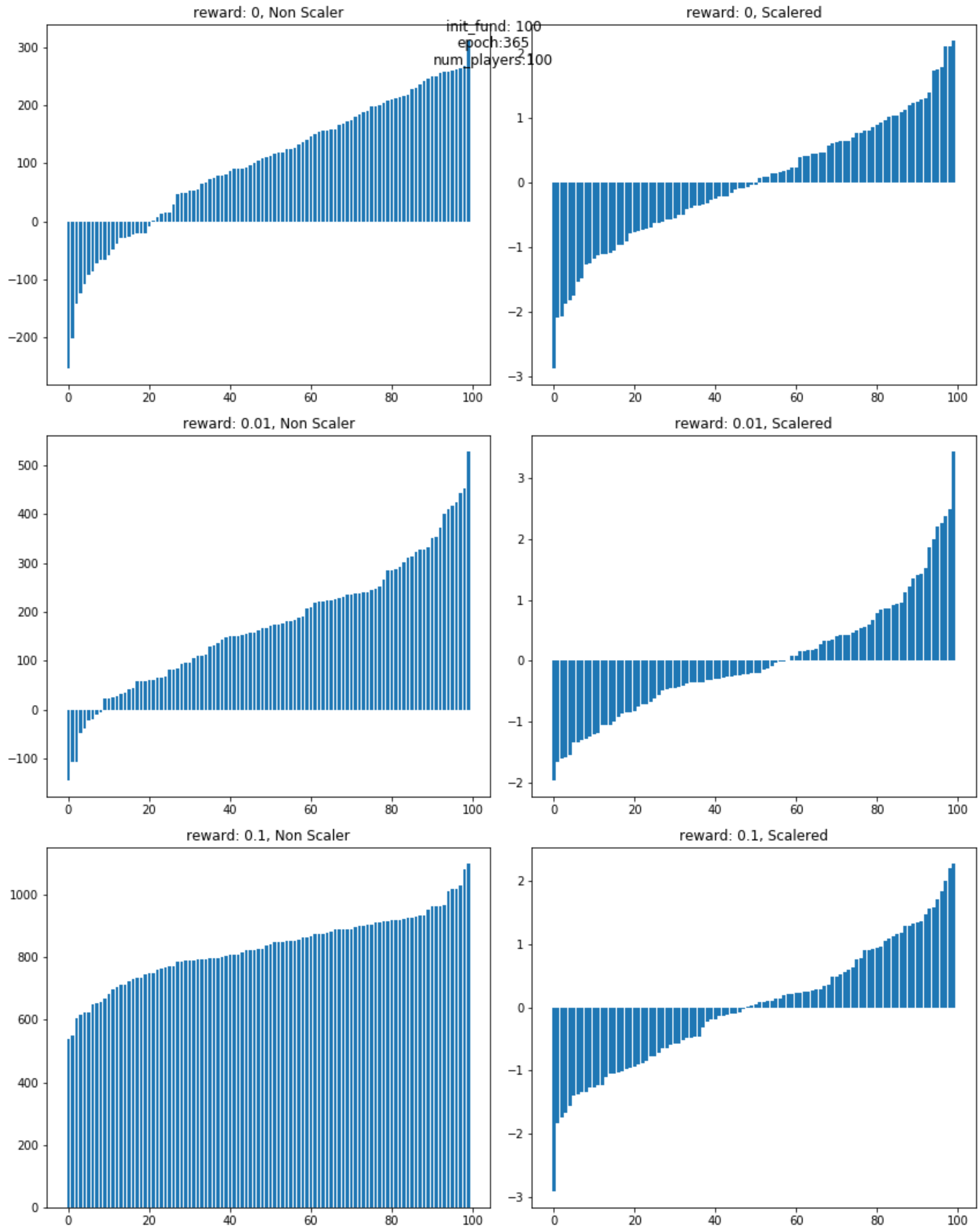
时间总是残酷的，推着时间的推移，有钱的越有钱，贫穷的越贫穷。以上还是在出身一样，机会资源公平的情况下的结果。当然，也限定了总的社会资源是不变的，这有悖现实。

下面假设每次游戏赢家都能获得额外的收益$reward$，而输家则除了损失 1 元外没有额外的收益。在$reward = 0、0.01、0.1$，即每局游戏的赢家的额外收益率为 0%、1%、10%的情况下，奋斗 40 年后，100 个人的资产分布如下：



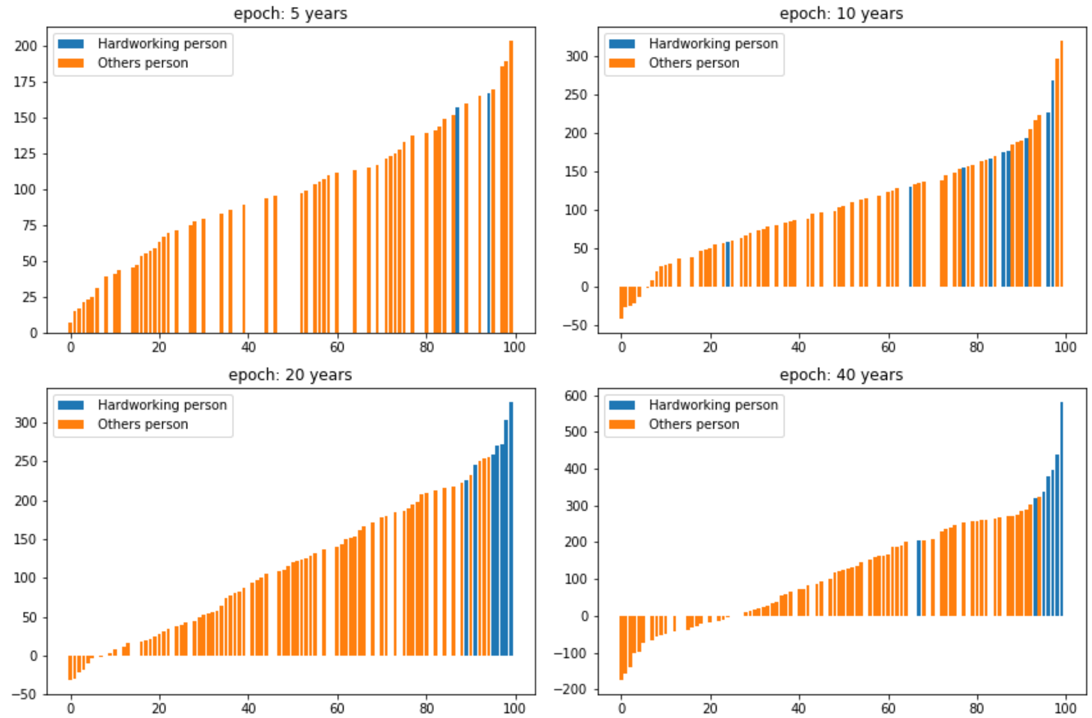
额外收益的确能改变各个玩家的绝对资产价值，但依然改不了贫富相对差距。那是不是方法用错了呢？凭什么赢了游戏的反而得到额外的奖励？现实可是赚的钱多的交税多。

下面假设每次游戏输家都能获得额外的补贴$reward$，而赢家则除了损失 1 元外没有额外的收益。在$reward = 0$、0.01、0.1，奋斗 40 年后，100 个人的资产分布如下：



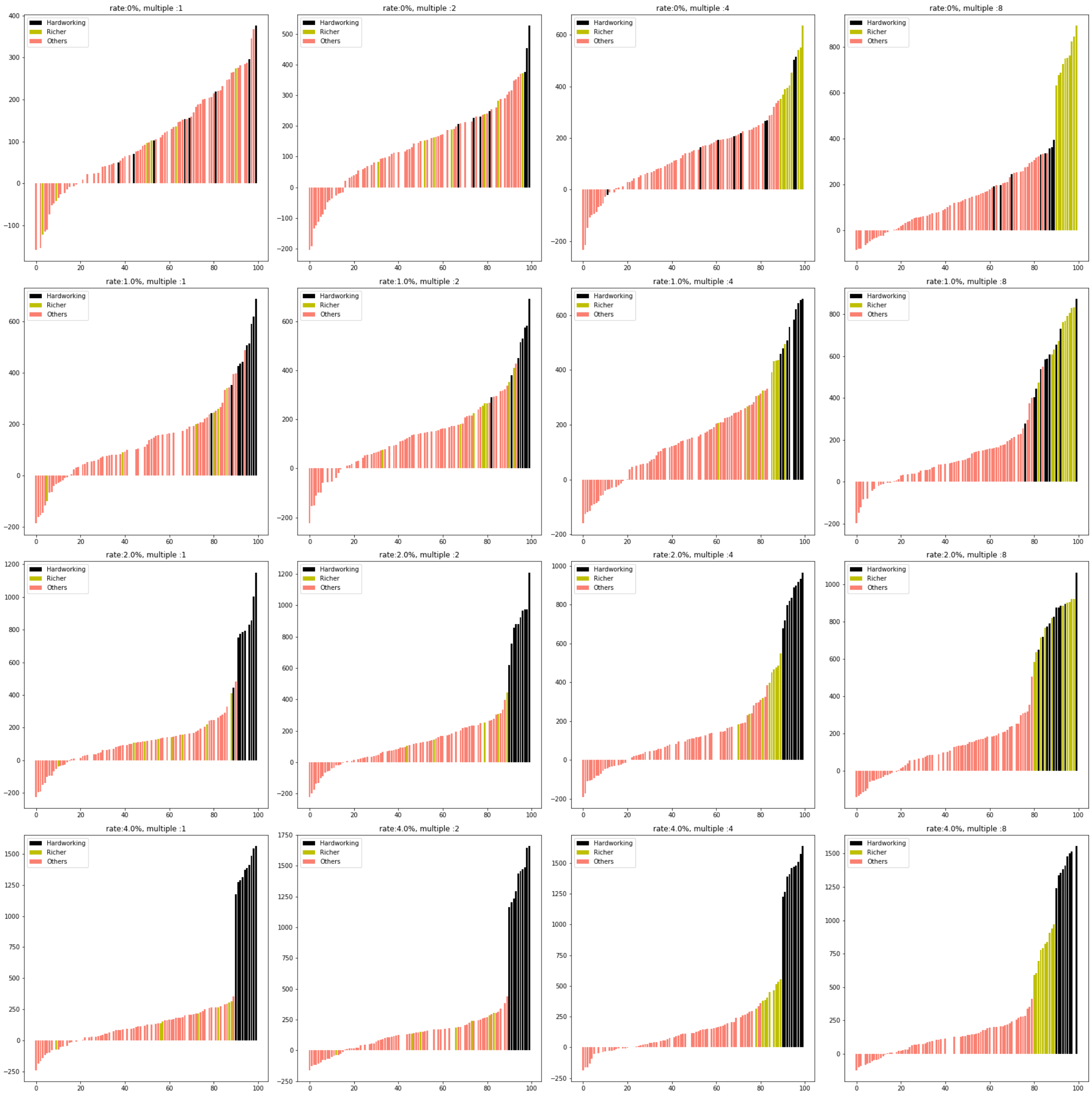
对比赢家能得到额外的奖励这个模拟，似乎没什么显著差异，无论是从绝对财产分布或是相对贫困差距。这是因为机会是平等的，因此每个人一生获得的额外奖励或是补贴都说一样的。在实际中，在资源获取的机会不一样，出身好的人更容易获得资源，因此，如果在实际中给赚钱的人额外的奖励，只会造成更大的贫富差距。反而给亏钱人适当的补贴，才是发展正道。

如果有一部分人特别奋斗呢？假设这部分占 10%，他们相对于其他人多了 1%的竞争优势。从数据上来看，就是他们的游戏胜率增加 1%。固定游戏参加者数量为 100，大家初始资金都一样为 100。在 5 年、10 年、20 年、40 年后其资产分布结果如下：



上图中蓝色标注的为那 10%特别奋斗的人，橙色的为普通人。刚开始，可能不是那 10%的占据了排行榜前列，但随着时间的推移，这些人基本都占据了 top 10%都位置，可能会有个别的相对落后，但可以看出至少比一半的玩家都要好。

那么在现实中，奋斗和出身二选一的话，哪个更占优势呢？假定还是 100 人，但 10%的人为富二代，他们的初始金额为普通人的 multiple 倍，但获胜几率跟普通人一样；10%的人特别奋斗，他们比其他人的获胜几率增加 rate%，但初始资金跟普通人一样；剩下 80%为普通的，其初始资金为 100。分别模拟 rete 在 0%、1%、2%、4%下，对应 multiple 在 1、2、4、8 倍的分布结果：



上图中，自上而下而下分布为固定其他参数，特别奋斗的人在增加不同的获胜几率 rate 下的模型结果，自左往右分布为固定其他参数，当富二代的初始金额为其他人的 multiple 倍下的模型结果。每个图中粉红色的为普通玩家，黑色的特别奋斗的人，占 10%；青绿色的为富二代。

左上角的图为绝对公平背景下的分布结果，即特别奋斗的人也不会获得额外的胜率，富二代的初始金额也是跟其他人一样。可以看出三个群体没有特别的分离。但随着特别勤奋的人在每场游戏中获得额外的胜率（或理解成资源），他们也会超越一些富二代，如果还未能完全超越富二代的话，那只是时间的问题。因为他们是社会规则的制定者。而对于富二代们来说，如果特别奋斗的人额外获得的胜率还不是很高的时候，还是可以凭借着“赌徒输光”的优势完虐普通人，并占据 top10%的梯队的。但社会发展到最后，可以根据右下角的图看出，普通人完全跟富二代和努力奋斗的人不是一个层次的。或者可以用一句话来总结：不怕人家出身比你好，最怕人家还比你勤奋。