

# Optimización Dinámica

**Profesor:** Enrique Calfucura.

**Ayudantes:** Alejandro Poblete.

Ejercicios

Abril 2020

1. Considere el brote de una enfermedad infecciosa, que plantea un peligro para la salud pública. En el tiempo  $t \in [0, T]$ , donde  $T > 0$  es un horizonte de intervención dado, el porcentaje de personas infectadas en una población dada es  $x(t) \in [0, 1]$ . Dado una política de tratamiento público  $u(t) \in [0, \bar{u}]$  (con  $\bar{u} > \alpha$  un nivel de intervención máximo definido por la capacidad de las instalaciones de tratamiento), las dinámicas de la enfermedad son descritas por el siguiente problema:

$$\dot{x} = \alpha(1 - x)x - ux \quad ; \quad x(0) = x_0; \quad x(T) \text{ libre} \quad (1)$$

Donde  $\alpha > 0$  es un parametro dado de cuan efectivo es la enfermedad, y la propagación inicial de la enfermedad  $x_0 \in (0, 1)$  es conocida. Un Social Planner quiere maximizar la función de bienestar social:

$$- \int_0^T (x(t) + cu^k(t))e^{-rt} dt \quad (2)$$

donde  $r > 0$  es la tasa de descuento social,  $c > 0$  denota el costo de intervención y  $k \leq 1$  describe las diseconomías al ampliar los esfuerzos de tratamiento público.<sup>1</sup>

- Formule el problema de maximización del bienestar como un problema de control óptimo y encuentre el Hamiltoniano Corriente.
- Provea las condiciones necesarias de optimalidad (principio del máximo) para  $k \in \{1, 2\}$ .
- Caracterice las soluciones óptimas para  $k \in \{1, 2\}$ .

---

<sup>1</sup>"k" describes the diseconomies when scaling up public treatment efforts.