点集拓扑期末复习资料

> 总结一下点集拓扑的期末复习资料，希望能帮到大家。有不对或者不规范的地方还请认真听课的同学批评指正😄~~

一些记号

- 花体表示
  - $\mathscr{T}$：T，代表**拓扑**；
  - $\mathscr{P}$：P，代表**幂集**；
  - $\mathscr{A}$：A，代表**集族**；
  - $\mathscr{F}$：F，代表**闭集族**（注意与$\mathscr{T}$加以区分）；
- 集合运算符号
  - $\overline{U}$或U^-或$c(U)$：集合U的闭包；
  - $d(U)$：集合U的导集；
  - ∂U：集合U的边界；
  - U^o：集合U的内部；
  - U'：集合U的补集；
- 其他记号
  - $[x]_R$：R-等价类；
  - $X/R=\{[x]_R \mid x\in X\}$：集合$X$相对于等价关系$R$而言的**商集**；

习题部分

1. `18页1.4节第5题` （等价关系的有关概念）设R_1，R_2是集合X中两个等价关系，证明$R_1\circ R_2$是集合X中的一个等价关系当且仅当$R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.

> **证明：**
>
> "$\Rightarrow$":
>
> $\because$ R_1, R_2是等价关系，而$R_1\circ R_2$是等价关系，
>
> $\therefore R_1\circ R_2=(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}=R_2\circ R_1$.
>
> "$\Leftarrow$":
>
> $\because R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$,
>
> $\therefore R_1\circ R_2=R_1^{-1}\circ R_2^{-1}=(R_2\circ R_1)^{-1}=(R_1\circ R_2)^{-1}$，（对称性成立）
>
> 又$\because \forall x\in X$，有xR_1x, xR_2x，$\therefore xR_1\circ R_2x$，（自反性成立）
>
> 又由于$R_1\circ R_1\subset R_1$, $R_2\circ R_2\subset R_2$，所以

$$
\begin{aligned}
(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) &= R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 \\
&= R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 \\
&= (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subset R_1 \circ R_2
\end{aligned}
$$

（传递性成立）

综上，$R_1 \circ R_2$是等价关系。

2. `121页3.4节第1题` （商空间、商拓扑）证明离散空间（平庸空间）的任何一个商空间都是离散空间（平庸空间）。

> **证明：**
>
> （对离散空间）设$(X, \mathscr{T})$是离散空间. $(X/R, \mathscr{T}_1)$是商空间，则$\mathscr{T}_1$是相对于自然投射$p: X \to X/R$而言的商拓扑，对任何$u \subset X/R$，有$p^{-1}(u) \in \mathscr{P}(X)$，所以$p^{-1}(u) \in \mathscr{T}$，于是$u \in \mathscr{T}_1$，$\mathscr{P}(X/R) \subset \mathscr{T}_1$，即$\mathscr{T}_1 = \mathscr{P}(X/R)$，所以$(X/R, \mathscr{T}_1)$是离散空间。
>
> （对平庸空间）设$(X, \mathscr{T})$是平庸空间，$(X/R, \mathscr{T}_R)$是商空间，若$\varnothing \neq u \in \mathscr{T}_R$，有$p^{-1}(u) \in \mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$，于是$p^{-1}(u) = X$，由$p$是满射，$u = p(p^{-1}(u)) = p(X) = X/R$，于是$\mathscr{T}_R = \{X/R, \varnothing\}$，所以$(X/R, \mathscr{T}_R)$是平庸空间。

3. `121页3.4节第5题` （等价关系，同胚，商空间）设X, Y是两个拓扑空间，$f: X \to Y$是一个商映射，令$R = \{(x, y \in X^2 \,|\, f(x) = f(y)\}$，证明：
   1. R是X中的一个等价关系；
   2. Y同胚于商空间X/R.

> **证明：**
>
> 1. - （自反性）取$y = x$，显然；
>   - （对称性）由于x, y位置可交换，所以对称性成立；
>   - （传递性）由相等的传递性易知；
>
>   所以R是X中的一个等价关系。
>
> 2. $X/R = \{[x]_R \,|\, x \in X\}$，$[x]_R = \{y \in X \,|\, f(y) = f(x)\}$.
>
>   令$\tilde{f}: X/R \to Y$，$\tilde{f}([x]_R) = f(x)$，下面证$\tilde{f}$是同胚（连续的一一映射）：
>
>   - $\forall x_1, x_2 \in X$，若$[x_1]_R = [x_2]_R$，则$f(x_1) = f(x_2)$，所以$\tilde{f}([x_1]_R) = \tilde{f}([x_2]_R)$，即$\tilde{f}$是**映射**（唯一对应关系）；
>   - 若$[x_1]_R \neq [x_2]_R$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$，从而$\tilde{f}([x_1]_R) \neq \tilde{f}([x_2]_R)$，即$\tilde{f}$为**单射**（不同原像的像不同）；
>   - $\forall y \in Y$，因f为商映射，所以有$x \in X$，使得$f(x) = y$，于是$\tilde{f}([x]_R) = y$，即$\tilde{f}$是**满射**（像集中每一个点都有原像），于是$\tilde{f}$是**双射**；
>   - 设p为投射，$p: X \to X/R$，则易见下式成立：
>
> $$f = \tilde{f} \circ p, \tag{1}$$
>
>   对Y的任一开集U，由f是商映射，$f^{-1}(U)$是X的开集，$(\tilde{f} \circ p)^{-1}(U)$为开集，$p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$开集，又$p$连续映射，$\tilde{f}^{-1}(U)$是$X/R$中的开集，所以$\tilde{f}$**连续**；
>   - 设$V \subset X/R$是开集，$f^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) = p^{-1}[\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(V))] = p^{-1}$，$p^{-1}$是$X$中开集，所以$\tilde{f}(V)$是$Y$中的开集，所以$\tilde{f}$是**开映射**。
>
>   综上，$\tilde{f}$是X/R到Y的同胚，即Y同胚于商空间X/R。

4. `141页4.4节第2题` （有限补空间、可数补空间、局部连通空间）任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间.

> **证明：**
>
> （对有限补空间）设$(X,\ \mathscr{T})$是有限补空间，则
>
> - 若X为有限集，则X的任一子集均为开集，$(X,\ \mathscr{T})$为离散空间，显然为局部连通空间；
> - 若X为无限集，对任何$A \in \mathscr{T}$，则A为X的无限子集. 若A不连通则存在X中两个非空隔离子集C和B，使得$A = C \cup B$，此时$(C \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) = \varnothing$（集合$B$, C隔离的定义）.
>
>   由A为无限集得到B, C至少有一个为无限集，不妨设B为无限集，由于$\overline{B} = X$与$C \cap \overline{B} = \varnothing$矛盾，于是$A$为连通集，对任何$x \in X$，$x$的任一开邻域均连通，所以$X$是局部连通空间.
>
> （对可数补空间）设$(X,\ \mathscr{T})$是可数补空间，则
>
> - 若X为可数集，则X的任一子集均为开集，$(X,\ \mathscr{T})$为离散空间，显然是局部连通空间；
> - 若X为不可数集，对任何$A \in \mathscr{T}$，则A为X的不可数子集. 若A不连通则存在X中的两个非空隔离子集C和B，使得$A = C \cup B$，则B, C至少有一个为不可数集，不妨设B为不可数集，由于$\overline{B} = X$与$C \cap \overline{B} = \varnothing$矛盾，于是$A$为连通集，即$X$为局部连通空间.

5. `155页5.1节第2题` （第二可数性公理、基与子集、可数集判断）一个拓扑空间满足第二可数性公理当且仅当它有一个可数子基.

> **证明：**
>
> "$\Rightarrow$":
>
> 设拓扑空间X满足第二可数性公理，则X有一可数基$\mathscr{B}$，记
>
> $$\mathscr{B}' = \{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n : B_i \in \mathscr{B}, i = 1, 2, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad (2)$$
>
> 则根据拓扑空间中同一拓扑基的充要条件，$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$为X的同一拓扑基，所以$\mathscr{B}$为X的可数子基.
>
> "$\Leftarrow$":
>
> 因为可数集的所有有限子集所成的集族为可数集，所以由以子基$\mathscr{T}$构成的基$\mathscr{B}'$是可数的，即X满足第二可数性公理。

6. `206页7.1节第5题` （紧致空间的的可遗传性）拓扑空间中任何一族紧致闭子集的交还是一个紧致子集.

> **证明：**
>
> 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$为拓扑空间$X$中的紧致闭集族，则$E = \bigcap\limits_{\alpha\in\tau} F_\alpha$为$X$的闭集，且对任意$\alpha \in \tau$，有$E \subset F_\alpha$. 由定理：*紧致空间中每一个闭子集都是紧致子集*，所以E为紧致子集。

定理部分

1. `184页定理6.4.2` （正则+正规→完全正则）

> **证明：**

> 设X是一个既正则又正规的空间，并设$x \in X$，B是X中的一个不包含点x的闭集。由于X是一个*正则空间*，根据**正则空间的充要条件**（拓扑空间X是一个正则空间 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$和x的任何一个开邻域U，$\exists$ x的一个开邻域V，使$\overline{V} \subset U$），点x有一个开邻域U使得$\overline{U} \subset B'$. 令$A = \overline{U}$，则A和B是X中无交的两个闭集. 由于X是一个*正规空间*，应用$\mathrm{Urysohn}$引理可得，存在一个连续映射$f: X \to [0, 1]$使得对任何$y \in A$有$f(y) = 0$和对于任何$y \in B$有$f(y) = 1$. 由于$x \in A$，故$f(x) = 0$，即证X是一个完全正则空间。

2. `187页定理6.5.2` （正则+子空间→正则）

> **证明：**
>
> 设X是一个正则空间，Y是X的一个子空间. 设$y \in Y$和B是Y的一个闭集使得$y \notin B$，首先，在X中有一个闭集$\widetilde{B}$使得$\widetilde{B} \cap Y = B$，因此$y \notin \widetilde{B}$. 由于X是一个正则空间，所以y和$\widetilde{B}$分别在X中有开邻域（对拓扑空间X而言）$\widetilde{U}$和$\widetilde{V}$使得$\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$. 令$U = \widetilde{U} \cap Y$和$V = \widetilde{V} \cap Y$，它们分别是$y$和$B$在子空间中的开邻域，且易知$U \cap V = \varnothing$，所以由正则空间定义，$Y$为正则空间。