Automne 2014

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard – Lyon 1

Quaternions

- Nombres complexes de longueur 1
  - Permettent de modéliser les rotations autour de (0,0) par une simple multiplication
  - Caractérisés par 2 nombres réels : partie réelle, partie imaginaire
- Comment construire un type de nombre permettant d'obtenir des résultats similaires en 3D?

- Un triplet de nombres réels ne suffit pas, il faut un quadruplet!
  - Un scalaire
  - Et un vecteur imaginaire pur
- Forme d'un quaternion

  $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$
- Propriétés

  $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1$

- Attention le produit entre quaternions n'est pas toujours commutatif!

.	**1**	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

  - Cohérent avec le fait que les rotations ne sont pas commutatives!

$Q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$

$Q'=a'+b'\mathbf{i}+c'\mathbf{j}+d'\mathbf{k}$

$Q.Q'=(aa'-(bb'+cc'+dd'))$
$\quad+(ab'+ba')\mathbf{i}+(ac'+ca')\mathbf{j}+(ad'+da')\mathbf{k}$
$\quad+(cd'-c'd)\mathbf{i}+(db'-d'b)\mathbf{j}+(bc'-cb')\mathbf{k}$

Si on note $Q=a+\mathbf{V}$ et $Q'=a'+\mathbf{V'}$

On obtient

$Q.Q'=aa'-V\cdot V'$
$\quad+a\mathbf{V'}+a'\mathbf{V}$
$\quad+\mathbf{V}\wedge\mathbf{V'}$

où on retrouve les produits scalaires et vectoriels des 2 parties vectorielles!

- Conjugué d'un quaternion :

$Q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}=a+\mathbf{V}$

$Q^*=a-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}=a-\mathbf{V}$

- Permet d'obtenir la norme d'un quaternion par $||Q||^2=Q.Q^*=a^2+\mathbf{V}^2$
- Les quaternions de norme 1 sont dits unitaires

– Inverse d'un quaternion
$Q^{-1}=Q^*/||Q||^2$
– Propriétés
$Q^{**}=Q$
$(Q+Q')^*=Q^*+Q'^*$
$(Q.Q')^*=Q'^*.Q^*$
$(Q.Q')^{-1}=Q'^{-1}.Q^{-1}$

- C'est bien beau toutes ces formules mathématiques,
mais quel rapport avec les rotations 3D et plus généralement avec les similitudes?
- Etant donné un quaternion Q=a+**V** de norme q
  – On considère l'angle Φ t. que a/q=cos Φ et ||**V**||/q=sin Φ
  – Alors Q=q(cosΦ+sinΦ**N**) où **N** est le vecteur unitaire **V**/q

– La rotation d'un vecteur **U** d'angle 2Φ autour de l'axe porté par **N** s'exprime par le produit de quaternions suivants :
U' =(cosΦ+sinΦ**N**).(0+**U**). (cosΦ-sinΦ**N**)
=(cosΦ+sinΦ**N**).(0+**U**). (cosΦ+sinΦ**N**)*
– On dit que le quaternion cos Φ+sin Φ**N** représente la rotation R[**N**,2Φ]
– Pratique pour combiner les rotations
  - Si on applique la rotation R1 de quaternion Q1 puis R2 de quaternion Q2 on obtient une rotation représentée par Q2Q1

– Pourquoi utiliser les quaternions?
  - Les opérations sont numériquement plus stables que sur les matrices
  - Utiles pour faire de l'interpolation entre 2 rotations ☺
  - Interpolation sur la sphère unitaire à 4 dimension

interp(**q1**,**q2**,t)=(sin((1-t)e)**q1**+sin(te)**q2**)/sin(e)

Avec **q1.q2**=cos(e) et t entre 0 et 1