

Automne 2014

## Modèles mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard - Lyon I

## Qu'est-ce qu'une Image?

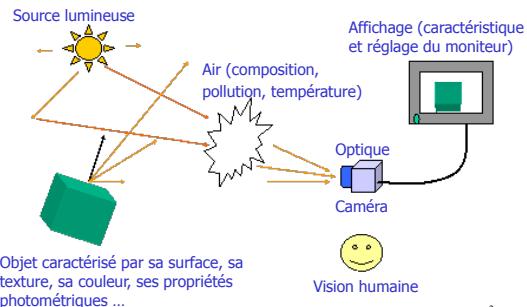


(généralement)

- **Projection 2D d'une scène 3D**
  - soumise à un éclairage,
  - sur la surface d'un capteur

2

## Nature d'une image?



3

- Image numérique :

tableau bidimensionnel de **pixels**  
(*pict*ure *e*lements)

- Pixel

**Valeur de l'intensité lumineuse reçue localement par unité de surface du capteur**

4

## Représentation

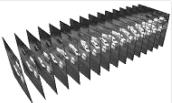
Une image numérique est une représentation discrète des rayonnements visibles.

Image :  $[1..L] \times [1..C] \rightarrow [0..M-1]^p$

Vidéo :  $[1..L] \times [1..C] \times [1..T] \rightarrow [0..M-1]^p$



L lignes  
C colonnes



T images

Chaque indice correspond à un élément de surface élémentaire du plan de formation de l'image (pixel)

Mesure du rayonnement reçu par chaque élément de surface élémentaire (valeur du pixel)

5

Information de chaque pixel :

- définie dans un espace à  $p$  dimensions
- quantifiée sur  $M$  valeurs.



Binaire  
 $p=1$   $M=2$



Niveau de gris  
 $p=1$   $M=256$



Couleur  
 $p=3$   $M=256$

- **Codage en niveau de gris :**  
1 pixel = 1 octet (**valeur d'intensité comprise entre 0 : noir et 255 : blanc**)
- **Exemple:** une image 512 x 512 occupe 256Ko de mémoire
- **Valeurs directement accessibles avec format ppm**



```
P2 nocol nbl 255
#P5 intensite binaire
#P2 intensite ascii
0 34 45 45 56 125 124
78 7 88 87 0 0 1 2 123
etc.
```

"Lena.pgm"

- **Codage en noir et blanc :**  
1 pixel = 1 bit (**0 : blanc et 1 : noir**)
- **Valeurs directement accessibles avec format ppm**



```
P1 nocol nbl
0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 0
etc.
```

"lena.pnm"

9

- **Codage en couleur :**  
1 pixel = 3 octets (**valeurs d'intensité RGB comprises entre 0 et 255**)
- **Valeurs directement accessibles avec format ppm**



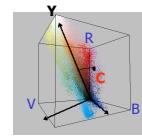
```
P3 nocol nbl 255
#P6 intensite en binaire
#P3 intensite en ascii
15 0 0 15 0 1 12 3 2
14 0 0 15 3 1 13 3 1
etc .
```

"Lena.ppm"

8

### Systèmes Couleurs RVB,YUV et TSL

- **C** = couleur (r,v,b) dans le repère RVB
  - YUV nouveau repère  
Y= l'axe (1,1,1) dans le repère RVB  
**C** = couleur (Y,U,V) dans le repère YUV  
Y = Luminance =  $(r+g+b)/3 = \text{proj}(C/Y)$   
UV=chrominance
- $$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$



- **C** = couleur (T,S,L) dans le repère TSL  
Teinte=angle dans plan UV

$$H = \tan^{-1} \left[ \frac{V}{U} \right] \quad V = S \times \sin(H)$$

$$\text{Saturation}=distance(c,Y) \quad S = \sqrt{U^2 + V^2} \quad U = S \times \cos(H)$$

10



V

B

11

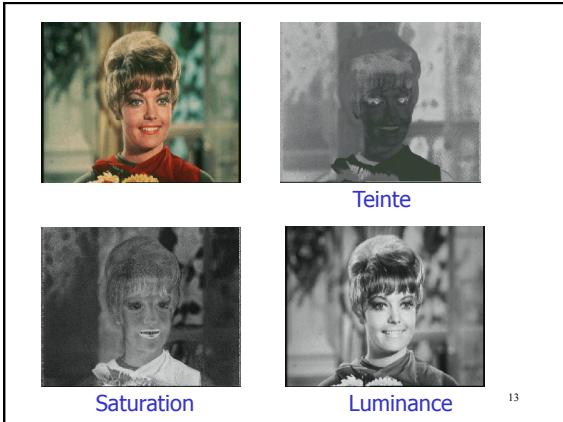


Y

U

V

12



Sensibilité à la saturation :  
Modification de la saturation,  
Teinte et luminance non modifiées

$$S_1 = (S - 100)$$



$$S_1 = (S + 100)$$



14



Sensibilité à la luminance :  
Modification de la luminance,  
Teinte et saturation non modifiées

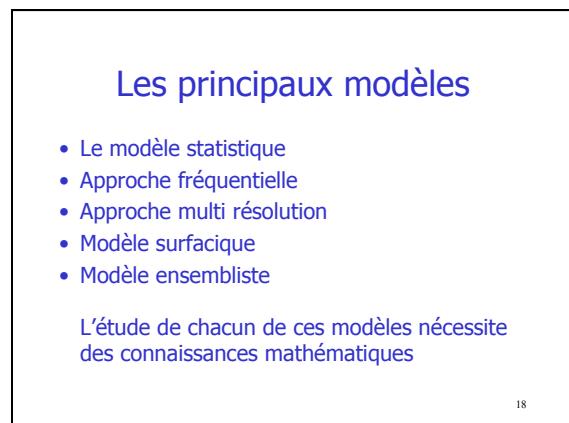
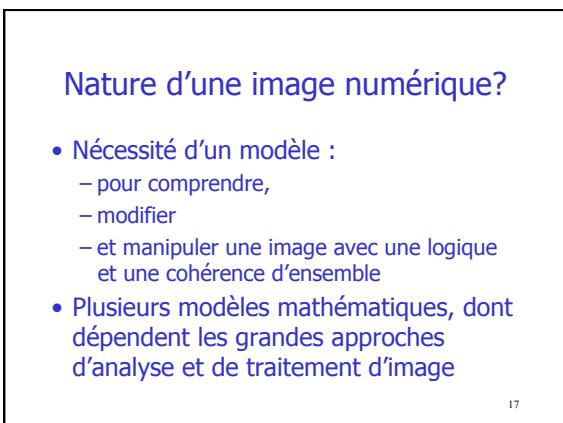
$$L_1 = (L - 80)$$



$$L_2 = (L + 80)$$



16



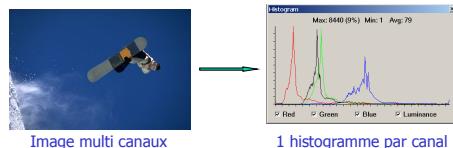
## Le modèle statistique

- Image = réalisation d'un processus d'échantillonnage de l'espace extérieur
- Plusieurs hypothèses possibles
  - Indépendance des valeurs des  $L \times C$  échantillons qui sont autant de réalisations d'**UNE** même **variable aléatoire** (organisation spatiale de l'image non exploitée)
  - Réalisation d'**un champ aléatoire** (ensemble de variables aléatoires pouvant être dépendantes les unes des autres : champs de Markov)

19

## Histogramme

Distribution des valeurs des pixels, indépendamment de leur position  
 $H(i) = \text{card} \{P \in I : I(P)=i\}$



1 histogramme par canal

Fournit une estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire **X** (**X** : niveau de gris, de rouge, de vert ou de bleu d'un pixel de l'image)

20

Histogramme d'une image constitué de quantités parfaitement homogènes en niveaux de gris : Présence de pics

Histogramme d'une image « réelle » : dispersion autour de valeurs moyennes

Modèle classique :

Histogramme = mélange de Gaussiennes

21

- Etant donné un histogramme, comment déterminer son approximation par une mixture de Gaussiennes?

- Minimisation d'erreur de recouvrement (nécessite de connaître le nombre de Gaussiennes)
- Estimation progressive des paramètres des Gaussiennes (en nombre inconnu)

22

## Utilisation d'histogrammes pour l'amélioration d'image

- Objectif : obtenir une image de « meilleure » qualité visuelle (subjectif)
- Exemple : amélioration du contraste d'une image
- A ne pas confondre avec la restauration d'image (suppression des dégradations)

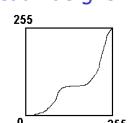
23

### Approche ponctuelle :

- Seule l'information portée par le pixel est utilisée pour le modifier :

Pixels de même niveau de gris  $n_0$  dans image d'origine = Pixels de même niveau de gris  $n_1$  dans image améliorée

- $f$  : **fonction de correspondance** entre les niveaux de gris  $n_0$  de l'image de départ et les niveaux de gris  $n_1$  de l'image améliorée



$$f(n_0) = n_1$$

24

- Chaque méthode d'amélioration est caractérisée par une modification de l'histogramme de l'image
- Tout est dans le choix de la fonction  $f$ 
  - **Modification d'histogramme**  
Choix de  $f$  indépendant de l'image  
Fonction de correspondance définie *a priori*
  - **Spécification d'histogramme**  
 $f$  déterminée en fonction de l'image de départ pour pouvoir aboutir à un histogramme spécifique

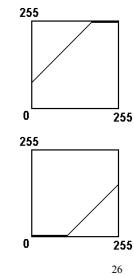
25

## Modifications d'histogramme

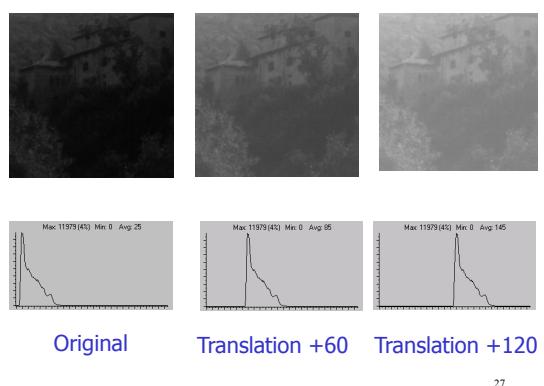
(règle indépendante de l'image à améliorer)

### Translation d'histogramme

Pour faire varier la luminosité de l'image sans en modifier le contraste



Préconisé sur les images à faible dynamique de niveau de gris

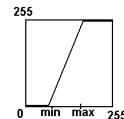


27

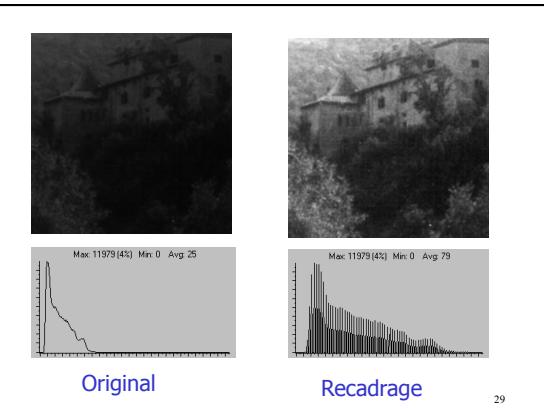
### Recadrage d'histogramme

Pour améliorer la dynamique des images de niveau de gris.

Préconisé sur les images dont l'histogramme d'origine est nul en dehors de l'intervalle  $[min,max]$



28

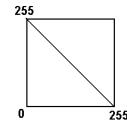


29

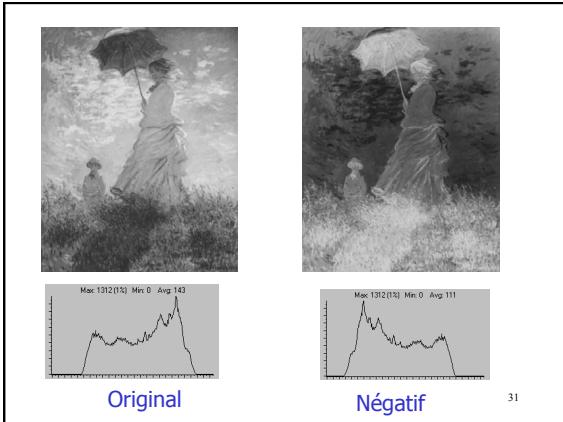
### Inversion d'histogramme

Pour obtenir un négatif de l'image d'origine

Certains détails en blanc sur fond noir peuvent être mieux perçus en noir sur fond blanc ...



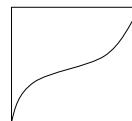
30



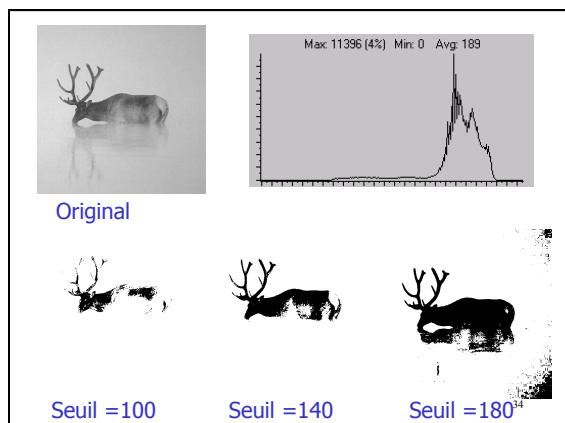
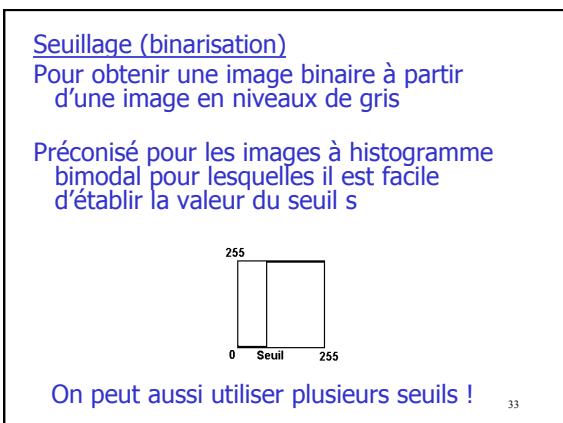
### Modification de dynamique

Pour faire varier les contrastes de façons différentes suivant certains intervalles de niveau de gris

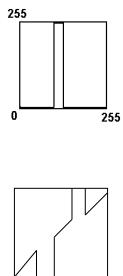
Exemple : Réduire la dynamique des zones sombres et claires et dilater celle des zones intermédiaires



32



- Extraction d'intervalle
  - Pour mettre en évidence un ou plusieurs intervalles de niveaux de gris.
  - Ex : Détailler les objets de niveau de gris caractéristique
  - Possibilité de garder l'image d'origine comme fond de ces « objets »
- 35



### Spécification d'histogramme

Cette fois c'est l'histogramme de l'image après amélioration qui est défini *a priori*

La fonction  $f$  de correspondance dépend donc de l'image et est construite *a posteriori*

36

## Description probabiliste des histogrammes

Niveaux de gris d'une image :  
Réalisation d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$

Histogramme  $H(x)$  d'une image :  
Estimation de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  (après normalisation : /nb\_pixels)

Histogramme cumulé  $C$  :

$C(x)$  nombre de pixels  $P$  ayant une valeur inférieure ou égale à  $x$

Estimation de la fonction de répartition  $F_x$  de  $\mathbf{X}$  définie par  $F_x(x) = \text{proba}(\mathbf{X} < x)$

37

Soit  $\mathbf{Z}$  la variable aléatoire construite à partir de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{Z} = F_x(\mathbf{X})$$

Résultat (théorie des probabilités)  
La variable  $\mathbf{Z}$  possède une densité de probabilité uniforme

Résultat fondamental!

Permet de spécifier n'importe quel histogramme en sortie

38

Soit  $H^*(y)$

l'histogramme souhaité en sortie,  
estimation de la densité de probabilité  
d'une variable aléatoire  $\mathbf{Y}$

Fonction de répartition  $F_Y$  estimée par  
l'histogramme cumulé  $C^*(y)$

$\mathbf{Z} = F_x(\mathbf{X}) = F_Y(\mathbf{Y})$  est la variable aléatoire de  
densité uniforme

donc  $\mathbf{Y} = F_Y^{-1}(F_x(\mathbf{X}))$

Fonction de  
correspondance  $f$   
cherchée

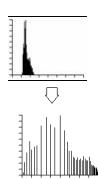
39

## Egalisation d'histogramme

- Méthode de spécification d'histogramme la plus recherchée
- Objectif :  
obtenir une densité de probabilité uniforme  
après amélioration,  
transformer l'histogramme de départ en un  
histogramme plat!
- Idée : Obtenir une réalisation de  $\mathbf{Z} = F_x(\mathbf{X})$   
 $f$  déduite de l'histogramme cumulé de l'image  
de départ

40

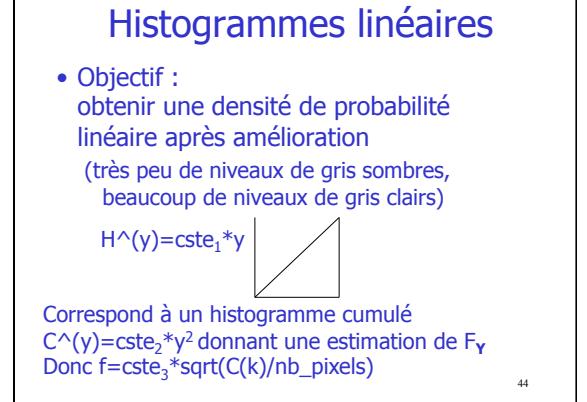
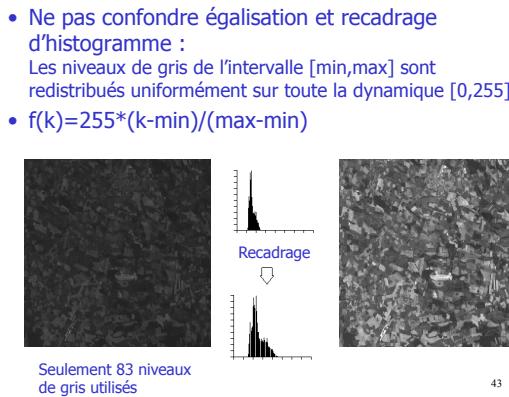
- Redistribue les valeurs entre [0..255]
- Une dynamique plus grande est réservée aux niveaux les plus fréquents
- $f(k) = 255 * (C(k)/\text{nb\_pixels})$



41

- Attention: On obtient rarement la densité de probabilité théorique souhaitée
- Pourquoi?  
La variable aléatoire de départ est discrète et non continue.  
Correspondance de niveaux de gris par blocs

42



- Autres spécifications d'histogrammes :
  - Histogrammes « racine » :  
 $H^*(y) = \text{cste}_1 * \sqrt{y}$   
Par rapport à un histogramme linéaire : plus de niveaux de gris sombres, moins de niveaux de gris clairs
  - Histogrammes « puissance » :  
 $H^*(y) = \text{cste}_1 * \sqrt[3]{y}$   
Par rapport à un histogramme linéaire : moins de niveaux de gris sombres, plus de niveaux de gris clairs
  - etc.

45

## Spécification d'histogramme

- Quel algorithme utiliser en pratique?
- But recherché  $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = F_Y^{-1}(F_X(\mathbf{X}))$ 
  - Avec  $F_Y$  approximé par l'histogramme cumulé cible
  - et  $F_X$  approximé par l'histogramme cumulé de départ

46

- Méthode
  - Balayage de l'histogramme cumulé  $C_x$  de départ avec un indice  $i$
  - Balayage de l'histogramme cumulé cible  $C_y$  avec un indice  $j$
  - Construction de la fonction de correspondance  $f$

47

- **Initialisation**
  - $i=0, j=0$
- **Début**
  - **tantque**  $i$  et  $j$  différents de  $I_{\text{max}}$  **faire**  
    **tantque**  $C_y(j) >= C_x(i)$  **faire**  
        la valeur de  $f$  en  $i$  est  $j$   
         $i++$   
    **fintantque**  
     $j++$   
    **fintantque**  
    **fin**

48

- Inconvénients de ces méthodes d'amélioration par spécification d'histogramme :

- Non prise en compte de la répartition spatiale des niveaux de gris dans l'image
- Un seul histogramme global
- Une même correspondance d'histogramme pour tous les pixels de l'image



49

### Amincissement itératif d'histogramme

- Accroître les différences entre pics de l'histogramme par des transferts de niveaux de gris
- Les pics sont accrus d'un pourcentage de leur voisins
- Amélioration du contraste entre objet et fond uniforme

50

- Possibilité d'utiliser un histogramme restreint au voisinage spatial d'un pixel pour modifier la valeur de **ce** pixel
  - Adaptabilité de la fonction de correspondance au contexte spatial
  - Meilleur contraste qu'avec un histogramme global
  - Plus coûteux
  - Exemple de recadrage adaptatif utilisant des voisinages 31\*31

51