

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaîne

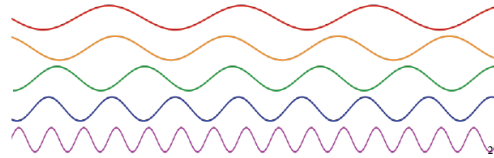
Master Professionnel Image

Université Claude Bernard – Lyon 1

1

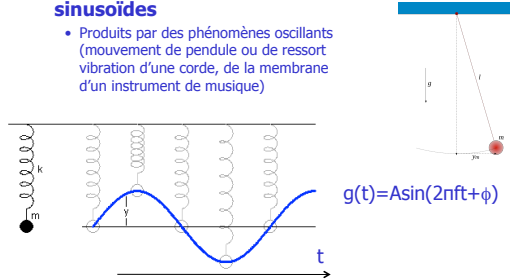
Modèle fréquentiel

- Quittons à présent le modèle statistique
 - où les distributions de probabilité se décomposaient en mixture de Gaussiennes
- ...pour étudier le **modèle fréquentiel**
 - où les signaux se décomposent en **somme de sinusoïdes**



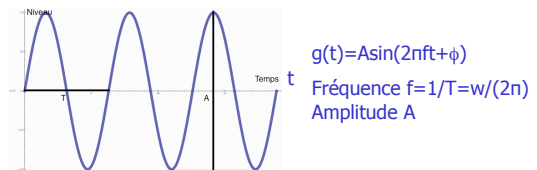
Un peu de traitement du signal

- Signaux analogiques 1D présents dans la nature
 - Le plus simple est le signal constant
 - Il y a ensuite tous les signaux correspondant à des **sinusoïdes**
 - Produits par des phénomènes oscillants (mouvement de pendule ou de ressort vibration d'une corde, de la membrane d'un instrument de musique)



3

- Qu'est-ce qu'une **fréquence**?
 - Nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de temps.
 - Le délai avant que le phénomène périodique se répète est la période

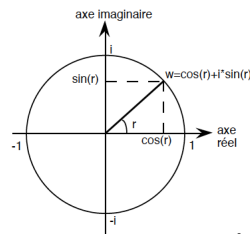


4

Les sinusoïdes

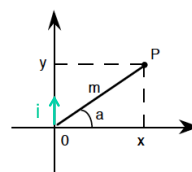
- Fonctions **sinus** et **cosinus**:
 - outils pour suivre les **coordonnées** d'un nombre complexe qui tourne sur un cercle centré sur l'origine et de rayon 1, **en fonction de l'angle** qu'il forme avec l'axe des abscisses

$$\cos(r) = \sin(\pi/2 - r)$$



5

- Les nombres complexes sont l'outil avec lequel on va représenter les sinusoïdes...
- Rappel : Module **m** et argument **a** d'un nombre complexe **P** de partie réelle **x** et de partie imaginaire **y**



Deux manières alternatives de représenter **P**

$$P = x + iy$$

$$P = m e^{ia} \quad (\text{exponentielle complexe})$$

$$\text{Rappel : } i^2 = -1$$

6

- Considérons le complexe **P(t)** suivant

$$\mathbf{P(t)} = m e^{i(2\pi f t + \phi)} \\ = m(\cos(2\pi f t + \phi) + i \sin(2\pi f t + \phi))$$

Quand **t** varie, **P** tourne sur le cercle de centre **O** et de rayon **m** avec la fréquence **f**

- Les sinusoides s'expriment en sommes de 2 exponentielles complexes

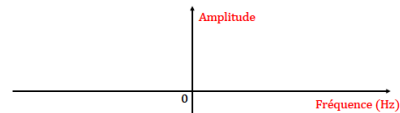
$$\cos(2\pi f t) = \frac{e^{i2\pi f t} + e^{-i2\pi f t}}{2}$$

$$\sin(2\pi f t) = \frac{e^{i2\pi f t} - e^{-i2\pi f t}}{2i}$$

7

Représentation fréquentielle vs temporelle

- Idée de Fourier : Toutes les fonctions peuvent être vues comme des sommes d'exponentielles complexes (ou de sinusoides)
 - Représentation en fonction des fréquences (des sinusoides) contenues dans le signal plutôt qu'en fonction du temps...



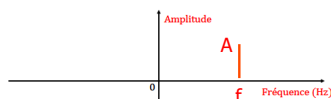
- Sous cet angle là, des propriétés du signal vont apparaître... (utile pour certains traitements)

8

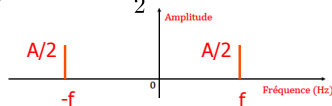
Représentation fréquentielle

- **Spectre d'amplitude**

$$- A e^{i2\pi f t}$$



$$- A \cos(2\pi f t) = A \frac{e^{i2\pi f t} + e^{-i2\pi f t}}{2}$$



- Remarque : les fréquences négatives n'ont aucune réalité physique (juste là pour équilibrer les exp. complexes en sinusoides)

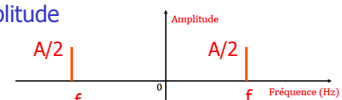
9

Représentation fréquentielle

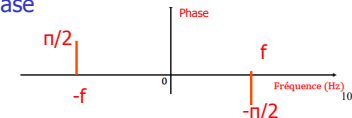
Pour faire le spectre de la fonction sin, on se rend compte que le spectre d'amplitude ne suffit pas... (coefficients complexes avec $i = e^{i\pi/2}$)

$$A \sin(2\pi f t) = \frac{-iAe^{i2\pi f t} + iAe^{-i2\pi f t}}{2}$$

- **Spectre d'amplitude**



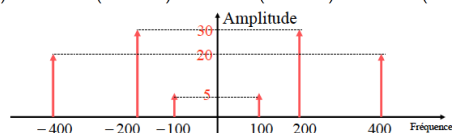
- **Spectre de phase**



Représentation fréquentielle

- Somme de signaux sinusoidaux
 - Leur spectre se construit par superposition des spectres des sinusoides qui composent la somme
- **Spectre de la fonction**

$$s(t) = 10. \cos(2\pi 100t) + 60. \cos(2\pi 200t) + 40. \cos(2\pi 400t)$$



- Le spectre de phase est plat (puisqu'il n'y a que des cos)
- On parle de spectres de « raies »

11

Somme de signaux sinusoidaux

- **Quizz :**
 - La somme de 2 signaux sinusoidaux fait-elle apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre?
 - La somme de 2 signaux sinusoidaux est elle nécessairement périodique?

12

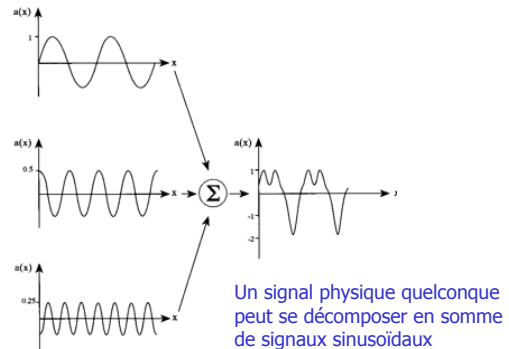
Somme de signaux sinusoïaux

Quizz

- La somme de 2 signaux sinusoïaux fait-elle apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre?
 - NON (superposition des raies des 2 spectres)
- La somme de deux signaux sinusoïaux est elle nécessairement périodique?
 - NON, la périodicité n'est acquise que si il existe un multiple commun de leurs périodes respectives
- Cela nous permet d'entrevoir qu'il n'y a pas que les signaux périodiques qui se décomposent en somme de sinusoïdes!**

13

Décomposition de Fourier



14

- La décomposition en somme de signaux sinusoïaux se fait à l'aide de la **Transformée de Fourier**

Cas des signaux périodiques de période T_0

- Fréquence fondamentale $f_0 = 1/T_0$
- Un tel signal se décompose **de manière unique** en une somme d'exponentielles complexes (signaux sinusoïaux) dont la fréquence est multiple de f_0

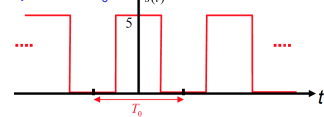
$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

- avec F_n correspondant à une moyenne du signal $s_{T_0}(t)$ sur une période

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{t=a}^{t=a+T_0} s_{T_0}(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

Exemple

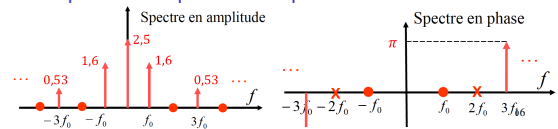
- Signal créneau de période T_0



- On a

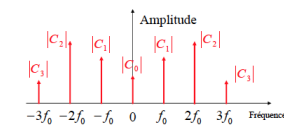
$$C_k = \begin{cases} 2,5 & \text{pour } k = 0 \\ \frac{5}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases}$$

- Spectres d'amplitude et de phase associés

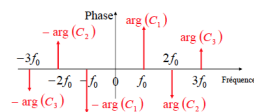


- Dans le cas d'un signal périodique réel (ie non complexe), le **spectre d'amplitude est symétrique**, le **spectre de phase antisymétrique**

Spectre en amplitude



Spectre en phase



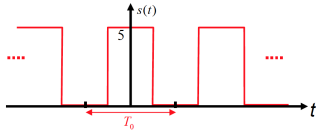
17

- Dans la littérature, la décomposition de Fourier des signaux réels périodiques se fait souvent sur des sinusoïdes directement (sans passer par les exponentielles complexes). Cela est complètement équivalent...

- La décomposition en exponentielles complexes est également valable pour les signaux complexes périodiques.

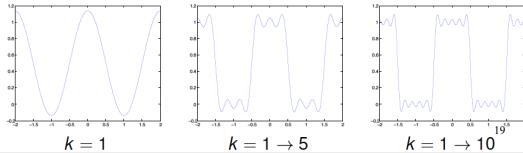
18

- Signal créneau de période T_0



$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi 3f_0 t + \pi) + \frac{2}{5\pi} \cos(2\pi 5f_0 t) + \dots$$

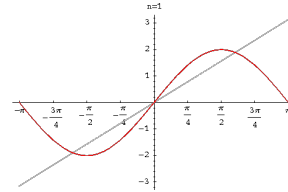
- Evolution de la somme quand on ajoute petit à petit les harmoniques de fréquences de plus en plus grandes (toutes multiples de la fréquence fondamentale f_0)



Exemples

- Décomposition de $f(x)=x$ entre $-\pi$ et π

$$f(x) \sim 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \right)$$

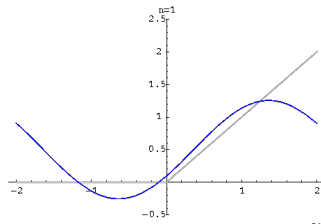


20

Exemples

- Décomposition de la fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]$$



21

Notion d'énergie d'un signal

- Tous les signaux physiques admettent une décomposition de Fourier
 - C'est parce qu'ils sont dotés d'une énergie finie
- Une énergie finie est une condition suffisante pour admettre une décomposition de Fourier
 - Traduction mathématiques : critère de carré intégrabilité

$$E(s_{T_0}) = \frac{1}{T_0} \int_{t=a}^{t=a+T_0} |s_{T_0}(t)|^2 dt$$

- Dans ce cas, chaque coefficient F_n de la décomposition correspond à la projection de la fonction s_{T_0} sur l'ensemble des fonctions $e^{i2\pi n f_0 t}$, $n \in \mathbb{N}$ qui forment une base orthonormée de l'ensemble des fonctions périodiques de période T_0

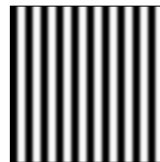
22

Cas des signaux 2D

- Le temps t est remplacé par le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Qu'est-ce que des sinusoides en 2D?
 - On remplace le produit ft par le produit scalaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ où interviennent 2 fréquences f_x et f_y
 - La sinusoides $\sin(2\pi(f_x x + f_y y))$ est périodique
 - de période $\frac{1}{\sqrt{(f_x^2 + f_y^2)}}$
 - dans la direction $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$

23

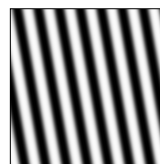
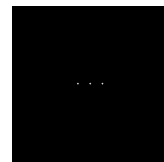
Signal analogique infini :
Sinusoïde $s(x,y)$



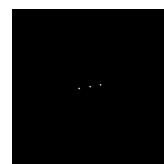
Transformée de Fourier



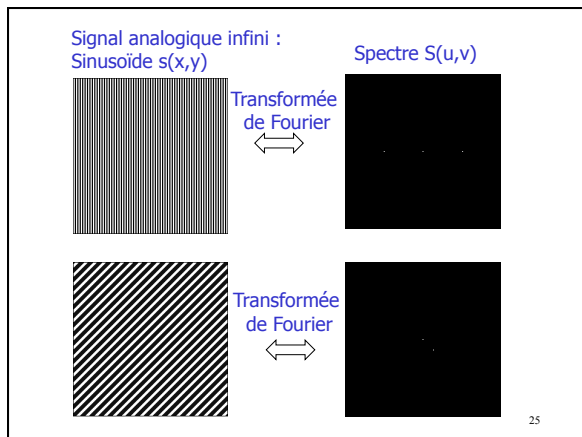
Spectre $S(u,v)$



Transformée de Fourier



24



Cas des signaux 2D

- La décomposition d'un signal 2D se fait de la même manière qu'en 1D, en identifiant la fréquence fondamentale en x et en y
- Décomposition sur la base de fonctions

$$e^{i2\pi(mf_{x_0}x + nf_{y_0}y)}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

26

