Automne 2014

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

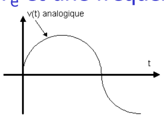
Université Claude Bernard – Lyon 1

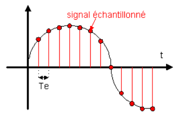
Echantillonnage des signaux (discrétisation)

- La plupart des signaux observés dans la nature sont analogiques
- Or le traitement numérique des signaux se fait sur des valeurs discrètes…
- Il est difficile de traiter par ordinateur des signaux à temps continu en toute généralité
- Quelle représentation adopter?

Echantillonnage des signaux (discrétisation)

- Par souci de simplicité, on échantillonne les signaux à un rythme régulier …
- Echantillonnage régulier caractérisé par une période T_e et une fréquence d'échantillonnage $f_e=1/T_e$





- Problème : on ne récupère qu'une partie du signal de départ…

Echantillonnage des signaux (discrétisation)

- Comment mesurer la perte d'information?
  - Si on connaît certaines caractéristiques fréquentielles du signal de départ et que la fréquence d'échantillonnage est adaptée à ces caractéristiques, alors il n'y a pas de perte!

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

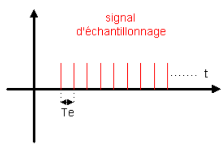
- L'échantillonnage peut-être vu comme une modulation (multiplication) du signal de départ
- Rappel :

$$s(0) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} s(t)\delta(t)dt$$

$$s(nT_e) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} s(t)\delta(t-nT_e)dt$$

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- Echantillonnage : séquence d'impulsions de Dirac modulées en amplitude par le signal s(t)
- Multiplication du signal d'origine par le peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$



Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- On obtient le signal échantillonné $s_e(t)$

$$s_e(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

66

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- Le peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ est une distribution
- La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac temporel de période T_e est un peigne de Dirac fréquentiel de période f_e

$$\Delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

67

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- La transformée de Fourier d'un produit est une convolution
- Donc :

$$S_{f_e}(f) = S(f) \otimes \Delta_{f_e}(f)$$

$$= \int_{\theta=-\infty}^{\theta=+\infty} S(\theta)\Delta_{f_e}(f - \theta)d\theta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(f - nf_e)$$

Exercice :
Comment passe-t-on de cette ligne à la suivante?

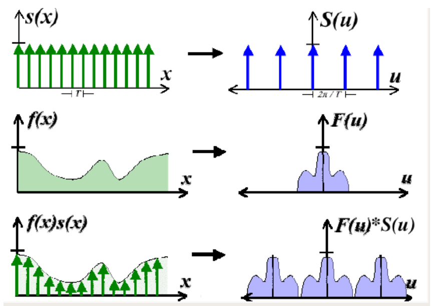
68

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- Effet de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel :
  - $S_{f_e}(f)$ répétition périodique du spectre S(f) de s(t) avant l'échantillonnage
  - $S_{f_e}(f)$ est périodique

69

Echantillonnage



70

Modèle théorique de l'échantillonnage régulier

- Effet de l'échantillonnage
  = Périodisation du spectre d'origine
- Recouvrement du spectre d'origine :
  - Comment retrouver le spectre d'origine S(f) à partir du spectre $S_{fe}(f)$ résultant de l'échantillonnage du signal?
  - On retrouve des copies de S(f) dans $S_{fe}(f)$
  - Ces copies peuvent être isolées dans le cas d'un spectre de départ à bande limitée :

$$S(f) = 0 \text{ pour } |f| > f_{max}$$

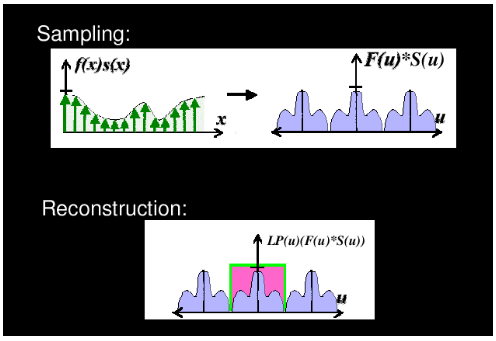
  - Il suffit pour cela que $f_e > 2f_{max}$

71

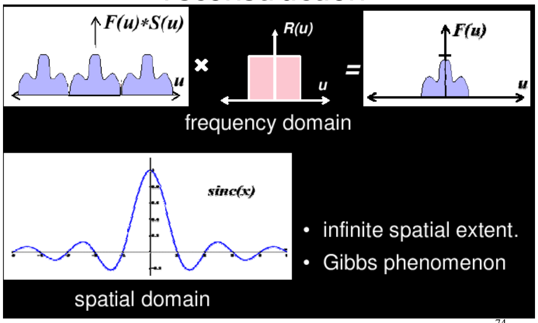
Théorème de Shannon

- Dans le cas où le signal d'origine est à bande limitée (pas de hautes fréquences au delà d'un certain seuil f_{max}), il est possible de revenir, SANS DETERIORATIONS, au signal d'origine.
- Un échantillonnage suffisamment fin est néanmoins nécessaire $f_e > 2f_{max}$ (fréquence de Nyquist)
- Le recouvrement se fait par filtrage idéal entre $-f_e/2$ et $+f_e/2$

Reconstruction



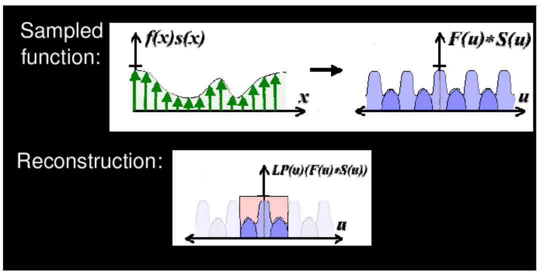
Filtrage idéal pour la reconstruction



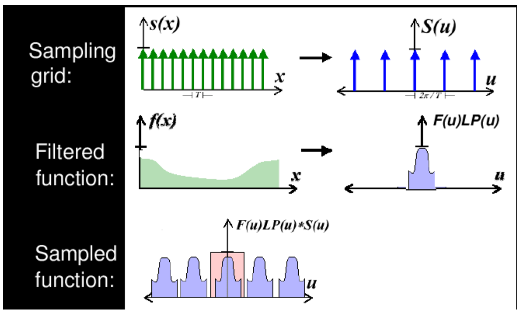
Aliasing

- Dans le cas où les hypothèses du théorème de Shannon ne sont pas vérifiées :
  - Les répétitions périodiques se recouvrent les unes les autres
  - Recouvrement de spectre ou aliasing
  - Impossibilité de reconstruire s(t) de manière exacte à partir de ses échantillons
  - Obtention de la fonction la plus lisse passant par tous les échantillons
- Procéder à un filtre passe-bas **avant** l'échantillonnage

Aliasing



Antialiasing –Filtrage préalable

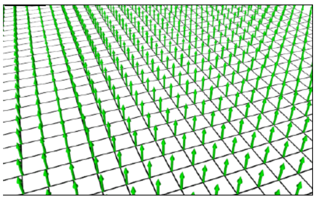


Cas 2D de l'échantillonnage d'une image analogique

- Le résultat demeure le même, les peignes de Dirac étant remplacés par des brosses de Dirac

Echantillonnage

Grille d'échantillonnage



Echantillonnage d'une image