Automne 2014

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard - Lyon I

Le modèle temps-fréquence

- Modèle fréquentiel
  - Modèle qui permet de comprendre beaucoup de choses sur une image
  - Image considérée comme un signal en 2 dimensions
  - Décomposition en somme de signaux sinusoïdaux (composantes fréquentielles), définis par un nombre réduit de paramètres
  - Zones à fort contraste
    - Induisant des hautes fréquences
  - Zones à faible contraste
    - Induisant uniquement des basses fréquences

- Problème inverse
  - Où se trouvent les détails?
  - Quelles portions du signal varient lentement/rapidement?
  - Il faut reconstituer tout le signal pour répondre à ses questions.
- Exemple de fonction localisée dans le temps
  - la fonction marche
  $s(t) = 1/a$ si $-a/2 < t < a/2$, 0 sinon
  De transformée de Fourier $S(f)=\sin(\pi af)/(\pi af)$
- Exemple de fonction localisée en fréquence
  $s(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ fonction localisée en fréquence,
  mais de support infini dans le temps
- Pour avoir un ordre d'idée de la localisation en temps et en fréquence
  - s Gaussienne, transformée de Fourier Gaussienne ($\sigma_t^2\sigma_w^2=1/4$)
- Principe d'incertitude de Heisenberg (origine mécanique quantique)
  - Impossibilité de localiser aussi précisément en temps et en fréquence $\sigma_t^2\sigma_w^2 >= 1/4$

- Plutôt que de regarder un signal entre moins et plus l'infini, on préfère le considérer sur des plages plus localisées.
- La transformée de Fourier n'est efficace que sur les signaux stationnaires (signaux dont le contenu en fréquence ne change pas au cours du temps)

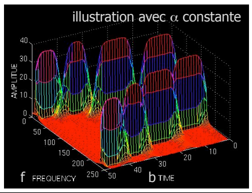
- Jpeg :
  - On localise artificiellement, par décomposition en blocs 8*8
- Autre solution :
  - *« Décomposer »* sur une autre base de fonctions, plus localisées que les sinusoïdes, sans forcément chercher la possibilité de décomposition unique du signal : *Seulement chercher à quantifier dans quelle mesure une fonction g est présente dans le signal analysé s, par projection du signal s sur la fonction g*
  - Exemple :
    - Fonction porte rectangle g(x,d) de largeur d autour de x
    $g^{(x,d)}(t)=1$ pour $x-d/2<t<x+d/2$ ou 0 sinon
    - Si $g^{(x,d)}$ est présente dans la décomposition du signal s, alors le signal est non nul au temps x, pendant une durée d
    - Base de fonctions surdéterminée puisque chaque fonction rectangle peut être représentée par des rectangles moitiés (décomposition non unique)

Décomposition temps-fréquence

- Caractérisation d'un signal par rapport aux fréquences qu'il renferme mais aussi par rapport aux moments où ses fréquences se manifestent
- Transformée de Gabor $G_\alpha^b s(f)$ d'un signal s
  - Transformée de Fourier du signal de départ fenêtré (ie. multiplié) par une Gaussienne de largeur α centrée en b

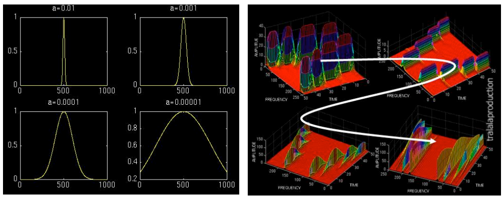
$$g_\alpha^b(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp -(t-b)^2/4\alpha$$

  - Fonctions de base : sinusoïde * gaussienne
    - b=position de la fenêtre
    - sqrt(α)=largeur de la fenêtre
- Transformée surdéterminée



Décomposition temps-fréquence

- Plus la fenêtre est étroite :
  - plus la résolution en temps est bonne mais plus la résolution en fréquence est mauvaise
- Plus la fenêtre est large :
  - plus la résolution en temps est mauvaise mais plus la résolution en fréquence est bonne



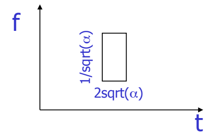
Variation de la taille du fenêtrage

7

- Transformée de Gabor représentation intermédiaire entre temps et fréquence
- Propriété : Pour un signal s de transformée de fourier S

$$G^b_\alpha s(f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp(-ibf) G^f_{1/4\alpha} S(b)$$

- La transformée de Gabor peut s'obtenir à partir de la représentation fréquentielle ou de la représentation temporelle



8

- Pour quelles valeurs de b, f et de α calculer la transformée de Gabor de s?
  - De α dépend la localisation en fréquence, et la localisation temporelle
  - Paver l'espace temps fréquence de manière à offrir une bonne couverture temporelle et une bonne couverture en fréquence
    - Fenêtres étroites pour les hautes fréquences
    - Fenêtres larges pour les basses fréquences
  - Attention : L'information recueillie présente des redondances, puisque les fonctions de base ne sont pas orthogonales

9

Ondelette

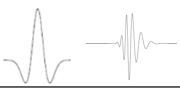
- Terme généralisant la transformée de Gabor
- Ondelette
  - Décomposition du signal global en composantes localisées en temps et en fréquence
  - Versions translatées et dilatées d'une même fonction appelée « ondelette mère »
  - La notion de fréquence est remplacée par le concept d'échelle
- Transformée en ondelettes d'un signal 1D
  - Fonction de 2 variables : le temps et l'échelle (la dilatation)
- Si on recherche les hautes fréquences :
  - Ondelettes fines
- Si on recherche les basses fréquences :
  - Ondelettes larges

10

- Ondelettes :
  - Représentation qui fait simultanément apparaître des informations temporelles et fréquentielles

$$\psi_{e,\rho}(t) = \frac{1}{\sqrt{e}}\psi\left(\frac{t-\rho}{e}\right)$$

  - Ondelette mère : ψ
    - De moyenne nulle
    - Centrée autour de 0
    - D'énergie finie (carré intégrable)
    - Ex : Chapeau Mexicain, Morlet



11

- Transformée en ondelette σ d'un signal s

$$\sigma(e,\rho) = \int s(t)\psi^*_{e,\rho}(t)dt$$

e =échelle ou coefficient de dilatation

ρ=coefficient de translation

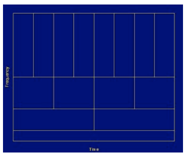
- Couverture du plan temps-fréquence avec des boîtes d'aire constante pour limiter la redondance (multiplication largeur e en temps et hauteur 1/e en fréquence)
- Permet de savoir quand un évènement se produit et comment il se produit avec une incertitude fixée par le choix de l'ondelette mère

12

- Les ondelettes permettent de représenter efficacement un signal s quelconque en peu de coefficients
- Possibilité de recalculer le signal d'origine s par un choix d'ondelettes orthogonales

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{e,\rho} \sigma(e,\rho)\psi_{e,\rho}(t)\frac{de d\rho}{e^2}$$

- Exemple :
  - Transformation en ondelettes diadiques
  - e et ρ prennent les valeurs discrètes suivantes :
    - $e=2^i$
    - $\rho=2^i j$ pour i donné



Comment produire une base d'ondelettes diadiques orthogonales?

- Choix d'une fonction d'échelle, qui permet de connaître le signal s à une résolution donnée $e=2^i$
- La famille d'ondelettes est la famille de fonctions permettant d'exprimer la différence entre le signal s vu à une résolution donnée et le même signal vu à la résolution moitié

On effectue ainsi une analyse multirésolution du signal

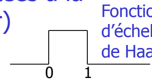
Multirésolution

Fonction d'échelle Φ:

Combinaison linéaire de ses translatées à la résolution 2 fois plus fine (ex : Haar)

$$\Phi(t) = \sum a_n 2\Phi(2t-n)$$

Fonction d'échelle de Haar

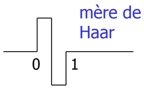


$$\Phi(t) = \Phi(2t) + \Phi(2t-1)$$

Permet de définir une ondelette

$$\psi(t) = 2\sum d_n 2\Phi(2t-n)$$

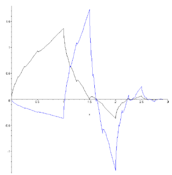
Ondelette mère de Haar



$$\psi(t) = \Phi(2t) - \Phi(2t-1)$$

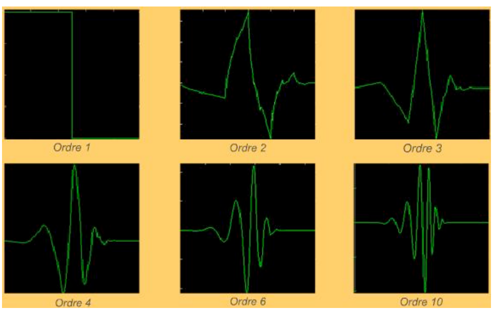
Ondelettes de Daubecchies

- Ondelettes orthogonales d'ordre s=2N-1
  - Profil de la fonction d'échelle (filtre passe-bas) : a[0], a[1], .. , a[s]
  - Coefficients de l'ondelette associée (filtre passe-haut) : d[0], d[1], .. , d[s]
  - Avec $d[n]=(-1)^n a[n]$



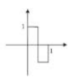
Fonction d'échelle en brun et ondelette mère associée en bleu

Ondelettes de Daubecchies



Ondelettes de Daubecchies

- Haar = ondelette de Daubecchies d'ordre 1
  - Profil de la fonction d'échelle (filtre passe-bas) : a[0]=1, a[1]=1
  - Coefficients de l'ondelette associée (filtre passe-haut) : d[0]=1, d[1]=-1



Ondelettes de Daubecchies

- D4 = ondelette de Daubecchies d'ordre 3
  - Profil de la fonction d'échelle (filtre passe-bas) : a[0]=(1+sqrt(3))/8, a[1]=(3+sqrt(3))/8, a[2]=(3-sqrt(3))/8, a[3]=(1-sqrt(3))/8
  - Coefficients de l'ondelette associée (filtre passe-haut) : d[0]=a[3], d[1]=-a[2], d[2]=a[1], d[3]=-a[0]

Etant donné un signal on peut calculer son approximation par la fonction d'échelle (moyenne)

Les coefficients d'ondelettes contiennent l'information à ajouter pour retrouver le signal à une résolution 2 fois plus fine

Les ondelettes codent la différence d'information entre 2 interprétations successives du signal à une résolution double l'une de l'autre

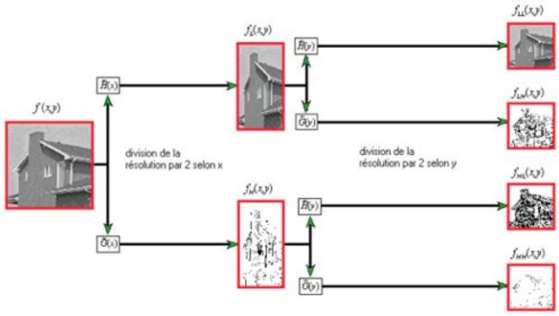
Algorithme :

On part de la résolution la plus fine, puis séparation en 2 composantes :

- allure générale
- détails

Et ainsi de suite

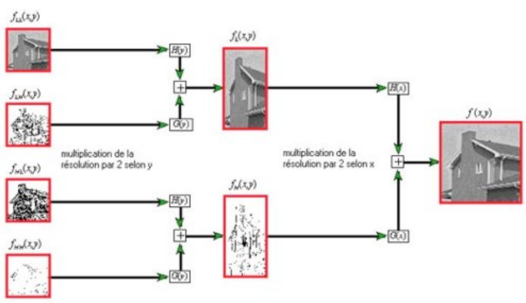
Compression



Intérêt pour la transmission progressive

Fichier compressé

Décompression



Intérêt pour la transmission progressive