Automne 2014

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard – Lyon 1

Décomposition de Fourier

- **Que devient Fourier dans le cas des signaux non périodiques?**
- Un signal non périodique peut être vu comme un signal périodique de période infinie…

$$T_0 \rightarrow \infty$$

$$f_0 \rightarrow 0$$

- Dans la représentation fréquentielle, les raies du spectre se rapprochent, jusqu'à se toucher les unes les autres
  - Passage d'une somme discrète à une intégrale

Décomposition de Fourier

- La décomposition de Fourier se généralise aux signaux non périodiques

$$s(t) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} S(f)e^{i2\pi ft}df$$

- Les coefficients F_n sont remplacés par une fonction S(f)

$$S(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

Dualité des représentations Energie d'un signal

- s(t) et S(f) sont deux représentations duales d'un même signal dans des espaces différents (l'espace temporel ou l'espace fréquentiel respectivement)
- La décomposition de Fourier est possible pour tous les signaux d'énergie finie (critère mathématiques de carré-intégrabilité)

$$E(s) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{f=-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df < +\infty$$

Théorème de Parseval (conservation de l'énergie entre modèle fréquentiel et modèle temporel)

Décomposition de Fourier

- Le formalisme dans le cas périodique est complètement cohérent avec le formalisme plus général
  - Rappel : dans le cas périodique, seules les fréquences multiples de f0 sont présentes dans le spectre

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i2\pi nf_0t}$$

  - Dans le cas périodique, S(f) est donc une somme discrète d'impulsions de Dirac centrées sur les fréquences $f=nf_0$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(f - nf_0)$$

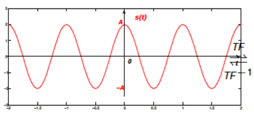
Exemple

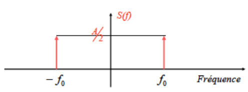
Transformée de Fourier de la fonction

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

On a

$$S(f) = \frac{A}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$$





Introduction aux distributions

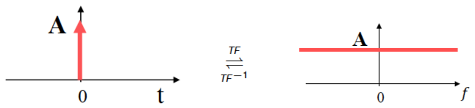
– Au fait : qu'est-ce qu'une impulsion de Dirac?

Distributions et impulsions de Dirac

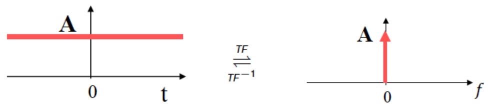
- L'impulsion de Dirac n'est pas une fonction, mais une distribution
  – Définie pour certaines valeurs de t
  $$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$$
  – Infinie pour d'autres
  $$\delta(0) = +\infty$$
  – Son intégrale est malgré tout définie
  $$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$
  – Impulsion de Dirac : limite d'une famille de fonctions
  $$C_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{pour } -\epsilon/2 < t < +\epsilon/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac

- S(f) =1



- Inversement, la transformée de Fourier d'un signal constant est une impulsion de Dirac dans le domaine fréquentiel



Distributions et impulsions de Dirac

- En travaillant sur des distributions et non plus seulement des fonctions, on obtient un **cadre unifié plus général** qui intègre à la fois les cadres discrets et continus

- Outils permettant la modélisation de concepts difficiles à appréhender sinon, comme l'échantillonnage

Propriété de Dirac et échantillonnage

- Une valeur à un instant donné τ d'un signal peut être obtenue par intégration

- En effet
$$s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$$
$$s(t)\delta(t-\tau) = s(\tau)\delta(t-\tau)$$

donc
$$\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} s(t)\delta(t-\tau)dt = s(\tau)$$

Intérêt du modèle fréquentiel

- Permet une description plus compacte des signaux périodiques
- L'obtention d'un spectre fréquentiel permet également de visualiser certaines caractéristiques qui n'apparaissent que difficilement sur la version temporelle
  – La présence de détails implique l'apparition de hautes fréquences
- Permet de comprendre et d'appréhender un signal avec une logique différente, parfois plus intuitive…

Notion de filtre linéaire

- Considérons un système H
  - agissant sur une signal entrant s(t) de TF S(f)
  - produisant en sortie un signal m(t) de TF M(f)
- H est un système linéaire si son action se modélise par une multiplication dans le domaine fréquentiel

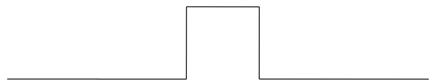
  M(f) =S(f) . H(f)

  H(f) : fonction de transfert caractérisant le filtre
- Effet sur le spectre

  Les modules se multiplient, les arguments s'ajoutent

Notion de filtre linéaire

- Exemple d'un filtre passe-bas idéal
  - Nettoyage des hautes fréquences avec un filtre passe-bas
  - Fonction de transfert de type porte



  - Permet d'obtenir un signal lissé

Filtrage

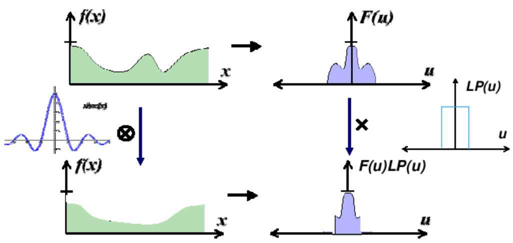
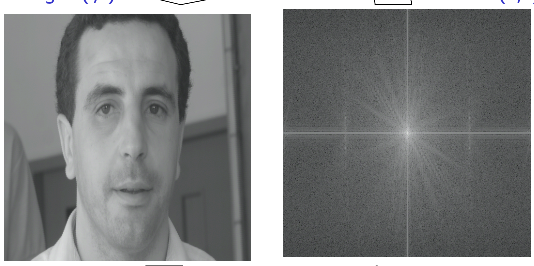


Image x(l,c)

TF-1

Fourier X(u,v)



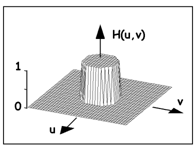
TF

Filtrage linéaire

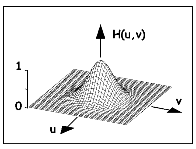
$\boldsymbol{Z(u,v)}$=H(u,v)X(u,v)

Filtrage passe Bas :

accentuations des basses fréquences



Filtre Idéal



Filtre Gaussien

Filtre idéal

TF^{-1}

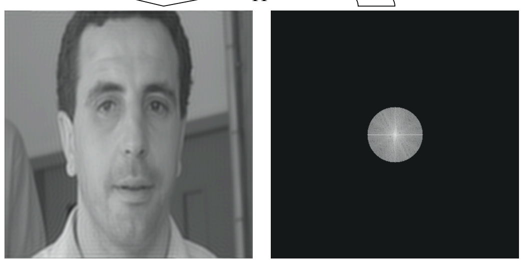


Image x(l,c) filtrée

Fourier H(u,v)X(u,v)

Filtre idéal

TF^{-1}

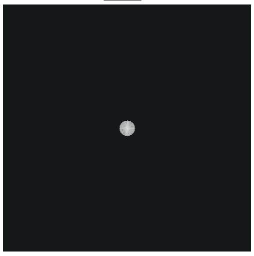


Image x(l,c) filtrée

Fourier H(u,v)X(u,v)

Filtre idéal

Filtre Gaussien

TF^{-1}

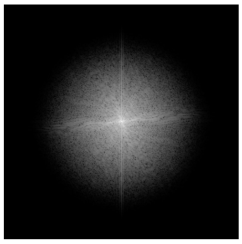


Image x(l,c) filtrée

Fourier H(u,v)X(u,v)

Filtre Gaussien

TF^{-1}

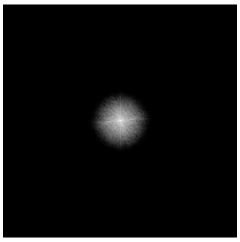


Image x(l,c) filtrée

Fourier H(u,v)X(u,v)

Filtre Gaussien

Réponse impulsionnelle et convolution

- L'action des filtres est bien définie en fréquence, par une simple multiplication
- Quand est-il dans le domaine temporel?
- Faire une multiplication dans le domaine fréquentiel revient à faire une convolution dans le temporel, avec la réponse impulsionnelle h(t) du filtre

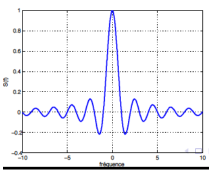
$$c(t) = h(t) \otimes s(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau$$

  - h(t) est la transformée de Fourier inverse de H(f)
  - Il s'agit également de la réponse de H à un Dirac
  - L'impulsion de Dirac est donc l'élément neutre du produit de convolution $h(t) \otimes \delta(t) = h(t)$

Réponse impulsionnelle associée à un filtre de type marche (filtre idéal)

- Réponse impulsionnelle associée au filtre idéal entre $-f_e/2$ et $+f_e/2$

$$sinc_{f_e}(t) = \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi f_e t}$$



- Le filtrage idéal est plus facile à faire dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel

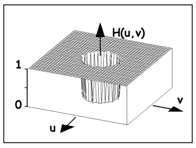
Réponse impulsionnelle associée à un filtre Gaussien

- La transformée de Fourier d'une Gaussienne étant une Gaussienne, la réponse impulsionnelle d'un filtre Gaussien d'écart type f_e est une Gaussienne d'écart type $1/f_e$

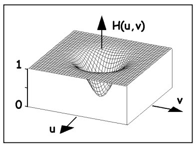
Filtrage passe-haut

Z(u,v)=H(u,v)X(u,v)

Accentuations des hautes fréquences



Filtre Idéal



Filtre Gaussien

Filtre idéal

TF^{-1}

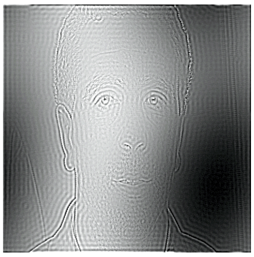
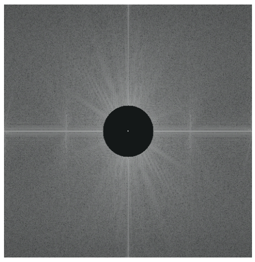


Image x(l,c) filtrée



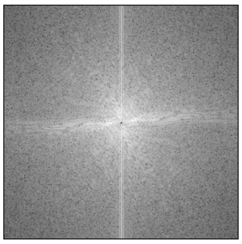
Fourier H(u,v)X(u,v)

(Filtre Idéal)

Filtre Gaussien

TF^{-1}

Image x(l,c) filtrée

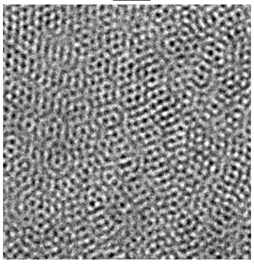


Fourier H(u,v)X(u,v)

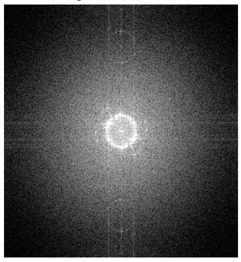
(Filtre Idéal)

Déconvolution

TF



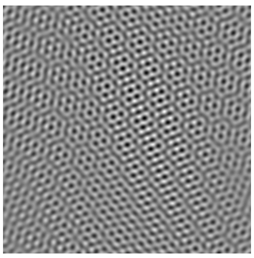
x(l,c) Image Microscopie MEB



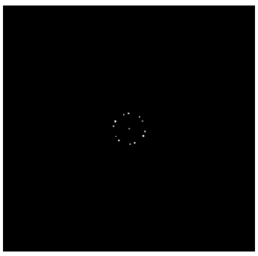
X(u,v)

Superposition de plusieurs images identiques par réfraction de signaux déphasés sur le capteur

TF^{-1}



x(l,c) restaurée

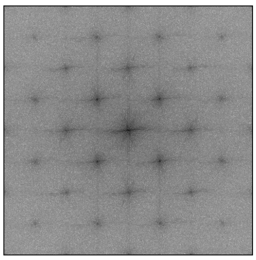


X(u,v) filtrée

On ne conserve que les pics principaux (6 pics)

TF

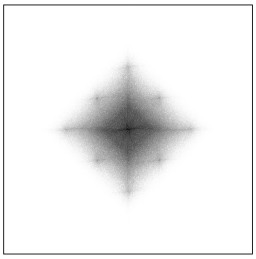
x(l,c) tramée



X(u,v)

TF-1

x(u,v) détramée



X(u,v) filtrée (Passe Bas)