Automne 2008

Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard - Lyon I

Quaternions

- Nombres complexes de longueur 1
  - Permettent de modéliser les rotations autour de (0,0) par une simple multiplication
  - Caractérisés par 2 nombres réels : partie réelle, partie imaginaire
- Comment construire un type de nombre permettant d'obtenir des résultats similaires en 3D?

- Un triplet de nombres réels ne suffit pas, il faut un quadruplet!
  - Un scalaire
  - Et un vecteur imaginaire pur
- Forme d'un quaternion

  $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$
- Propriétés

  $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1$

- Attention le produit entre quaternion n'est pas toujours commutatif!

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

  – Cohérent avec le fait que les rotations ne sont pas commutatives!

$Q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$

$Q'=a'+b'\mathbf{i}+c'\mathbf{j}+d'\mathbf{k}$

$Q.Q'=(aa'-(bb'+cc'+dd'))$
$+(ab'+ba')\mathbf{i}+(ac'+ca')\mathbf{j}+(ad'+da')\mathbf{k}$
$+(cd'-c'd)\mathbf{i}+(db'-d'b)\mathbf{j}+(bc'-cb')\mathbf{k}$

Si on note $Q=a+\mathbf{V}$ et $Q'=a'+\mathbf{V'}$

On obtient

$Q.Q'=aa'-V{\cdot}V'$
$+(ab'+ba')\mathbf{i}+(ac'+ca')\mathbf{j}+(ad'+da')\mathbf{k}+$
$+\mathbf{V}\wedge\mathbf{V'}$

où on retrouve les produits scalaire et vectoriels des 2 parties vectorielles!

– Conjugué d'un quaternion :

$Q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}=a+\mathbf{V}$

$Q^*=a-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}=a-\mathbf{V}$

– Permet d'obtenir la norme d'un quaternion par $||Q||^2=Q.Q^*=a^2+\mathbf{V}^2$

– Les quaternions de norme 1 sont dits unitaires

- Inverse d'un quaternion
  $Q^{-1}=Q^*/||Q||^2$
- Propriétés
  - $Q^{**}=Q$
  - $(Q+Q')^*=Q^*+Q'^*$
  - $(Q.Q')^*=Q'^*.Q^*$
  - $(Q.Q')^{-1}=Q'^{-1}.\ Q^{-1}$

- C'est bien beau toutes ces formules mathématiques, mais quel rapport avec les rotations 3D et plus généralement avec les similitudes?
- Etant donné un quaternion Q=a+**V** de norme q
  - On considère l'angle Φ t. que a/q=cos Φ et ||**V**||/q=sin Φ
  - Alors Q=q(cosΦ+sinΦ**N**) où **N** est le vecteur unitaire **V**/q

---

- La rotation d'un vecteur **U** d'angle 2Φ autour de l'axe porté par **N** s'exprime par le produit de quaternions suivants :

  U' =(cosΦ+sinΦ**N**).(0+**U**). (cosΦ-sinΦ**N**)

  =(cosΦ+sinΦ**N**).(0+**U**). (cosΦ+sinΦ**N**)*
- On dit que le quaternion cos Φ+sin Φ**N** représente la rotation R[**N**,2Φ]
- Pratique pour combiner les rotations
  - Si on applique la rotation R1 de quaternion Q1 puis R2 de quaternion Q2 on obtient une rotation représentée par Q2Q1

- Pourquoi utiliser les quaternions?
  - Les opérations sont numériquement plus stables que sur les matrices
  - Utiles pour faire de l'interpolation entre 2 rotations ☺

Coût mémoire

- Espace mémoire nécessaire
  - Matrice de rotation 9
  - Quaternion 4
  - Axe et angle 4*

* Note : la représentation sous forme d'angle et d'axe peut être stockée dans 3 emplacements seulement en multipliant l'axe de rotation par l'angle de rotation ; néanmoins, avant de l'utiliser, il faut récupérer le vecteur unitaire et l'angle en renormalisant, ce qui coûte des opérations mathématiques supplémentaires.

source http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions_et_rotation_dans_l'espace

---

Performance

- Comparaison de performances de la composition de rotations

Méthode	Multiplications	Additions et soustractions	Nombre total d'opérations
Matrices de rotation	27	18	45
Quaternions	16	12	28

Comparaison de performances de la rotation de vecteurs

Méthode	Multiplications	Additions et soustractions	sin et cos	Nombre total d'opérations
Matrice de rotation	9	6	0	15
Quaternions	21	18	0	39
Axe et angle	23	16	2	41