Automne 2014

Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard – Lyon 1

Outils de description d'une forme

- Description par les contours (code de Freeman)
- Descriptions statistiques
  - Il existe de nombreuses descriptions statistiques des régions qui peuvent être calculées au cours de la segmentation
  - Ces descriptions peuvent permettre de comparer des régions entre elles

- Ces descriptions statistiques peuvent être réparties dans 2 classes :
  - **Descriptions géométriques :** périmètre, aire, élongation, compacité, solidité, moments d'inertie
  - **Descriptions topologiques :** connectivité et nombre d'Euler

- **1-Descriptions géométriques**

- **Élongation (ou excentricité)**
  longueur d'une corde maximale / longueur d'une corde localement minimale
  - L'élongation peut également être exprimée en utilisant des moments d'inerties
- **Compacité**
  Aire / $(\text{périmètre})^2$
- **Solidité**
  Aire / Aire de l'enveloppe convexe

- **1-Descriptions géométriques**

Compacité	0.91	0.84	0.64	0.14
Elongation	1.00	1.60	2.02	1.30
Solidité	0.98	0.98	0.87	0.57

- **Moments d'inertie**
  Le (ij)ème moment centré discret m_{ij} d'une région est défini par

$$m_{ij}=\Sigma\,(x-\bar{x})^i(y-\bar{y})^j$$

  - Somme étendue à tous les points de coordonnées (x,y) contenus dans la région
  - $(\bar{x},\bar{y})$ est le centre de gravité de la région

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x \qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\Sigma y$$

  - *n* est le nombre total de points contenus dans la région (= mesure de son aire)

– A partir des moments centrés, il est possible de former de nouveaux moments invariants aux modifications :
  - d'échelle,
  - d'orientation
  - et de position de l'objet dans l'image
  - (mais pas aux changements de points de vue!)

– L'invariance des descriptions statistiques est indispensable pour pouvoir identifier un même objet dans plusieurs images

7

– Exemple :
  - Centre de gravité variant avec la position de l'objet
  - Aire constante indépendamment de sa position

– Il est préférable de se baser sur l'aire plutôt que sur la position du centre de gravité quand on compare entre elles des régions

– En revanche :
  - Aire sensible aux changements d'échelle (ex: variation de distance entre objet et caméra)

8

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M_1} &= m_{20} + m_{02}\\
\mathbf{M_2} &= (m_{20} + m_{02})^2 + 4m_{11}^2\\
\mathbf{M_3} &= (m_{30} - 3m_{12})^2 + (3m_{21} - m_{03})^2\\
\mathbf{M_4} &= (m_{30} + m_{12})^2 + (m_{21} + m_{03})^2\\
\mathbf{M_5} &= (m_{30} - 3m_{12})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2]\\
&\quad + (3m_{21} - m_{03})(m_{03} + m_{21})[3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2]\\
\mathbf{M_6} &= (m_{20} + m_{02})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2]\\
&\quad + 4m_{11}(m_{30} + m_{12})(m_{03} + m_{21})\\
\mathbf{M_7} &= (3m_{21} - m_{03})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2]\\
&\quad + (m_{30} - 3m_{12})(m_{03} + m_{21})[3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2]
\end{aligned}
$$

– Tous ces moments d'inertie sont invariants par rapport à l'échelle, la position et l'orientation de la région dans l'image

9

– L'excentricité peut être calculée en utilisant les moments d'inertie :

$$
\textbf{Eccentricity} = \frac{m_{20} + m_{02} + \mathrm{sqrt}((m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2)}{m_{20} + m_{02} - \mathrm{sqrt}((m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2)}
$$

10

2- Invariants topologiques

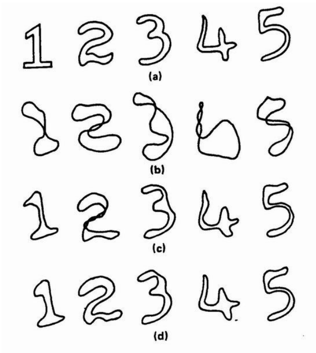
- Connectivité :
  Nombre de parties composant une région
- Nombre d'Euler :
  – Pour une région connexe :
    f-a+s=1 - Nombre de trous
  – Pour une région composée de plusieurs parties :
    Nombre de parties - Nombre de trous

11

- Descriptions statistiques :
  = description incomplète des régions
  = un outil de comparaison précieux pour écarter les faux appariement
  =souvent utilisées en reconnaissance de forme

12

- **Description par les contours et coefficients de Fourier**
- Contour fermé d'une région
  = séquence de N points de contours
  $P_i=(x_i,y_i)$, i=0, .. , N-1
- Cette suite de points permet de définir une **suite périodique de période N** de nombres complexes z_j
- Considérons la transformée de Fourier Z_j de cette suite et conservons en uniquement les $p \le n$ premiers coefficients $Z_0, Z_1, .. , Z_{p-1}$
- La transformée inverse correspond à une **approximation du contour original**



Approximation de Fourier : (a) original, (b) 5 harmoniques, (c) 10 harmoniques (d) 15 harmoniques (EL Brill 1969)

- Sensibilité à l'échantillonnage
  - ex : fonction de la courbure
- En cas de changement d'échelle :
  - multiplication par un scalaire
- En cas de translation :
  $g(x)=f(x+d)$ alors $G(f)=e^{i2\pi fd}F(f)$
- En cas de rotation autour de (0,0)
  - multiplication par $e^{i\alpha}$