Automne 2014

Modèles mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard - Lyon I

Approximation d'une fonction par une mixture de Gaussiennes

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x)$$

$$(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

- Les paramètres des densités f_i sont inconnus ainsi que les coefficients α_i
- Utile pour modéliser un histogramme
  - Le nombre de densités est prédéterminé en fonction du nombre de modes de la fonction
- Egalement valable en dimension quelconque…

- Cas où chaque densité f_i est une variable γ_{m,σ^2} aléatoire de loi Gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (moyenne et variance inconnues)
- La densité du mélange s'écrit

$$\sum_{j=1}^{J} \alpha(j)\gamma_{m(j),\sigma(j)^2}(x) = \sum_{j=1}^{J} \frac{\alpha(j)}{\sqrt{2\pi\sigma(j)^2}} \exp\left[-\frac{(x-m(j))^2}{2\sigma(j)^2}\right]$$

$$\alpha_j \geqslant 0, \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_J = 1$$

- Possibilité de représenter les α_i les m_i et les σ_i de manière vectorielle (on notera θ l'ensemble de ces paramètres)

- Estimation de toutes ces quantités θ à la vue de n observations
  - Mesures $x_1, \ldots, x_n$
  - Réalisations de la variable aléatoire X de densité

$$f(x;\theta) = \sum_{j=1}^{J} \alpha(j)\gamma_{m(j),\sigma(j)^2}(x)$$

  - On introduit également la variable Z, variable aléatoire discrète à valeur dans $\{1, \ldots, J\}$ désignant le mode j auquel est attaché chaque observation

$$\mathcal{L}(Z) = \sum_{j=1}^{J} \alpha(j)\delta_j \qquad j = 1, \ldots, J, \quad \mathcal{L}(X|Z=j) = \mathcal{N}(m(j), \sigma(j)^2)$$

$g(z;\theta)$: densité au point z de la loi Z

$h(x,z;\theta)$: densité au point (x,z) de la loi (X,Z)

$$h(x,j;\theta) = \alpha(j)\gamma_{m(j),\sigma(j)^2}(x)\mathbf{1}_{\{1,\ldots,J\}}(j)$$

- 1[er] cas (irréaliste): Supposons que l'on observe simultanément la réalisation de X et de Z
  - Estimation facile des paramètres inconnus
  - Log-vraisemblance du système complet (ie des observations $(X_1, Z_1, \ldots, X_n, Z_n)$)

$$\begin{aligned} L(\overline{X}, \overline{Z}, \theta) &= \ln \prod_{i=1}^{n} h(X_i, Z_i; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\ln \alpha(Z_i) + \ln \gamma_{m(Z_i),\sigma(Z_i)^2}(X_i)] \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln \alpha(Z_i) - \ln(\sigma(Z_i)^2) - \frac{(X_i - m(Z_i))^2}{\sigma(Z_i)^2}\right] \end{aligned}$$

elle doit être maximisée!

- 1[er] cas (irréaliste): Supposons que l'on observe simultanément la réalisation de X et de Z
  - En notant $A_j = \{i = 1, \ldots, n, \ Z_i = j\}$ et $C_j = \mathrm{card}(A_j)$ on obtient

$$L(\overline{X}, \overline{Z}, \theta) = \sum_{j=1}^{J} C_j \ln \alpha(j) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{i \in A_j} \ln \gamma_{m(j),\sigma(j)^2}(X_i)$$

- Résultat important
  - La log-vraisemblance est maximisée pour les paramètres suivants

$$\alpha(j) = \frac{C_j}{n}, \quad m(j) = \frac{1}{C_j}\sum_{i \in A_j} X_i \quad et \quad \sigma(j)^2 = \frac{1}{C_j}\sum_{i \in A_j}(X_i - m(j))^2$$

Algorithme EM

- Comment faire dans le cas pratique où on observe uniquement les x_i?
  - On va faire des hypothèses θ_k sur la valeur des paramètres θ, et les raffiner petit à petit
  - On va remplacer la log-vraisemblance totale par sa moyenne (son espérance)
    - La moyenne est faite en utilisant θ_k pour estimer la densité de probabilité de chacune des valeurs possibles des z_i
- Log-vraisemblance conditionnelle des observations (sous la loi de paramètre θ_k)

$$L_c(\overline{X};\theta,\theta_k) = \mathbb{E}(L(\overline{X},\overline{Z};\theta)|\overline{X};\theta_k) = \sum_{i=1}^{n}\int g(z|X=X_i;\theta_k)\ln h(X_i,z;\theta)\,dz$$

Etant donné la ième observation x_i,
on regarde la probabilité de chacun des z_i
auquel il aurait du être associé…

Algorithme EM

- Répétition successive de deux étapes consécutives
  - E(xpectation) : étant donnée une valeur θ_k des paramètres, on calcule la log-vraisemblance conditionnelle des observations $L_c(\overline{X};\theta,\theta_k)$
  - M(aximization) : on choisit θ_{k+1} pour maximiser $L_c(\overline{X};\theta,\theta_k)$
- Il ne manque plus que l'expression de la loi de Z sachant X

$$g(z|X=x;\theta) = \frac{h(x,z;\theta)}{f(x;\theta)} = \frac{\alpha(z)\gamma_{m(z),\sigma(z)^2}(x)}{\sum_{j=1}^{J}\alpha(j)\gamma_{m(j),\sigma(j)^2}(x)}\mathbf{1}_{\{1,\ldots,J\}}(z)$$

Algorithme EM

- On obtient donc :

$$\begin{aligned} L_c(\overline{X};\theta,\theta_k) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n} g(j|X=X_i;\theta_k)\right)\ln\alpha(j) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J}\left[\ln(\sigma(j)^2) + \frac{(X_i-m(j))^2}{\sigma(j)^2}\right] g(j|X=X_i;\theta_k) \end{aligned}$$

- Etape d'estimation de θ_{k+1} (Maximisation)

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}(j) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(j|X=X_i;\theta_k) \\ m_{k+1}(j) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i g(j|X=X_i;\theta_k)}{\sum_{i=1}^{n} g(j|X=X_i;\theta_k)} \\ \sigma_{k+1}(j)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_{k+1})^2 g(j|X=X_i;\theta_k)}{\sum_{i=1}^{n} g(j|X=X_i;\theta_k)} \end{aligned}$$

Algorithme EM

- Pourquoi ca marche?
  - On peut montrer que la (log-)vraisemblance est croissante le long de l'algorithme ☺

$$L(\overline{X};\theta_{k+1}) \geqslant L(\overline{X};\theta_k)$$

- Attention!
  - Il peut exister des maximas locaux qui vont piéger l'algorithme

Algorithme EM

- Récapitulatif de l'algorithme :
  - Entrées : $x_1,\ldots,x_n$ et des valeurs initiales des paramètres
  - A l'étape k, on calcule :
    - 3 vecteurs : $\alpha_k = (\alpha_k(1),\ldots,\alpha_k(J))$
      $m_k = (m_k(1),\ldots,m_k(J))$
      $v_k = (v_k(1),\ldots,v_k(J))$ Variances
    - 1 matrice H de taille n*J

$$H_{ij}^{(k)} = \frac{\alpha_k(j)\gamma_{m_k(j),v_k(j)}(X_i)}{\sum_{l=1}^{J}\alpha_k(l)\gamma_{m_k(l),v_k(l)}(X_i)}$$

Algorithme EM

- Passage à l'étape k+1

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}(j) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_{ij}^{(k)} \\ m_{k+1}(j) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i H_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} H_{ij}^{(k)}} \\ v_{k+1}(j) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_j)^2 H_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} H_{ij}^{(k)}} \end{aligned}$$

Filtre médian

- Corrige le niveau de gris d'un pixel si celui-ci est très différent des niveaux voisins

12	25	32
18	**4**	48
25	36	57

- Classe les valeurs des voisins d'un pixel dans l'ordre croissant puis choisit la valeur centrale (médiane)

4	12	18	25	**25**	32	36	48	57

- 4 remplacé par 25
- Efficace contre le bruit ponctuel (ex : bruit type « poivre et sel ») sans introduire un effet flou

Image bruitée

Image débruitée par un filtre médian

Modèles statistiques du bruit

Peuvent être ajoutés à une image pour simuler un bruit additif

Bruit à distribution uniforme :

Les niveaux de gris de l'intervalle [b_{min},b_{max}] sont équiprobables $H(k) = \frac{1}{(b_{max} - b_{min})}$

Bruit à distribution gaussienne (loi normale)

$$H(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(k-m)^2}{2\sigma^2})$$

Bruit à distribution de Rayleigh

$$H(k) = \frac{2}{b}(k-a)\exp(-\frac{(k-a)^2}{b}) \text{ pour } k > a$$