Automne 2014

# Modèles Mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

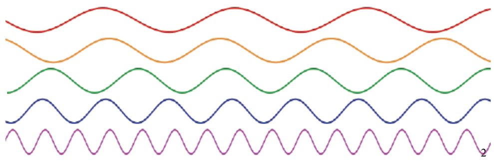
Master Professionnel Image

Université Claude Bernard – Lyon 1



## Modèle fréquentiel

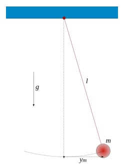
- Quittons à présent le modèle statistique
  - où les distributions de probabilité se décomposaient en mixture de Gaussiennes
- ….pour étudier le **modèle fréquentiel**
  - où les signaux se décomposent en **somme de sinusoïdes**

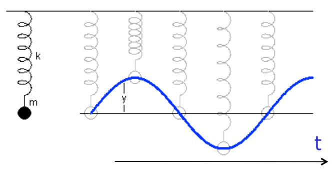




## Un peu de traitement du signal

- Signaux analogiques 1D présents dans la nature
  - Le plus simple est le signal constant
  - Il y a ensuite tous les signaux correspondant à des **sinusoïdes**
    - Produits par des phénomènes oscillants (mouvement de pendule ou de ressort vibration d'une corde, de la membrane d'un instrument de musique)

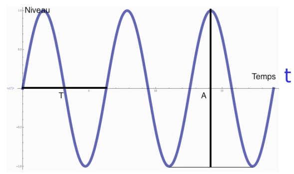





g(t)=Asin(2πft+φ)



- Qu'est-ce qu'une **fréquence**?
  - Nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de temps.
  - Le délai avant que le phénomène périodique se répète est la période




t

g(t)=Asin(2πft+φ)

Fréquence f=1/T=w/(2π)

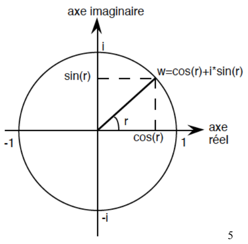
Amplitude A



## Les sinusoïdes

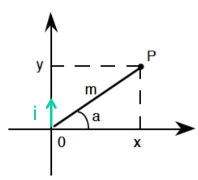
- Fonctions **sinus et cosinus**:
  - outils pour suivre les **coordonnées** d'un nombre complexe qui tourne sur un cercle centré sur l'origine et de rayon 1, **en fonction de l'angle** qu'il forme avec l'axe des abscisses

$$\cos(r) = \sin(\pi/2 - r)$$






- Les nombres complexes sont l'outil avec lequel on va représenter les sinusoïdes…
- Rappel : Module **m** et argument **a** d'un nombre complexe **P** de partie réelle **x** et de partie imaginaire **y**




Deux manières alternatives de représenter **P**

P = x+**i**y

P = me$^{ia}$ (exponentielle complexe)

Rappel : **i**$^2$ = -1

- Considérons le complexe **P(t)** suivant

**P(t)** = **m**e$^{i(2\pi \mathbf{ft}+\phi)}$
= **m**(cos(2π**ft**+ϕ) +**i**sin(2π**ft**+ϕ))

Quand **t** varie, **P** tourne sur le cercle de centre **O** et de rayon **m** avec la fréquence **f**

- Les sinusoïdes s'expriment en sommes de 2 exponentielles complexes

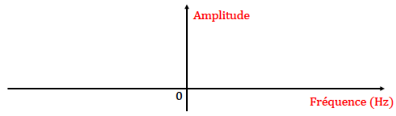
$$\cos(2\pi f t) = \frac{e^{i2\pi f t} + e^{-i2\pi f t}}{2}$$

$$\sin(2\pi f t) = \frac{e^{i2\pi f t} - e^{-i2\pi f t}}{2i}$$



## Représentation fréquentielle vs temporelle

- Idée de Fourier : Toutes les fonctions peuvent être vues comme des sommes d'exponentielles complexes (ou de sinusoïdes)
  - Représentation en fonction des fréquences (des sinusoïdes) contenues dans le signal plutôt qu'en fonction du temps…

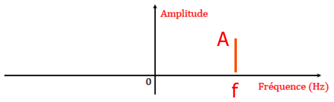



  - Sous cet angle là, des propriétés du signal vont apparaître… (utile pour certains traitements)

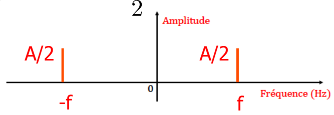


## Représentation fréquentielle

- **Spectre d'amplitude**
  - $Ae^{i2\pi f t}$




  - $A\cos(2\pi f t) = A\dfrac{e^{i2\pi f t} + e^{-i2\pi f t}}{2}$




  - Remarque : les fréquences négatives n'ont aucune réalité physique (juste là pour équilibrer les exp. complexes en sinusoïdes)

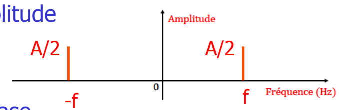


## Représentation fréquentielle

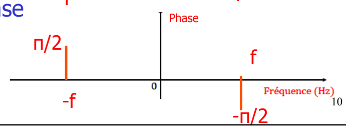
Pour faire le spectre de la fonction sin, on se rend compte que le spectre d'amplitude ne suffit pas… (coefficients complexes avec $i = e^{i\pi/2}$ )

$$A\sin(2\pi f t) = \frac{-iAe^{i2\pi f t} + iAe^{-i2\pi f t}}{2}$$

- Spectre d'amplitude




- Spectre de phase

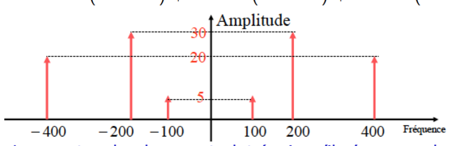





## Représentation fréquentielle

- Somme de signaux sinusoïdaux
  - Leur spectre se construit par superposition des spectres des sinusoïdes qui composent la somme
- Spectre de la fonction

$s(t) = 10.\cos(2\pi 100t) + 60.\cos(2\pi 200t) + 40.\cos(2\pi 400t)$




  - Le spectre de phase est plat (puisqu'il n'y a que des cos)
- On parle de spectres de « raies »



## Somme de signaux sinusoïdaux

- Quizz :
  - La somme de 2 signaux sinusoïdaux fait-elle apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre?
  - La somme de 2 signaux sinusoïdaux est elle nécessairement périodique?

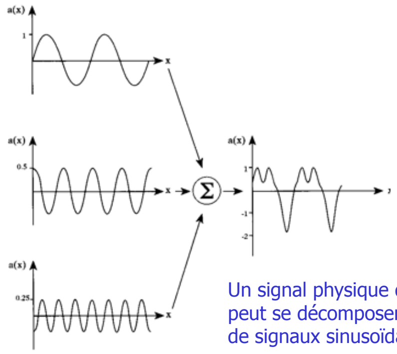
## Somme de signaux sinusoïdaux

Quizz

- La somme de 2 signaux sinusoïdaux fait-elle apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre?
  - NON (superposition des raies des 2 spectres)
- La somme de deux signaux sinusoïdaux est elle nécessairement périodique?
  - NON, la périodicité n'est acquise que si il existe un multiple commun de leurs périodes respectives
- **Cela nous permet d'entrevoir qu'il n'y a pas que les signaux périodiques qui se décomposent en somme de sinusoïdes!**



## Décomposition de Fourier



Un signal physique quelconque peut se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux



- La décomposition en somme de signaux sinusoïdaux se fait à l'aide de la Transformée de Fourier
- **Cas des signaux périodiques de période $T_0$**
  - Fréquence fondamentale $f_0=1/T_0$
  - Un tel signal se décompose **de manière unique** en une comme d'exponentielles complexes (signaux sinusoïdaux) dont la fréquence est multiple de $f_0$

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

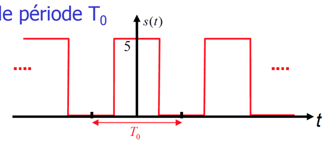
  - avec $F_n$ correspondant à une moyenne du signal $s_{T0}(t)$ sur une période

$$F_n = \frac{1}{T_0}\int_{t=a}^{t=a+T_0} s_{T_0}(t)e^{-i2\pi n f_0 t}dt$$



## Exemple

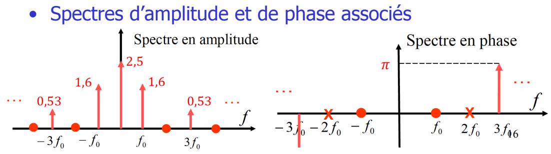
- Signal créneau de période $T_0$



- On a

$$C_k = \begin{cases} 2,5 & pour\ \ k=0 \\ \frac{5}{k\pi}sin(\frac{k\pi}{2}) & pour\ \ k\ impair \\ 0 & pour\ \ k\ pair \end{cases}$$

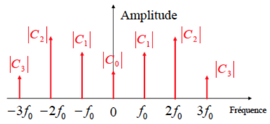
- Spectres d'amplitude et de phase associés



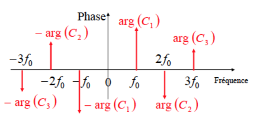


- Dans le cas d'un signal périodique réel, le **spectre d'amplitude est symétrique**, le **spectre de phase antisymétrique**

**Spectre en amplitude**



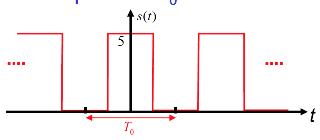
**Spectre en phase**





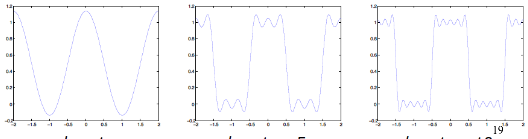
- Dans la littérature, la décomposition de Fourier des signaux réels périodiques se fait souvent sur des sinusoïdes directement (sans passer par les exponentielles complexes). Cela est complètement équivalent…
- La décomposition en exponentielles complexes est également valable pour les signaux complexes périodiques.

- Signal créneau de période $T_0$




$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi}\cos(2\pi 3 f_0 t + \pi) + \frac{2}{5\pi}\cos(2\pi 5 f_0 t) + \ldots$$

  - Evolution de la somme quand on ajoute petit à petit les harmoniques de fréquences de plus en plus grandes (toutes multiples de la fréquence fondamentale $f_0$)



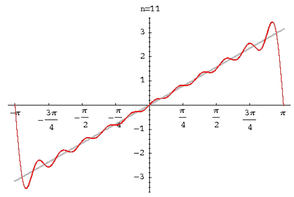
$k = 1$ $\quad$ $k = 1 \rightarrow 5$ $\quad$ $k = 1 \rightarrow 10$



# Exemples

- Décomposition de f(x)=x entre –π et π

$$f(x) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} \ldots\right).$$

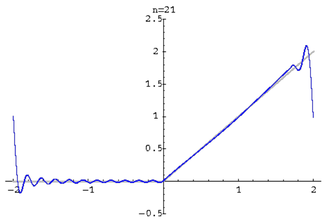





# Exemples

- Décomposition de la fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\right].$$






# Notion d'énergie d'un signal

- Tous les signaux physiques admettent une décomposition de Fourier
  - C'est parce qu'ils sont dotés d'une énergie finie
- Une énergie finie est une condition suffisante pour admettre une décomposition de Fourier
  - Traduction mathématiques : critère de carré intégrabilité

$$E(s_{T_0}) = \frac{1}{T_0}\int_{t=a}^{t=a+T_0} |s_{T_0}(t)|^2 dt$$

  - Dans ce cas, chaque coefficient $F_n$ de la décomposition correspond à la projection de la fonction $s_{T0}$ sur l'ensemble des fonctions $e^{i2\pi n f_0 t}, n \in \mathbb{N}$ qui forment une base orthonormée de l'ensemble des fonctions périodiques de période $T_0$



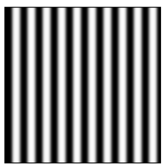
# Cas des signaux 2D

- Le temps t est remplacé par le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Qu'est-ce que des sinusoïdes en 2D?
  - On remplace le produit ft par le produit scalaire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ où interviennent 2 fréquences $f_x$ et $f_y$
  - La sinusoïde $\sin(2\pi(f_x x + f_y y))$ est périodique
    - de période $\dfrac{1}{\sqrt{(f_x{}^2 + f_y{}^2)}}$
    - dans la direction $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$



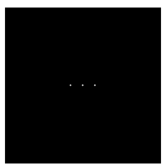
Signal analogique infini :
Sinusoïde s(x,y)

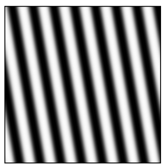
Spectre S(u,v)



Transformée de Fourier

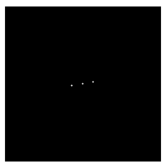
$\Longleftrightarrow$





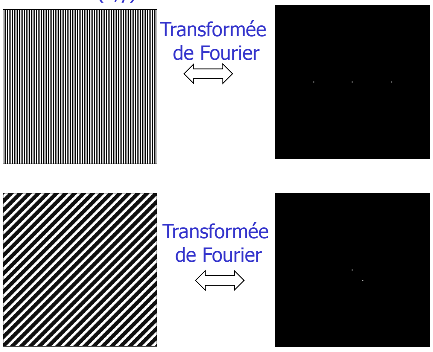
Transformée de Fourier

$\Longleftrightarrow$



Signal analogique infini :
Sinusoïde s(x,y)

Spectre S(u,v)






# Cas des signaux 2D

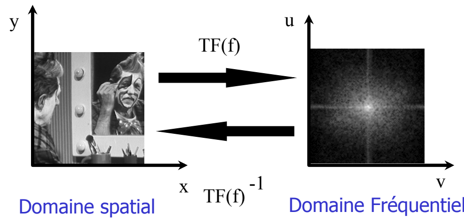
- La décomposition d'un signal 2D se fait de la même manière qu'en 1D, en identifiant la fréquence fondamentale en x et en y

- Décomposition sur la base de fonctions

$$e^{i2\pi(mf_{x_0}x+nf_{y_0}y)}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$



Signal analogique de départ :
I(x,y)




Domaine spatial

Domaine Fréquentiel

Attention : Le signal dont on donne ici la transformée de Fourier est l'image analogique de départ que l'on répète à l'infini (à la façon d'un patchwork)