

Automne 2014

## Modèles mathématiques pour l'Image

Raphaëlle Chaine

Master Professionnel Image

Université Claude Bernard - Lyon I

## Comparaison d'images ou de textures sur la base d'histogrammes

### Comment comparer des histogrammes?

66

## Comparaison d'images ou de textures sur la base d'histogrammes

Il est préférable d'égaliser chacun des 2 histogrammes avant de procéder à leur comparaison (mesure de la similarité entre les 2 distributions)

### Distance de vecteurs

#### Distance de Minkowski

$$d_{L_p}(H_0, H_1) = \left( \sum_{i=1}^{i=n} |H_0(i) - H_1(i)|^p \right)^{1/p}$$

Trop sensible :

- aux décalages entre histogrammes (on ne compare que les indices se correspondant exactement)
- aux variations fortes mais localisées

67

### Divergence de Kullback-Leibler

- Différence moyenne du nombre de bits nécessaires au codage d'échantillons de la densité de probabilité  $H_1$  selon que le codage est choisi optimal pour la distribution  $H_1$  (observations) ou  $H_0$  (modèle)

$$d_J(H_0, H_1) = \sum_{i=1}^{i=n} (H_0(i) \log \frac{H_0(i)}{m_i} + H_1(i) \log \frac{H_1(i)}{m_i})$$

$$m_i = \frac{H_0(i) + H_1(i)}{2}$$

- Robuste aux variations fortes locales mais pas aux décalages
- Ce n'est pas une vraie distance (non symétrique)

68

### Ratio signal sur bruit

Distance asymétrique

$$d_{snr}(H_0, H_1) = 10 \log_{10} \left( \frac{Var(H_0)}{Var(H_0 - H_1)} \right)$$

69

### Distance globales

Sensibles à la forme plus qu'aux valeurs de l'histogramme

#### Coefficient de corrélation

$$\rho(H_0, H_1) = \frac{E(H_0 H_1) - E(H_0)E(H_1)}{\sqrt{Var(H_0)Var(H_1)}}$$

#### Distance dépliée

- Prise en compte de la position relative des paires d'indices comparés
- Nécessité de normaliser les histogrammes par leur surface
- Les 2 vecteurs comparés sont des listes ordonnées des valeurs des pixels (distance  $L_1$ )
- Si  $H_i(x)=n$  alors la valeur  $x$  apparaîtra  $n$  fois dans la liste  $L_i$

70

### Distance du cantonnier

Idée :

Valeurs de  $H_0$  = quantité de terre

Valeurs de  $H_1$  = profondeur de trous

Distance EMD = Coût minimum associé au remplissage des trous avec la terre disponible

Distance entre un tas  $i$  et un trou  $j$

$$C_{ij} = C_j = |i - j|$$

$X_{ij}$  = quantité de terre transférée du tas  $i$  au trou  $j$

Coût à minimiser :

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Problème du transport

Résolution en  $O(n^2)$

71

### Distance du cantonnier

- Résolution en 1D en utilisant les résultats vus pour la spécification d'histogramme

- calcul des histogrammes cumulés pour estimer les fonctions de répartition des densités de probabilité
- Le plan de transport est fourni par la fonction de correspondance

72

## Classification

**Principe :**

- Soit  $A$  un ensemble de  $m$  éléments décrits par  $d$  attributs (par exemple : des points décrits par des coordonnées, des pixels décrits par des intensités de couleur)
- But : Classifier les éléments en familles (*cluster*)

**Algorithme des K-moyennes :**

- A partir d'une partition initiale, on améliore itérativement la partition de l'espace en minimisant la variance intra-classe et en maximisant l'écartement entre les classes
- Minimisation dispersion intra-classe (compacité)
- Maximisation dispersion inter-classes (éloignement)

73

- Connaissance *a priori* du nombre  $k$  de classes
- Initialisation des centres des classes
- Classification des éléments par rapport à leur distance aux centres
- Calcul des nouveaux centres
- Convergence vers un optimum local

74

## Algorithme

K-moyennes

**Entrée :**  $k$  = nombre de classes

$t$  = nombre max d'itérations

**Début**

Choisir le centre initial des  $k$  groupes

**Répéter**

Affecter chaque élément à la classe du centre dont il est le plus proche

Recalculer le centre de chaque groupe

**Jusqu'à** (stabilisation des centres) **ou**

(nombre d'itérations =  $t$ )

**Fin**

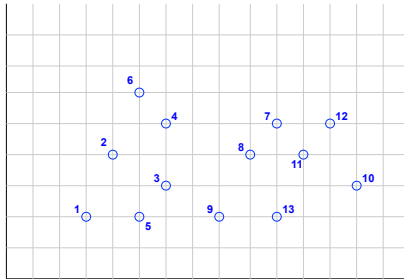
75

## Choix des centres initiaux

- Méthode sensible à l'initialisation des centres des groupes
- Choix possibles
  - Valeur aléatoire
  - Tirage avec remise parmi les valeurs existantes
  - Tirage sans remise parmi les valeurs existantes

76

## Exemple



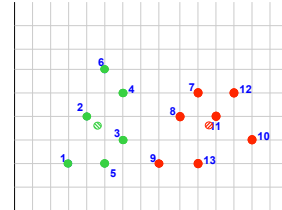
77

## Exemple

K = 2

Centre(G1) = (6,3)  
Centre(G2) = (8,2)

Nouveau Centre(G1) = (4.8, 3.7)  
Nouveau Centre(G2) = (10.4, 3.6)

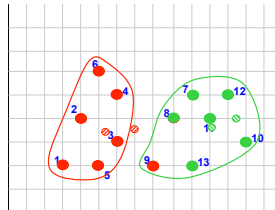


78

## Exemple, suite

K = 2

Centre (G1) = point 10  
Centre (G2) = point 13



79

## Evaluation de la qualité des classes obtenues

- Pour trouver les meilleures classes, il faut
  - Minimiser la distance intra-classes
  - Maximiser la distance inter-classes

$$intra = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_j} \|x - z_j\|^2$$

N : nombre d'éléments  
 $z_i$  : centre du groupe  $i$

$$inter = \min(\|z_i - z_j\|^2)$$

- Validité d'une catégorisation:

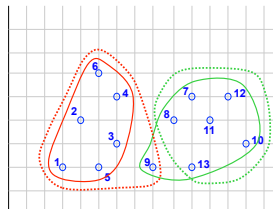
$$Validité = \frac{inter}{intra}$$

80

## Exemple : Validité

Intra = 3.66 Inter = 31.3  
Validité = 8.55

Intra = 3.75 Inter = 30.9  
Validité = 8.24



81

## Problème du choix de k

- Nombre de groupe contrôlé par l'utilisateur
- Possibilité utilisation validité pour déterminer la valeur « optimale » de k

$$\begin{aligned} &Validité(k-1) < Validité(k) \\ &Validité(k+1) < Validité(k) \end{aligned}$$

82

## K-moyennes : bilan

### • Force des k-moyennes:

- Relativement efficace :  
 $O(tkn)$   
 $n$  = nb d'objets,  
 $k$  = nb de groupes  $k \ll n$   
 $t$  = nb d'itérations  $t \ll n$
- Optimum local

83

### • Faiblesse des k-means:

- Besoin de préciser  $k$  *a priori*
- Sensible au bruit et aux exceptions
- Sensible à l'initialisation
  - lancer plusieurs exécutions avec différents états initiaux
  - retenir la meilleure configuration
- marche mal lorsque les classes se chevauchent

### • Les variantes des K-Moyennes diffèrent dans :

- La sélection des  $k$  initiaux
- Calcul de la dissimilarité
- Calculer la moyenne d'une classe

84

### • Une variante des k-moyennes :

- Algorithme de relaxation de Lloyd

85

## Classification

**Cas où l'on cherche à déterminer les modes d'une distribution de probabilité sans en connaître leur nombre :**

- L'algorithme EM permettait de modéliser une distribution par un nombre prédéterminé de Gaussiennes
- Il est parfois **difficile de connaître ce nombre**
- On n'a parfois pas besoin d'une modélisation compacte, mais juste de détecter les modes...

86

## Classification

### Vers un point de vue plus local

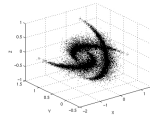
- Quand le nombre de dimensions du signal observé augmente, cela augmente les chances pour les valeurs prises par le signal d'être plus éparées ...
  - $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$  dans  $R^d$
  - Cas si on a 3 canaux de couleurs plutôt qu'une unique intensité  $d=3$

- On « épaissit » chaque observation par un noyau Gaussien  $K$  de largeur  $R_i$  (rayon d'influence)

- Fonction de densité de probabilité

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{h}\right)$$

$$K(\mathbf{x}) = c_{k,d} k(\|\mathbf{x}\|^2)$$



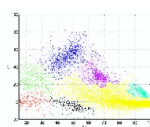
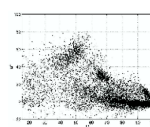
87

## Classification

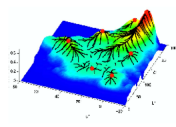
### Algorithme des mean-shifts

- Classification par les bassins d'attraction des maxima de l'estimateur de densité

$n$  points



7 clusters



$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0$$

88

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Les modes de la distribution sont localisés là où le gradient s'annule

$$\nabla f(x) = 0$$

- Résultat mathématique :

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= \frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \sum_{i=1}^n (x_i - x) g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right) \\ &= \frac{2c_{k,d}}{nh^{d+2}} \left[ \sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right) \right] \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_i g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right)} - x \right] \\ g(s) &= -k'(s)\end{aligned}$$

89

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Le gradient de f fait donc apparaître

$$m_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{i=1}^n g\left(\left\|\frac{x - x_i}{h}\right\|^2\right)} - x$$

que l'on appelle aussi *mean-shift* (moyenne pondérée dans une fenêtre autour de x)

- On obtient alors les modes de la distribution en navigant itérativement vers les points de *mean-shift* nul

90

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points

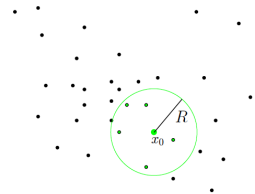


91

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points, choix aléatoire d'un premier germe
- R rayon de la fenêtre

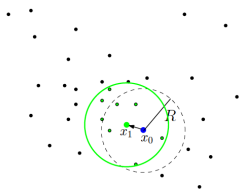


92

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points,  $x_{i+1} = \text{mean-shift}(x_i)$

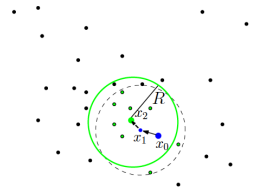


93

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points,  $x_{i+1} = \text{mean-shift}(x_i)$

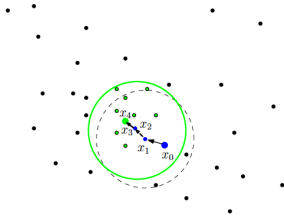


94

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points,  $x_{i+1} = \text{mean-shift}(x_i)$



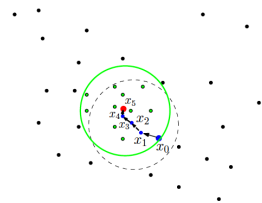
95

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Recherche itérative des points fixe du *mean-shift*
- n points,  $x_{i+1} = \text{mean-shift}(x_i)$ , convergence lorsque

$$d(x_{i+1}, x_i) \leq R_c$$



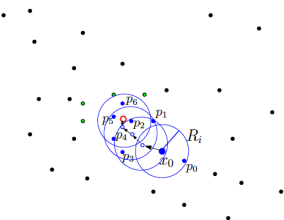
- X5 point stationnaire, correspond donc à un mode

96

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Tous les échantillons qui sont à moins de  $R_i$  d'un  $x_i$  sont associé au même mode

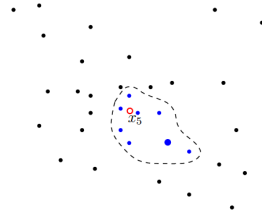


97

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Tous les échantillons qui sont à moins de  $R_i$  d'un  $x_i$  sont associé au même mode

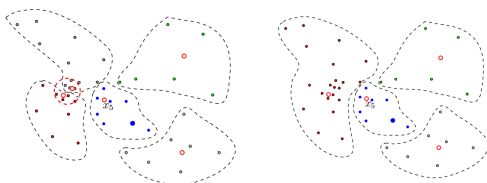


98

## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Et on recommence jusqu'à ce que tous les échantillons soient associés à un mode
- Bien entendu, d'autres sommets vont être associés à un même mode

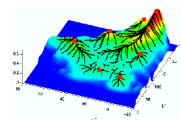


99

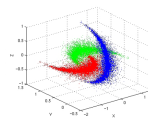
## Classification

### Algorithme des mean-shifts

- Les trajectoires peuvent également être intéressante



- Applications possibles à la segmentation d'images



100