已知 θ_3 求解 θ_1 和 θ_2

给定运动学方程：

$$\begin{cases} x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{cases}$$

步骤 1：平方相加消元

将方程平方相加：

$$x^2 + y^2 = \sum_{i=1}^{3} l_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} l_i l_j \cos(\theta_j + \theta_{j+1} + \cdots + \theta_i)$$

展开后化简得：

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_2 + 2l_1 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_3 \cos\theta_3$$

步骤 2：解 θ_2 方程

整理为关于 θ_2 的方程：

$$A\cos\theta_2 + B\sin\theta_2 = C$$

其中：

$$\begin{aligned} A &= 2l_1(l_2 + l_3\cos\theta_3) \\ B &= -2l_1 l_3 \sin\theta_3 \\ C &= x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos\theta_3\right) \end{aligned}$$

引入相位角 $\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$，解得：

$$\theta_2 = \phi \pm \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + 2k\pi$$

步骤 3：解 θ_1 方程

对每个 θ_2 解，重组方程为：

$$\begin{cases} x = A\cos\theta_1 - B\sin\theta_1 \\ y = A\sin\theta_1 + B\cos\theta_1 \end{cases}$$

其中：

$$A = l_1 + l_2\cos\theta_2 + l_3\cos(\theta_2+\theta_3)$$
$$B = l_2\sin\theta_2 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3)$$

解得：

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{Ay - Bx}{Ax + By}\right)$$

解的存在条件

解存在的必要条件为：

$$\left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leq 1$$

当满足条件时，通常存在两组解。