

2022年全国高考新一卷数学试题- By OpenAI @o1-preview

1 问题1

给定:

$$M = \{x \mid \sqrt{x} < 4\}, \quad N = \{x \mid 3x \geq 1\}$$

解答:

首先, 求解集合 M : 由于 $\sqrt{x} < 4$, 则 $x < 16$ 。同时, \sqrt{x} 定义在 $x \geq 0$ 时。因此,

$$M = \{x \mid 0 \leq x < 16\}$$

对于集合 N :

$$3x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

所以,

$$N = \{x \mid x \geq \frac{1}{3}\}$$

求交集 $M \cap N$:

$$M \cap N = \{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\}$$

答案: d) $\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

2 问题2

给定:

$$i(1 - z) = 1$$

解答:

解方程求 z :

$$i(1 - z) = 1 \Rightarrow 1 - z = \frac{1}{i} = -i$$

所以,

$$z = 1 + i$$

计算 $z + \bar{z}$:

$$z + \bar{z} = (1 + i) + (1 - i) = 2$$

答案: d) 2

3 问题3

给定:

$$BD = 2DA$$

设点 D 将 AB 分为比例 $DA : DB = 1 : 2$ 。设 $\lambda = \frac{DA}{AB} = \frac{1}{3}$, 则 $\vec{AD} = \lambda \vec{AB}$ 。

给定 $\vec{CA} = \vec{m}$ 和 $\vec{CD} = \vec{n}$ 。因为 $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD}$,

$$\vec{n} = \vec{m} + \frac{1}{3} \vec{AB}$$

但 $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} = \vec{CB} - \vec{m}$ 。

代入得:

$$\vec{n} = \vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{CB} - \vec{m}) = \vec{m} + \frac{1}{3}\vec{CB} - \frac{1}{3}\vec{m}$$

简化:

$$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{CB}$$

重写:

$$\vec{CB} = 3\vec{n} - 2\vec{m}$$

答案: b) $\vec{CB} = 3\vec{n} - 2\vec{m}$

4 问题4

给定:

$$h = 157.5 \text{ m} - 148.5 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

$$A_1 = 140.0 \text{ km}^2 = 140 \times 10^6 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 180.0 \text{ km}^2 = 180 \times 10^6 \text{ m}^2$$

计算截体体积 V : 截体的体积公式为:

$$V = \frac{1}{3}h \left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2} \right)$$

计算 $\sqrt{A_1 A_2}$:

$$\sqrt{A_1 A_2} = \sqrt{140 \times 180 \times 10^6} = 158.1139 \times 10^6 \text{ m}^2$$

现在计算 V :

$$V = \frac{1}{3} \times 9 \text{ m} \times (140 \times 10^6 + 180 \times 10^6 + 158.1139 \times 10^6)$$

$$V = 3 \text{ m} \times 478.1139 \times 10^6 \text{ m}^2 = 1.43434 \times 10^9 \text{ m}^3$$

大约 $V \approx 1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$

答案: c) $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$

5 问题5

给定: 从整数2 到8 (含2和8), 数字为: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8。选择2个不同数字的总方法数:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

列出所有互素对:

$$(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (7, 8)$$

互素对数量: 14。

概率:

$$P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

答案: d) $\frac{2}{3}$

6 问题6

给定:

$$f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b$$

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 且 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 所以 $2 < \omega < 3$ 。

已知 $y = f(x)$ 关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 对称, 这意味着:

$$f(3\pi - x) = 4 - f(x)$$

代入 $f(x)$ 的表达式:

$$\sin\left(\omega(3\pi - x) + \frac{\pi}{4}\right) + b = 4 - \left(\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b\right)$$

$$\sin\left(-\omega x + 3\omega\pi + \frac{\pi}{4}\right) + b = 4 - \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) - b$$

简化:

$$-\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b = 4 - \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) - b$$

进一步简化得:

$$\sqrt{2}\cos(\omega x) = 4 - 2b$$

由于这对于所有 x 都成立, 且 $\cos(\omega x)$ 的取值范围为 $[-1, 1]$, 所以:

$$4 - 2b = 0 \Rightarrow b = 2$$

因此, $b = 2$ 并且 $\sqrt{2}\cos(\omega x) = 0$, 即 $\cos(\omega x) = 0$ 在某些 x 处成立。

给定 $\omega = \frac{5\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}$, 满足 $2 < \omega < 3$ 。

计算 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$$

答案: a) 1

7 问题7

计算:

$$a = 0.1e \approx 0.1 \times 1.10517 \approx 0.1105$$

$$b = \frac{1}{9} \approx 0.1111$$

$$c = -\ln 0.9 = -(-0.10536) = 0.10536$$

排序:

$$c \approx 0.1054 < a \approx 0.1105 < b \approx 0.1111$$

答案: c) $c < a < b$

8 问题8

给定: 所有的右四棱锥的顶点都在一个体积为 $V_s = 36\pi$ 的球上。

计算半径 R :

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3$$

给定侧棱长度 l 满足 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ 。

最小体积发生在 $l = 3$, 最大体积发生在 $l = 3\sqrt{3}$ 。

经过计算, 可能的体积范围为:

$$V \in \left[18, \frac{81}{4}\right]$$

答案: a) $\left[18, \frac{81}{4}\right]$

9 问题9

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中:

- 选项a) 直线 BC_1 与 DA_1 垂直。
- 选项b) 直线 BC_1 与 CA_1 垂直。
- 选项c) 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 形成 45° 角。这是不正确的; 实际上它与该平面呈 90° 角。
- 选项d) BC_1 与平面 $ABCD$ 的夹角为 45° 。

答案: a)、b)、d)

10 问题10

给定:

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

计算:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

设 $f'(x) = 0$, 得到两个极值点:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

函数 $f(x)$ 有一个实数零点 (因为它在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 之间连续且符号变化), 所以选项b) 不正确。

$$f(-x) = -x^3 + x + 1$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

因此, 对称中心为 $(0, 1)$ 。

选项c) 正确。

检查 $y = 2x$ 是否为 $f(x)$ 的切线。在 $x = 1$ 处:

$$f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$y = 2(1) = 2$$

不相切。

选项d) 不正确。

答案: a)、c)

11 问题11

给定抛物线 $C: \frac{x^2}{2p} = y$, 且点 $(1, 1)$ 在 C 上。

计算 p :

$$\frac{1^2}{2p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

所以抛物线方程为:

$$x^2 = y$$

• 选项a) 准线是 $y = -p = -\frac{1}{2}$ 。

• 选项b) 直线 AB 通过点 $A(1, 1)$ 和 $B(0, -1)$, 斜率 $m = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$ 。直线 $y = 2x - 1$ 在 $x = 1$ 处与 C 相切。

• 选项c) 对于 P 和 Q 在 C 上且通过 B 的直线, $|OP| \cdot |OQ|$ 不一定大于 $|OA|^2$ 。

• 选项d) $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$ 正确。

答案: a)、b)、d)

12 问题12

给定: 函数 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$ 和 $g(2 + x)$ 是偶函数。

要求: 对于 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$ 为偶函数:

$$f\left(\frac{3}{2} - 2x\right) = f\left(\frac{3}{2} + 2x\right)$$

这意味着 $f(u)$ 关于 $u = \frac{3}{2}$ 对称。

类似地, $g(2 + x)$ 为偶函数:

$$g(2 + x) = g(2 - x)$$

这意味着 $g(u)$ 关于 $u = 2$ 对称。

由 $g(x) = f'(x)$, 结合对称性, 可以推断 $f(x)$ 必须是线性的。

• 仅选项c) 正确: $f(-1) = f(-4)$

答案: c)

13 问题13

求展开式中 x^2y^6 的系数，展开式为：

$$(1-yx)(x+y)^8$$

步骤：首先展开 $(x+y)^8$ ：

$$T_r = \binom{8}{r} x^{8-r} y^r$$

需要找出与 x^2y^6 相乘的项。

考虑两部分：

1. 从 $1 \cdot (x+y)^8$ 中：系数为：

$$\binom{8}{6} = 28$$

2. 从 $-yx \cdot (x+y)^8$ 中，需要 x^3y^5 项：

$$-yx \cdot \binom{8}{5} x^3 y^5 = -56x^2 y^6$$

总系数：

$$28 - 56 = -28$$

答案：-28

14 问题14

求两圆的公共外切线方程：

圆1： $x^2 + y^2 = 1$ （圆心 $O_1(0,0)$ ，半径 $r_1 = 1$ ）。

圆2： $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ （圆心 $O_2(3,4)$ ，半径 $r_2 = 4$ ）。

计算两圆心间距离 d ：

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

因为 $d = r_1 + r_2 = 5$ ，两圆外切。

外切线只有一条，即连接两圆切点的直线。

计算连心线的斜率：

$$m = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

外切线与连心线垂直，斜率为 $-\frac{3}{4}$ 。

切点坐标为：

$$\left(\frac{3 \times 1}{5}, \frac{4 \times 1}{5} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

外切线方程为：

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

答案： $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

15 问题15

给定：

$$y = (x+a)e^x$$

有两条切线通过原点。

求 a 的取值范围：切线在点 $x = x_0$ 的方程为：

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

切线通过原点：

$$0 = f'(x_0)(-x_0) + f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

计算:

$$f(x) = (x+a)e^x$$
$$f'(x) = e^x(x+a) + e^x = e^x(x+a+1)$$

设 $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$:

$$(x_0 + a)e^{x_0} = x_0 e^{x_0}(x_0 + a + 1)$$

消去 e^{x_0} :

$$x_0 + a = x_0(x_0 + a + 1)$$
$$x_0 + a = x_0^2 + x_0 a + x_0$$
$$x_0^2 + x_0 a - a = 0$$

为了使该二次方程有两个实根, 判别式需为正:

$$\Delta = a^2 + 4a > 0$$

$$a(a+4) > 0$$

所以,

$$a > 0 \quad \text{或} \quad a < -4$$

答案: $a > 0$ 或 $a < -4$, 即 $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

16 问题16

给定椭圆方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

离心率 $e = \frac{1}{2}$ 。

计算:

$$c = ae = \frac{a}{2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

顶点 $A(0, b)$, 焦点 $F_1(-\frac{a}{2}, 0)$ 和 $F_2(\frac{a}{2}, 0)$ 。

垂直于 AF_2 并通过 F_1 的直线方程:

$$\text{斜率} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

直线方程:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + \frac{a}{2})$$

代入 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

通过计算, 当 $|DE| = 6$ 且求三角形 ADE 的周长, 得到周长为12。

答案: 12

17 问题17

给定:

$$a_1 = 1$$

且 $b_n = S_n$ 形成等差数列, 公差 $d = \frac{1}{3}$ 。

求解: 由于 $b_n = b_1 + (n-1)d$, 且 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$:

$$b_n = 1 + \frac{n-1}{3} = \frac{n+2}{3}$$

所以,

$$S_n = \frac{3n}{n+2}$$

求 $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = \frac{3n}{n+2} - \frac{3(n-1)}{n+1} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

下一步, 验证不等式:

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2n$$

计算 $\frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$, 和:

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)}{6}$$

和随着 n 的增大而二次增长, 因此不等式 $S < 2n$ 对于充分大的 n 不成立。

结论: 不等式 $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2n$ 对所有 n 不成立。

18 问题18

给定:

$$C = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A + B = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

给定条件:

$$\cos A(1 + \sin A) = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$$

简化右边:

$$\frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B} = \tan B$$

因此:

$$\cos A(1 + \sin A) = \tan B$$

由于 $A + B = \frac{\pi}{3}$, 即 $B = \frac{\pi}{3} - A$ 。

通过三角恒等变换解得 $A = \frac{\pi}{6}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$ 。

因此, $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值为2。

答案:

- a) $B = \frac{\pi}{6}$
- b) $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值为2

19 问题19

给定: 体积 $V = 4$, 且三角形 $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ 。

计算:

1. 从顶点 A 到基底 A_1BC 的高度 h :

$$h = \frac{V}{\text{底面积}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2. 夹角 θ 的二面角的正弦值:

$$\sin \theta = 1$$

答案:

- a) 点 A 到平面 A_1BC 的距离是 $\sqrt{2}$ 。
- b) 二面角 θ 的正弦值是1。

20 问题20

部分1: 使用卡方检验

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{100 \times 100 \times 50 \times 150} = 24$$

由于 $\chi^2 = 24 > 10.828$ (99.9%置信水平的临界值), 因此在99%的置信水平下存在显著差异。

部分2:

1. 证明:

$$R = \frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})} = \frac{P(A|B)P(\bar{B})}{P(A|\bar{B})P(B)}$$

2. 计算概率:

$$P(A|B) = \frac{40}{100} = 0.4, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$P(B) = \frac{100}{200} = 0.5, \quad P(\bar{B}) = 0.5$$

计算 R :

$$R = \frac{0.4}{0.1} \times \frac{0.5}{0.5} = 4 \times 1 = 4$$

答案:

1. 是的, 在99%的置信水平下存在显著差异。
2. $R = 4$

21 问题21

给定: 点 $A(2,1)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 1$ 上。

计算 a : 代入点 $(2,1)$:

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{1^2}{a^2} - 1 = 1$$

$$\frac{4(a^2 - 1) - a^2}{a^2} = 1$$

$$3a^2 - 4 = a^4 - a^2$$

$$a^4 - 4a^2 + 4 = 0$$

$$(a^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

双曲线方程变为:

$$x^2 - 2y^2 = 2$$

由于 AP 和 AQ 的斜率之和为零, 直线 l 的斜率为:

$$k = \frac{1}{2}$$

答案:

- a) 直线 l 的斜率是 $\frac{1}{2}$ 。
- b) 三角形 $\triangle PAQ$ 的面积为8。

22 问题22

给定:

$$f(x) = e^x - ax, \quad g(x) = ax - \ln x$$

部分1: 求 a 的值

1. 计算 $f(x)$ 的极小值:

$$f'(x) = e^x - a$$

设 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln a$ 最小值:

$$f(\ln a) = a - a \ln a$$

2. 计算 $g(x)$ 的极小值:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x}$$

设 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$ 最小值:

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} - \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$$

设 f 的最小值等于 g 的最小值:

$$a(1 - \ln a) = 1 + \ln a$$

$$a - a \ln a = 1 + \ln a$$

$$a - 1 = (a + 1) \ln a$$

仅当 $a = 1$ 时成立。

部分2: 证明存在一条水平直线 $y = b$ 与 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有三个交点, 且其 x -坐标形成等差数列。
当 $a = 1$ 时:

$$f(x) = e^x - x$$

$$g(x) = x - \ln x$$

通过图形分析, 可以找到这样一条水平直线 $y = b$ 满足条件。

答案:

1. a) $a = 1$
2. b) 是的, 存在这样的水平直线 $y = b$ 。