

# BMS 滤过

2025 Winter seminar

2025 年 3 月 1 日

## 目录

<b>1 结构与约定</b>	<b>3</b>
<b>2 <math>p</math>-进上同调比较和 Fontaine 周期环</b>	<b>3</b>
2.1 Fontaine 框架	3
2.2 Fargues-Fontaine 曲线	8
2.3 [BMS2] 主结果	10
2.4 完美胚环	12
<b>I BMS 滤过和 <math>A_{\text{inf}}</math> 上同调</b>	<b>13</b>
<b>3 余切复形、Hochschild 同调和拓扑 Hochschild 同调</b>	<b>13</b>
3.1 非 Abel 导出	13
3.2 导出 Hochschild 同调和 HKR 滤过	14
3.3 导出 de Rham 上同调和 Cartier 同构	15
3.4 余切复形的 fpqc 下降	16
3.5 循环对象和拓扑 Hochschild 同调	18
3.6 分圆谱, 拓扑循环同调和相关变体	19
<b>4 拟合割景</b>	<b>22</b>
4.1 拟合割景	22
4.2 拟正则半完美胚环	26
4.3 相对景	27
<b>5 <math>HC^-</math> 和 de Rham 上同调</b>	<b>27</b>
5.1 光滑情形	27
5.2 一般情形	29
5.3 拟合割情形	32

<b>6 完美胚环上的拓扑同调</b>	<b>32</b>
6.1 完美胚环的拓扑同调	32
6.2 拟正则半完美胚环的拓扑同调	36
<b>7 晶体比较定理</b>	<b>37</b>
7.1 拟正则半完美环: [BMS2] 的方法	37
7.2 分圆 $t$ -结构: [AN18c] 的方法	40
<b>II 棱镜上同调</b>	<b>41</b>
<b>8 棱镜</b>	<b>41</b>
8.1 棱镜与棱镜景	41
8.2 Hodge-Tate 比较	42
8.3 棱镜完美化	47
<b>9 平展比较定理</b>	<b>48</b>
9.1 拟正则半完美胚环的棱镜上同调	48
9.2 棱镜- $TC^-$ 比较	51
棱镜-平展比较	52
9.3 Frobenius 不动点	52
9.4 Arc-拓扑	53
9.5 棱镜-平展比较定理的证明	58
<b>10 BK 模取值上同调</b>	<b>58</b>
<b>III 叠观点: 棱镜化</b>	<b>63</b>
<b>11 纯特征棱镜化</b>	<b>63</b>
11.1 关于叠论技术的一些评注	65
11.2 零特征 de Rham 叠	66
11.3 纯特征 Hodge-de Rham 叠	68
11.4 共轭滤过与 Cartier 同构	71
11.5 棱镜叠和 Nygaard 滤过棱镜叠	73
<b>12 棱镜化与合割化</b>	<b>74</b>
12.1 棱镜化	74
12.2 合割化	76
<b>A Beilinson <math>t</math>-结构</b>	<b>78</b>
<b>B 晶体上同调</b>	<b>81</b>

## 1 结构与约定

讨论班主要分为引言部分和三个大部分。首先引言部分介绍了  $p$ -进 Hodge 理论的背景，并介绍了 Bhatt-Morrow-Scholze 的主要结果，特别地我们简单概括了诸多比较定理的证明策略。

第一部分主要跟随 [BMS2]，我们简单介绍其主要内容：利用 THH 和  $TC^-$  构造一种名为 “ $A_{\text{inf}}$ -上同调” 的上同调理论，它能够与其它诸多经典上同调理论进行比较，具体陈述可以参见引言部分。在第一部分中除了介绍构造，我们还将完成除平展比较定理以外的所有比较定理的证明。

第二部分主要跟随 [BS19]，我们引入了  $A_{\text{inf}}$ -上同调的 “完全体” —— 棱镜和棱镜上同调的概念，介绍了其基本性质以及研究棱镜上同调所需的基本技术手段：例如 Cech-Alexander 复形，棱镜完美化等。我们证明了棱镜上同调的晶体比较定理和 Hodge-Tate 比较定理，同时我们通过借道棱镜在这一部分完成了平展比较定理的证明。

第三部分主要跟随 [Bha23]，我们将诸多上同调的构造（主要是棱镜上同调）进行所谓 “叠化”：准确地说，对于任何一个可以被研究的几何对象（概形） $X$ ，我们关联一个叠  $X^C$ ，使得这个叠的（结构层）上同调反映了  $X$  的  $C$ -上同调理论。例如我们可以取  $C = HT, dR, \Delta$  等等。另外我们还可以将上同调上的附加信息编码其中，比如我们可以编码 Hodge 滤过，纯特征时的共轭滤过，Nygaard 滤过等等。

接下来是一些记号和约定：

⚠. 表示这段证论述的逻辑并不完整，存在需要额外检查的部分。

▲. 表示这段论述对理解笔记内容至关重要，其内容通常是指笔记中采用的术语/约定与一般文献中相异之处。

$R\langle X \rangle$  表示多项式环  $R[X]$  的  $p$ （视语境）-完备化。

$R\{X\}$  表示添加变元  $X$  生成的自由  $\delta$ -环。

除非特别指明，笔记中链复形的指标均采用上同调指标。

## 2 $p$ -进上同调比较和 Fontaine 周期环

我们固定  $K$  是完备离散赋值域，零特征，剩余类域是特征  $p$  完美域。特别地为了简单起见，我们更进一步直接假定  $K$  是  $\mathbb{Q}_p$  的有限扩张，记 Galois 群  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ 。

### 2.1 Fontaine 框架

$p$ -进 Hodge 理论的起点是 Tate 给出的对  $\mathcal{O}_K$  上  $p$ -可除群  $\mathcal{G}$  的 Tate 模  $\mathcal{T}_p \mathcal{G} = \varprojlim \mathcal{G}[p^n](\bar{K})$  的 Hodge 分解，即：

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{T}_p \mathcal{G} \simeq (\mathbb{C}_p \otimes_{\mathcal{O}_K} \omega_{G^\vee}) \oplus (\mathbb{C}_p(\chi_{\text{cycl}}^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \omega_{\mathcal{G}}^\vee)$$

因此这实际上说明了 Abel 簇的  $p$ -进上同调的分解定理：

**定理 2.1.**  $A$  是一个  $K$  上的 Abel 簇，若其有好约化（即来自  $\mathcal{O}_K$  上的基变换），则有  $p$ -进上同调上的分解定理：

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{C}_p \otimes_K H^1(A, \mathcal{O}_A)) \oplus (\mathbb{C}_p(\chi_{\text{cycl}}^{-1}) \otimes_K H^0(A, \Omega_{A/K}^1))$$

我们自然想问这样的分解定理能否推广到更一般的情况，我们在这里简要介绍历史上这一问题的的发展：首先是基于  $p$ -可除群的相关问题：Fontaine 在 1970 年代给出了  $K/\mathbb{Q}_p$  非分歧时  $\mathcal{O}_K$  上有限平坦群概形以及  $p$ -可除群的分类，准确地说我们有如下等价：

**定理 2.2** (Fontaine). 对于特征  $p$  完美域  $k$ ,  $p > 2$  时存在如下反范畴等价：

$$\{p\text{-divisible groups over } W(k)\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Honda systems over } W(k)\}$$

因此这给出了非分歧扩张时  $p$ -可除群的描述，因此我们将  $K$  上 Abel 簇的平展上同调和 Dieudonné 模以及其上 Honda 系联系在一起，事实上以此为基础我们能够得到一些特殊情况的平展上同调以及晶体上同调的比较定理。简要总结一下， $p$ -进 Hodge 理论最初的两个课题分别是：i) 寻找一般形式的分解定理；ii) 研究  $p$ -可除群。当然我们可以看到  $p$ -可除群的研究有着极大的局限性，它将目光主要聚焦在 Tate 模上，因此实际上是借道了  $H_{\text{ét}}^1$  的特殊代数性质。

接下来则是稍微现代一些的内容：Fontaine 引入了如下框架研究 Galois 表示。

**定义 2.3.**  $B$  是携带  $G_K$  作用的  $\mathbb{Q}_p$ -代数，记  $C = \text{Frac}(B)$ ，其上也携带  $G_K$  作用。称  $B$  是  $(\mathbb{Q}_p, G_K)$ -正则的，如果：

1.  $B^{G_K} = C^{G_K}$
2. 如果  $b \in B - \{0\}$ ,  $\mathbb{Q}_p \cdot b$  在  $G_K$  作用下稳定，那么  $b \in B^\times$ 。

**定义 2.4.** 假定  $B$  是  $(\mathbb{Q}_p, G_K)$ -正则的，记  $E = B^{G_K}$ ，对于任何表示  $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ ，记  $D_B(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K}$ 。称  $V$  是  $B$ -容许的，如果

$$\dim_E D_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

记这样的表示构成的范畴为  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^B(G_K)$ 。

注记. 我们有如下对  $B$ -容许的理解，注意秩  $d$  表示实质上被集合  $H^1(G_K, GL_d(\mathbb{Q}_p))$  分类，那么可以发现  $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$  是  $B$ -容许的当且仅当  $[V] \in H^1(G_K, GL_d(\mathbb{Q}_p))$  诱导的  $[V]_B \in H^1(G_K, GL_d(B))$  是平凡的。

**例子.** 1. *Hilbert 90*:  $G_K$  的  $\mathbb{Q}_p$ -表示  $V$  是  $\bar{K}$ -容许的当且仅当  $G_K$  在  $V$  上的作用穿过有限商。

2.  $B = \mathbb{C}_p$ :  $G_K$  的  $\mathbb{Q}_p$ -表示是  $\mathbb{C}_p$ -容许的当且仅当  $G_K$  的惯性子群在  $V$  上的作用穿过有限商。

关于  $\mathbb{C}_p$  周期环的工作主要由 Sen 给出，其依赖了如下中间但重要的事实：

**定理 2.5** (Ax-Sen-Tate).  $\mathbb{C}_p^{G_K} = K$

### 3. Hodge-Tate:

**定义 2.6** (Hodge-Tate). 称表示  $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$  是 Hodge-Tate 的，如果如下  $\mathbb{C}_p$ -线性  $G_K$  等变映射

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(\chi_{\text{cycl}}^{-n}))^{G_K} \otimes \mathbb{C}_p(\chi_{\text{cycl}}^n) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$$

是同构。

记  $B_{HT} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(\chi_{cycl}^n)$ , 则它是  $(\mathbb{Q}_p, G_K)$ -正则的 (Tate, Sen)。由定义自动就有:  $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$  是 Hodge-Tate 的当且仅当它是  $B_{HT}$ -容许的。由  $\mathbb{C}_p$  的情况立刻就有:

**定理 2.7** (Ax-Sen-Tate).  $B_{HT}^{G_K} = K$

4. *de Rham* 与晶体: Hodge-Tate 表示仍然不足以将表示限制到性质足够好的部分, 我们实际上可以找到更精细的  $B$ , 它们能够划出所有来自几何的表示, 我们将在下面进一步讨论。

值得注意的是这些精细的  $B$  (称为周期环) 还承担了上同调比较的角色, 具体来说有如下的比较定理:

**定理 2.8** (Hodge-Tate). 对于  $K$  上紧合光滑簇  $X$ , 存在典范同构

$$H_{\acute{e}t}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \cong \bigoplus H^i(X, \Omega_{X/K}^j) \otimes_K \mathbb{C}_K(\chi_{cycl}^{-j})$$

或者我们可以重写为

$$H_{\acute{e}t}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT} \cong (\bigoplus H^i(X, \Omega_{X/K}^j)) \otimes_K B_{HT}$$

特别地, 取  $G_K$ -不动点就有

$$\bigoplus H^i(X, \Omega_{X/K}^j) \cong (H_{\acute{e}t}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{HT})^{G_K}$$

我们注意到在比较定理中系数环实际上扮演了记录所有周期的角色, 比如回到熟悉的紧合光滑复概形的情况, 我们的比较定理

$$H^n(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H_{dR}^n(Y/\mathbb{C})$$

实际上由 Poincare 对偶

$$H_{dR}^n(Y/\mathbb{C}) \times H_{2 \dim_{\mathbb{C}} Y - n}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} : (\omega, \Gamma) \rightarrow \int_{\Gamma} \omega$$

给出, 因此不精确地说: 环  $B$  记录了所有使得比较定理能够进行的周期, 因此也被称为周期环。

对于 de Rham 和晶体, 我们仍然有:

**定理 2.9** (de Rham 比较). 对于  $K$  上紧合光滑簇  $X$ , 存在典范同构

$$H_{\acute{e}t}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \cong H_{dR}^n(X/K) \otimes_K B_{dR}$$

并且  $B_{dR}$  满足:

1.  $B_{dR}^{G_K} = K$ , 上述比较同构是  $G_K$ -等变的
2.  $B_{dR}$  上携带有一个 Hodge 滤过, 使得其关联分次环是  $B_{HT}$ , 上述比较同构  $G_K$ -等变且尊重分次, 在取关联分次环后变为 Hodge-Tate 比较的两端 (即  $gr H_{dR}^n(X/K) \otimes B_{dR} = \bigoplus H^i(X, \Omega_{X/K}^j)$ ).

我们注意 de Rham 比较定理中  $H_{dR}^n(X/K) \cong (H_{\text{ét}}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR})^{G_K}$  并没有反映  $G_K$  作用, 这需要被加细到晶体上同调中才能被读取:

**定理 2.10** (晶体比较).  $X$  有好约化, 即存在  $\mathcal{X}$  在  $\mathcal{O}_K$  上紧合光滑, 假设  $k$  是  $\mathcal{O}_K$  的剩余域, 则:

$$H_{\text{ét}}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} \cong H_{\text{cris}}^n(\mathcal{X}_k/W(k))[1/p] \otimes_{K_0} B_{\text{cris}} \cong H_{\text{cris}}^n(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes_{W(k)} B_{\text{cris}}$$

其中  $K_0 = \text{Frac}(W(k)) = W(k)[1/p]$ ,  $B_{\text{cris}}$  满足:

1.  $B_{\text{cris}}^{G_K} = K_0$ , 上述比较同构是  $G_K$ -等变的
2.  $B_{\text{cris}}$  上存在 Frobenius-半线性自同态  $\varphi$  (即  $\varphi$  和  $B_{\text{cris}}$  上  $W(k)$  的 Frobenius 作用交换:  $\varphi(a \cdot m) = \text{Frob}(a) \cdot \varphi(m)$ ), 上述比较同构尊重 Frobenius 作用
3. 存在自然态射  $B_{\text{crys}} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow B_{dR}$ , 其诱导了  $B_{\text{cris}}$  上的滤过, 上述比较同构尊重这一滤过。

在本节最后我们简要说明周期环  $B_{dR}, B_{\text{cris}}$  的构造方式。

**定义 2.11** (完美胚域).  $C$  是完备非 Archimedean 赋值域, 剩余域特征  $p$ . 称  $C$  是完美胚域, 如果:

1.  $C$  上的赋值不是离散的
2.  $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$  上的  $x \mapsto x^p$  是满射

**定义 2.12.** 定义  $C$  的斜置为:

$$C^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} C$$

注记. 斜置可以对更为一般的环定义, 但只有在完美胚的时候斜置有较重要的含义。简单来说它将混特征  $(0, p)$  的对象变为纯  $p$  特征的对象, 并且这样的相互转化之间通常存在一些等价, 称为斜置等价 (例如完美胚环和它的斜置的平展景等价, 其上的完美胚域之间的等价等等)。

**命题 2.13.** 斜置  $C^\flat$  是特征  $p$  完美胚域, 其上赋值  $\nu^\flat(c) = \nu(c^\sharp)$ , 其中对  $c = (\cdots, c_1, c)_0 \in C^\flat, c^\sharp = c_0$ 。并且赋值环满足性质  $\mathcal{O}_{C^\flat} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C$ , 更进一步两者的值群相同。

**例子.**  $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$  的斜置是  $\mathbb{F}_p((u^{1/p^\infty}))$ : 因为检查赋值环是  $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$  的完备化:

注意  $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p \simeq \mathbb{F}_p[u^{1/p^\infty}]/u$ 。

另一方面我们还有  $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$  的斜置也是  $\mathbb{F}_p((u^{1/p^\infty}))$ : 即不同的混特征域可能拥有相同的斜置。

现在回到构造, 取  $F = \mathbb{C}_p^\flat$ , 固定  $\mathbb{C}_p$  上的赋值使得  $\nu(p) = 1$ 。

**定义 2.14.** 定义无穷小周期环  $A_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_F)$ , 记  $c \in \mathcal{O}_F$  的 Teichmüller 提升为  $[c] \in A_{\text{inf}}$ 。其上配备了映射  $\theta: A_{\text{inf}} \rightarrow \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$

$$\theta(\sum [c_n]p^n) = \sum c_n^\sharp p^n, c_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} = \mathcal{O}_F$$

**定义 2.15.** 定义  $B_{dR}^+ = \varprojlim_j A_{\text{inf}}[1/p] / \ker(\theta[1/p])^j$ , 其中  $\theta[1/p] : A_{\text{inf}}[1/p] \rightarrow \mathbb{C}_p$  是自动诱导的。定义其上自带的投影为:

$$\theta_{dR}^+ : B_{dR}^+ \rightarrow A_{\text{inf}}[1/p] / \ker(\theta[1/p])$$

定义  $B_{dR} = \text{Frac}(B_{dR}^+)$ , 其上的滤过由一个归一化子  $\pi$  诱导的  $\{\pi^m B_{dR}^+\}$  给出,  $G_K$  作用暂时先不讨论。前述构造的环之间有图表关系

$$\begin{array}{ccc} K_0 = \text{Frac}W(k) & \hookrightarrow & A_{\text{inf}}[1/p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K} & \hookrightarrow & B_{dR}^+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \theta[1/p] \\ \searrow \theta_{dR}^+ \\ \searrow \theta_{dR} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \mathbb{C}_p \end{array}$$

**命题 2.16.**  $\ker \theta \subseteq A_{\text{inf}}$  被元素  $\xi = [p^\flat] - p \in A_{\text{inf}}$  生成, 其中  $p^\flat \in \mathcal{O}_F$  使得  $(p^\flat)^\sharp = p$ 。

注记. 这解释了  $\theta$  的直观, 其抹去了  $[-^\flat]$  和  $\text{id}$  之间的差异: 即  $W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  这个混特征-纯特征-混特征的操作带来的差异。

**定义 2.17.** 定义

$$A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\xi^n}{n!} \in B_{dR}^+ \mid a_n \in A_{\text{inf}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

并定义  $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[1/p]$ 。这里我们可以将  $A_{\text{cris}}$  视作  $A_{\text{inf}}[x^n/n!_{n \in \mathbb{N}}]$  在  $p$ -进拓扑下的完备化, 即  $A_{\text{inf}}$  的除幂闭包在  $p$ -进拓扑下的完备化, 换言之  $a_n$  的极限在  $p$ -进拓扑下计算。

**定义 2.18.** 固定  $\varepsilon \in \varprojlim \mu_{p^v}(\bar{K}) = \{\varepsilon \in \mathcal{O}_F \mid \varepsilon^\sharp = 1\} \subseteq \mathcal{O}_F$ , 定义

$$t = \log(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n} \in B_{dR}$$

$t$  扮演的角色是分圆特征标的周期, 在其上 Galois 群的作用是以  $\chi_{\text{cycl}}$  做数乘。

**命题 2.19.**  $t \in A_{\text{cris}}, t^{p-1} \in pA_{\text{cris}}$

证明. 由于  $\theta([\varepsilon] - 1) = \varepsilon^\sharp - 1 = 1 - 1 = 0$ ,  $\theta$  的核被  $\xi$  生成, 因此可假设  $[\varepsilon] - 1 = \xi \cdot c, c \in A_{\text{inf}}$ 。从而:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n-1)! c^n \cdot \frac{\xi^n}{n!}$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)! c^n = 0$  (关于  $p$ -进拓扑) 就说明  $t \in A_{\text{cris}}$ 。

通过比较含  $p$  量, 只需证明有限和  $t' = \sum_{n=1}^p (-1)^{n+1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n}$  满足  $t'^{p-1} \in pA_{\text{cris}}$ 。然而注意除  $n = p$  项都可以提出  $[\varepsilon] - 1$ , 对于  $n = p$  项则单独分开:

$$t' = ([\varepsilon] - 1) \cdot \left( C + (-1)^{p+1} \frac{([\varepsilon] - 1)^{p-1}}{p} \right)$$

因此观察上式的两个因子, 只需要说明  $([\varepsilon] - 1)^{p-1} \in pA_{\text{cris}}$ 。

现在注意在  $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^b}$  中：我们可以假定  $\varepsilon = (\xi_{p^n})$ ，从而

$$\begin{aligned} \nu^b(\varepsilon - 1) &= \nu((\varepsilon - 1)^\sharp) = \nu(\lim(\zeta_{p^n} - 1)^{p^n}) \\ &= \lim \frac{p^n}{p^{n-1}(p-1)} = \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

另一方面： $([\varepsilon] - 1) - [\varepsilon - 1] \in pA_{\text{inf}} \subseteq pA_{\text{cris}}$ ，我们只需证明  $(\varepsilon - 1)^{p-1} \in pA_{\text{cris}}$ 。但是前述计算说明  $(\varepsilon - 1)^{p-1}$  被  $[p]^p = (\xi + p)^p$  整除，而  $\xi^p = p \cdot (p-1)! \cdot (\xi^p/p!) \in A_{\text{cris}}$  就说明了结果。□

注记. 上述证明中我们多次利用了  $A_{\text{inf}}$  中相互倾斜的理想  $(p)$  和  $(\xi) = \ker \theta$  的事实，这实际上正是斜置名称的来源。

**推论 2.20.**  $B_{\text{cris}}^+[1/t] = A_{\text{cris}}[1/t]$

这是因为上述证明说明  $p$  在  $A_{\text{cris}}[1/t]$  中是单位。

**定义 2.21.** 定义  $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[1/t] = A_{\text{cris}}[1/t] = A_{\text{inf}}[1/p, 1/t]$ 。

## 2.2 Fargues-Fontaine 曲线

我们下面引入一个重要的几何对象，称为 Fargues-Fontaine 曲线，它能够部分地解释我们前面给出的诸多构造。直观上说，Fargues-Fontaine 曲线的闭点参数化了一个纯特征代数闭域的正置。从现在起固定  $F$  为一代数闭完美胚纯特征  $p$  域，以及其上的赋值  $\nu_F, \mathfrak{m}_F, \mathcal{O}_F, A_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_F)$ 。

**定义 2.22.**  $F$  的正置是指完美胚域  $C$  以及一个连续同构  $\iota: F \simeq C^\flat$ 。

**定理 2.23** (Fontaine, Kedlaya-Liu). 称  $\xi \in A_{\text{inf}}$  是本原的，如果其具有形式  $[\varpi] - u p, \varpi \in \mathfrak{m}_F, u \in A_{\text{inf}}^\times$ ，称其非退化如果它不能被  $p$  整除。那么：

$$\{\text{equivalence classes of untilts of } F\} \xrightarrow{\simeq} \{\text{Principle ideals of } A_{\text{inf}} \text{ generated by a primitive element}\}$$

每个正置  $C$  对应的理想正是  $\ker(\theta_C)$  (回忆定理 2.16)

记零特征正置的等价类 (即除去平凡正置) 构成的集合为  $Y$ 。一个令人惊讶的观察是  $Y$  和去点单位圆盘  $\mathbb{D}^*$  之间的相似性。例如：

**例子.** 考虑正置上的乘性赋值  $|\cdot|_C$ ：考虑  $C$  对应的本原元  $\xi = [m] - u p, m \in \mathfrak{m}_F, u \in A_{\text{inf}}^\times$ ，则

$$|p|_C = |\theta_C([m])\theta_C(u)^{-1}| = |\theta_C([m])|_C = |m^\sharp|_C = |m|$$

从而落在区间  $(0, 1)$  中。

以及：

**例子.**

$$A_{\text{inf}}[1/p, 1/[\varpi]] = \{ \sum [c_n] p^n \in W(F)[1/p], |c_n| \text{ bounded} \}$$

这是因为直接检查发现其落在  $A_{\text{inf}}[1/p, 1/[\varpi]]$  中当且仅当其被  $[\varpi^i]$  乘入  $A_{\text{inf}}[1/p]$  中，直接检查  $p$ -进赋值发现这要求  $|c_n| \leq |\varpi^{-i}|$ 。



上述两个性质分别反映了：圆环对应的半径以及有界系数的 Laurent 展开定义了圆环上的全纯函数。类似地，我们也可以考虑任意圆环收敛半径的幂级数展开：

**定义 2.24.** 给定实数  $0 < \rho < 1$ ，定义  $A_{\inf}[1/p, 1/[\varpi]]$  上的  $\rho$ -范数为

$$|\sum [c_n]p^n|_\rho = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (|c_n|\rho^n)$$

定义圆环  $[a, b]$  上的解析函数环为： $B_{[a, b]}$  是  $A_{\inf}[1/p, 1/[\varpi]]$  对  $a$ -范数和  $b$ -范数的完备化。特别地，初等论述直接说明  $|f|_\rho \leq \sup(|f|_a, |f|_b)$ ,  $\rho \in [a, b]$ ，从而我们知道在  $a$ -范数和  $b$ -范数下 Cauchy 当且仅当这个序列在  $\rho$ -范数下 Cauchy,  $\forall \rho \in [a, b]$ 。

从而我们有：如果  $[a, b] \subseteq [a', b'] \subseteq (0, 1)$ ，就有  $B_{[a', b']} \subseteq B_{[a, b]}$ 。现在定义

$$B_F = B = \varprojlim B_{[a, b]}$$

注记. 上述对  $B$  的操作也被称为 Frechet 完备化。

**命题 2.25.**  $C$  是  $F$  的特征 0 正置，那么  $\theta_C : A_{\inf} \rightarrow C$  延拓成为一个满的开映射  $\theta_C : B \rightarrow C$ 。

证明. 取  $\rho = |p|_C$ ，那么存在一个延拓  $B_{[\rho, \rho]} \rightarrow C$ ，这就说明了结果。□

注记. 这是一个对  $C$  成为  $Y$  上对应点处剩余类域的暗示。

**定理 2.26.**  $B$  的闭极大理想和  $Y$  中元素一一对应，特别地对于每个正置  $C$  对应的点  $y$ ， $B$  在  $y$  处局部环的完备化对应的正是 de Rham 周期环  $B_{dR}^+(y)$ 。

我们下面希望将正置参数化，但首先注意到给定一个正置  $\iota : C^b \rightarrow F$ ，我们有 Frobenius 挠：即  $\varphi_F^n \circ \iota$  仍然是一个正置，我们自然试图理解不记录这一 Frobenius 挠的正置的模空间是什么。一个通常的定义（射影）概形的方法是寻找其上一个极丰沛线丛  $\mathcal{L}$ ，然后就有  $X = \text{Proj}(\oplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}))$ 。

现在我们希望找到  $Y/\phi$  的对应物，我们已经知道  $B$  是  $Y$  “上的解析函数”，那么我们自然希望的是这个线丛来自  $Y$ ，因此它应当是一个自由  $B$ -模配备上一个  $\phi$ -半线性映射（以满足下降）。也许这里应当仔细检查 Frobenius 挠诱导的  $B$  的理想如何变动，总之可以计算得到合适的线丛应当满足  $\phi(e) = p^{-1}e$ ，从而：

$$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) = (Be^{\otimes n})^{\phi=1} = B^{\phi=p^n}$$

这诱导了如下定义：

**定义 2.27** (Fargues-Fontaine 曲线)。

$$X_F = \text{Proj}(\oplus_{n \geq 0} B^{\phi=p^n})$$

注记. 如果采用进制空间的语言， $B$  的构造会相对更加自然。事实上我们直接有  $Y = \text{Spa}(A_{\inf}, A_{\inf})$ ，从这个视角看  $X = Y/\phi$  会更加直接。另外这里是我个人的一点猜想，正如同 Fargues-Fontaine 曲线的完备局部环是 de Rham 周期环一样，似乎理应有  $Y$  上结构层的完备局部环是晶体周期环，但我并不清楚这样的事情是否存在。另外我似乎并没有清晰地理解比较定理和 FF 曲线之间的直接联系。

注记. 在上述构造中  $A$  对应的均为整系数上同调的周期， $B$  则对应的是有理系数者。

### 2.3 [BMS2] 主结果

接下来我们简要解释 [BMS2] 的主要工作。在前述比较定理中我们处理的都是有理系数上同调之间的比较，一个自然的问题是這樣的比较定理是否保持整系数结构，或者能否有更精确的整系数上同调之间的比较。以晶体上同调的比较为例，我们有的比较同构是：

$$H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} \cong H_{\text{cris}}^n(\mathcal{X}_K/W(k)) \otimes_{W(k)} B_{\text{cris}}$$

特别地，我们从平展上同调上读取到的是  $H_{\text{cris}}^i(\mathcal{X}_k)[1/p]$ ，前述自然的疑问恰好是希望寻找上述同构不添加  $1/p$  的版本。从前述经典故事出发的技术大多局限在对底域  $K$  的分歧行为有要求的情形里。[BMS1] 构造了  $A_{\text{inf}}$ -取值的上同调理论，指出在不对  $K$  有任何限制的情况下，上述  $p$ -进上同调理论都来自  $A_{\text{inf}}$  的基变换。具体来说给定任意底域  $K$  上的紧合光滑概形，其有好约化  $\mathcal{X}$ ，那么对  $\mathcal{X}$  到  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  上的基变换我们能构造一个  $A_{\text{inf}}$ -取值的上同调：

$$\begin{array}{ccc} & & W(\mathbb{C}_p^\flat) \\ & \nearrow \text{étale} & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \xleftarrow[\text{de Rham}]{\theta} A_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^\flat}) & & \\ & \searrow \text{crystalline} & \\ & & W(k) \end{array}$$

使得沿上述三个箭头基变换都产生了各自的上同调理论：

1. 平展：  $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes_{A_{\text{inf}}}^{\mathbb{L}} W(\mathbb{C}_p^\flat) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{L}} W(\mathbb{C}_p^\flat)$
2. de Rham：  $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes_{A_{\text{inf}}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \simeq R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$
3. 晶体：  $R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes_{A_{\text{inf}}}^{\mathbb{L}} W(k) \simeq R\Gamma_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$

并且还具有性质

1.  $H_{A_{\text{inf}}}^i(\mathcal{X})$  是有限展示  $A_{\text{inf}}$ -模
2.  $H_{A_{\text{inf}}}^i(\mathcal{X})[1/p]$  是有限生成自由  $A_{\text{inf}}[1/p]$ -模
3.  $H_{A_{\text{inf}}}^i(\mathcal{X})$  携带有 Frobenius-半线性自同态  $\varphi$ ，其在将  $\ker \theta$  的生成元  $\xi$  可逆后变为同构  $\varphi : H_{A_{\text{inf}}}^i(\mathcal{X})[1/\xi] \rightarrow H_{A_{\text{inf}}}^i(\mathcal{X})[1/\varphi(\xi)]$

[BMS2] 的主要工作在于给出了和 [BMS1] 独立的  $A_{\text{inf}}$ -上同调的构造方式，这一构造简单来说是在  $\text{TC}^-(\cdot; \mathbb{Z}_p)$  上构造了一个滤链，它的诸分次给出了上述  $p$ -进上同调。更进一步，我们通过一个合适的概形范畴上的 Grothendieck 拓扑以及检查诸多构造在这个拓扑下的层性质，从而将上述滤链的构造和比较归化到了简单的情况。

这一方法能够更进一步给出多于  $A_{\text{inf}}$ -上同调的信息：在经典  $p$ -进 Hodge 理论中我们有着如下理论，它是对晶体表示分类的一个尝试。

选定  $\varpi \in \mathcal{O}_K$ ，定义  $\mathfrak{S} = W(k)[[z]]$ ， $\tilde{\theta} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}_K : z \rightarrow \varpi$ 。  $\ker \tilde{\theta}$  被  $E(z) \in \mathfrak{S}$  生成。

**定义 2.28.** 一个 Breuil-Kisin 模是指有限生成  $\mathfrak{S}$ -模  $M$  以及一个同构

$$M \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} \mathfrak{S}[1/E] \rightarrow M[1/E]$$

这里  $\varphi$  指  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S} : z \mapsto z^p, w \mapsto F(w)$  诱导的  $\mathfrak{S}$  在  $\mathfrak{S}[1/E]$  上的作用。

这一定义具有如下几何含义：它能够探测一类来自几何的表示。具体来说考虑无挠  $p$ -进平展上同调  $T^i = H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)/\text{tors.}$ ，那么  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T^i, \mathbb{Z}_p)$  是一个 Breuil-Kisin 模，并且在某种程度上这一构造能够诱导了一些特定晶体表示和 Breuil-Kisin 模之间的等价。<sup>1</sup>

上述经典理论促使人们猜测 Breuil-Kisin 模的几何化诠释，这也是 [BMS2] 得到的额外结果：即在  $A_{\text{inf}}$ -上同调之下，还有 Breuil-Kisin 模取值的上同调，它能够还原前述上同调：

$$\begin{array}{ccccc} & & & & W(\mathbb{C}_p^b) \\ & & & & \uparrow \text{étale} \\ \mathcal{O}_K & \xleftarrow[\theta = \tilde{\theta} \circ \varphi]{\text{de Rham}} & \mathfrak{S} & \xrightarrow{A_{\text{inf}}} & A_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^b}) \\ & & \searrow \text{crystalline} & & \downarrow \\ & & & & W(k) \end{array}$$

使得沿上述箭头基变换都产生了各自的上同调理论。这里我们仍然固定  $\mathcal{X}$  是  $\mathcal{O}_K$  上紧合光滑概形：

1.  $A_{\text{inf}} : R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathfrak{S}} A_{\text{inf}} \simeq R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}_{\mathcal{O}_C})$
2. de Rham:  $R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathfrak{S}, \theta}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_K \simeq R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}/\mathcal{O}_K)$   
这里基变换态射是  $\theta := \tilde{\theta} \circ \varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}_K$
3. 晶体:  $R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathfrak{S}}^{\mathbb{L}} W(k) \simeq R\Gamma_{\text{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$

并且还具有性质

1.  $R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X})$  是  $\mathfrak{S}$ -模完美复形
2.  $H_{\mathfrak{S}}^i(\mathcal{X})$  是 Breuil-Kisin 模
3. 存在  $\varphi$ -线性的 Frobenius 映射  $\varphi : R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X}) \rightarrow R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X})$ ，使得其诱导了同构

$$R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} \mathfrak{S}[1/E] \simeq R\Gamma_{\mathfrak{S}}(\mathcal{X})[1/E]$$

Breuil-Kisin 上同调的构造也同样依赖于检查特定的拓扑循环同调，只不过我们需要考虑一些相对版本的构造。

本次讨论班中我们将主要跟随 [BMS2] 的构造，给出依赖于 THH 和  $\text{TC}^-$  的  $A_{\text{inf}}$ -上同调的构造，并利用相对版本的 THH 和  $\text{TC}^-$  完成本节承诺的 Breuil-Kisin 模取值上同调。

关于比较定理的证明，我们采取如下策略：

---

<sup>1</sup>未检查这一结果的具体表述。

1.  $A_{\text{inf}}$ -de Rham ( $\text{HC}^-$ -de Rham) 比较: 我们采取 [AN18dR] 的构造, 简单来说其指出了携带 HKR 滤过的  $\text{HC}^-$  作为滤对象上携带着来自 Beilinson  $t$ -结构的倍速滤过: 其分次有着精确的来自余切复形的描述。
2.  $A_{\text{inf}}$ -晶体比较: 我们采取 [BMS2] 的构造, 其主要利用拟合割下降和到完美情形的约化完成证明。同时我们提及存在前述 Beilinson  $t$ -结构的类似构造, 这一方法的主要参考资料为 [AN18c]。
3.  $A_{\text{inf}}$ -平展比较: 这一部分证明较为复杂, 依 [BMS2] 中所述暂时不存在直接比较 THH 和  $\text{TC}^-$  构造的上同调和平展上同调的方法, 其比较方式是通过与 [BMS1] 的经典构造完成的。我们采用的策略与之不同: 在后半部分我们引入 [BS19] 中构造的棱镜上同调, 并利用其中的棱镜- $A_{\text{inf}}$  比较和棱镜-平展比较完成比较定理证明。
4. BK 模- $A_{\text{inf}}$  比较: 这是标准的 THH 基变换论述, 我们将在构造 Breuil-Kisin 模取值上同调的过程中完成证明。

## 2.4 完美胚环

关于斜置、完美胚和无穷小周期环我们有着更为一般的构造, 它们被称之为完美棱镜。不过现在我们暂时不触及这些内容, 只注重一些比较初等的代数性质。

**定义 2.29.** 称环  $S$  是完美胚的, 如果:

1.  $S$  是  $\pi$ -进完备的,  $\exists \pi \in S, \pi^p | p$
2. Frobenius 映射  $\varphi: S/pS \rightarrow S/pS$  是满射
3.  $\ker \theta$  是主理想, 其中  $\theta: A_{\text{inf}}(S) = W(S^\flat) \rightarrow S$

我们需要解释一下记号  $\theta$ , 这里和完美胚域不完全一样。 $\theta: A_{\text{inf}}(S) \rightarrow S$  定义如下:  $A_{\text{inf}}(S) = W(S^\flat)$ ,  $S^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} S/pS$ , 我们需要如下结果:

**引理 2.30.**

$$\begin{aligned} S^\flat &= \varprojlim_{x \mapsto x^p} S = \varprojlim_{x \mapsto x^p} S/\pi S \\ A_{\text{inf}}(S) &= \varprojlim W_r(S) \end{aligned}$$

**证明.** 第一部分是直接的: 我们考虑映射  $\varprojlim S \rightarrow S^\flat \rightarrow \varprojlim S/\pi S$ 。

给定  $(x_i), (y_i) \in \varprojlim S$ , 使得其在  $S^\flat$  中像相同, 那么  $x_i = y_i \pmod p \implies x_{i+n}^{p^n} = y_{i+n}^{p^n} \pmod{p^{n+1}}$ , 从而  $x_i = y_i \pmod{p^{n+1}}$ , 因此  $x_i = y_i$ , 说明了第一个箭头的单性。

给定  $(y_i) \in S^\flat = \varprojlim S/pS$ , 选定提升  $\tilde{y}_i \in S$ , 那么直接检查  $p$ -进拓扑就有  $\lim(\tilde{y}_{i+n}^{p^n}) = x_i \in S$  存在, 那么  $(x_i) \in \varprojlim S$  就是满足要求者。对于另一个箭头, 即  $\pi$  的情况同理。

第二部分则是源自:

$$W(S^\flat) = \varprojlim W_r(S^\flat) = \varprojlim \varprojlim W_r(S/\pi S) = \varprojlim W_r(S/\pi S)$$

进一步  $W(S/\pi^s S) \rightarrow W(S/\pi S)$  是同构, 因为我们逐项检查核, 只需计算  $W_r(\pi S/\pi^s S)$ , 直接计算 Frobenius 发现它们被若干次 Frobenius 作用后消失。因此就有

$$\varprojlim W_r(S/\pi S) = \varprojlim \varprojlim W_r(S/\pi^s S) = \varprojlim W_r(\varprojlim S/\pi^s S) = W(S)$$

□

因此我们定义  $\theta : W(S) \rightarrow \varprojlim W_r(S) \rightarrow W_1(S) = S$ , 在  $S$  是完美胚域的时候这跟前文的定义是相符的。特别地我们有如下对  $A_{\inf}$  的刻画, 这个命题解释了无穷小周期环名称的来源:

**命题 2.31.** 如果  $S$  是完美胚环, 那么  $A_{\inf}(S) \rightarrow S$  具有如下万有性质:  $\theta$  满,  $A_{\inf}(S)$  是  $\ker \theta$ -完备的; 并且对于任何  $f : A \rightarrow S$  满足  $f$  满,  $A$  是  $\ker f$ -完备的, 就有  $g : A_{\inf}(S) \rightarrow A$  使得  $f \circ g = \theta$ 。

**命题 2.32.**  $R$  是完美胚环, 则  $\theta : A_{\inf}(R) \rightarrow R$  的核被如下非零因子  $\xi = p + [\pi^b]^p \alpha$  生成, 其中  $\pi^b = (\pi, \pi^{1/p}, \dots) \in R^b, \alpha \in A_{\inf}(R)$ 。

证明. 由 [DK14] 知,  $\theta : A_{\inf}(S) \rightarrow S$  是满射, 因此存在  $x \in A_{\inf}(S)$  使得  $p = \pi^p \theta(-x)$ , 因此  $\xi = p + [\pi^b]^p x \in \ker \theta$ 。

现在  $\ker \theta$  是主理想, 假设其生成元为  $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, \dots) \in A_{\inf}(S)$ , 有  $\xi = \xi' a$ 。那么考虑对应的 Witt 向量展开:

$$\begin{aligned} (\pi^{bp}, 1 + \pi^{bp^2} x_1, \dots) &= p + [\pi^b]^p x = \xi = \xi' a \\ &= (\xi'_0, \dots)(a_0, \dots) = (\xi'_0 a_0, \xi'_0{}^p + \xi'_1 a_0^p, \dots) \end{aligned}$$

从而  $\xi'_1 a_0^p = 1 + \pi^{bp^2} - \xi'_0{}^p a_1$ , 注意其在  $S^b = \varprojlim S/\pi S \xrightarrow{pr_1} S/\pi S$  下的像是 1, 因此其是单位, 从而  $\xi'_1, a_0$  都是  $S^b$  中的单位, 因此  $a \in A_{\inf}(S)^\times$ , 这就说明了结果。□

我们还有如下性质:

**引理 2.33.** 完美胚环都是既约的。

证明. 如果  $a^N = 0, N \gg 1$ , 则  $(a/\pi^n)^N = 0$ , 从而  $a/\pi^n$  的幂是有界的。因此由  $\pi$ -进完备性就有  $a = 0$ 。□

## I BMS 滤过和 $A_{\inf}$ 上同调

### 3 余切复形、Hochschild 同调和拓扑 Hochschild 同调

#### 3.1 非 Abel 导出

首先我们介绍余切复形, 它应当被理解为微分模  $\Omega_{-/-}^1$  的导出版本。为轻便起见, 我们采用非 Abel 导出函子来定义余切复形。

**定理 3.1** ([HTT, Proposition 5.5.8.15]).  $\mathcal{C}$  是一小  $\infty$ -范畴, 其中有有限余积;  $\mathcal{D}$  是一  $\infty$ -范畴, 其中有滤余极限和几何实现  $(\varinjlim_{\Delta^{op}})$ 。

记  $\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C})$  为  $\mathcal{C}$  上所有保持有限积的（空间值）预层构成的全子范畴， $\text{Fun}_\Sigma$  为全体保持有限余极限和几何实现的函子张成的全子范畴。那么 Yoneda 嵌入  $j : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C})$  诱导的

$$j^* : \text{Fun}_\Sigma(\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

是等价。

特别地，给定函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ，其诱导的  $\mathcal{P}_\Sigma(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  称为  $F$  的非 Abel 导出。

**定理 3.2** ([HTT, Corollary 5.5.9.3]).  $\mathcal{P}_\Sigma(\text{Poly}_R) = \text{sCAlg}_R$

**定义 3.3** (余切复形). 在前文的设定下，取  $\mathcal{C} = \text{Poly}_R, \mathcal{D} = D(R)$ ，函子  $F = \Omega_{-/R}^1$ ，其非 Abel 导出  $L_{-/R} : \text{sCAlg}_R \rightarrow D(R)$  称为 ( $R$ -模的) 余切复形。

特别地，我们也记其与  $\text{CAlg}_R \rightarrow \text{sCAlg}_R$  的复合为  $L_{-/R} : \text{CAlg}_R \rightarrow D(R)$ 。

注记. 类似地，我们定义余切复形的楔积  $\wedge^i L_{-/R}$  为  $\Omega_{-/R}^i$  的导出，

**命题 3.4** ([Stacks, 08P5]). 给定环态射  $A \rightarrow B$ :

1.  $L_{B/A} \in D^{\leq 0}(B)$ ，并且  $H^0(L_{B/A}) \cong \Omega_{B/A}^1$
2. 如果  $A \rightarrow B$  光滑，则  $L_{B/A} \cong \Omega_{B/A}^1[0]$ ，更一般地  $\wedge^i L_{B/A} \cong \Omega_{B/A}^i[0]$
3. 给定  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ，则如下为  $D(C)$  中好三角：

$$L_{B/A} \otimes_B^L C \rightarrow L_{C/A} \rightarrow L_{C/B} \rightarrow \cdots$$

4. 给定  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$ ，则如下基变换是同构

$$L_{C/A} \otimes_A^L B \cong L_{(C \otimes_A^L B)/B}$$

### 3.2 导出 Hochschild 同调和 HKR 滤过

我们不再回顾 Hochschild 同调和拓扑 Hochschild 同调的构造。注意为了和拓扑 Hochschild 同调的构造： $A \otimes_{A \otimes A^{op}} A \in \text{CAlg}(Sp)$  相符，我们应当将经典 Hochschild 同调的构造替换为其“导出”版本，准确地说：

**定义 3.5** (Shukla 同调). 定义 Shukla 同调  $Sh(-/R) : \text{sCAlg}_R \rightarrow D(R)$  为函子  $\text{HH}(-/R) : \text{Poly}_R \rightarrow D(R)$  的非 Abel 导出。

注记.  $R \rightarrow A$  平坦时 Shukla 同调和经典 Hochschild 同调相符，这符合我们对 Shukla 同调是将张量积更换为导出张量积的期望。

从此之后在谈论 Hochschild 同调时我们永远默认谈论的是 Shukla 同调，并用  $\text{HH}$  记之。

**例子.**  $\text{THH}(A) \otimes_{\text{THH}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z} \simeq \text{HH}(A)$

接下来介绍 Hochschild-Kostant-Rosenberg 滤过，首先我们从经典结论开始：

**定理 3.6** (Hochschild-Kostant-Rosenberg).  $A$  是光滑  $R$ -代数，则  $\Omega_{A/R}^n \rightarrow \text{HH}_n(A/R), n \geq 0$  是同构。

证明. 我们只需证明典范映射

$$\bigwedge_A^* \mathrm{Tor}_1^{A \otimes_R A}(A, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_*^{A \otimes_R A}(A, A)$$

是同构。现在已知

$$\mathrm{Tor}_1^{A \otimes_R A}(A, A) = I/I^2, \quad I = \ker(\mu : A \otimes_R A \rightarrow A)$$

现在如果  $I = (r_1, \dots, r_d)$  由正则序列生成 ( $r_i$  在  $(A \otimes_R A)/(r_1, \dots, r_{d-1})$  中的非零因子), 则  $A = (A \otimes_R A)/I$  作为  $A \otimes_R A$  模被 Koszul 复形消解:

$$0 \rightarrow (A \otimes_R A)^{\binom{d}{d}} \rightarrow \dots \rightarrow (A \otimes_R A)^{\binom{d}{1}} \rightarrow A \otimes_R A \rightarrow (A \otimes_R A)/(r_1, \dots, r_d) \rightarrow 0$$

这个链复形由若干链复形  $0 \rightarrow A \otimes_R A \xrightarrow{r_i} A \otimes_R A \rightarrow 0$  做张量积得到。从而用这一消解计算 Tor 知所需典范映射确为同构, 因此这完成了  $I$  被有限正则序列生成的情况。

另一方面, 对于一般的光滑  $R$ -代数  $A$ , 由 Hochschild 同调的 Zariski 下降, 即  $\mathrm{HH}(-/R)$  是 Zariski 层 (事实上在后面将会看到它是 fpqc 层)。因此我们可以 Zariski 局部地论证, 从而问题归化到了  $A$  局部的情况。

现在由光滑代数的局部结构 [Stacks, 00TA], 此时  $A \otimes_R A, A$  都是正则局部环, 从而  $A \otimes_R A \rightarrow A$  的核被正则序列生成, 这就说明了结果。□

**定义 3.7** (HKR 滤过). 考虑  $\mathrm{HH}(-/R) : \mathrm{Poly}_R \rightarrow D(R)$  到  $\mathrm{sCAlg}_R \rightarrow D(R)$  的 Kan 扩张, Postnikov 滤过  $\tau_{\geq n} \mathrm{HH}(-/R)$  也扩张成为一般的  $\mathrm{HH}(-/R)$  的滤过  $\mathrm{Fil}_{\mathrm{HKR}}$ 。

现在由 HKR 定理, 多项式代数上 HH 的 Postnikov 滤过就是诸微分模, 因此有

$$gr_{\mathrm{HKR}}^i \mathrm{HH}(-/R) = \wedge^i L_{-/R}[i]$$

### 3.3 导出 de Rham 上同调和 Cartier 同构

**定义 3.8** (导出 de Rham 上同调). 给定环  $R$ , 定义导出 de Rham 上同调  $L\Omega_{-/R} : \mathrm{CAlg}_R \rightarrow D(R)$  为函子  $\mathrm{Poly}_R \rightarrow D(R) : A \mapsto \Omega_{A/R}^\bullet$  的非 Abel 导出。

**定理 3.9** (Cartier 同构). 给定环  $R \in \mathrm{CAlg}_{\mathbb{F}_p}$ ,  $S = R[x_1, \dots, x_r]$ ,  $\phi_{S/R} : S^{(1)} := S \otimes_{R, \mathrm{Frob}} R \rightarrow S$  为  $S$  沿着其上 Frobenius 的基变换, 那么有拟同构

$$(\Omega_{S^{(1)}/R}^\bullet, 0) \rightarrow (\Omega_{S/R}^\bullet, d_{dR})$$

这个拟同构在 0 处是  $\phi_{S/R}$  并且将  $dx_j \mapsto x_j^{p-1} dx_j$

证明. 只需计算

$$\Omega_{S/R}^i = \bigoplus_{e_1, \dots, e_r \in \{0, \dots, p-1\}} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq r} x_1^{e_1} \dots x_r^{e_r} S^{(1)} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i} \quad (3.1)$$

考虑逆映射  $(\Omega_{S/R}^\bullet, d_{dR}) \rightarrow (\Omega_{S^{(1)}/R}^\bullet, 0)$

$$x_1^{e_1} \dots x_r^{e_r} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i} \mapsto dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i}$$

其中

$$e_j = \begin{cases} p-1 & j \in \{j_1, \dots, j_i\} \\ 0 & j \notin \{j_1, \dots, j_i\} \end{cases}.$$

只需证明两个映射的复合和  $\text{id}$  同伦，归纳知只需证明  $r = 1$  的情况，此时直接计算就说明了结果：此时映射为  $x_1^{e_1} f \mapsto e_1 x_1^{e_1-1} f dx, e_1 = 1, \dots, p-1$ ，这当然可逆。□

**定理 3.10** (导出 Cartier 同构). 给定环  $R \in \text{CAlg}_{\mathbb{F}_p}, A \in \text{CAlg}_R$ ，则存在  $L\Omega_{A/R}$  上的滤过，称为共轭滤过 (*conjugate filtration*)，并且每个分次

$$\text{gr}^i L\Omega_{A/R} \cong (\wedge^i L_{A^{(1)}/R})[-i]$$

证明. 如果  $R$  是多项式环，此时取滤过为 Postnikov 滤过即可，那么前一命题和导出函子共同说明了结果。□

注记. 对于一般的环，上述构造仍然成立，也称之为共轭滤过。

### 3.4 余切复形的 fpqc 下降

**定理 3.11.** 固定环  $R, \forall i \geq 0, A \mapsto \wedge^i L_{A/R}$  是 fpqc 层。即如果  $A \rightarrow B$  忠实平坦，就有等价

$$\wedge^i L_{A/R} \simeq \lim(\wedge^i L_{B/R} \rightrightarrows \wedge^i L_{(B \otimes_A B)/R} \cdots)$$

证明. 我们首先证明  $i = 0, 1$  的情况： $i = 0$  时这不过是忠实平坦下降， $i = 1$  时证明如下：取  $B^\bullet$  为  $A \rightarrow B$  的 Čech 脉，那么考虑  $R \rightarrow A \rightarrow B^\bullet$  给出的

$$L_{A/R} \otimes_A^L B^\bullet \rightarrow L_{B^\bullet/R} \rightarrow L_{B^\bullet/A}$$

由于我们已经知道余切复形都是  $D^{\leq 0}$  中的对象，由 Dold-Kan 对应将上述对象都视为单纯对象，此时只需要证明：

1.  $L_{A/R} \rightarrow \lim(L_{A/R} \otimes_A B^\bullet)$  是同构
2.  $\text{Tot}(L_{B^\bullet/A}) = 0$

这样在上述好三角里对  $\Delta$  取极限就得到了要证明的结果。

再一次地，条目 1 不过是 fpqc 下降 ( $L_{A/R}$  可以被替换为任何  $D(A)$  中的对象)。条目 2 则是源于计算  $\pi_i L_{B^\bullet/A} = H^{-i}(L_{B^\bullet/A})$  (这里  $\pi_i$  指单纯同伦群，由 Dold-Kan 对应其就是  $L_{B^\bullet/A} \in D^{\leq 0}$  的同调群)。

由于  $A \rightarrow B$  忠实平坦

$$H^{-i}(L_{B^\bullet/A}) = 0 \Leftarrow H^{-i}(L_{B^\bullet/A}) \otimes_A B = H^{-i}(L_{B^\bullet/A} \otimes_A B) = 0$$

倒数第二个等号是万有系数定理。现在取  $B \rightarrow C^\bullet$  为  $A \rightarrow B^\bullet$  沿  $A \rightarrow B$  的基变换，此时  $C^\bullet$  是  $B \rightarrow B \otimes_A B$  的 Čech 脉。然而映射  $B \rightarrow B \otimes_A B$  有截面，因此  $B \rightarrow C^\bullet$  是单纯同伦等价，从而  $H^{-i}(L_{C^\bullet/B}) = H^{-i}(L_{B/B}) = 0$ 。由余切复形的基变换， $H^{-i}(L_{B^\bullet/A} \otimes_A B) = H^{-i}(L_{C^\bullet/B}) = 0$ ，这就说明了结果。



接下来我们说明一般的  $\wedge^i$  的情况：正合列  $L_{A/R} \otimes_A^L B^\bullet \rightarrow L_{B^\bullet/R} \rightarrow L_{B^\bullet/A}$  诱导了  $\wedge^i L_{B^\bullet/R}$  上的滤过，其中每个分次分别是

$$gr^j \wedge^i L_{B^\bullet/R} \simeq (\wedge^j L_{A/R} \otimes_A^L B^\bullet) \otimes_{B^\bullet}^L \wedge^{i-j} L_{B^\bullet/A}$$

因此逐分次看，类似证明： $\wedge^j L_{A/R} \rightarrow \lim(\wedge^j L_{A/R} \otimes_A B^\bullet)$  是同构，并且  $\text{Tot}(\wedge^{i-j} L_{B^\bullet/A}) = 0$ ，从而取极限后，上述滤过退化成所需的同构。□

利用 HKR 滤过，我们可以将上述下降结果推广到 Hochschild 同调和 THH 上，具体如下：

**定理 3.12.**

1. 对任何交换环  $R$ :

$$\text{HH}(-/R), \text{HC}^-( -/R), \text{HH}(-/R)_{h\mathbb{T}}, \text{HP}(-/R)$$

作为  $\text{CAlg}_R$  出发的函子都是  $fpqc$  层

- 2.

$$\text{THH}(-), \text{TC}^-( -), \text{THH}(-)_{h\mathbb{T}}, \text{TP}(-)$$

作为  $\text{CRing}$  出发的函子都是  $fpqc$  层

证明.

1. 定理 3.11 说明  $\text{HH}(-/R)$  在 HKR 的每个滤过下都是层，从而取极限说明  $\text{HH}(-R)$  也是如此。类似地可以说明  $\text{HC}^-$ 。 $\text{HH}(-/R)_{h\mathbb{T}}$  则是源于 HKR 滤过是弱 Postnikov 的，注意  $(-)_{h\mathbb{T}}$  是右  $t$ -正合的，从而检查同伦群和 HKR 的每个分次部分的连通度就说明了：

$$\pi_* \text{HH}(-/R)_{h\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} \pi_*(\lim(\text{HH}(-/R)/\text{Fil}_{\text{HKR}}^n)_{h\mathbb{T}})$$

因此只需证明后者是  $fpqc$  层，从而只需证明每个  $(gr_{\text{HKR}}^i \text{HH}(-/R))_{h\mathbb{T}}$  是层。然而检查 Hochschild 同调上的  $\mathbb{T}$ -作用知其在每个分次部分上平凡地作用，从而再一次由 HKR 滤过的确是层，这就说明了 Hochschild 同调部分的结果。

2. 同理我们只需证明  $\text{THH}(-)$  的情况：此时考虑滤过  $\{\text{THH}(A) \otimes_{\text{THH}(\mathbb{Z})} \tau_{\leq n} \text{THH}(\mathbb{Z})\}$ ，从而只需证明每个分次  $(\text{THH}(A) \otimes_{\text{THH}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_n \text{THH}(\mathbb{Z})$  是层。

然而我们有 Bökstedt 的计算： $\pi_n \text{THH}(\mathbb{Z})$  是有限 Abel 群因此问题归结到证明

$\text{THH}(-) \otimes_{\text{THH}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z} = \text{HH}(-)$  是层，这就说明了结果。

□

### 3.5 循环对象和拓扑 Hochschild 同调

尽管我们已经不加说明的使用了拓扑 Hochschild 同调的诸多性质，在这里我仍想简要引用 Nikolaus-Scholze 的工作 [NS18] 简要叙述拓扑 Hochschild 同调上的  $\mathbb{T}$ -作用以及其带来的诸多相关副产物。本节内容主要参考 [NS18, Appendix B]，本节目标是简要介绍 THH 上携带的  $\mathbb{T}$ -作用。为此我们定义诸多纯组合的范畴并定义其产出的“循环对象”，最后证明其上携带  $\mathbb{T}$ -作用。

**定义 3.13** (Connes 循环范畴).

$\Lambda_\infty$ : 定义  $\Lambda_\infty \subseteq \mathbb{Z}\text{PoSet}$  为所有形如  $(1/n)\mathbb{Z}, n \geq 1$  的对象构成的全子范畴，其中  $\text{PoSet}$  是全体偏序集和不减映射构成的范畴， $\mathbb{Z}\text{PoSet}$  是带  $\mathbb{Z}$ -作用的偏序集。

$B\mathbb{Z}$  在  $\Lambda_\infty$  上有一作用，具体如下：这等价于  $\Lambda_\infty$  的态射空间上有  $\mathbb{Z}$  作用，并且  $\mathbb{Z}$  的生成元  $\sigma$  将  $f: (1/n)\mathbb{Z} \rightarrow (1/m)\mathbb{Z}$  映为  $\sigma(f) = f + 1$ 。

$\Lambda_p$ : 定义  $\Lambda_p = \Lambda_\infty / B(p\mathbb{Z})$ ，即对象和  $\Lambda_\infty$  相同，态射空间商去  $\sigma^p$  作用。

$\Lambda$ : 定义  $\Lambda = \Lambda_1$ ，自然  $\Lambda = \Lambda_p / BC_p$ 。

**命题 3.14.**  $\Lambda_\infty$  是自对偶的，并且这一对偶是  $B\mathbb{Z}$ -等变的，从而也可下降到  $\Lambda_p, \Lambda$  上。

证明. 给定  $f: S \rightarrow T, S, T \in \Lambda_\infty$ ，定义  $f^\circ: T \rightarrow S: f^\circ(x) = \min\{y | f(y) \geq x\}$ 。等变性来自  $f^\circ(x+1) = f^\circ(x) + 1$ ，自对偶性来自  $f(y) = \max\{x | f^\circ(x) \leq y\}$ ，这就说明了结果。□

现在回忆结合  $\infty$ -算畴的构造：我们可以定义一个  $(1-)$  多色算畴，记为  $\text{Assoc}^\otimes$ 。进一步其产生了  $\infty$ -算畴  $N(\text{Assoc}^\otimes) \rightarrow N(\text{Fin}_*)$ ，这个  $\infty$ -算畴常常被记为  $\text{Assoc}$ 。

**定义 3.15.** 定义函子  $V: \Lambda \rightarrow \text{Fin}: (1/n)\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1/n, \dots, (n-1)/n\}$ ，即将  $T$  映为  $T/\mathbb{Z}$ 。更进一步这个函子穿过  $V: \Lambda \rightarrow \text{Assoc}_{act}^\otimes = \text{Assoc}^\otimes \times_{\text{Fin}_*} \text{Fin}$ 。

**推论 3.16.**

$$\Delta \simeq \Lambda_{/1 \cdot \mathbb{Z}}$$

证明. 给定  $f: (1/n) \cdot \mathbb{Z} \rightarrow 1 \cdot \mathbb{Z}$ ，定义其在  $\Delta$  中的像为  $V((1/n) \cdot \mathbb{Z})$ ，序关系由  $f$  给出。其逆构造如下：给定  $[n-1] = \{0, 1, \dots, n-1\} \in \Delta$ ，其被映为  $(1/n) \cdot \mathbb{Z}$ ，其上序关系由  $\mathbb{Z} \times [n-1]$  的字典序给出。

检查  $\mathbb{Z}$ -等变性知这给出了  $\Delta \rightarrow \Lambda_{/1 \cdot \mathbb{Z}}$  的函子并且两者互逆。□

**定理 3.17.** 记  $j: \Delta \rightarrow \Lambda: [n] \mapsto (1/n+1) \cdot \mathbb{Z}$ ，则诱导的函子

$$j_\infty: \Delta^{op} \rightarrow \Lambda_\infty^{op}$$

是共尾的  $\infty$ -范畴。

证明. 由 Quillen 定理 A，只需证明对于任何  $T \in \Lambda_\infty$ ， $\mathcal{C} = \Delta \times_{\Lambda_\infty} \Lambda_{\infty/T}$  是弱可缩的。在这里不详细写出证明，参见 [NS18, Corollary B.3]。□

**定义 3.18.** 给定  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$ ，定义循环对象构成的  $\infty$ -范畴为  $\text{Fun}(N(\Lambda^{op}), \mathcal{C})$ 。

本节的主命题是：循环对象都携带者典范的  $\mathbb{T}$ -作用。

**命题 3.19.** 对于任何有所需余极限的  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$ ，存在循环对象出发的函子

$$\mathrm{Fun}(N(\Lambda^{op}), \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{B\mathbb{T}}$$

其中底对象是

$$\varinjlim_{N(\Delta^{op})} j^* F, F : N(\Lambda^{op}) \rightarrow \mathcal{C}$$

证明. 该函子由如下给出：

$$\mathrm{Fun}(N(\Lambda^{op}), \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Fun}^{B\mathbb{Z}}(N(\Lambda_\infty^{op}), \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Fun}^{B\mathbb{Z}}(\mathrm{pt}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{BB\mathbb{Z}} = \mathcal{C}^{B\mathbb{T}}$$

其中第二个箭头是

$$\varinjlim_{N(\Lambda_\infty^{op})} : \mathrm{Fun}(N(\Lambda_\infty^{op}), \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

□

现在我们将构造落实到拓扑 Hochschild 同调上：

**定义 3.20** (拓扑 Hochschild 同调). 给定  $A \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_1}(Sp)$ ，有循环谱

$$N(\Lambda^{op}) \xrightarrow{\sim} N(\Lambda) \xrightarrow{V} N(\mathrm{Assoc}_{act}^\otimes) \xrightarrow{A^\otimes} Sp_{act}^\otimes \xrightarrow{\otimes} Sp$$

定义其对应的  $\mathbb{T}$ -等变谱为  $\mathrm{THH}(A) \in Sp^{B\mathbb{T}}$ ，其余极限是几何实现源于定理 3.17。

### 3.6 分圆谱，拓扑循环同调和相关变体

首先回忆 Tate 构造，以及有所有所需极限和余极限的稳定  $\infty$ -范畴是 1-半加的这一事实：

**定义 3.21** (Tate 构造). 给定稳定  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$ ，有限群  $G$ ，定义 Tate 构造为

$$-{}^tG : \mathcal{C}^{BG} \rightarrow \mathcal{C} : X \mapsto \mathrm{cofib}(\mathrm{Nm}_G : X_{hG} \rightarrow X^{hG})$$

更一般地，给定一个拓扑群  $H$ ，以及有限群  $G \leq H$  是其正规子群，定义 Tate 构造为

$$-{}^tG : \mathcal{C}^{BH} \rightarrow \mathcal{C}^{B(H/G)} : X \mapsto \mathrm{cofib}(\mathrm{Nm}_f : f_! X \rightarrow f_* X)$$

其中  $f : BH \rightarrow B(H/G)$ 。

拓扑循环同调的构造依赖如下结构，称之为分圆谱：

**定义 3.22.**

1. 一个分圆谱是指  $X \in \mathcal{C}^{B\mathbb{T}}$ ，以及  $\mathbb{T}$ -等变映射  $\varphi_p : X \rightarrow X^{tC_p}, \forall p$  prime.
2. 一个  $p$ -分圆谱是指  $X \in \mathcal{C}^{BC_{p^\infty}}$ ，以及  $C_{p^\infty}$ -等变映射  $\varphi_p : X \rightarrow X^{tC_p}$ 。

定义分圆谱范畴为如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \text{CycSp} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\prod_p Sp^{B\mathbb{T}})^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow (\text{ev}_0, \text{ev}_1) \\ Sp^{B\mathbb{T}} & \xrightarrow{(\text{id}, \prod -^{tC_p})} & (\prod_p Sp^{B\mathbb{T}}) \times (\prod_p Sp^{B\mathbb{T}}) \end{array}$$

类似地, 定义

$$\begin{array}{ccc} \text{CycSp}_p & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (Sp^{BC_{p^\infty}})^{\Delta^1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sp^{BC_{p^\infty}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Sp^{BC_{p^\infty}} \times Sp^{BC_{p^\infty}} \end{array}$$

注记. 粗略地说, 分圆谱是如下 2-等化子  $Sp^{B\mathbb{T}} \xrightleftharpoons[\prod_p(-^{tC_p})]{\text{id}} Sp^{B\mathbb{T}}$

接下来给定分圆结构, 我们能够定义相伴的拓扑循环同调:

**定义 3.23.** 给定分圆谱  $(X, (\varphi_p))$ , 定义拓扑循环同调为  $\text{TC}(X) = \text{Map}_{\text{CycSp}}(\mathbb{S}, X)$ 。

**命题 3.24.** 存在纤维列

$$\text{TC}(X) \rightarrow X^{h\mathbb{T}} \xrightarrow{\prod(\varphi_p^{h\mathbb{T}} - \text{can})} \prod (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$$

其中

$$\varphi_p^{h\mathbb{T}} : X^{h\mathbb{T}} \rightarrow (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$$

以及

$$\text{can} : X^{h\mathbb{T}} \simeq (X^{hC_p})^{h\mathbb{T}/C_p} \simeq (X^{hC_p})^{h\mathbb{T}} \rightarrow (X^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$$

证明. 直接检查  $\text{CycSp}$  中拉回的定义即可。 □

回到拓扑 Hochschild 同调, 我们指出其上存在分圆结构。

**定理 3.25.**  $\text{THH}(R) \in Sp^{B\mathbb{T}}$  有典范的分圆结构。

证明. 具体构造参见 [NS18, p. III.2.3], 简述如下: 为构造  $\mathbb{T}(\cong \mathbb{T}/C_p)$ -等变映射  $\varphi_p : \text{THH}(A) \rightarrow \text{THH}(A)^{tC_p}$ , 我们考虑 Tate 对角线  $\Delta : - \implies (-^{\otimes p})^{tC_p}$ , 从而考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \begin{array}{c} \textcircled{C_3} \\ \downarrow \\ R^{\otimes 3} \end{array} & \xrightleftharpoons{\quad\quad\quad} & \begin{array}{c} \textcircled{C_2} \\ \downarrow \\ R^{\otimes 2} \end{array} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} R \\ & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & \downarrow \Delta \\ \dots & (R^{\otimes 3p})^{tC_p} & \xrightleftharpoons{\quad\quad\quad} & (R^{\otimes 2p})^{tC_p} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} (R^{\otimes p})^{tC_p} \\ & \begin{array}{c} \textcircled{C_3} \\ \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \textcircled{C_2} \\ \uparrow \end{array} & \end{array}$$

第一行的余极限由定义是  $\text{THH}(A)$ , 下面计算第二行的余极限, 首先我们严格描述第二行。记  $\text{Free}_{C_p}$  是有限自由  $C_p 0$  集合  $S$ , 从而有函子  $\text{Free}_{C_p} \rightarrow \text{Fin} : S \mapsto S/C_p$ 。现在考虑汉字

$$sd_p : \Lambda_p^{op} \rightarrow \Lambda^{op} : (1/n)\mathbb{Z} \mapsto (1/(np))\mathbb{Z}$$

这诱导了函子

$$N(\Lambda_p^{op}) \rightarrow N(\text{Free}_{C_p}) \times_{N(\text{Fin})} N(\text{Assoc}_{act}^{\otimes}) \xrightarrow{R^{\otimes}} N(\text{Free}_{C_p}) \times_{N(\text{Fin})} Sp_{act}^{\otimes}$$

更进一步复合函子

$$N(\text{Free}_{C_p}) \times_{N(\text{Fin})} Sp_{act}^{\otimes} \rightarrow (Sp_{act}^{\otimes})^{BC_p} : \\ (S, (X_{\bar{s}})_{\bar{s} \in \bar{S}=S/C_p}) \mapsto (S, (X_{\bar{s}}))$$

继续复合

$$(Sp_{act}^{\otimes})^{BC_p} \xrightarrow{\otimes} Sp^{BC_p} \xrightarrow{-tC_p} Sp$$

更进一步这个函子是  $BC_p$  等变的, 从而得到

$$N(\Lambda^{op}) = N(\Lambda_p^{op})/BC_p \rightarrow Sp$$

然而计算这一循环对象的余极限实际上只需在  $N\Lambda_{\infty}$  上计算, 此时交换和  $-tC_p$  和余极限的顺序就有该余极限  $\mathbb{T}$ -等变地映到  $\text{THH}(A)^{tC_p}$ , 这就完成了构造。□

综上我们就完成了  $\text{THH}, \text{TC}$  的定义。与此同时我们提及他量并罗列如下:

**定义 3.26.**

1.  $\text{TC}(R) = \text{TC}(\text{THH}(R))$
2.  $\text{TC}^{-}(R) = \text{THH}(R)^{h\mathbb{T}}$
3.  $\text{TP}(R) = \text{THH}(R)^{t\mathbb{T}}$

更进一步, 我们将使用其  $p$ -完备化, 并相应地记之为  $\text{THH}(A; \mathbb{Z}_p)$ , 并类似地构造  $\text{TC}, \text{TC}^{-}, \text{TP}$ 。

注意  $X_{h\mathbb{T}} = \lim(\tau_{\leq n} X)_{h\mathbb{T}}$  (检查同伦群), 而  $p$ -完备对象对极限封闭, 从而知道  $X$  同伦群下有界且  $p$ -完备说明  $X_{h\mathbb{T}}$  也是如此。特别地, 如果  $\text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$  是同伦群下有界的, 那么前述构造:  $\text{TC}(R; \mathbb{Z}_p), \text{TC}^{-}(R; \mathbb{Z}_p), \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)$  都是  $p$ -完备的。

**引理 3.27** ([NS18, Lemma II.4.2]).  $A$  是连合环谱时:

$$\text{TP}(A; \mathbb{Z}_p) \simeq (\text{THH}(A)^{tC_p})^{h\mathbb{T}} \simeq (\text{THH}(A; \mathbb{Z}_p)^{tC_p})^{h\mathbb{T}}$$

因此我们可以取 Tate 构造的不动点得到如下图表:

$$\begin{array}{ccc} \text{TC}^{-}(R; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi^{h\mathbb{T}}} & \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow & \xrightarrow{\text{can}} & \downarrow \\ \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi} & \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)^{tC_p} \end{array}$$

其中如同前文一样

$$\text{can} : \text{THH}(R)^{h\mathbb{T}} \simeq (\text{THH}(R)^{hC_p})^{h\mathbb{T}/C_p} \simeq (\text{THH}(R)^{hC_p})^{h\mathbb{T}} \rightarrow (\text{THH}(R)^{tC_p})^{h\mathbb{T}} \simeq \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)$$

诱导了  $\text{TC}^{-}(R; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)$ 。

最后我们指出存在如下计算相关量的谱序列

**命题 3.28.**

1. 同伦不动点:  $E_2^{ij} = H^i(\mathbb{T}, \pi_{-j} \text{THH}(R)) \implies \pi_{-i-j} \text{TC}^-(R)$
2. Tate 不动点:  $E_2^{ij} = \pi_{-i}(\pi_{-j} \text{THH}(R))^{t\mathbb{T}} \implies \pi_{-i-j} \text{TP}(R)$

**4 拟合割景****4.1 拟合割景**

**定义 4.1.**  $A$  是交换环,  $M \in D(A)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z} \sqcup \{\pm\infty\}$ 。

1. 称  $M$  有  $p$ -完备 tor-振幅  $[a, b]$ : 如果  $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/pA \in D(A/pA)$  的 tor-振幅 (即任何  $A/pA$ -模  $N$ ,  $H^\bullet(M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/pA \otimes_{A/pA}^{\mathbb{L}} N)$  集中在  $[a, b]$  中)。
2. 称  $M \in D(A)$  是  $p$ -完备 (忠实) 平坦的, 如果  $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/pA \in D(A/pA)$  聚集在 0 处并且是 (忠实) 平坦  $A/pA$ -模。

注记. 可以直接将  $p$  替换为  $p^n$ : 因为考虑基变换  $A/p^n A \rightarrow A/pA$ , 我们只需说明这一基变换不改变 tor-振幅。一个方向直接来自基变换不改变振幅, 对于反方向我们检查基变换产生的三角

$$(X \otimes_{A/p^n A}^{\mathbb{L}} A/pA) \otimes_{A/pA}^{\mathbb{L}} pA/p^n A \rightarrow X \rightarrow X \otimes_{A/p^n A}^{\mathbb{L}} A/pA$$

(这里取  $X = M \otimes_A A/p^n A$ )

假设  $X \otimes_{A/p^n A}^{\mathbb{L}} A/pA$  具有 tor-振幅  $[a, b]$ , 那么只需检查边界项就立刻说明了结果。

**定义 4.2** (拟合割景)。

1. 称环  $A$  是拟合割的, 如果以下成立:
  - (a)  $A$  是  $p$ -完备的, 并且有有界  $p^\infty$ -挠。
  - (b)  $L_{A/\mathbb{Z}_p} \in D(A)$  具有  $p$ -完备 tor 振幅  $[-1, 0]$
 记其构成的全子范畴为  $\text{QSyn}$ 。  
 给定  $p$ -完备有限  $p^\infty$ -挠环之间的态射  $A \rightarrow B$ :
2. 称  $A \rightarrow B$  是拟合割态射 (覆盖) 如果以下成立:
  - (a)  $B$  在  $A$  上  $p$ -完备 (忠实) 平坦
  - (b)  $L_{B/A}$  有  $p$ -完备 tor-振幅  $[-1, 0]$
3. 称  $A \rightarrow B$  是拟光滑态射 (覆盖) 如果以下成立:
  - (a)  $B$  在  $A$  上  $p$ -完备 (忠实) 平坦
  - (b)  $L_{B/A} \in D(B)$   $p$ -完备平坦

本节的目标是说明在拟合割覆盖下,  $\mathrm{QSyn}$  成为一个景。为此我们需要说明覆盖的可复合性和在基变换下的稳定性, 为此我们需要说明  $p$ -完备平坦性的行为。

然而事实上, 这一性质在有界  $p^\infty$ -挠环上有简单而明确的描述。

**定理 4.3.**  $A$  是有界  $p^\infty$ -挠环:

1.  $M \in D(A)$  是导出  $p$ -完备模 (即在  $D(A)$  中,  $\varprojlim(\cdots \xrightarrow{\times p} M) = 0$ ), 如果它  $p$ -完备平坦, 那么:

$M$  是一个聚集在 0 处的经典  $p$ -完备  $A$  模, 有有界  $p^\infty$ -挠,  $\forall n \geq 1, M/p^n M$  在  $A/p^n A$  上平坦, 并且  $M \otimes_A A[p^n] \rightarrow M[p^n]$  是同构。

2. 反过来如果  $N$  是一个经典  $p$ -完备  $A$  模并且有有界  $p^\infty$ -挠,  $N/p^n N$  在  $A/p^n A$  上平坦, 则  $N \in D(A)$  是  $p$ -完备平坦的。

我们首先证明引理:

**引理 4.4.**  $A$  是有界  $p^\infty$ -挠环,  $M \in D(A)$  导出  $p$ -完备, 并且有  $p$ -完备  $\mathrm{tor}$ -振幅  $[a, b]$ , 则  $M \in D^{[a, b]}(A)$

证明. 由于  $A$  有有界  $p^\infty$ -挠,  $\{A/p^n A\}$  和  $\{A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}\}$  是同构的  $\mathrm{pro}$ -对象, 现在:

$$M \simeq \varprojlim M/p^n M \simeq \varprojlim M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A$$

然而  $M$  的假设保证了  $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A \in D^{[a, b]}(A/p^n A)$ , 并且  $H^b$  上的映射是满射, 那么取极限就说明了结果。□

定理 4.3 的证明.

1. 定理 4.4 说明  $M$  聚集在 0 处。由于  $M$  是  $p$ -完备平坦的, 结合前述注记知  $M/p^n M = M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A$  也是平坦的  $A/p^n A$ -模。此时由前一引理的说明:  $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A = M/p^n M$ , 这就说明其在经典意义下  $p$ -完备。

只需说明  $M \otimes_A A[p^n] \rightarrow M[p^n]$  是同构, 但这是因为我们有如下标准的正合列:

$$0 \rightarrow (A[p^n])[1] \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \rightarrow A/p^n A$$

(注意  $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) = A[p^n]$ ,  $\mathrm{Tor}_0(A, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) = A/p^n A$ ) 简便起见记  $A_n = A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ ,  $M_n = M \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ , 则上述三角盒  $M_n$  张量积后得到

$$M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} (A[p^n])[1] \rightarrow M_n \rightarrow M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} A/p^n A$$

然而第三项由定义实际上是

$$M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} A/p^n A \cong M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \cong M \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p^n A = M/p^n M$$

因此聚集在 0 处并且在  $A/p^n A$  上平坦; 并且第一项

$$M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} A[p^n] = (M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} A/p^n A) \otimes_{A/p^n A}^{\mathbb{L}} A[p^n]$$

是两个聚集在 0 处的链复形的乘积，从而也聚集在 0 处。因此由三角就有

$$M[p^n] = H^{-1}(M_n) = H_0(M_n \otimes_{A_n}^{\mathbb{L}} A[p^n])$$

而后者正是  $M \otimes_A A[p^n]$ ，这就说明了结果。

2. 反过来的论述是直接的，这里略过了。

□

我们将这里的讨论总结如下：

**推论 4.5.**  $A \rightarrow B$  是导出  $p$ -完备环之间的映射

1.  $A$  有界  $p^\infty$ -挠， $A \rightarrow B$   $p$ -完备平坦，则  $B$  有界  $p^\infty$ -挠
2.  $B$  有界  $p^\infty$ -挠， $A \rightarrow B$   $p$ -完备忠实平坦，则  $A$  有界  $p^\infty$ -挠
3.  $A, B$  均有界  $p^\infty$ -挠，则  $A \rightarrow B$  是  $p$ -完备（忠实）平坦的当且仅当  $A/p^n A \rightarrow B/p^n B$ （忠实）平坦

证明. 第一部分与第三部分直接来自定理 4.3，第二部分是因为定理 4.3 的证明说明如果  $B$  是  $p$ -完备平坦的，就有  $A[p^n] \otimes_{A/p^n A} B/p^n B \rightarrow B[p^n]$  是同构，但是忠实平坦性保证  $A[p^n] \subseteq B[p^\infty]$ ，从而说明了一切。□

我们下面来证明主结果：

**定理 4.6.**  $\text{QSyn}^{op}$  构成了一个景：即覆盖在复合和基变换下封闭。

为此我们只需利用前述  $p$ -完备平坦性的刻画，导出如下两个引理：

**引理 4.7.**  $A \rightarrow B$  是  $p$ -完备环的拟合割覆盖，则  $A \in \text{QSyn} \iff B \in \text{QSyn}$ .

证明. 由定理 4.5 中  $p^\infty$ -挠的等价性，总可以假定  $A, B$  都具有有界  $p^\infty$ -挠，从而只需检查余切复形的  $\text{tor}$ -振幅。

假设  $A \in \text{QSyn}$ ，此时考虑  $\mathbb{Z}_p \rightarrow A \rightarrow B$  给出的好三角

$$L_{A/\mathbb{Z}_p} \otimes_A^{\mathbb{L}} B \rightarrow L_{B/\mathbb{Z}_p} \rightarrow L_{B/A}$$

那么  $A, A \rightarrow B$  的拟合割性就说明了结果。

反过来假设  $B \in \text{QSyn}$ ，再次检查好三角说明  $L_{A/\mathbb{Z}_p} \otimes_A^{\mathbb{L}} B$  具有  $\text{tor}$ -振幅  $[-1, 1]$ ，但是连合性就说明其振幅为  $[-1, 0]$ 。然而  $A \rightarrow B$  还是  $p$ -完备忠实平坦的，因此忠实平坦性保证  $L_{A/\mathbb{Z}_p}$  也具有  $\text{tor}$ -振幅  $[-1, 0]$ 。□

以及

**引理 4.8.** 1. 复合的稳定性：  $A \rightarrow B, B \rightarrow C$  拟合割（拟光滑），则  $A \rightarrow C$  拟合割（光滑）。  
并且如果  $A \rightarrow B, B \rightarrow C$  是覆盖， $A \rightarrow C$  也是如此。



2. 基变换的稳定性:  $A \rightarrow B$  拟合割 (拟光滑),  $A \rightarrow C$  是任意环太社, 则  $p$ -完备基变换  $C \rightarrow D := B \hat{\otimes}_A C$  也是拟合割 (拟光滑) 的, 覆盖性质也被保持。

证明. 1. 检查态射复合产生的余切复形的好三角即可。

2. 记  $D' = \widehat{B \otimes_A^L C}$ , 则  $D = H^0(D')$ 。现在  $D'$  在  $C$  上是  $p$ -完备平坦的 (因为其来自  $A \rightarrow B$  的基变换), 从而由定理 4.3 其聚集在 0 处, 因此  $D \simeq D'$ 。现在余切复形在基变换下保持, 从而综合上述讨论, 拟合割性和拟光滑性都被保持, 覆盖性质也是如此。这就说明了结果。□

定理 4.6 的证明. 只需证明基变换下封闭。这结合定理 4.8 知  $C \rightarrow D$  拟合割覆盖, 再由定理 4.7 知  $D \in \text{QSyn}$ , 从而说明了结果。□

我们最后来说明完美胚环都是拟合割的:

**定理 4.9.** 给定完美胚环  $R$ , 那么:

1.  $L_{R/\mathbb{Z}_p}$  有  $p$ -完备 Tor-振幅聚集在  $-1$ , 其导出  $p$ -完备化正是  $R[1]$
2.  $R[p^\infty] = R[p]$ , 从而具有有界  $p^\infty$ -挠。

特别地  $R \in \text{QSyn}$ 。

证明. 注意  $p$ -完备振幅不随导出完备化改变 ( $\otimes^L \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  后相同), 因此我们只需说明  $L_{R/\mathbb{Z}_p}$  的导出完备化是  $R[1]$ 。

现在对  $\mathbb{Z}_p \rightarrow A_{\text{inf}}(R) \rightarrow R$  产出的余切复形三角计算。

**引理 4.10.**  $L_{A_{\text{inf}}(R)/\mathbb{Z}_p} \otimes_{A_{\text{inf}}(R)} R$  的导出完备化是 0。

证明. 由导出 Nakayama 引理: 若  $K$  导出  $p$ -完备, 则  $K = 0 \iff K \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ , 我们现在只需计算

$$\widehat{L}_{A_{\text{inf}}(R)/\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \widehat{L}_{(A_{\text{inf}}(R) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/\mathbb{F}_p} = \widehat{L}_{R^\flat/\mathbb{F}_p}$$

现在由于  $R^\flat$  完美, Frobenius 在其上的作用是同构。另一方面当  $L_{B/A}$ ,  $A, B$  是完美  $\mathbb{F}_p$ -代数且  $B$  是多项式环时, Frobenius 的作用是 0 ( $d(x^p) = px^{p-1}dx = 0$ ), 因此 Kan 扩张后对比两者就说明 Frobenius 同时是同构和 0, 从而  $L_{R^\flat/\mathbb{F}_p}$  消失。□

回到原命题, 这说明

$$\widehat{L}_{R/\mathbb{Z}_p} = \widehat{L}_{R/A_{\text{inf}}(R)} \cong \ker \theta / (\ker \theta)^2[1] \cong R[1]$$

(第一正合列)。

下面我们说明第二个论断, 事实上它有如下一般形式:

**引理 4.11.**  $A$  是  $p$ -完备,  $p$ -无挠,  $p$ -进分离  $\delta$ -环,  $A/pA$  既约 ( $W(R^\flat)$  满足此条件),  $d$  是本原元, 则  $(A/d)[p^\infty] = (A/d)$ 。

证明. 只需证明  $(A/d)[p^2] = (A/d)[p]$ , 即如果  $p^2 f = g d$ , 需要证明  $p f \in d A$ . 现在由于  $g d \in p^2 A$ , 就有  $\delta(g d) \in p A$ , 从而  $\phi(g) \delta(g d) \in p A$ . 然而其可以被展开为  $\delta(d) g^p \phi(g) + \delta(g) \phi(g d)$ , 因此  $\delta(d) g^p \phi(g) \in p A$ .

这里  $\phi$  指 Frobenius 提升  $\phi(x) = x^p + p \delta(x)$ .

现在由于  $A$  是  $(p, d)$ -局部的,  $\delta(d)$  是  $A$  的单位, 那么  $g^p \phi(g) \in p A$ , 即  $g^{2p} \in p A$ . 现在  $A/p A$  既约, 那么  $g \in p A$ . 但是  $A$  是  $p$ -无挠的, 从而  $p f \in d A$ .  $\square$

$\square$

注记. 完全类似定理 4.10 的证明, 我们可以说明:

引理 4.12. 给定完美胚环之间的环同态  $S \rightarrow S'$ :  $L_{S'/S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq 0$ , 特别地其 (导出)  $p$ -完备化也是 0.

证明. 由 [BMS1, Lemma 3.13],  $S' = S \otimes_{A_{\text{inf}}(S)}^{\mathbb{L}} A_{\text{inf}}(S')$ , 因此由基变换只需说明  $L_{A_{\text{inf}}(S')/A_{\text{inf}}(S)} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_p \simeq 0$ .

但是再一次由基变换, 它是  $L_{S^{\flat}/S^{\flat}}$ . 现在注意定理 4.10 的证明说明  $L_{S^{\flat}/\mathbb{F}_p} \simeq 0$ , 从而再一次用余切复形三角就说明了结果.  $\square$

## 4.2 拟正则半完美胚环

我们给出景  $\text{QSyn}$  的一个基:

**定义 4.13.** 称环  $S$  是拟正则半完美胚环, 如果:

1.  $S \in \text{QSyn}$
2. 存在  $R \rightarrow S$ , 使得  $R$  是完美胚环
3.  $S/p S$  上的 Frobenius 映射是满射, 即  $S/p S$  是半完美环

记其构成的全子范畴  $\text{QRSPerfd}$ , 其上配备拟合割覆盖给出的拓扑.

我们有如下判别:

**定理 4.14.**  $S$  是一个  $p$ -完备有界  $p^\infty$ -挠环, 使得  $S/p S$  是半完美环, 那么  $S$  是拟正则半完美胚环当且仅当存在完美胚环  $R \rightarrow S$ , 使得  $L_{S/R} \in D(S)$  有  $p$ -完备  $\text{tor}$ -振幅  $-1$ . 更进一步如果这一条件成立, 那么对任何完美胚环  $R' \rightarrow S$  该条件也成立.

**命题 4.15.**  $\text{QRSPerfd}^{op}$  构成了一个景, 并且其构成了  $\text{QSyn}^{op}$  的基: 更精确地说: 一个  $p$ -完备环落在  $\text{QSyn}$  中当且仅当存在拟合割覆盖  $A \rightarrow S, S \in \text{QRSPerfd}$ .

证明. 只需检查基变换: 特别地只需说明  $D := B \hat{\otimes}_A C$  是拟正则半完美胚环. 自动地  $D$  有来自完美胚环的映射, 并且  $D/p D = B/p B \otimes_{A/p A} C/p C$ , 从而 Frobenius 是满射, 从而说明了结果.

对于第二个结果: 考虑  $F = \mathbb{Z}_p[\{x_i\}_{i \in I}]_p^\wedge$ , 其有一个满射  $F \rightarrow A$ , 取  $F \rightarrow F_\infty$  为添加  $\{p\} \sqcup \{x_i\}$  的所有  $p$ -幂次根, 那么这是一个拟合割覆盖, 且  $F_\infty$  完美胚. 将其沿着  $F \rightarrow A$  基变换得到的就是所需的覆盖.  $\square$

我们说明限制到基上诱导了层范畴的等价：

**定理 4.16.** 对任何可表现  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$ , 顺着  $u : \text{QRSPerfd}^{op} \rightarrow \text{QSyn}^{op}$ , 有等价  $\text{Shv}_{\mathcal{C}}(\text{QRSPerfd}^{op}) \simeq \text{Shv}_{\mathcal{C}}(\text{QSyn}^{op})$ 。

证明. 定义  $\text{Shv}_{\mathcal{C}}(\text{QRSPerfd}^{op}) \rightarrow \text{Shv}_{\mathcal{C}}(\text{QSyn}^{op})$  如下：首先考虑 Yoneda 嵌入  $\text{QSyn}^{op} \rightarrow \text{Shv}(\text{QRSPerfd}^{op}) : A \mapsto h_A$ , 这个函子将覆盖映为有效满射并且保持 Čech 脉。因此  $\forall F \in \text{Shv}(\text{QRSPerfd}^{op}), A \mapsto \text{Hom}_{\text{Shv}(\text{QRSPerfd}^{op})}(h_A, F)$  是  $\text{QSyn}^{op}$  上的层。

我们只需证明复合  $\text{Shv}(\text{QSyn}^{op}) \rightarrow \text{Shv}(\text{QRSPerfd}^{op}) \rightarrow \text{Shv}(\text{QSyn}^{op})$  是  $\text{id}$ , 但这是因为给定  $\text{QSyn}$  中的拟合割覆盖  $A \rightarrow S$ ,  $S \in \text{QRSPerfd}$ , 则 Čech 脉  $S^\bullet$  的每一项都落在  $\text{QRSPerfd}$  中 (直接检查：定理 4.8 以及直接计算  $S^i/pS^i$  是  $(S/pS)^{\otimes_{\mathbb{F}_p}(i+1)}$  的商), 并且我们只需证明：

$$\forall F \in \text{Shv}(\text{QSyn}^{op}), A \in \text{QSyn}^{op} : F(A) = \text{Hom}_{\text{Shv}(\text{QRSPerfd}^{op})}(h_A, F|_{\text{QRSPerfd}^{op}})$$

但这是因为  $h_A = \varinjlim h_{S^\bullet}$ , 其中  $A \rightarrow S$  如上所述。于是代入右侧知其为  $\lim F(S^\bullet) = F(A)$ , 这就说明了结果。  $\square$

### 4.3 相对景

我们自然在使用时需要考虑上述理论的相对版本：

**定义 4.17** (大拟合割景). 对任何环  $A$ , 记  $\text{QSyn}_A$  为全体态射  $A \rightarrow B, B \in \text{QSyn}$  构成的全子范畴, 以及全子范畴  $\text{QRSPerfd}_A \subseteq \text{QSyn}_A$ , 前述结果在大拟合割景上都成立。

**定义 4.18** (小拟合割景). 对拟合割环  $A$ , 记  $\text{qSyn}_A$  为拟合割  $A$ -代数构成的全子范畴, 以及  $\text{qrsPerfd}_A \subseteq \text{qSyn}_A$ , 前述结果在小拟合割景上都成立, 但是这个景对  $A$  的函子性较差。

## 5 $HC^-$ 和 de Rham 上同调

这一节我们从循环同调  $HC^-$  开始, 研究其与 (Hodge 完备化下的) 导出 de Rham 上同调之间的关系, 这一节中我们首先利用 Beilinson t-结构的构造介绍一般的比较结果, 最后再说明拟合割的情况。前者主要参考为 [AN18dR], 而拟合割的特殊情形则是 [BMS2] 中直接证明的。需要指出的是拟合割的情形被前一部分完全覆盖了, 但是它是后续构造的最为简单的情形。

### 5.1 光滑情形

在这一节中我们将大量使用滤对象取值的层 (例如携带 Hodge 滤链的 de Rham 上同调), 为此我们首先回忆如下关于滤对象的代数事实。

**定义 5.1.** 定义  $DF(R) = \text{Fun}(\mathbb{Z}^{op}, D(R))$ , 其对象形如：

$$X(\star) : \cdots \rightarrow X(n) \rightarrow X(n-1) \rightarrow \cdots$$

它是  $\text{CAlg}(\text{Pr}_{st}^L)$  中的对象, 其幺半结构来自 Day 卷积：

$$(F \otimes_R^{\mathbb{L}} G)(i) = \varinjlim_{j+k \geq i} F(j) \otimes_R^{\mathbb{L}} G(k)$$

记每个分次  $gr^i(F) = F(i)/F(i+1)$ , 称  $F(-\infty) = \varinjlim F(i)$  为  $F$  的基底谱, 称  $F \in DF(R)$  是  $X$  的一个滤过, 如果存在态射  $F(-\infty) \rightarrow X$ , 称这个滤过是穷竭的如果态射  $F(-\infty) \rightarrow X$  是等价。

称  $F$  完备如果  $F(+\infty) = \varprojlim_i F(i)$  消失, 记完备滤对象构成的子范畴为  $\widehat{DF}(R)$ 。特别地, 我们有完备化函子  $F \mapsto \hat{F} : \hat{F}(i) = F(i)/F(+\infty)$ 。

**定义 5.2** (Beilinson  $t$ -结构). 记  $DF^{\leq 0}(R) \subseteq DF(R)$  为所有使得  $gr^i(F) \in D^i(R), \forall i$  的  $F$  构成的全子范畴; 记  $DF^{\geq 0}(R) \subseteq DF(R)$  为所有使得  $F(i) \in D^{\geq i}(R), \forall i$  的  $F$  构成的全子范畴。它们给出了  $DF(R)$  上的 (上同调指标)  $t$ -结构。

记对应的截断函子为  $\tau_B^{\leq i}, \tau_B^{\geq i}$ , 特别地,  $\tau_B^{\leq 0}$  为取连合覆盖。

**命题 5.3.**

$$gr^i \circ \tau_B^{\leq 0}(-) \simeq \tau_B^{\leq i} \circ gr^i(-)$$

**定义 5.4.** 定义  $Fil_{\text{HKR}}^* HC^-(A/R)$  上的倍速 Beilinson 塔如下: 其满足

$$Fil_B^n HC^-(A/R) = \tau_B^{\leq -2n} Fil_{\text{HKR}}^* HC^-(A/R)$$

上述定义的一般形式如下:

**例子.** 给定  $X \in D(R)^{BS^1}$ , 那么  $\tau_{\geq *X}$  给出了一个  $S^1$ -等变的滤过  $Fil_P^* X$ , 现在这个滤过可以下降成为  $Fil_P^* X^{hS^1}$ , 每个分次是  $(H^{-n}(X)[-n])^{hS^1}$ 。

现在再作用上 Beilinson  $t$ -结构的截断函子, 我们就得到了  $Fil_B^n X^{hS^1} = \tau_B^{\leq -2n} Fil_P^* X^{hS^1}$ 。现在由定义以及 Beilinson  $t$ -结构截断在分次上的作用就可以知道:

$$gr^i Fil_B^n X^{hS^1} \simeq \tau_{\geq 2n-i} gr_P^i X^{hS^1} \simeq \tau_{\geq 2n-i} (H^i(X)[-i])^{hS^1}$$

从而

$$gr^i gr_B^n X^{hS^1} \simeq \begin{cases} H^{-i}(X)[i-2n] & n \leq i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此这说明了  $gr_B^n X^{hS^1}[2n] \simeq \pi_B^{-n} Fil_P^* X^{hS^1} \in DF(R)_B^{\heartsuit}$ , 由定义它被链复形

$$0 \rightarrow H^{-n}(X) \rightarrow H^{-n-1}(X) \rightarrow \dots$$

表出。

现在回到具体实例, 假设  $A$  是光滑的  $R$ -代数, 那么此时就有  $HH(A/R) = \Omega_{A/R}^n$ , 现在前述讨论说明:

$$\pi_B^{-n} Fil_{\text{HKR}}^* HC^-(A/R) \simeq gr_B^n HC^-(A/R)[2n] = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega_{A/R}^n \rightarrow \Omega_{A/R}^{n+1} \rightarrow \dots)$$

可以验证这个微分映射就是 de Rham 微分, 具体计算参见 [Lod92]。因此这就说明了  $HC^-(A/R)$  上存在一个滤过, 使得每个分次对应着链复形  $\Omega_{A/R}^{\bullet \geq n}$ , 并且其上的 HKR 滤过恰好对应的就是 Hodge 滤过。这就说明了光滑版本的如下定理:

**定理 5.5.**  $HC^-(A/R)$  上存在滤过  $Fil_B^* HC^-(A/R)$ , 使得其满足:

1. 每个分次是

$$gr_B^n HC^-(A/R) = \widehat{L\Omega}_{A/R}^{\geq n}[-2n]$$

这里  $\widehat{L\Omega}$  是导出 *de Rham* 复形对 *Hodge* 滤过的完备化,  $\widehat{L\Omega}^{\geq n}$  是完备化后的 *Hodge* 滤链的第  $n$  项

2. 在每个滤过  $Fil_B^n HC^-(A/R)$  上, 其自身还携带一个滤过使得其诱导了  $gr_B^n HC^-(A/R)$  上的 *Hodge* 滤过

3. 如果  $L_{A/R}$  有 *Tor*-振幅  $[-1, 0]$ , 那么上述滤过是穷竭的。

## 5.2 一般情形

这一小节我们来证明上面的主定理。首先我们回忆 (导出) Hochschild 同调上携带有 HKR 滤过  $Fil_{HKR}^* HH(A/R)$ , 使得每个分次是  $\wedge^i L_{A/R}[i]$ ,  $S^1$ -作用在其上平凡。因此这一滤过下降成为  $HC^-(A/R)$  上的滤过, 并且由于  $HH$  上 HKR 滤过完备, 同伦不动点  $(-)^{hS^1}$  和极限交换,  $HC^-$  上的 HKR 滤过也是完备的。

现在  $HC^-$  上还有另外一个滤过, 定义如下:

$$Fil_{HKR}^t Fil_{CW}^s HC^-(A/R) = \text{fib} \left( (Fil_{HKR}^t HH(A/R))^{hS^1} \rightarrow (Fil_{HKR}^t HH(A/R))^{h\Omega\mathbb{CP}^{s-1}} \right)$$

其中箭头由标准胞腔结构  $\mathbb{CP}^0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{CP}^\infty \simeq BS^1$  诱导。

现在每个分次为

$$gr_{HKR}^t gr_{CW}^s HC^-(A/R) \simeq \wedge^t L_{A/R}[t - 2s]$$

我们现在处理这个携带双重滤过的对象:

**定义 5.6.** 记  $DBF(R) = \text{Fun}(\mathbb{N}^{op} \times \mathbb{N}^{op}, D(R))$ , 类似地定义  $\widehat{DBF}(R)$ 。

**引理 5.7.** 双滤过  $Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^s HC^-(A/R)$  是双完备的。

*证明.* 首先检查 HKR 方向, 此时由于同伦不动点和极限交换, 其的确完备。下面检查 CW 方向, 这相当于说明

$$\text{fib} \left( (Fil_{HKR}^t HH(A/R))^{hS^1} \rightarrow \lim_s (Fil_{HKR}^t HH(A/R))^{h\Omega\mathbb{CP}^{s-1}} \right) \simeq 0$$

因此我们只需证明对于任何下有界  $S^1$ -谱,  $X^{hS^1} \rightarrow \lim_s X^{h\Omega\mathbb{CP}^{s-1}}$  是等价: 而这只需对  $K(G, n)$  检查, 然后通过归纳即可。□

我们下面计算  $Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^s HC^-(A/R)$  在 Beilinson  $t$ -结构下的截断:

$$\begin{aligned} gr_B^t \tau_B^{\leq -r} Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^s HC^-(A/R) &\simeq \tau_{\geq -t+r} gr_{HKR}^t Fil_{CW}^s HC^-(A/R) \\ &\simeq \tau^{\leq t-r} \text{fib} \left( (\wedge^t L_{A/R}[y])^{hS^1} \rightarrow (\wedge^t L_{A/R}[t])^{h\Omega\mathbb{CP}^{s-1}} \right) \end{aligned}$$

从而

$$gr_B^t \pi_B^{-r} Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^s HC^-(A/R) \simeq (\pi_{r-t} \text{fib}((\wedge^t L_{A/R}[t])^{hS^1} \rightarrow (\wedge^t L_{A/R}[t])^{h\Omega\mathbb{CP}^{s-1}}))[-t + r]$$

现在主结果变为:

**定理 5.8.** 双完备双滤过对象  $Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-(A/R)$  上存在一个 (在  $DBF$  中) 完被穷竭的滤过  $F_B^*$ , 使得每个分次

$$gr_B^u HC^-(A/R) \simeq \widehat{L\Omega}_{A/R}^{\geq u}[-2u]$$

其上的  $HKR$  滤过和  $CW$  滤过都诱导了这个分次上的  $Hodge$  滤过。

双滤过对象上的滤过  $F_B^*$  诱导了  $HC^-(A/R)$  上的滤过  $F_B^* HC^-(A/R)$ , 这个滤过是完备的。如果  $L_{A/R}$  具有  $Tor$ -振幅  $[-1, 0]$ , 那么这个滤过是穷竭的。

首先  $A$  是光滑  $R$ -代数, 此时  $Fil_B^*$  的选取和光滑情形相同 (即取为倍速 Beilinson  $t$ -结构滤过), 从而  $\pi_B^{-2u} Fil_{HKR}^* F_{CW}^s HC^-(A/R)$  被链复形

$$0 \rightarrow \Omega_{A/R}^{u+s} \rightarrow \Omega_{A/R}^{u+s+1} \rightarrow \dots$$

表出, 因此对于  $R$  光滑,  $HKR$  滤过和  $CW$  滤过都诱导了  $Hodge$  滤过。

另一方面对于  $A$  为有限生成多项式  $R$ -代数,  $Fil_B^* Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-(A/R)$  是双完备的。 $HKR$  方向同前,  $CW$  方向是直接计算。

下面我们将上述讨论通过 Kan 扩张推广至一般情形。

将  $Fil_B^*$  视作函子  $CAlg_R^{poly} \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{Z}^{op}, \widehat{DBF}(R))$ , 将其 Kan 扩张得到函子  $sCAlg_R \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{Z}^{op}, \widehat{DBF}(R))$ 。我们下面检查这个函子在 Kan 扩张后的性质:

**命题 5.9.** 对一般的  $R$ :

$$\varinjlim_u Fil_B^u Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-(A/R) \simeq Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-(A/R)$$

其中余极限在  $\widehat{DBF}(R)$  中计算。

证明. 这是直接的, 因为注意到余极限之间的可交换性, 一切归结到说明如下两件事:

1. 在多项式代数的情况滤过  $Fil_B$  是穷竭的
2. 在  $\widehat{DBF}$  中进行 Kan 扩张得到的函子等同于  $Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-$

前者是光滑情况已经说明的, 后者我们予以如下的精确叙述:

**定义 5.10.** 定义  $\widehat{LHC}^-( -/R)$  是如下函子

$$Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-( -/R) : CAlg_R^{poly} \rightarrow \widehat{DBF}(R)$$

的 Kan 扩张。

则这个命题的精确叙述变为:

**引理 5.11.** 在  $\widehat{DBF}(R)$  中: 如下态射是等价:

$$Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* \widehat{LHC}^-( -/R) \rightarrow Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-( -/R)$$

由于这些都是双完备的双滤过对象, 只需检查诸分次, 但它们都是余切复形, 从而立刻说明了结果。

结合上述两个命题我们就说明了结果。 □

**命题 5.12.** 对一般的  $R$ :

$$\varprojlim_u Fil_B^u Fil_{HKR}^* Fil_{CW}^* HC^-(A/R) \simeq 0$$

其中极限在  $\widehat{DBF}(R)$  中计算。

证明. 只需计算每个分次, 即说明

$$\varprojlim_u gr^t \tau_B^{\leq -2u} Fil_{HKR}^* gr_{CW}^s HC^-(A/R) \simeq 0$$

但是由 Beilinson  $t$ -结构的定义, 它是  $(2u - t)$ -连合的, 因此计算连合度就说明了结果。  $\square$

**命题 5.13.**  $Kan$  扩张后的滤过  $Fil_B^*$  的每个分次来自  $\Omega_{-/R}^{\geq u}[-2u]$  的  $Kan$  扩张, 其上的滤过由  $F^{(s,t)}\Omega^{\geq u}[-2u] \simeq \Omega^{\geq u+\max(s-u, t-u, 0)}[-2u]$  给出。

证明. 只需注意取出分次  $gr^u : \text{Fun}(\mathbb{Z}^{op}, \widehat{DBF}(R)) \rightarrow \widehat{DBF}(R)$  和余极限交换, 一切归约到多项式上的情况。  $\square$

现在注意函子  $\widehat{DBF}(R) \rightarrow D(R) : X(\star, \star) \mapsto X(0, 0)$  保持极限 (因为它是嵌入  $\widehat{DBF} \rightarrow DBF$  和取值函子的复合, 两者都保持极限), 因此  $\widehat{DBF}$  中滤过的完备性立刻说明  $HC^-(A/R)$  上滤过的完备性, 但是穷竭性则需要如下结果:

**命题 5.14.** 如果  $L_{A/R}$  具有  $\text{Tor}$ -振幅  $[-1, 0]$ , 那么  $HC^-(A/R)$  上的滤过  $Fil_B^* HC^-(A/R)$  是穷竭的。

证明. 我们计算

$$C^u = \text{cofib}(Fil_B^u HC^-(A/R) \rightarrow HC^-(A/R)) \in \widehat{DBF}(R)$$

那么计算分次就得到

$$gr_{HKR}^t gr_{CW}^s Fil_B^u HC^-(A/R) \simeq \begin{cases} 0 & u > t - s \\ \wedge^t L_{A/R}[t - 2s] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

另外  $gr_{HKR}^t gr_{CW}^s HC^-(A/R) \simeq \wedge^t L_{A/R}[t - 2s]$ , 因此就有

$$gr_{HKR}^t gr_{CW}^s HC^-(A/R) \simeq \begin{cases} \wedge^t L_{A/R}[t - 2s] & t - s < u \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在由于  $L_{A/R}$  具有  $\text{Tor}$ -振幅  $[-1, 0]$ , 则  $\wedge^t L_{A/R}$  的  $\text{Tor}$ -振幅为  $[-t, 0]$ : 这是因为由 [Stacks, 08G1],  $L_{A/R} = (\rightarrow \mathcal{E}^{-1} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow) \in D(R)$ , 其中  $\mathcal{E}^i$  平坦。

现在复形  $\wedge^t L_{A/R}$  上携带标准滤过, 每个分次是  $\wedge^j \mathcal{E}^0 \otimes_R \wedge^{t-j}(\mathcal{E}^1[-1])$ , 那么由 [Stacks, 09JA] 知我们只需证明  $\wedge^j \mathcal{E}^0$  具有  $\text{Tor}$ -振幅  $[-j, 0]$ , 但是这是通过将  $\mathcal{E}_0$  写为有限生成投射模的滤余极限直接计算得到的。

从而  $C^u$  上携带一个完备滤过并且每个分次的  $\text{Tor}$ -振幅为  $[2s - 2t, 2s - t], t - s < u$ 。因此这就说明每个分次都是  $2u$ -余连合的, 从而这就说明  $\pi_i C^u = 0, i \geq 2u$ , 因此  $\varprojlim C^u = 0$ , 从而说明穷竭性。  $\square$

综合上述所有命题, 我们就得到了结果。



### 5.3 拟合割情形

在拟合割情形下我们有着更为具体的构造方式，具体而言我们通过如下引理给出前文构造 Beilinson 截断倍速滤过的替代：即在拟合割的情形，Hochschild 同调真正聚集在了偶数处，那么这时我们可以直接进行 Kan 扩张从而在这个简化的情形下给出一个稍简单（但本质相同）的证明。

**引理 5.15.**  $S \in \text{qrsPerfd}_R$ ；或  $R = \mathbb{Z}_p$  或完美胚环时  $S \in \text{QRSPerfd}_R$ ，则：

1.  $\wedge^i L_{S/R}[-i]$  是  $p$ -完备平坦的，特别地聚集在 0 处
2.  $\pi_{\text{odd}}(\text{HH}(S/R); \mathbb{Z}_p) = 0$ ，并且  $\pi_{2i} \text{HH}(S/R; \mathbb{Z}_p) \simeq \wedge^i L_{S/R}^{p^\wedge}[-i]$

证明. 第二部分直接来自 HKR 滤过，只需证明第一部分。类似地只需证明  $i = 1$  的情况：

$R = \mathbb{Z}_p$  时由于  $S \in \text{QRSPerfd}$ ， $L_{S/\mathbb{Z}_p}$  聚集在  $[-1, 0]$  处，而  $\Omega_{S/\mathbb{Z}_p}^1 = 0$  说明其聚集在  $-1$  处； $R$  是完美胚环时则源自定理 4.14； $R$  是一般环， $S \in \text{qrsPerfd}_R$  时则因为  $L_{S/R}$  有  $p$ -完备 Tor-振幅  $[-1, 0]$  并且  $\Omega_{S/R}^1 = 0$ 。□

因此我们知道在此种情形 Hochschild 同调聚集在偶数阶，从而  $\text{HC}^-$  上的同伦不动点谱序列坍塌，其给出了一个滤过使得每个分次是  $\wedge^i L_{S/R}^{p^\wedge}[-i]$ 。现在利用层的等价，我们将  $\text{QRSPerfd}_R$  上的  $D(R)$ -取值拟合割层  $\pi_0 \text{HC}^-(-/R)$  延拓为  $\text{QSyn}_R$  上的层，记为  $\widehat{\Delta}_{-/R}/\xi$ （我们在后面会看到这个记号的意义）。

这时我们也有类似的命题成立：

**定理 5.16.**  $\pi_0 \text{HC}^-(-/R; \mathbb{Z}_p) : \text{QRSPerfd}_R \rightarrow D(R)$  诱导的  $\widehat{\Delta}_{-/R}/\xi : \text{QSyn}_R \rightarrow D(R)$  正是  $p$ -完备 Hodge-完备导出  $de Rham$  复形  $\widehat{L\Omega}_{-/R}^{p^\wedge}$ 。

只需注意由定义这就是 HKR 滤过的第 0 个分次，从而由上一节的主结果，其对应的就是  $\widehat{L\Omega}$ ，再作用上  $p$ -完备化后从而一切得证。

## 6 完美胚环上的拓扑同调

从现在开始我们进入拓扑 (Hochschild) 同调的范围，我们简要介绍诸多拓扑同调在完美胚环（以及其上代数）的取值，同时引入最简单情况下的 BMS 滤过。

### 6.1 完美胚环的拓扑同调

**定义 6.1.** 称  $\mathcal{O}_X$ -模复形  $\mathcal{E}^\bullet$  是  $m$ -伪凝聚的，如果存在开覆盖  $X = \cup U_i$ ，以及  $\alpha_i : \mathcal{E}_i^\bullet \rightarrow \mathcal{E}^\bullet|_{U_i}$  使得  $\alpha_i$  在  $j > m$  阶上同调上是同构，在  $m$  阶上同调上是满射，并且  $\mathcal{E}_i^\bullet$  在除有限项为非零，并且每项都是有限生成自由  $\mathcal{O}_X$ -模的直和因子。

**引理 6.2** ([Stacks, 064U])。在仿射概形  $\text{Spec} R$  上，如下等价：

1.  $K^\bullet$  伪凝聚
2.  $K^\bullet$  和右（上）有界有限投射  $R$ -模构成的复形拟同构。



**定理 6.3.**  $\pi_* \mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \cong R[u], u \in \pi_2 \mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \cong \pi_2 \mathrm{HH}(R; \mathbb{Z}_p) = \ker \theta / (\ker \theta)^2$  是其生成元。

证明. 第一步, 由 HKR 滤过以及定理 4.9:  $(\wedge_R^i L_{R/\mathbb{Z}_p})_p^\wedge[i] \simeq R[2i]$ , 有  $\pi_i \mathrm{HH}(R; \mathbb{Z}_p) \cong R, i \geq 0, 2|i$ , 在其他指标处消失。

因此  $\mathrm{HH}(R; \mathbb{Z}_p)$  伪凝聚。现在由于  $\mathrm{THH}(\mathbb{Z})$  具有有限生成同伦群 (Bökstedt), 从而我们归纳检查正合列知

$$\mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{Z})} \tau_{\leq n} \mathrm{THH}(\mathbb{Z})$$

都是伪凝聚的,  $\forall n \geq 0$ 。因此检查滤余极限知  $\mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$  自身也是伪凝聚的。

第二步, 我们证明对于任何完美胚环之间的环同态  $R \rightarrow R'$ , 如下是等价

$$\mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R R' \rightarrow \mathrm{THH}(R'; \mathbb{Z}_p)$$

我们只需证明上述论断在  $-\otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}$  后成立, 因为一旦其成立, 我们再次归纳说明  $-\otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{Z})} \mathrm{THH}(\mathbb{Z})$  的情况, 再取滤余极限即可。

因此现在只需证明  $\mathrm{HH}(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R^{\mathbb{L}} R' \rightarrow \mathrm{HH}(R'; \mathbb{Z}_p)$  是等价, 但我们检查 HKR 滤过, 发现一切归结于  $L_{R/\mathbb{Z}_p} = \ker \theta / (\ker \theta)^2$ , 但是结合  $\mathbb{Z}_p \rightarrow R \rightarrow R'$  产生的余切复形三角和定理 4.12 就说明了结果。

第三步, 由 Bökstedt 的计算, 原命题对  $R = \mathbb{F}_p$  成立。因此由第二步, 其对任何完美 (胚)  $\mathbb{F}_p$ -代数正确。

第四步, 对于一般的  $R$ , 我们归纳证明。现在假设结论对  $< i$  正确, 那么  $\tau_{< i} \mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$  完美, 从而 (结合第一步) 知  $\tau_{\geq i} \mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$  是伪凝聚的, 从而  $\mathrm{THH}_i(R; \mathbb{Z}_p)$  有限生成。

现在考虑余极限完美化  $R \rightarrow R/pR \rightarrow \bar{R} = \varinjlim_{\varphi} R/pR$ , 这是一个满射并且核落在 Jacobson 根里。我们比较图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_R(\mathrm{THH}_2(R; \mathbb{Z}_p)) \otimes_R \bar{R} & \longrightarrow & \mathrm{THH}_*(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R \bar{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\mathrm{THH}_2(\bar{R}; \mathbb{Z}_p)) & \longrightarrow & \mathrm{THH}_*(\bar{R}; \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

归纳假设知上侧水平箭头在  $* \leq i$  的次数上都是同构 (注意区分同伦群的  $\otimes$  和环谱的  $\otimes$ ) 现在如果  $i$  是奇数, 则  $\mathrm{THH}_i(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R \bar{R} = 0$ , 从而由 Nakayama 引理就立刻说明  $\mathrm{THH}_i(R; \mathbb{Z}_p) = 0$ 。如果  $i$  是偶数, 同样 Nakayama 引理说明其为满射。

现在为了说明单射, 我们考虑图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_R(\mathrm{THH}_2(R; \mathbb{Z}_p)) & \longrightarrow & \mathrm{THH}_*(R; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\mathrm{THH}_2(R; \mathbb{Z}_p)) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{THH}_*(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

其中  $\mathfrak{p} \subseteq R$  是极小素理想。现在由于定理 2.33,  $R$  是既约的, 从而竖直箭头是单射。因此我们只需说明下侧水平箭头是单射, 即:

$$\mathrm{Sym}_R(\mathrm{THH}_2(R; \mathbb{Z}_p)) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathrm{THH}_*(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$$

是单射。现在  $\text{Spec} R$  是闭子概形  $\text{Spec} \bar{R}$  和开子概形  $\text{Spec} R[1/p]$  的并。如果  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} \bar{R}$ , 那么此时问题从上述  $-\otimes \bar{R}$  的情况立刻得到  $(-\otimes \bar{R} \otimes_{\bar{R}} R_{\mathfrak{p}})$ ; 类似地对于  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R[1/p])$  的情况, 两端为

$$\text{Spec}(\text{THH}_2(R; \mathbb{Z}_p)) \otimes_R R[1/p] \rightarrow \text{THH}_*(R; \mathbb{Z}_p) \otimes_R R[1/p]$$

但这实际上就是有理化  $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , 但是再一次由 Bökstedt:  $\mathbb{Q} = \text{THH}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , 从而上述变为 HH 的情况, 这时一切归结到  $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , 这就说明了结果。□

接下来我们导出其他相关拓扑同调的取值:

**定理 6.4.**  $R$  完美胚时, 图表:

$$\begin{array}{ccc} \text{TC}^-(R; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi^{h\mathbb{T}}} & \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow & \xrightarrow{\text{can}} & \downarrow \\ \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi} & \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)^{tC_p} \end{array}$$

作用上  $\pi_*$  后是

$$\begin{array}{ccc} A_{\text{inf}}[u, v]/(uv - \xi) & \xrightarrow{u \mapsto \sigma, v \mapsto \varphi(\xi)\sigma^{-1}, \varphi\text{-linear}} & A_{\text{inf}}[\sigma, \sigma^{-1}] \\ \downarrow u \mapsto u, v \mapsto 0, \theta & \xrightarrow{u \mapsto \xi\sigma, v \mapsto \sigma^{-1}, A_{\text{inf}}\text{-linear}} & \downarrow \sigma \mapsto \sigma, \tilde{\theta} = \theta \circ \varphi^{-1} \\ R[u] & \xrightarrow{u \mapsto \sigma} & R[\sigma, \sigma^{-1}] \end{array}$$

其中  $\tilde{\theta} = \theta \circ \varphi^{-1}$ ,  $|u| = |\sigma| = 2, |v| = -2, |\xi| = 0$ 。

证明. 第一步, 我们计算  $\pi_0 \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)$ 。由 Tate 谱序列,  $\pi_0(\text{TP}(R; \mathbb{Z}_p))$  上有滤链  $\text{Fil}^i \pi_0 \text{TP}$ 。使得每个分次是  $\pi_{2i} \text{THH} \cong R$ 。现在由定理 2.31, 就有映射  $A_{\text{inf}} \rightarrow \pi_0 \text{TP}$ 。现在我们只需要逐分次检查其为同构。我们可以从  $R$  基变换到特征  $p$  完美域上检查, 但是后者的情况可以从  $\mathbb{F}_p$  推出。于是一切归结到 [NS18, Corollary IV.4.8] 上。进一步 Tate 谱序列说明 TP 的 2-周期性, 于是这处理了 TP 的情况。

第二步, 我们计算  $\text{TC}^-$ , 通过映射  $\text{can}$ , 我们同伦不动点谱序列到计算 TP 的 Tate 谱序列的谱序列间态射。再一次同伦不动点谱序列说明  $\text{TC}^-$  的一切聚集在偶数次, 于是我们选取次数为 2 和 -2 的生成元  $u, v$  并且其乘积映到  $\text{Fil}^1 \pi_0 \text{TP}$  的生成元。但是这个滤过就是  $\ker \theta \subseteq A_{\text{inf}}$ , 从而这就说明了  $\text{TC}^-$  的论断以及  $\text{can}$  的行为。

第三步, 我们计算  $\pi_0 \varphi^{h\mathbb{T}}$ 。重要观察在于 Tate 构造的作用是 Frobenius (这也是 Tate Frobenius 名称的来源之一), 参见 [NS18, Corollary IV 2.4], 即  $\pi_0 \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \pi_0 \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)^{tC_p} \rightarrow \pi_0 R^{tC_p} = R/p$  是  $x \mapsto x^p$ 。但是由自然性我们考虑对应的:

$$\pi_0 \text{TC}^- \xrightarrow{\varphi^{h\mathbb{T}}} \pi_0 \text{TP} \xrightarrow{\theta} \pi_0 R^{t\mathbb{T}} = R$$

注意由前两步的计算:  $\pi_0 \text{TC}^- \rightarrow \pi_0 \text{THH}$  是  $\theta$ , 因此综合两者我们得到的实际上是

$$\begin{array}{ccc} A_{\text{inf}} & \xrightarrow{\pi_0 \varphi^{h\mathbb{T}}} & A_{\text{inf}} \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ R & \xrightarrow{\varphi} & R/p \end{array}$$

因此一切归结到  $A_{\text{inf}}$  的万有性质。

第四步，我们计算  $\pi_2 \varphi^{h\mathbb{T}} : A_{\text{inf}} \cdot u \rightarrow A_{\text{inf}} \cdot \sigma$ 。再一次这可以基变换到特征  $p$  完美域的情况，然后一切归结到  $\mathbb{F}_p$ ，从而一切归结到 [NS18, Proposition IV.4.9]。乘性帮助我们决定了剩余一切。

最后我们计算  $\text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)^{tC_p}$ ，观察图表中左上角三者以及映射知  $v \mapsto 0$ ，因此它诱导了

$$A_{\text{inf}}[\sigma, \sigma^{-1}] / (\varphi(\xi)\sigma^{-1}) \xrightarrow[\tilde{\theta}\text{-twist}]{} R[\sigma, \sigma^{-1}] \rightarrow \pi_* \text{THH}^{tC_p}$$

我们现在说明其为同构，但这实质上只需要说明我们这里的方形图表是推出：事实上我们说明对于任何  $\mathbb{T}$ -等变  $\text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$ -模  $M$ ，都有

$$M^{h\mathbb{T}} \otimes_{\text{TC}^-(R; \mathbb{Z}_p)} \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \rightarrow M$$

是等价，这是因为  $\text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) = \text{TC}(R; \mathbb{Z}_p)/v$ ，从而是紧对象，于是上述同构的两端和极限交换，从而假设  $M$  余连合。这时上述同构的两端和滤余极限交换，从而最终归结到  $M \in \text{Sp}^\heartsuit$  的情况，但这就是  $M^{h\mathbb{T}}/v = M$ ，可以直接从谱序列得到 ([NS18, Lemma IV.4.12])。□

我们将上述证明的最后一步单独总结出来：

**推论 6.5.** 对于任何连合  $E_\infty$ - $R$ -代数  $A$ ，

$$\text{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p)/v = \text{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\text{TC}^-(R; \mathbb{Z}_p)} \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{THH}(A; \mathbb{Z}_p)$$

$$\text{TP}(A; \mathbb{Z}_p)/\tilde{\xi} = \text{TP}(A; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)} \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p)^{tC_p} \rightarrow \text{THH}(A; \mathbb{Z}_p)^{tC_p}$$

是  $E_\infty$ -环谱的等价。

我们把上述命题总结一下：

**定理 6.6.** 记  $A_{\text{inf}}\{1\} = \pi_2 \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p)$ ，对于  $A_{\text{inf}}$  模  $M$  或  $R$  模  $M$ ，定义

$$M\{i\} = M \otimes_{A_{\text{inf}}} A_{\text{inf}}\{1\}^{\otimes i}$$

这里  $R$ -模  $M$  是通过  $\tilde{\theta} = \theta \circ \varphi^{-1}$  视作  $A_{\text{inf}}$ -模的。定义  $A_{\text{inf}}$  上的滤过为  $\mathcal{N}^{\geq i} A_{\text{inf}} = \xi^i A_{\text{inf}}$  (特别地  $i < 0$  时取  $\mathcal{N}^i = \mathcal{N}^0$ )，那么：

$$\pi_* \text{THH}(R; \mathbb{Z}_p) = \oplus_{i \geq 0} R\{i\} = \oplus_{i \geq 0} \mathcal{N}^i A_{\text{inf}}$$

$$\pi_* \text{TC}^-(R; \mathbb{Z}_p) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\geq i} A_{\text{inf}}\{i\}$$

$$\pi_* \text{TP}(R; \mathbb{Z}_p) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_{\text{inf}}\{i\}$$

其中  $\text{can} : \text{TC}^- \rightarrow \text{TP}$  由  $\mathcal{N}^{\geq i} A_{\text{inf}} \rightarrow A_{\text{inf}}$  给出；

*Tate Frobenius*  $\varphi^{h\mathbb{T}} : \text{TC}^- \rightarrow \text{TP}$  由  $A_{\text{inf}}\{i\}[1/\xi] \rightarrow A_{\text{inf}}\{i\}[1/\tilde{\xi}]$  给出。这里  $\tilde{\xi} = \varphi(\xi)$ ，其中映射由  $\pi_{-2}\varphi : A_{\text{inf}}\{-1\}[1/\xi] \rightarrow A_{\text{inf}}\{-1\}[1/\tilde{\xi}]$  诱导，它将  $\xi A_{\text{inf}}$  映入  $A_{\text{inf}}$ 。

## 6.2 拟正则半完美胚环的拓扑同调

为了从完美胚环的拓扑 Hochschild 同调得到更一般的同调，我们有如下重要的控制拓扑 Hochschild 同调的结果：

**定理 6.7.** 仍然固定  $R$  是完美胚环， $A$  是  $R$ -代数，那么如下  $\mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p)$ -模谱的序列是  $\mathbb{T}$ -等变余纤维列

$$\mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p)[2] \xrightarrow{u} \mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{HH}(A/R; \mathbb{Z}_p)$$

同样有

$$\mathrm{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p)[2] \xrightarrow{u} \mathrm{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{HC}^-(A; \mathbb{Z}_p)$$

$$\mathrm{TP}(A; \mathbb{Z}_p)[2] \xrightarrow{\xi, \sigma} \mathrm{TP}(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{HP}(A; \mathbb{Z}_p)$$

证明. 利用基变换  $\mathrm{HH}(A/R) = \mathrm{THH}(A) \otimes_{\mathrm{THH}(R)} R$  以及  $\mathrm{HH}(R/R) = R$ ，只需证明结论对  $R$  成立，但这时一切都回归到前述计算。  $\square$

注记. 这个控制拓扑同调的结果实际上说在商去  $\xi$  后拓扑同调就回到了代数的版本：因为  $\cdot u$  映射将  $v$  映到了  $\xi$ ，从而诱导了到  $\xi A_{\mathrm{inf}}$  的满射。

因此利用上述命题我们可以得到完美胚环上代数的拓扑 Hochschild 同调有着和 Hochschild 同调类似的 HKR 滤过。我们首先从拟光滑（定理 4.2）的 Hochschild 同调开始：注意此时由于余切复形聚集在 0 处，那么对于拟光滑代数  $A \rightarrow B$ ， $\pi_* \mathrm{HH}(B/A; \mathbb{Z}_p)$  就是  $\Omega_{B/A}^*$  的  $p$ -完备化。

更进一步，注意我们有映射  $\Omega_{A/\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \pi_1 \mathrm{HH}(A) \cong \pi_1 \mathrm{THH}(A)$  ([NS18, Proposition IV.4.2])，从而它变为  $\Omega_{A/\mathbb{Z}}^* \rightarrow \pi_* \mathrm{THH}(A)$ ，进而我们实际上有前一定理中正合列的分裂

$$(\Omega_{A/R})_p^\wedge \rightarrow \pi_* \mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \pi_* \mathrm{HH}(A/R; \mathbb{Z}_p) \cong (\Omega_{A/R}^*)_p^\wedge$$

于是上一定理中的余纤维列诱导了短正合列

$$0 \rightarrow \pi_{i-2} \mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \pi_i \mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \pi_i \mathrm{HH}(A/R; \mathbb{Z}_p) \cong (\Omega_{A/R}^i)_p^\wedge \rightarrow 0$$

从而这就归纳说明了：

**推论 6.8.** 对于完美胚环  $R$  上的拟光滑代数  $A$ ，

$$\pi_* \mathrm{THH}(A; \mathbb{Z}_p) \cong (\Omega_{A/R}^*)_p^\wedge \otimes_R \pi_* \mathrm{THH}(R; \mathbb{Z}_p)$$

于是从拟光滑的情况 Kan 扩张就得到：

**推论 6.9.**  $\mathrm{THH}(-; \mathbb{Z}_p)$  限制在  $p$ -完备  $R$ -代数上有一滤过，使得其分次为

$$gr^n \mathrm{THH}(-; \mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n, 2|i-n} (\wedge^i L_{-/R})_p^\wedge[n]$$

接下来我们计算拟正则半完美胚环的拓扑同调，为此我们利用定理 6.7 和上一滤过。

**定理 6.10.** 固定  $S \in \mathrm{QRSPerfd}_R$ ，则：

1.  $\pi_* \mathrm{THH}(S; \mathbb{Z}_p)$  聚集在偶数次

2.  $\mathrm{TC}^-$ ,  $\mathrm{TP}$  对应的同伦不动点谱序列和 *Tate* 谱序列坍塌, 从而同伦群也聚集在偶数次。can :  $\pi_* \mathrm{TC}^- \rightarrow \pi_* \mathrm{TP}$  在每一次数上都是单射, 并且在  $\leq 0$  次数上是同构。现在记

$$\widehat{\Delta}_S := \pi_0 \mathrm{TC}^-(S; \mathbb{Z}_p) \cong \pi_0 \mathrm{TP}(S; \mathbb{Z}_p)$$

计算其的同伦不动点谱序列 (或 *Tate* 谱序列) 给出了其上的完备滤过  $\mathcal{N}^{\geq *}\widehat{\Delta}_S$ , 称为 *Nygaard* 滤过。特别地当  $S$  完美胚时这就回到了前文中定义的  $\mathcal{N}^{\geq i}A_{\mathrm{inf}} = \xi^i A_{\mathrm{inf}}$ 。 *Nygaard* 滤过的每个分次可以等同于  $\mathcal{N}^i\widehat{\Delta}_S \simeq \pi_{2i} \mathrm{THH}(S; \mathbb{Z}_p)$ 。

通过  $v^i \in \pi_{-2i} \mathrm{TC}^-(R; \mathbb{Z}_p)$ , 我们可以将

$$\pi_{2i} \mathrm{TC}^-(S; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{v_i} \mathcal{N}^{\geq i}\widehat{\Delta}_S \subseteq \widehat{\Delta}_S = \pi_0 \mathrm{TC}^-(S; \mathbb{Z}_p)$$

视为后者的 *Nygaard Filtration*, 其中第一个箭头诱导了等价。

3. *Frobenius* 映射  $\varphi^{h\mathbb{T}}$  在  $\pi_0$  上诱导了  $\widehat{\Delta}_S \rightarrow \widehat{\Delta}_S$ , 它将  $\mathcal{N}^{\geq i}\widehat{\Delta}_S$  映到  $\xi^i\widehat{\Delta}_S$  (回忆  $\xi = \varphi(\xi)$ )。

4.  $\widehat{\Delta}_S/\xi = \widehat{L}\Omega_{S/R}$ ,  $\widehat{\Delta}_S$  是  $\xi$ -无挠的。

证明. 这一切都归功于  $\pi_* \mathrm{THH}(S; \mathbb{Z}_p)$  聚集在偶数次, 但是这是由定理 6.7 中的滤过以及定理 5.15 对余切复形的描述。

剩下要证明的只有最后一个命题, 再次回忆控制拓扑同调形变的定理 6.7, 其正合列直接说明了  $\pi_0 \mathrm{TC}^-(S; \mathbb{Z}_p)/\xi \cong \pi_0 \mathrm{HC}^-(S/R; \mathbb{Z}_p)$ , 但是第 5 节的结果就直接说明了一切。特别地无挠性源于  $\pi_0 \mathrm{TP}$  的  $\xi$ -挠恰好被  $\mathrm{HP}_1(S/R; \mathbb{Z}_p)$  探测, 但是后者再一次由  $\mathrm{HH}(S/R; \mathbb{Z}_p)$  聚集在偶数次 (定理 5.15) 和 *Tate* 谱序列说明是 0。  $\square$

**推论 6.11.** 将上述构造视为  $\mathrm{QRSPerfd}_R$  到  $\widehat{DF}(A_{\mathrm{inf}})$  的层函子, 即  $(\widehat{\Delta}_{(-)}, \mathcal{N}^{\geq *} \widehat{\Delta}_{(-)})$  (注意尽管对  $\mathrm{QRSPerfd}_R$ ,  $\widehat{\Delta}$  取值聚集在 0 处, 但回顾我们最开始的下降性质是必须放在导出范畴中谈论的)。因此其展开成  $\mathrm{QSyn}_R$  上的层, 特别地其取值也是  $(p, \xi)$ -完备的 (因为 *Kan* 扩张的方式是逐点极限, 其保持完备对象)。

如上就是我们构造得到的  $A_{\mathrm{inf}}$ -上同调理论, 接下来我们就要研究其满足的比较定理。

## 7 晶体比较定理

### 7.1 拟正则半完美环: [BMS2] 的方法

我们首先从纯特征  $p$  的情况开始, 研究拟正则半完美环的情况。

**定义 7.1.** 称一个  $\mathbb{F}_p$ -代数  $S$  是拟正则半完美的, 如果 *Frobenius* 映射  $\varphi : S \rightarrow S$  是满射并且  $L_{S/\mathbb{F}_p} \simeq L_{S/S^\flat}$  (由相对余切复形好三角以及定理 4.10 中的论述:  $L_{S^\flat/\mathbb{F}_p}$  上 *Frobenius* 同时是同构和 0) 是平坦  $S$ -模, 聚集在  $-1$  处。

注记. 利用判别定理 4.14, 可以验证一个  $\mathbb{F}_p$ -代数是拟正则半完美当且仅当其拟正则半完美胚。

类似地, 我们有晶体周期环:

**定义 7.2.** 给定半完美 (Frobenius 满)  $\mathbb{F}_p$ -代数  $S$ , 定义  $A_{\text{cris}}^\circ(S)$  为  $W(S^\flat) \twoheadrightarrow$  作为  $\mathbb{Z}_p$ -除幂代数的除幂闭包, 再记  $A_{\text{cris}}(S)$  为其  $p$ -完备化。换句话说,  $A_{\text{cris}}^\circ(S) \twoheadrightarrow S$  的核携带了一个除幂结构, 其与  $(\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p)$  上的除幂结构相容, 并且作为  $W(S^\flat)$ -代数其是满足该性质的始对象。参见定理 B.2 后的警告部分。

特别地,  $A_{\text{cris}}(S)/p = D_{S^\flat}(I)$  为  $S^\flat$  在  $I \subseteq S^\flat$  上的除幂闭包, 其中  $I$  是满射  $S^\flat \rightarrow S$  的核。

现在定义  $A_{\text{cris}}(S)$  上的 Frobenius 为由  $S$  上诱导者, 定义其上的 Nygaard 滤过为

$$\mathcal{N}^{\geq i} A_{\text{cris}}(S) = \{x \in A_{\text{cris}}(S) \mid \varphi(x) \in p^i A_{\text{cris}}(S)\}, i \geq 0$$

记  $\hat{A}_{\text{cris}}(S)$  为  $A_{\text{cris}}(S)$  沿 Nygaard 滤过的完备化。

**命题 7.3.**  $S$  是拟正则半完美  $\mathbb{F}_p$ -代数,  $I = \ker(S^\flat \rightarrow S)$ , 则  $L\Omega_{S/\mathbb{F}_p} \simeq L\Omega_{S/S^\flat}$  聚集在 0 处, 并且有同构

$$A_{\text{cris}}(S)/p \cong L\Omega_{S/\mathbb{F}_p}$$

证明. 聚集在 0 处来自定义。首先我们不加证明地宣称比较映射  $L\Omega_{S/\mathbb{F}_p} \rightarrow A_{\text{cris}}(S)/p$  的存在性。

现在对于任何拟正则半完美环  $S$ , 记  $\tilde{S} = S^\flat[X_i^{1/p^\infty}, i \in I]/(X_i, i \in I)$ , 其有到  $S$  的满射,  $X_i^{1/p^n} \mapsto i^{1/p^n}, i \in I$ 。因此  $L_{\tilde{S}/\mathbb{F}_p}[-1] = \tilde{I}/\tilde{I}^2 \mapsto L_{S/\mathbb{F}_p}[-1] = I/I^2$  是满射, 类似地

$$L\Omega_{\tilde{S}/\mathbb{F}_p} \rightarrow L\Omega_{S/\mathbb{F}_p}, A_{\text{cris}}(\tilde{S})/p \rightarrow A_{\text{cris}}(S)/p$$

也是满射。

现在注意到  $\tilde{S}$  是完美  $\mathbb{F}_p$ -代数张量积的滤余极限, 而对于完美代数情况已知 [Bha12b, Theorem 3.27], 因此  $\tilde{S}$  的情况下定理成立。从而结合前述比较映射的满性就有  $L\Omega_{S/\mathbb{F}_p} \rightarrow A_{\text{cris}}(S)/p$ 。我们下面构造逆映射, 这是源自  $L\Omega_{S/\mathbb{F}_p} \rightarrow S$  的核有除幂结构, 从而除幂闭包的泛性质说明一切。

我们来说明核有除幂结构这一事实, 我们先来说明  $LW\Omega_S \rightarrow S$  的核有除幂结构。注意 de Rham-Witt 复形的构造满足  $LW\Omega_S/p = L\Omega_S$ , 并且其聚集在次数 0, 且在  $\mathbb{Z}_p$  上平坦。于是我们只需说明  $\forall x \in \ker(LW\Omega_S \rightarrow S), x^n \in n! \ker(LW\Omega_S \rightarrow S)$ 。为了说明此事, 我们可以将  $S$  替换为  $\tilde{S}$  (过渡映射的满性说明一切), 但这个时候我们注意到上述映射实际上穿过  $LW\Omega_{\tilde{S}} \rightarrow A_{\text{cris}}(\tilde{S})$ : 因为我们可以对  $W\Omega_A \rightarrow R\Gamma_{\text{cris}}(A/\mathbb{Z}_p)$  进行 Kan 扩张。

现在由于映射  $LW\Omega_{\tilde{S}} \rightarrow A_{\text{cris}}(\tilde{S}) \bmod p$  后是等价, 并且对于  $\tilde{S}$ ,  $A_{\text{cris}}(\tilde{S})$  是  $p$ -无挠的。于是我们的除幂结构可以下降到  $\bmod p$  后的情况, 因此我们就说明了结果。□

我们类似地使用上述  $S^\flat[X_i^{1/p^\infty}]/(X_i, i \in I)$  的技巧, 可以得到如下结果:

**定理 7.4.**  $S$  是拟正则半完美环, 那么:

1.  $A_{\text{cris}}(S) \cong LW\Omega_S$
2.  $\varphi_i := \varphi_x/p^i$  诱导了  $\mathcal{N}^{\geq i} A_{\text{cris}}(S) \rightarrow A_{\text{cris}}(S)/p \cong L\Omega_{S/\mathbb{F}_p}$ , 其像和 Hodge 滤过  $L\Omega_{S/\mathbb{F}_p}^{\geq i}$  相符。
3.  $\varphi \bmod p : A_{\text{cris}}(S)/p \rightarrow A_{\text{cris}}(S)/p$  的作用是  $x \mapsto x^p$ 。

证明. 我们只证明第一个表述, 其余直接来自 de Rham-Witt 复形的性质。

由上一命题的证明, 我们已知存在映射  $A_{\text{cris}}(S) \rightarrow LW\Omega_S$ , 并且对于  $\tilde{S}$  其是同构。那么再一次由  $\tilde{S} \rightarrow S$  诱导的过渡映射的满性, 有这个映射模  $p$  是同构。然而  $LW\Omega_S$  是  $p$ -无挠的, 因此我们知道其为等价。  $\square$

接下来我们将上述讨论和  $TC^-$  挂钩:

**定理 7.5.**  $S$  是拟正则半完美环, 则  $\widehat{\Delta}_S$  上的 Tate Frobenius  $\varphi$  和  $S$  诱导的 Frobenius 相同, 特别地它们在  $\widehat{\Delta}_S/p$  上的作用都是  $x \mapsto x^p$ 。

在此背景下, 存在  $\varphi$  等变同构

$$\widehat{\Delta}_S \cong \hat{A}_{\text{cris}}(S) \cong \widehat{LW\Omega}_S$$

并且这个同构诱导了  $HC^-$  和 de Rham 上同调之间的同构

$$\pi_0 HC^0(S/\mathbb{F}_p) \cong \widehat{\Delta}_S/p \cong \widehat{L\Omega}_{S/\mathbb{F}_p}$$

证明.

1.  $S$  完美. 此时一切归结于完美胚环的拓扑同调。

2. 情形:  $S = \mathbb{F}_p[T^{\pm 1/p^\infty}]/(T-1) = \mathbb{F}_p[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$ .

此时记  $B = \mathbb{S}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$ , 那么

$$THH(S) = THH(B) \otimes_{\mathbb{S}} THH(\mathbb{F}_p)$$

另一方面:

$$\begin{aligned} THH(B) \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{Z} &= (THH(B) \otimes_{\mathbb{S}} THH(\mathbb{Z})) \otimes_{THH(\mathbb{Z})} \mathbb{Z} = THH(B \otimes_S \mathbb{Z}) \otimes_{THH(\mathbb{Z})} \mathbb{Z} \\ &= THH(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]) \otimes_{THH(\mathbb{Z})} \mathbb{Z} = HH(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]) \end{aligned}$$

这就说明

$$THH(S) = HH(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]) \otimes_{\mathbb{Z}} THH(\mathbb{F}_p)$$

现在我们宣称:

**引理 7.6.** 对于连合  $\mathbb{T}$ -等变  $M \in D(\mathbb{Z})$ ,  $M \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} THH(\mathbb{F}_p)$  诱导的

$$M^{t\mathbb{T}} \rightarrow (M \otimes_{\mathbb{Z}} THH(\mathbb{F}_p))^{t\mathbb{T}}$$

是  $p$ -完备化。

该引理成立的原因与我们在定义  $TP(R; \mathbb{Z}_p)$  时所使用的论述大致相同。因此我们有

$$HP(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]; \mathbb{Z}_p) \cong TP(\mathbb{F}_p[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p])$$

但是再次回忆  $HC^-$  和 de Rham 上同调之间的比较:

$$\pi_0 HP(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]; \mathbb{Z}_p) \cong \pi_0 HC^-(\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]; \mathbb{Z}_p) \cong (\widehat{L\Omega}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]/\mathbb{Z}})_p^\wedge$$



现在由晶体上同调的 de Rham 比较定理 (定理 B.9), 注意  $\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$  是  $\mathbb{F}_p[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$  的到  $\mathbb{Z}_p$  上的提升, 并利用 Kan 扩张: 就有

$$\widehat{LW\Omega}_{\mathbb{F}_p[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]} \cong (\widehat{L\Omega}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]/\mathbb{Z}})_p^\wedge$$

因此上述讨论就说明了  $S = \mathbb{F}_p[\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$  时命题成立。

3. **归约.** 如果结果对  $S_1, S_2$  成立, 则对  $S_1 \otimes_{\mathbb{F}_p} S_2$  也成立: 这是因为命题两端构造对张量积交换。特别地, 对任何完美代数  $R$ , 命题对  $R[X_i^{1/p^\infty}, i \in I]/(X_i, i \in I)$  成立, 因为  $\mathbb{F}_p[T^{\pm 1/p^\infty}]/(T-1) \cong \mathbb{F}_p[T^{1/p^\infty}]/(T)$ 。

4. **一般情况.** 对任何环  $S$ , 已知命题对  $\tilde{S} = S^b[X_i^{1/p^\infty}, i \in I]/(X_i, i \in I)$  成立,  $I = \ker(S^b \rightarrow S)$ 。并且诱导的过渡映射都是满射, 接下来的论证和定理 7.3 中使用的完全相同:

注意  $\widehat{\Delta}_{\tilde{S}} \rightarrow \widehat{\Delta}_S$  是满射, 并且其核有除幂, 从而泛性质说明存在  $\widehat{A} =_{\text{cris}}(S) \rightarrow \widehat{\Delta}_S$ , 注意这个映射 mod  $p$  回到了经典情况下的同构: 因为它 (由两个比较定理: 定理 7.3 和 HC<sup>-</sup>-de Rham 比较) 是  $\widehat{L\Omega}_{S/\mathbb{F}_p}$  上的自同态, 但是  $\tilde{S}$  的情况下它是恒等映射, 于是结合满性就说明了一切。最终再由  $p$ -无挠, 我们就说明了这个 mod  $p$  的同构可以提升成为同构。

□

通过拟合割下降, 我们就说明了晶体比较

**推论 7.7.** 给定特征  $p$  完美域  $k$  以及光滑  $k$ -代数  $A$ :

$$\widehat{\Delta}_A \cong R\Gamma_{\text{cris}}(A/W(k))$$

## 7.2 分圆 $t$ -结构: [AN18c] 的方法

在这里我们简单引述 [AN18c] 解决晶体比较定理的方法, 其思路是第5节前半部分的直接推广。囿于篇幅限制在这里我们会跳过许多技术细节, 只展示大致的手段。

我们宣称: 分圆谱上存在一个  $t$ -结构:

**定理 7.8.** 记  $(\mathbf{CycSp})_{\geq 0}$  为基底谱连合的分圆谱, 那么它能够产出一个  $t$ -结构, 类似地对于连合  $E_\infty$ -环谱, 上述  $t$ -结构在  $\text{Mod}_R(\mathbf{CycSp})$  上也有类似物。

**定义 7.9.** 我们定义  $\text{TR}^{n+1}(X) = X^{hC_{p^n}} \times_{(X^{tC_p})^{hC_{p^{n-1}}}} \cdots \times_{(X^{tC_p})^{hC_p}} X^{hC_p} \times_{X^{tC_p}} X$ , 并定义  $R: \text{TR}^{n+1} \rightarrow \text{TR}^n(X)$  为遗忘掉第一个因子, 定义  $\text{TR}(X) \simeq \varprojlim \text{TR}^{n+1}(X)$ 。

我们下面描述分圆谱在这个  $t$ -结构下的心。

**定义 7.10.** 定义拓扑 Cartier 模范畴为

$$\begin{array}{ccc} \text{TCart}_p & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\prod_p Sp^{B\mathbb{T}})^{\Delta^2} \\ \downarrow & & \downarrow (\text{ev}_1, \partial^1) \\ Sp^{B\mathbb{T}} & \xrightarrow{(\text{id}, Nm_{C_p})} & Sp^{B\mathbb{T}} \times (Sp^{B\mathbb{T}})^{\Delta^1} \end{array}$$



其中底部的  $Nm_{C_p}$  将  $M$  映到  $M_{hC_p} \rightarrow M^{hC_p}$ 。因此一个拓扑 Cartier 模范畴包含的数据是一个等变谱  $M, V_M : M_{hC_p} \rightarrow M, F_M : M \rightarrow M^{hC_p}$  以及 2-态射  $Nm_{C_p} \simeq F_M \circ V_M$ 。

称一个 Cartier 模是导出  $V$  完备的, 如果  $\varprojlim(\cdots \rightarrow M_{hC_{p^2}} \xrightarrow{V_{hC_p}} M_{hC_p} \xrightarrow{V} M)$  消失。

**定理 7.11.**  $TR : \text{CycSp}_p^- \rightarrow \text{TCart}_p^-$  (这里拓扑 Cartier 模范畴上的  $t$ -结构就是基底谱的  $t$ -结构) 诱导了  $\text{CycSp}_p^\heartsuit \subseteq \text{TCart}_p^\heartsuit$ , 并且其本质像是所有导出  $V$  完备的拓扑 Cartier 模。

其和晶体上同调的关联是

**定理 7.12.**  $k$  是特征  $p$  完美域,  $R$  是光滑  $k$ -代数, 那么  $\pi_*^{cyc} \text{THH}(R) \simeq W\Omega_R^*$ : 该同构是作为 Dieudonné 复形的同构。

由此出发, 我们完全仿照对比  $\text{HC}^-$  和 de Rham 上同调的步骤, 立刻就得到:

**定理 7.13.** 滤对象  $\text{TP}(\tau_{\geq \star}^{cyc} \text{THH}(R))$  的 Beilinson (倍速)  $t$ -结构滤过  $F_B^* \text{TP}(R)$  满足

$$gr_B^i \text{TP}(R) \simeq W\Omega_R^\bullet[2i]$$

## II 棱镜上同调

### 8 棱镜

我们介绍 [BS19] 的重要构造, 主要参考资料为 *loc. cit.* 和 [Ked21]。

#### 8.1 棱镜与棱镜景

**定义 8.1.** 一个棱镜是指一个环对  $(A, I)$ ,  $A$  是  $\delta$ -环,  $I \subseteq A$  定义了  $\text{Spec} A$  上的 Cartier 除子, 并使得  $A$  是  $(p, I)$ -完备, 且  $p \in I + \phi(I)A$  中。

称一个棱镜是:

1. 完美的: 如果  $A$  是完美  $\delta$ -环, 即  $\phi : A \rightarrow A$  是同构
2. 有界的: 如果  $A$  有有界  $p^\infty$ -挠
3. 可定向的: 如果  $I$  是主理想, 一个可定向棱镜的定向指  $I$  的一个生成元
4. 晶体的: 如果  $I = (p)$ 。

棱镜之间的平坦态射指使得  $A \rightarrow B$  是  $(p, I)$ -完备平坦的棱镜态射。

**引理 8.2** (棱镜态射的刚性).  $(A, I) \rightarrow (B, J)$  是棱镜之间的态射, 那么  $I \otimes_A B \cong J$ 。

完美棱镜和完美胚环之间有一一对应:

**定理 8.3.** 完美胚环范畴和完美棱镜范畴等价, 其中对应关系分别是  $R \mapsto (A_{\text{inf}}(R), \ker \theta)$ ,  $(A, I) \mapsto A/I$ 。

**定义 8.4.** 固定棱镜  $(A, I)$ ，以及切片  $A/I$  上代数  $R$ ，定义棱镜景  $(R/A)_{\Delta}$  为如下对象构成的范畴

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B/IB \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A/I \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ R \\ \end{array}$$

其中  $(B/IB)$  为  $(A, I)$  上的棱镜，其上的拓扑为平凡拓扑：即所有预层都是层。

定义棱镜景上的结构层为  $\mathcal{O}_{\Delta} : (R \rightarrow B/IB \leftarrow B) \mapsto B$ ，以及  $\bar{\mathcal{O}}_{\Delta} : (R \rightarrow B/IB \leftarrow B) \mapsto B/IB$ 。

定义棱镜上同调为

$$\Delta_{R/A} = R\Gamma((R/A)_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta})$$

Hodge-Tate 上同调为

$$\bar{\Delta}_{R/A} = R\Gamma((R/A)_{\Delta}, \bar{\mathcal{O}}_{\Delta})$$

注记. 我们不得不在这里提请读者注意这个定义和晶体景的定义之间的相似和差异。另外真正应被称为景的实际上是上述范畴的反范畴，我们在这里简单混用术语。

**警告 ▲.** 我们的棱镜景上没有携带任何拓扑：在晶体景的介绍里我们已经展示过这样风味的 Grothendieck 拓扑了。但是这里需要注意的是此时我们的棱镜景和 [BS19] 使用的不完全相同：其定义中的覆盖要求  $(B, IB) \rightarrow (C, IC)$  是棱镜之间的忠实平坦映射。这一额外要求的确改变了整个意象，但是它不改变对应的棱镜上同调和 Hodge-Tate 上同调。因此在本笔记中我们永远采用棱镜景上携带平凡拓扑的约定，而不再指出其和 [BS19] 所用术语的差别。

注记. 在棱镜景的定义中，如果限制棱镜  $(B, IB)$  为完美棱镜，得到的景称为完美棱镜景  $(R/A)_{\Delta}^{\text{perf}}$ ，其行为参见定理 8.16。

## 8.2 Hodge-Tate 比较

在本节，我们简要介绍棱镜上同调的 Hodge-Tate 比较定理的证明大概，我们并不展示所有证明细节而只大致介绍其证明思路。我们首先从纯特征的情况出发，即假定基底棱镜是晶体棱镜。这里应当遵循的直觉是棱镜景和晶体景之间的相似性，其中的弱始对象之间也存在某些关联。然而无论是晶体景还是棱镜景的上同调都可以通过 Čech-Alexander 消解计算得到：因为两个景上的拓扑都是平凡拓扑，从而这就能够建立两者之间的关联。

我们首先正式地叙述 Čech-Alexander 消解：

**引理 8.5** (Čech-Alexander 消解). 给定赋予平凡拓扑的景  $\mathcal{C}$ ，假设  $\mathcal{C}$  中有有限（非空）积和一个弱终对象（终到的态射存在但不一定唯一），那么对于任何（预）层  $\mathcal{F}$ ，其上同调  $R\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F})$  被如下复形计算

$$0 \rightarrow F(X) \rightarrow F(X \times X) \rightarrow F(X \times X \times X) \rightarrow \cdots$$

证明. 我们回忆预层  $K$  的上同调指  $\mathcal{F}(K) = \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C})}(K, \mathcal{F})$  的导出，于是  $H^q(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = H^q(*, \mathcal{F})$ ， $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(h_X, \mathcal{F})$ 。

现在  $h_X \rightarrow *$  是满射, 由 [Stacks, p. 03CI]: 我们不妨将  $\mathcal{C}$  替换为更大的范畴使得  $h_X, *$  成为  $\mathcal{C}$  中的对象, 那么对覆盖  $\{h_X \rightarrow *\}$  使用 Čech 谱序列, 并利用  $H^q(X^p, \mathcal{F}) = 0, \forall q > 0$  就得到了谱序列坍塌, 从而得到了结果。□

正如同前述注记指出的: 在仿射情形下, 棱镜景可以约化成携带平凡拓扑者, 类似的事情在晶体景上也存在: 这是 [Stacks, 07JK] 保证的。为了使用 Čech-Alexander, 我们具体地构造两个 (平凡拓扑版本的) 景的弱始对象。首先是棱镜景:

**引理 8.6** (棱镜闭包). 固定棱镜  $(A, I)$ , 给定  $(A, I)$  上的  $\delta$ -环对  $(B, J)$ , 存在一个万有的  $(A, I)$  上棱镜  $(C, K)$ , 使得任何  $(B, J)$  出发的到棱镜的  $\delta$ -环对态射都穿过  $(C, K)$ 。我们简记  $C := B\{\frac{J}{I}\}^\wedge$ 。

证明.  $\triangleleft$ . 我们简述证明, 其思路与定理 9.1 几乎相同。取  $B'$  为添加  $x/d, x \in J, d \in I$  后的  $\delta$ - $A$ -代数, 取  $B_1$  为  $B'$  的极大  $d$ -无挠商  $B/B[d^\infty]_\delta$  的  $(p, d)$ -导出完备化。当然这可能包含新的  $d$ -挠元, 由超限归纳反复操作即可。□

于是现在我们考虑一个有界可定向棱镜  $(A, (d))$  以及  $A/(d)$ -代数  $R$ : 那么取一个自由  $\delta$ - $A$ -代数  $P$  以及满射  $P \rightarrow R$ 。现在记  $J = \ker(P \rightarrow R)$ , 于是我们取棱镜闭包得到  $P\{\frac{J}{(d)}\}^\wedge$ 。特别地, 其产生了棱镜景中的一个对象

$$X := (R \rightarrow P\{\frac{J}{(d)}\}^\wedge / (d) \leftarrow P\{\frac{J}{(d)}\}^\wedge) \in (R/A)_\Delta$$

由棱镜闭包的泛性质这是弱始对象。因为任何  $(R \rightarrow B/IB \leftarrow B) \in (R/A)_\Delta$ , 我们只需说明存在  $\delta$ -映射  $P \rightarrow B$  (升级到棱镜的部分被棱镜闭包泛性质保证了): 但  $P$  的自由性说明了这样映射的存在性, 因为我们只需要将像逐个提升。

于是记  $P^n = P^{\otimes_A(n+1)}$ ,  $J^n = \ker(P^n \rightarrow R)$ , 我们就有如下计算棱镜上同调的 Čech-Alexander 复形:

$$C_\Delta^\bullet(R/A) := (0 \rightarrow P^0\{\frac{J^0}{d}\}^\wedge \rightarrow P^1\{\frac{J^1}{d}\}^\wedge \rightarrow \cdots)$$

归功于 (仿射) 晶体景和 (仿射) 棱镜景形式上的相似性, 我们可以完全平行地构造 “晶体闭包” 和计算晶体上同调的 Čech-Alexander 复形。然而仔细检查晶体景的构造就可以发现, 这里我们的 “晶体闭包” 实际上就是除幂闭包  $D(P \rightarrow R)$ ! 因此计算晶体上同调的 Čech-Alexander 复形为:

$$C_{cris}^\bullet(R/A) := (0 \rightarrow D(P^0 \rightarrow R) \rightarrow D(P^1 \rightarrow R) \rightarrow \cdots)$$

下面我们比较晶体棱镜时上述两个构造, 主定理为:

**定理 8.7** (晶体比较). 固定晶体棱镜  $(\mathbb{Z}_p, (p))$ , 存在典范同构

$$(\phi^* \Delta_{R/\mathbb{Z}_p})^\wedge \simeq R\Gamma_{cris}(R/\mathbb{Z}_p)$$

注记. 如果回看定理 B.6 的定义, 我们额外要求了局部幂零性并重新定义了  $H_{cris}^n(X/W(k))$  为截断 Witt 环上的晶体上同调的极限。这些是为了过渡到概形上而产生的额外细节, 在仿射的情形下均不需考虑。

证明.  $\triangleleft$ . 综合上述讨论, 我们最终只需说明如下两个余单纯代数:

$$P^\bullet\left\{\frac{\phi(J^\bullet)}{p}\right\}^\wedge, D(P^\bullet \rightarrow R)$$

同伦等价. 其中第一部分的原因是

$$\phi^*(P^\bullet\left\{\frac{J^\bullet}{p}\right\})^\wedge \cong P^\bullet\left\{\frac{\phi(J^\bullet)}{p}\right\}^\wedge$$

其中  $\phi$  从  $A$  提升到  $P^\bullet$  的原因恰好是  $A \rightarrow P^\bullet$  是同伦等价.

然而我们现在宣称如下引理:

**引理 8.8** (除幂 vs.  $\delta$ -环).  $A$  是  $p$ -无挠  $\delta$ -环,  $P$  是自由  $\delta$ - $A$ -代数. 假设  $J = (p, x_1, \dots, x_r) \subseteq P$  使得  $x_1, \dots, x_r \in P$  是  $P/p$  中正则序列, 那么:

$$P\left\{\frac{\phi(J)}{p}\right\}^\wedge \cong D(P \rightarrow P/J)$$

证明.  $\triangleleft$ . 我们只证明  $P = \mathbb{Z}_p\{x\}, J = (p, x)$ , 一般情况则只是一些不困难但繁杂的基变换论证. 回忆棱镜闭包的构造, 我们只需说明如下事实:  $P\{y\}/(py - \phi(x))_\delta$  (添加  $\frac{\phi(x)}{p}$ ) 是  $p$ -无挠的, 并且其和  $P[\{x^n/n!\}] \subseteq P[1/p]$  相符.

$p$ -无挠性是直接的: 因为我们的构造实际上是推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p\{z\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p\{z, y\}/(py - z)_\delta \simeq \mathbb{Z}_p\{y\} \\ \downarrow z \mapsto \phi(x) & & \downarrow y \mapsto \phi(x)/p \\ P := \mathbb{Z}_p\{x\} & \longrightarrow & P\{y\}/(py - \phi(x))_\delta \end{array}$$

然而左侧竖直映射是平坦的, 右上角对象  $p$ -无挠, 从而右下角也是如此. 接下来我们证明两者相符: 注意在上述图表中同时将  $p$  可逆说明  $P[1/p] \simeq P\{y\}/(py - \phi(x))_\delta[1/p]$ , 于是我们的确可以将之视为  $P[1/p]$  的子环.

特别地  $P\{y\}/(py - \phi(x))_\delta = P\{y\}/(py - x)_\delta = P\{\phi(x)/p\}$ , 即  $P[1/p]$  中包含  $P, x^p/p$  的最小  $\delta$ -子环, 即  $P[\{\delta^i(x^p/p)\}_{i \geq 1}]$ , 我们需要证明其和  $P[\{x^n/n!\}]$  相符. 这是完全的初等  $\delta$ -环计算, 我们不继续展示所有细节了.  $\square$

利用上述引理我们立刻说明了同伦等价, 接下来我们还需说明两侧的 Frobenius 相符: 即  $R$  自带的 Frobenius 和  $\delta$ -结构的 Frobenius 相符, 我们不纠缠于细节而直接承认其成立.  $\square$

我们下面说明如何利用基变换论述将上述讨论从晶体棱镜过渡到一般棱镜上. 首先是在平展意义下的基变换:

**引理 8.9** (Hodge-Tate 上同调的平展局部化).  $R \rightarrow S$  是  $p$ -完备光滑  $\bar{A}$ -代数之间的  $p$ -完备平展映射, 那么

$$\bar{\Delta}_{R/A} \otimes_R^{\mathbb{L}} S \rightarrow \bar{\Delta}_{S/A}$$

是同构.

证明. 限制映射  $(S/A)_{\Delta} \rightarrow (R/A)_{\Delta}$  有右伴随  $R: (R \rightarrow B/IB \leftarrow B) \mapsto (S \rightarrow B_S/IB_S \leftarrow B_S)$ , 其中  $B_S/IB_S = B/IB \hat{\otimes}_R^{\mathbb{L}} S$ ,  $B \rightarrow B_S$  是  $B/IB \rightarrow B/IB \otimes_R^{\mathbb{L}} S$  的提升 (导出完备性带来的 Henselian 性质, 并利用平展性质升级到  $\delta$ -环结构: [BS19, Lemma 2.18]).

现在  $F$  将  $(R/A)_{\Delta}$  的弱始对象映到弱始对象, 并且  $F$  保持有限积, 从而保持计算 Hodge-Tate 上同调的复形。于是我们只需比较

$$F(C_{\Delta}^{\bullet}(R/A))/IF(C_{\Delta}^{\bullet}(R/A)) \text{ 和 } C_{\Delta}^{\bullet}(R/A)/IC_{\Delta}^{\bullet}(R/A) \hat{\otimes}_R^{\mathbb{L}} S$$

但是这只需逐项检查, 从而一切归约到纯交换代数计算。□

类似地, 我们也可以对基底棱镜做基变换:

**引理 8.10** (棱镜基变换).  $R$  是  $p$ -完备光滑  $\bar{A}$ -代数,  $(A, I) \rightarrow (A', I')$  是有界棱镜之间的态射, 使得  $A \rightarrow A'$  具有有限  $(p, I)$ -完备 Tor 振幅。那么就有

$$\Delta_{R/A} \hat{\otimes}_A^{\mathbb{L}} A' \cong \Delta_{(R \hat{\otimes}_A A')/A'}, \quad \bar{\Delta}_{R/A} \hat{\otimes}_A^{\mathbb{L}} A' \cong \bar{\Delta}_{(R \hat{\otimes}_A A')/A'}$$

证明. 证明技术自然完全相同: 我们对比两个弱始对象产生的 Cech-Alexander 复形, 最终有限振幅保证了取 Tot 得到 Cech-Alexander 复形时的交换性。□

现在我们来证明 Hodge-Tate 比较:

**定理 8.11** (Hodge-Tate 比较定理).  $(A, I)$  是一个有界棱镜,  $R$  是  $p$ -完备光滑  $A/I$ -代数, 则 Hodge-Tate 映射

$$\eta_R: (\Omega_{R/(A/I)_p}^{\bullet})^{\wedge}, d_{dR}) \rightarrow (H^{\bullet}(\bar{\Delta}_{R/A})\{\bullet\}, \beta_d)$$

是同构。

注记. 我们首先解释定理中出现的记号: 这里  $H^n(\bar{\Delta}_{R/A})$  之间的微分映射实际上来自

$$0 \rightarrow I^{n+1}\mathcal{O}_{\Delta}/I^{n+2} \rightarrow I^n\mathcal{O}_{\Delta}/I^{n+2} \rightarrow I^n\mathcal{O}_{\Delta}/I^{n+1}$$

产生的边缘映射

$$\beta_d: H^i(\bar{\Delta}_{R/A})\{i\} \rightarrow H^{i+1}(\bar{\Delta}_{R/A})\{i+1\}$$

其中  $M\{n\} = M \otimes_{\bar{A}} (I/I^2)^{\otimes n}$ , 特别地, 这使得  $H^{\bullet}(\bar{\Delta}_{R/A})\{i\}$  成为一个交换  $A/I$  微分分次代数。从而  $p$ -完备 de Rham 复形的泛性质就给出了比较映射

$$\eta_R: (\Omega_{R/(A/I)_p}^{\bullet})^{\wedge}, d_{dR}) \rightarrow (H^{\bullet}(\bar{\Delta}_{R/A})\{\bullet\}, \beta_d)$$

**证明. Step 1.**

首先假定  $I = (p)$ , 由棱镜上同调的平展下降性质, 只需证明  $R = A/p[x_1, \dots, x_n]$  的情况。更进一步由棱镜基变换, 不妨假定  $A = \mathbb{Z}_p$ 。那么此时  $\phi^*(\eta_R^*)$  变为

$$\phi^*\Omega_{R/(A/p)_p}^{\bullet} \{-*\}^{\wedge} \rightarrow H^{\bullet}(\phi^*\Delta_{R/A} \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p) \cong H^{\bullet}(R\Gamma_{\text{cris}}(R/A) \otimes_A^{\mathbb{L}} A/p) \cong \Omega_{R/(A/p)}^*$$

其中中间的同构号是棱镜的晶体比较定理, 最后的同构号是选定  $R$  在  $A$  上的光滑提升后利用晶体-de Rham 比较: 定理 B.9 得到的。但是在多项式环的情况我们手动检查, 发现这就是 Cartier

同构：定理 3.9。然而在  $A = \mathbb{Z}_p$  的情况下  $\phi: A/p \rightarrow A/p$  是忠实平坦的，因此这就说明  $\eta_R^*$  也是同构。

### Step 2.

接下来是一般的情况，首先我们先看  $(A, I)$  是万有定向棱镜的情形：即  $A_0 = \mathbb{Z}_{(p)}\{d, \delta(d)^{-1}\}$ ,  $A$  为其  $(p, d)$ -完备化， $I = (d)$ ：这是万有的（携带）定向的棱镜。

现在我们取  $B = A\{\frac{\phi(d)}{p}\}^\wedge$ ：但是我们发现  $\phi(d), p$  均满足其在  $\delta$  下的像是单位，即用  $\delta$ -环的术语来说：它是特异元。然而如下关于特异元的引理立刻说明  $\phi(d)$  和  $p$  生成了同一个理想。

**引理 8.12** (特异元的不可约性).  $A$  是  $\delta$ -环,  $f, g \in A$ , 如果  $g$  特异并且  $g = fh, \exists h \in A$ , 并且  $f, p \in \text{Rad}(A)$ , 那么  $f$  特异并且  $h$  是单位。

证明. 将  $\delta$  作用到  $g = fh$  上立刻给出：

$$\delta(g) = f^p \delta(h) + h^p \delta(f) + p \delta(f) \delta(h)$$

左侧是单位，右侧第一项和第三项落在  $\text{Rad}(A)$  里，因此  $h^p \delta(f)$  是单位，这就说明了一切。□

现在注意到在  $B$  中  $\phi(d)$  被  $p$  整除（观察棱镜闭包的构造第一步），那么由上述引理立刻就有两者生成了同一个理想。从而我们有棱镜态射

$$(A, (d)) \rightarrow (B, (d)) \xrightarrow{\phi_B} (B, (\phi(d))) = (B, (p))$$

但最后一个棱镜是晶体棱镜。于是为了证明  $A$  的情形，我们只需要检查基变换能够成立并且能够反映同构，因此我们需要如下性质。记  $\alpha: A \xrightarrow{\phi} A \rightarrow B$ ：

1.  $\alpha$  模  $p$  后分解为  $A/p \rightarrow A/(p, d) \xrightarrow{\phi} A/(p, d^p) \rightarrow B/p$ , 其中第一个映射有有限 Tor-振幅，第二个映射忠实平坦，第三个映射忠实平坦。因此它诱导了  $\widehat{\alpha}^*: D_{\text{comp}}(A) \rightarrow D_{\text{comp}}(B)$ , 其中完备指导出  $(p, d)$ -完备。
2.  $\widehat{\alpha}^*$  反映同构：由导出 Nakayama, 只需证明顺着  $A/p \rightarrow B/p$  基变换后再做  $d$ -完备化这一操作诱导了同构，但是我们分解到上述三个映射，每个都成立（第一个是导出 Nakayama, 第二、三个是忠实平坦）
3.  $\widehat{\alpha}^*$  有有限  $(p, d)$ -完备 Tor-振幅：再次只需验证基变换后  $d$ -完备化有有限  $d$ -完备振幅，但这立刻归约到已经证明的情形
4. 由棱镜基变换，对于任何  $p$ -完备光滑  $A/I$ -代数  $R, R_B = R \hat{\otimes}_A B$ ,  $\widehat{\alpha}^* \Delta_{R/A} = \Delta_{R_B/B}$

因此这就说明万有定向棱镜的情况下，Hodge-Tate 定理成立：因为我们可以基变换到晶体棱镜  $(B, (p))$  的情况并且基变换保持同构。

### Step 3.

现在对于一般的有界棱镜，首先由平展比较定理，总可以假定  $R = A/I \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ 。我们宣称有界棱镜局部上都是可定向的，即存在  $(A, I) \rightarrow (B, (d))$  是有界棱镜之间的忠实平坦态射，我们略去此事实的证明，参见 [BS19, Lemma 3.7(4)]。因此我们可以假定  $(A, I)$  是定向棱镜  $(A, (d))$ 。



现在万有定向棱镜的泛性质给出了  $(A_0, (d)) \rightarrow (A, (d))$ , 其中  $(A_0, (d))$  是前述构造过的万有定向棱镜, 那么我们有如下  $(p, d)$ -完备推出图表:

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathbb{Z}_p \longrightarrow B_0 = A_0\{\frac{\phi(d)}{p}\}^\wedge & \longrightarrow & E = A \hat{\otimes}_{A_0}^{\mathbb{L}} B_0 \end{array}$$

特别地,  $\mathbb{Z}_p \rightarrow B_0$  升级成棱镜态射  $(\mathbb{Z}_p, (p)) \rightarrow (B_0, (p))$ , 从而也有棱镜态射  $\gamma : (\mathbb{Z}_p, (p)) \rightarrow (E, (p))$ 。

现在我们宣称  $\widehat{\beta^*} \bar{\Delta}_{R/A} \cong \widehat{\gamma^*} \bar{\Delta}_{\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_r]/\mathbb{Z}_p}$ , 其中  $\widehat{\quad}$  依然指导出完备  $(p, d)$ -对象的基变换: 这是因为  $R = A/I \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ , 而我们详细展开计算两个棱镜的弱始对象和 Čech-Alexander 复形就能立刻得到结果。由于  $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_r]$  上的 Hodge-Tate 比较我们早已知晓, 我们现在知道  $A$  上的 Hodge-Tate 比较映射在作用  $\widehat{\beta^*}$  过后是同构。但是  $\widehat{\alpha^*}$  反映同构, 追上述方形图表就知道  $\widehat{\beta^*}$  也是如此, 从而说明  $A$  上的 Hodge-Tate 比较映射的确是同构。□

### 8.3 棱镜完美化

在本节我们介绍如何利用棱镜上同调给出一个环的完美化。特别地, 这个构造能够帮助我们处理混特征交换代数的一些问题。

**警告 ▲.** 为了将棱镜上同调从光滑的情况正确地过渡到一般的代数, 从现在起我们再一次使用非 Abel 导出并不加说明地用记号  $\Delta_{R/A}, \text{etc.}$  表示导出棱镜上同调。

**定义 8.13.** 固定完美棱镜  $(A, I)$ , 其切片  $\bar{A} = A/I$ 。现在给定导出  $p$ -完备  $\bar{A}$ -代数  $R$ , 定义棱镜完美化为

$$\Delta_{R/A, \text{perf}} = \text{colim}(\Delta_{R/A} \xrightarrow{\phi_R} \dots)_{(p, I)}^\wedge \in D_{(p, I)\text{comp}}(A)$$

定义透镜完美化 ([BS19] 称完美胚化) 为

$$R_{\text{perfd}} = \Delta_{R/A, \text{perf}} \otimes_A^{\mathbb{L}} \bar{A} \in D_{p\text{comp}}(R)$$

**定理 8.14** (余连合性).  $\Delta_{R/A, \text{perf}}$  和  $R_{\text{perfd}}$  都落在  $D^{\geq 0}$  中。

证明. 由构造,  $\Delta_{R/A, \text{perf}}/p$  携带自然的 Frobenius 自同构。我们宣称如下引理:

**引理 8.15.**  $R_\bullet$  是  $\mathbb{F}_p$ -代数中的单纯对象, 则  $\forall i > 0$ , Frobenius 在  $H^{-i}(R_\bullet)$  上的作用是 0。

证明. 考虑  $S_i = \text{Sym}_{\mathbb{F}_p}(F_p[i]) \in D(\mathbb{F}_p)$ 。由构造,  $H^{-i}(S_i) \neq 0$ 。现在注意任何  $H^{-i}(R_\bullet)$  中的对象都能落在某个  $S_i \rightarrow R_\bullet$  诱导的  $H^{-i}(R_\bullet) \rightarrow H^{-i}(S_i)$  的像里。于是一切归结到检查  $H^{-i}(S_i)$  上的 Frobenius 是 0。

而这是逐项检查, 例如  $i = 1$  时,  $S_1 = \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{F}_p[x]}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_p$ , 于是  $H^{-1}(S_1) \cong (x)/(x^2)$ , 其上 Frobenius 是 0。高阶情况则是源自  $S_{i+1} = \mathbb{F}_p \otimes_{S_i}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_p$ , 从而同理归纳地论证就说明了结果。□

注记. 这实际上可以看做定理 4.12 的推广。

现在回到原命题, 我们已知  $\Delta_{R/A, \text{perf}}/p$  的负数阶上同调群消失, 现在对  $\tau^{\leq -1}(\Delta_{R/A, \text{perf}})$  应用导出 Nakayama 就立刻看出  $\Delta_{R/A, \text{perf}}$  自身的负数阶上同调群也消失。□

我们在这里不加证明地给出上述两个完美化作为层上同调的描述, 参见 [BS19, Prop. 8.5]。

**定理 8.16.** 记号如前, 考虑完美棱镜景  $(R/A)_{\Delta}^{\text{perf}}$ , 那么:

$$\begin{aligned}\Delta_{R/A, \text{perf}} &\rightarrow R\Gamma((R/A)_{\Delta}^{\text{perf}}, \mathcal{O}_{\Delta}) \\ R_{\text{perfd}} &\rightarrow R\Gamma((R/A)_{\Delta}^{\text{perf}}, \bar{\mathcal{O}}_{\Delta}) \cong R\lim_{R \rightarrow R', R' \text{ perfd}} R'\end{aligned}$$

我们可以用完美化给出如下重要的构造:

**引理 8.17.**  $(A, I)$  是完美棱镜,  $P \in (A/I)[x]$  是首一多项式, 则存在忠实平坦的完美棱镜态射  $(A, I) \rightarrow (B, IB)$ , 使得  $\bar{B} = B/IB$  包含  $P$  的一个根。

证明. 考虑环  $R = \bar{A} \langle x^{p^{-\infty}} \rangle / (P(x))$ , 那么它是拟正则半完美胚环, 这里  $R \langle X \rangle := R[X]_{(p)}^{\wedge}$ 。

于是由 Hodge-Tate 比较, 注意  $L_{R/\bar{A}}[-1]$  是  $p$ -完备平坦的, 我们就有  $\bar{\Delta}_{R/A}$  聚集在 0 处并且是  $p$ -完备忠实平坦  $R$ -代数。于是类似地由导出 Nakayama (和上一引理类似),  $\Delta_{R/A} \in D^{\leq 0}$ , 因此  $\Delta_{R/A, \text{perf}} \in D^{\leq 0}$ 。

另一方面, 由余连合性我们知道  $\Delta_{R/A, \text{perf}} \in D^{\geq 0}$ 。

结合两者就有:  $\Delta_{R/A, \text{perf}}$  聚集在 0 处。记之为  $B$ , 我们在这里宣称其上有相容的  $\delta$ -环结构并升级成棱镜, 证明留到下一节中, 参见定理 9.3。那么前述一切内容就共同说明  $(A, I) \rightarrow (B, IB)$  是忠实平坦的棱镜态射。此时  $\bar{B}$  是  $R$ -代数, 从而其包含  $P$  的一个根。□

**推论 8.18** (André 平坦引理).  $R$  是完美胚环, 存在  $p$ -完备忠实平坦态射  $R \rightarrow S$  使得  $S$  完美胚并且  $S$  绝对整闭环 (即每个首一多项式都有一个根)。

证明. 我们对前一命题做超限归纳即可。□

## 9 平展比较定理

### 9.1 拟正则半完美胚环的棱镜上同调

在本节中我们计算拟正则半完美胚环的棱镜上同调, 其有着简单的描述。

**命题 9.1.** 固定拟正则半完美胚环  $S$ , 全体配备有  $S \rightarrow A/I$  的棱镜  $(A, I)$  构成的范畴有始对象  $(\Delta_S^{\text{init}}, I)$ , 并且  $I = (d)$  是主理想。

证明. 固定一个完美胚环到其的满射  $R \rightarrow S$ 。由定理 9.2, 所有配备  $R \rightarrow A/I$  的棱镜  $(A, I)$  构成的范畴有始对象  $(A_{\text{inf}}(R), \ker \theta)$ 。

现在记  $J$  为映射  $A_{\text{inf}}(R) \rightarrow R \rightarrow S$  的核, 那么对于任何棱镜  $(C, K), S \rightarrow C/K$ , 都有一个提升  $(A_{\text{inf}}(R), (d)) \rightarrow (C, K)$ 。并且棱镜态射的基本事实保证  $K = d \cdot C$ 。现在由于  $K$  是 Cartier 除子, 那么  $d$  是  $C$  中的非零因子, 并且对于任何  $f \in J$ , 存在唯一的  $f/d \in C$  (观察  $f$  在  $C/K$  中的像是 0, 非零因子保证提升的唯一性)。

现在我们定义

$$B = A_{\text{inf}}(R) \{x_f | f \in J\} / (dx_f - f | f \in J)_{\delta}$$

其给出了唯一的  $\delta$ -环映射  $B \rightarrow C$ 。由于  $C$  中没有  $d$ -挠, 这诱导了  $B/B[d^{\infty}]_{\delta} \rightarrow C$ 。但是  $C$  是导出  $(p, d)$ -完备的, 因此我们有环映射  $H^0((B/B[d^{\infty}])_{(p, d)}^{\wedge}) \rightarrow C$  (其中完备化是导出完备化)。



然而  $H^0$  可能包含新的  $d$ -挠元, 但是我们由超限归纳反复操作, 就得到了一个  $\Delta_S^{\text{init}}$ , 使得其是导出  $(p, d)$ -完备的  $\delta$ -环, 并且  $d$  是非零因子, 同时还有到  $(C, K)$  的棱镜态射。这就是满足要求的始对象。  $\square$

我们最后来验证这个证明开头所使用的论述: 它是完美棱镜和完美胚环的范畴等价的部分推广:

**引理 9.2.**  $(A, I)$  是完美棱镜, 对应的完美胚环为  $R = A/I$ 。对于任何棱镜  $(B, J): A/I \rightarrow B/J$  提升成为棱镜之间的态射。

证明. 现在由于  $L_{A/\mathbb{Z}_p}$  在导出  $p$ -完备化下消失, 而  $B, B/J$  都是导出  $p$ -完备的, 那么由形变理论就有  $A \rightarrow A/I \rightarrow B/J$  唯一地提升成为  $\alpha: A \rightarrow B$ : 并且这一唯一性说明这个提升尊重  $A, B$  上的 Frobenius, 另外由定义立刻有  $\alpha(I) \subseteq J$ 。

现在我们只需说明  $\alpha$  是  $\delta$ -映射: 注意  $\alpha$  穿过  $\varprojlim_{\varphi} B \rightarrow B$  (因为  $A$  上的 Frobenius 是同构), 而这一极限完美化是完美  $\delta$ -环并且  $p$ -无挠: 因此  $A \rightarrow \varprojlim_{\varphi} B$  自动是  $\delta$ -映射 ( $\delta$ -结构在  $p$ -无挠的情况唯一确定:  $\delta(x) = \frac{\phi(x) - x^p}{p}$ )。而  $\varprojlim_{\varphi} B \rightarrow B$  由定义就是  $\delta$ -映射, 这就说明了一切。  $\square$

在拟正则半完美胚环的时候, 上述定义和棱镜上同调相当接近。为了说明这点, 我们回忆拟正则半完美胚环满足  $\bar{\Delta}_{R/A}$  聚集在 0 处。其能够带给我们如下好性质, 我们在证明 André 引理的过程中也使用了一部分这些性质。

**引理 9.3.**  $(A, I)$  是有界棱镜,  $R$  是导出  $p$ -完备的  $A/I$ -代数, 并且  $\bar{\Delta}_{R/A}$  聚集在 0 处。那么:

1.  $\Delta_{R/A}$  上的 Frobenius 提升为  $\Delta_{R/A}$  上的  $\delta$ - $A$ -代数结构
2.  $(\Delta_{R/A}, I\Delta_{R/A})$  给出了  $(A, I)$  上的棱镜, 并有映射  $R \rightarrow \bar{\Delta}_{R/A} = \Delta_{R/A}/I\Delta_{R/A}$ 。
3. 全体配备有  $R \rightarrow B/J$  的  $(A, I)$  上的棱镜  $(B, J)$  构成的范畴存在始对象, 并且  $(\Delta_{R/A}, I\Delta_{R/A})$  在其中是弱始对象 (出发的态射不一定唯一)。

证明. 重要的部分落在第一步, 注意一个环上的  $\delta$ -结构被  $S \rightarrow W_2(S)$  分类, 于是考虑计算棱镜上同调的 Čech-Alexander 消解  $F^\bullet$ , 一切归结到验证  $\lim W_2(F^\bullet) = W_2(\Delta_{R/A})$ 。但是由定义, 我们有拉回图表

$$\begin{array}{ccc} W_2(S) & \xrightarrow{F} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\phi} & S \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_p \end{array}$$

从而利用  $\Delta_{R/A}$  的离散性 (导出 Nakayama) 以及上述拉回图表就有  $W_2$  与之可交换。

第二部分是言自明的。

第三部分证明如下: 对任何满足要求的  $(B, J)$ , 我们简述构造棱镜态射  $(\Delta_{R/A}, I\Delta_{R/A}) \rightarrow (B, J)$  的方法。注意我们这里始终讨论的是导出棱镜上同调, 所以 (包括在第一部分的证明中)  $\Delta$  实际上被 Čech-Alexander 复形以及  $R$  在光滑代数中的消解共同计算的, 即

$$\Delta_{R/A} = \text{colim}_{\Delta^{op}} \lim_{\Delta} F$$

然而现在我们注意  $\lim$  一项 (即光滑代数的棱镜上同调) 实际上是  $\lim_{C \in (R_i/A)_\Delta} C$  (回忆一般范畴上预层的全局截面的定义), 从而这就有了到  $B$  的映射, 于是升级到余极限上就有我们希望的态射。再一次使用和第一部分一样的论证就说明了这个映射尊重  $\delta$ -结构, 于是一切得证。□

接下来则是我们这一节的主定理:

**定理 9.4.**  $S$  是拟正则半完美胚环, 配备有完美胚环出发的映射  $R \rightarrow S$ 。取  $(A, I) = (A_{\inf}(R), \ker \theta)$ , 那么  $\bar{\Delta}_{S/A}$  离散, 并且  $\Delta_S^{\text{init}} = \Delta_{S/A}$ 。

证明. 关于离散的论断和 André 引理的证明中使用的完全相同 (Hodge-Tate 比较和导出 Nakayama)。只需证明其的确是始对象这一论断。首先我们有如下关于弱始对象的范畴论结果:

**引理 9.5.**  $\mathcal{C}$  是幂等完备的,  $X \in \mathcal{C}$ 。假设  $\mathcal{C}$  上的恒等映射穿过  $\mathcal{C}_{X \setminus} \rightarrow \mathcal{C}$ , 即存在  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{X \setminus}$ , 那么  $F(X)$  是  $X$  的一个幂等的到自身的态射, 并且其对应的收缩是  $\mathcal{C}$  的始对象。

证明. 设  $F(X) = (e: X \rightarrow X)$ , 那么对  $e$  作用  $F$  就说明幂等完备性。

现在假设  $X'$  是对应的收缩, 那么  $F(X') = (X \rightarrow X')$  是满态射。现在  $F$  是忠实的, 于是  $\forall Y$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_{X \setminus}}(X \rightarrow X', X \rightarrow Y)$$

然而  $X \rightarrow X'$  是满态射, 从而右侧至多只有一个元素, 因此  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$  至多一个元素, 但是其也至少存在一个元素 ( $X' \rightarrow X \rightarrow Y$ ), 于是这就说明了始对象。□

回到原命题, 结合上述命题我们只需证明弱始对象  $(\Delta_{S/A}, I\Delta_{S/A})$  上的幂等态射是恒等。下面我们做如下约化:

1. 将  $R$  替换为  $R \langle Y_i^{1/p^\infty}, i \in I \rangle$ : 这不改变余切复形, 从而由 Hodge-Tate 比较和导出 Nakayama, 其不改变棱镜上同调。因此可假设  $R \rightarrow S$  是满射。
2. 替换  $S' = R \langle X_j^{1/p^\infty}, j \in J \rangle / (X_j - f_j)^\wedge \rightarrow S: X_j \mapsto 0$ , 其中  $f_j$  是  $\ker(R \rightarrow S)$  的生成元。这诱导了余切复形上的满射, 从而诱导了棱镜上同调的满射, 因此只需证明前者的棱镜上同调上对应的幂等态射是恒等。
3. 通过截断  $J$  取滤余极限, 并将  $A$  替换为  $A' = A_{\inf}(R \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_r^{1/p^\infty} \rangle)$ , 再一次由 Hodge-Tate 比较和导出 Nakayama:

$$\Delta_{T/A} \simeq \Delta_{T/A'}, \quad T = R \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty} \rangle / (X_1 - f_1, \dots, X_n - f_n)$$

最终约化到了如下情形:

$R = A/J$ ,  $J = (I, f_1, \dots, f_r)$ ,  $f_1, \dots, f_r$  是  $A/I$  中的正则序列: 这是 local complete intersection 的棱镜上同调。我们不得不省去这一情形的计算 (参见 [BS19, Example 7.9]) 而仅宣称此时弱始对象  $(\Delta_{R/A}, I\Delta_{R/A})$  的确是始对象。这就说明了结果。□

因此我们说明了在拟正则半完美胚环的情况下始对象和棱镜上同调的确相符, 我们统一用  $\Delta_S = \Delta_S^{\text{init}} = \Delta_{S/A}$  记之。

## 9.2 棱镜- $\mathrm{TC}^-$ 比较

这一步应当是比较定理中最技术性和不自然的部分，本节的目标是说明前述构造和棱镜上同调之间的比较定理。我们首先从棱镜上同调上的 Nygaard 滤过出发：

**定义 9.6.**  $S$  是拟正则半完美胚环，回忆上一节结果，记其对应的棱镜为  $(\Delta_S, (d))$ 。定义其上的 Nygaard 滤过为

$$\mathrm{Fil}_N^i \Delta_S = \{x \in \Delta_S \mid \varphi(x) \in d^i \Delta_S\}$$

并且这一滤过在 Hodge-Tate 比较中和  $A_{\mathrm{inf}}$  上同调上产生的滤过相同。

**定理 9.7** (棱镜- $\mathrm{TC}^-$  比较).  $\widehat{\Delta}_S$  上存在一个自然的  $\delta$ -环结构, 使得泛性质诱导的  $\Delta_S = \Delta_S^{\mathrm{init}} \rightarrow \widehat{\Delta}_S$  是 Nygaard 完备化, 并且两侧的 Nygaard 滤过相同。

证明. 首先固定一个完美胚环  $R$ , 无妨对  $R$ -代数  $S$  讨论。我们首先考虑  $A_{\mathrm{inf}}$ -上同调的如下一般构造: 定义  $\Delta_S^{nc}$  为  $A \mapsto \widehat{\Delta}_A$  (作为取值在完备  $(p, \xi)$  复形  $D(A_{\mathrm{inf}})$  的函子, 而非  $DF(A_{\mathrm{inf}})$ ) 的 Kan 扩张。现在由棱镜上同调的 Hodge-Tate 比较, 我们知道  $\Delta_S^{nc}$  和  $\Delta_S$  上各自携带着滤过, 并且每一个分次同构。

因此我们下面只需要说明在  $\Delta_S^{nc} = \Delta_S$ 。同样的, 一切归约到拟正则完美胚环的情况。我们宣称待证命题在如下两个操作下保持:  $\triangleleft$

1. 称拟正则完美胚  $R$ -代数之间的映射  $S \rightarrow S'$  是相对完美的, 如果它来自顺着某个完美胚  $R$ -代数的基变换:  $S' \cong S \otimes_R P$ ,  $P$  完美胚: 那么命题如果对  $\Delta_S$  成立, 则也对  $\Delta_{S'}$  成立。
2. 如果给定拟正则完美胚  $R$ -代数之间的映射  $S \rightarrow T$ , 使得它还是  $p$ -完备忠实平坦的: 那么命题如果对  $\Delta_T$  成立, 则也对  $\Delta_S$  成立。

现在对于任何拟正则完美胚环  $S$ , 由 Andre 引理定理 8.18, 其存在一个相对完美并且  $p$ -完备忠实平坦的覆盖  $S \rightarrow S'$ , 使得  $S' \cong R'/(f_1, \dots, f_r)$ ,  $R'$  完美胚,  $f_1, \dots, f_r \in R'$  是一列相对  $R$  的 ( $p$ -完备) 正则序列, 并且每个  $f_i$  都存在一系列  $p^\infty$ -根。

然而这样的环  $S'$  当然满足如下态射的存在性  $R \langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_r^{1/p^\infty} \rangle / (X_1, \dots, X_r) \rightarrow S'$ , 并且这个态射是相对完美的。

继续约化, 一切归结到  $S = R \langle X^{1/p^\infty} \rangle / (X)$  的情况。然而此时我们具体计算  $\Delta_S^{\mathrm{init}}$  的构造发现存在  $\varphi$ -等变映射  $\Delta_S \rightarrow \Delta_S^{nc}$ 。注意两者都是  $(p, \xi)$ -完备的, 从而由导出 Nakayama, 只需证明上述映射在沿  $A_{\mathrm{inf}}(R) \rightarrow A_{\mathrm{inf}}(R)/(p, \xi)$  基变换后是同构, 但这个映射穿过  $A_{\mathrm{inf}}(R) \rightarrow A_{\mathrm{cris}}(R/p)$ 。但是在  $A_{\mathrm{cris}}(R/p)$  的情况, 两侧分别变为  $\Delta_{S/p} \rightarrow \Delta_{S/p}^{nc}$ , 但此时右侧是纯特征的, 从而对应着 de Rham-Witt 复形, 而左侧由具体构造知其的确是同构。

最后我们只需要说明  $\Delta_S$  上的  $\delta$ -环结构可以延拓到其 Nygaard 完备化上, 这源自如下技术性引理。  $\square$

**引理 9.8.**  $S$  是拟正则半完美胚环:

1.  $\delta(\mathrm{Fil}_N^i \Delta_S) \subseteq \mathrm{Fil}_N^{pi} \Delta_S + (d, p)^{i-1} \Delta_S$
2.  $\Delta_S$  对 Nygaard 滤过的完备化和对  $\mathrm{Fil}_N^i \Delta_S + (d, p)^j \Delta_S$  的完备化相同。

### 棱镜-平展比较

我们接下来处理棱镜上同调和平展上同调的比较, 我们证明如下版本的棱镜-平展比较定理。

**定理 9.9.**  $(A, I)$  是完美棱镜,  $I = (\xi)$ ,  $R$  是导出  $p$ -完备  $A/I$ -代数, 那么

$$R\Gamma_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec} R[p^{-1}], \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong (\Delta_{R/A}[\xi^{-1}]/p^n)^{\phi=1}$$

### 9.3 Frobenius 不动点

首先我们来解释上述比较定理的表述中出现的不动点。

**定义 9.10.** 固定  $\mathbb{F}_p$ -代数  $B$  以及  $t \in B$ , 记  $D_{\mathrm{comp}}(B)$  为  $t$ - (导出) 完备导出范畴。

定义  $D(B[F])$  为 Frobenius  $B$ -模的导出范畴, 其对象为  $(M, \phi), M \in D(B), \phi : M \rightarrow \phi_* M$  (其中  $\phi_* M$  指沿着  $B$  上 Frobenius 的推前。类似地定义  $D_{\mathrm{comp}}(B[F])$  为  $t$ -完备的  $M$  张成的全子范畴。

现在给定  $(M, \phi) \in D_{\mathrm{comp}}(B[F])$ , 定义

$$M^{\phi=1} = \mathrm{fib}(M \xrightarrow{\phi-1} M) \in D(\mathbb{F}_p)$$

我们来说明上述不动点构造在余极限下保持, 即:

**命题 9.11.**  $D_{\mathrm{comp}}(B[F]) \rightarrow D(\mathbb{F}_p) : M \mapsto M^{\phi=1}, M \mapsto (M[t^{-1}])^{\phi=1}$  和余极限交换。

**证明.** 在证明中所有余极限都在  $D(B)$  中计算。现在给定  $D_{\mathrm{comp}}(B[F])$  中的图表  $\{(M_i, \phi_i)\}$ , 取  $F$  为  $\mathrm{colim}_i M_i \rightarrow (\mathrm{colim}_i M_i)_t^\wedge$  (导出完备化) 的纤维。那么  $F$  是唯一  $t$ -可除的, 从而  $F$  也能下降为

$$\mathrm{fib}(\mathrm{colim}_i M_i[1/t] \rightarrow (\mathrm{colim}_i M_i[1/t])_t^\wedge)$$

因此命题的两个论断都约化到说明  $F^{\phi=1} = 0$ , 因此我们只证明第一个函子:  $M \mapsto M^{\phi=1}$  和余极限交换。

我们宣称如下事实:

**引理 9.12.**  $\forall (N, \phi) \in D_{\mathrm{comp}}(B[F]), N^{\phi=1} = (N/t)^{\phi=1}$ , 其中  $N/t$  上的  $\phi$  由  $N$  诱导: 注意  $\phi(t) = t^p \subseteq tB$ 。

**证明.** 现在由于  $N$  导出  $t$ -完备, 那么  $\mathrm{fib}(N \rightarrow N/t)$  在  $t$ -进拓扑下也是完备的, 另一方面  $\phi$ -作用在  $t$ -进拓扑下是幂零的:  $\phi(t) = t^p$ 。从而结合两者就说明  $F^{\phi=1} = 0$ 。□

回到原命题: 前述引理说明不动点函子可以分解为

$$D_{\mathrm{comp}}(B[F]) \xrightarrow{N \mapsto N[t]} D(B[F]) \xrightarrow{\phi=1} D(\mathbb{F}_p)$$

但是这两个箭头都和余极限交换, 这就说明了结果。□

上述结果的重要意义在于指出棱镜完美化不改变 Frobenius 不动点:

**推论 9.13.**  $(A, I)$  是完美棱镜, 固定  $I = (d)$ . 对于导出  $p$ -完备  $A/I$ -代数  $R$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_{R/A}/p^n)^{\phi=1} &\rightarrow (\Delta_{R/A, \text{perf}}/p^n)^{\phi=1} \\ (\Delta_{R/A}[d^{-1}]/p^n)^{\phi=1} &\rightarrow (\Delta_{R/A, \text{perf}}[d^{-1}]/p^n)^{\phi=1} \end{aligned}$$

是同构。

证明. 首先不妨假定  $n = 1$ , 此时我们只需说明余极限(导出)完美化保持 Frobenius 不动点。但是前一命题保证了和余极限的交换性, 因此我们只需说明  $(M, \phi) \xrightarrow{\phi} (M, \phi)$  在  $(-)^{\phi=1}, (-[d^{-1}])^{\phi=1}$  上诱导的是同构, 但是这是直接的。□

## 9.4 Arc-拓扑

我们证明平展比较定理的方式是选取一个合适的拓扑并下降到其基上。

**定义 9.14.** 称一个 qcqs 概形态射  $f: Y \rightarrow X$  是 arc-覆盖, 如果对于任何秩  $\leq 1$  的赋值环  $V$ , 都有一个秩  $\leq 1$  的赋值环  $W$  以及如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(W) & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(V) & \longrightarrow & X \end{array}$$

并且对应的  $V \rightarrow W$  是忠实平坦映射。

由此, 我们定义 **Sch** 上的 arc-拓扑如下:  $\{f_i: Y_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  在 arc-拓扑下是一个覆盖族, 如果对于任何仿射开集  $V \subseteq X$ , 存在映射  $t: K \rightarrow I$ , 使得  $K$  有限并且有仿射开集  $U_k \subseteq f_{t(k)}^{-1}(V), \forall k \in K$ , 并且对每个  $\sqcup_k U_k \rightarrow V$  作为 qcqs 概形态射是 arc-覆盖。

在上述定义中去掉秩  $\leq 1$  的要求而是变为任何赋值环, 则称得到的拓扑为 v-拓扑。

注记. 秩  $\leq 1$  的赋值环等价于值群是  $(\mathbb{R}, +)$  的子群。由于这样的赋值环具有“一条道路”的直观, arc-覆盖实际上是道路可提升的模拟。

我们的主要目标是证明平展比较定理的两侧都能够在 arc-拓扑下下降, 为此我们需要给出一个刻画 arc-拓扑下可下降的方法。简单来说, 我们有如下结果:

**定理 9.15.**  $\mathcal{C}$  是一个紧生成  $\infty$ -范畴, 并且每个紧对象  $x$  都满足  $\forall y \in \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  是  $n$ -截断的。

假设  $v$ -层  $\mathcal{F}: \text{Sch}_{\text{qcqs}, R}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ , 满足对于任何 qcqs  $R$ -概形和仿射态射构成的余滤系统  $Y_\alpha$ , 都有  $\varinjlim \mathcal{F}(Y_\alpha) \simeq \mathcal{F}(\varprojlim_\alpha Y_\alpha)$ , 那么如果:

- $\mathcal{F}$  满足绝对整闭- $v$ -切除: 即对任何绝对整闭  $R$ -代数  $V$  和素理想  $\mathfrak{p} \subseteq V$ , 都有如下方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V/\mathfrak{p}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V_{\mathfrak{p}}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\kappa(\mathfrak{p})) \end{array}$$

是拉回

就有：

- $\mathcal{F}$  是 *arc*-层。

证明.  $\triangleleft$ . 囿于篇幅, 我们不得不省略大量细节并承认一些结果, 详细证明参见 [BM18, Section 4.1].

首先我们不妨将问题化归到  $f: Y \rightarrow X$  是仿射概形间 *arc*-覆盖, 需要证明  $\mathcal{F}$  满足对  $f$  可下降。

现在我宣称存在一族绝对整闭环  $V_i$ , 以及  $v$ -覆盖  $\text{Spec} \coprod V_i \rightarrow X$ , 并且  $Y \rightarrow X$  对  $f$  泛可下降 (即基变换可下降) 当且仅当  $\forall i, Y \times_X \text{Spec} V_i \rightarrow \text{Spec} V_i$  泛可下降: 我们称这样的性质为  $\{V_i \rightarrow X\}$  探测泛可下降。

注记. 简单来说构造是这样的: 首先我宣称总可以寻找到满足要求的  $v$ -覆盖  $\text{Spec} \coprod W_t \rightarrow X$  (简单地说, 添加所有满足要求的绝对整闭环即可)。一个纯范畴论论述能够说明  $\{\text{Spec} \coprod_{\mathfrak{u}} W_t \rightarrow \text{Spec} \coprod_I W_t\}_{\mathfrak{u} \in \beta I}$  探测泛可下降。而  $\text{Spec} \coprod W_t \rightarrow X$  又是  $v$ -覆盖, 我们已知  $\mathcal{F}$  是  $v$ -层, 这就说明了全部。

因此由上述宣称, 我们不妨假设  $X$  是绝对整闭环  $V$  的素谱, 假设  $Y = \text{Spec} A$ , 注意  $A$  是有限展示  $V$ -代数的滤余极限, 并且其中每一个都是 *arc*-覆盖, 因此这进一步把问题约化到  $A$  有限展示。

现在固定绝对整闭环  $V$ , 称一个区间  $I = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}], \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$  为  $V$  中落在  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  中间的素理想, 即  $\text{Spec}((V/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}})$ , 记之为  $V_I$ 。我们宣称如下事实:

**引理 9.16.**  $V$  是赋值环,  $\mathcal{P}$  是一族区间使得:

1. 如果  $I$  长度  $\leq 1$ , 则  $I \in \mathcal{P}$
2. 如果  $I \in \mathcal{P}, J \subseteq I$ , 则  $J \in \mathcal{P}$
3. 如果  $\mathfrak{p}$  不是极大的, 那么存在  $\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}$ , 使得  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] \in \mathcal{P}$
4. 如果  $\mathfrak{p}$  不是零, 那么存在  $\mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{p}$ , 使得  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{p}] \in \mathcal{P}$
5. 如果  $I, J \in \mathcal{P}$  是重叠区间, 满足  $I \cup J$  也是一个区间, 那么  $I \cup J \in \mathcal{P}$

则  $\mathcal{P}$  包含了所有的区间。

这是纯粹的交换代数和 Zorn 引理的运用, 我们现在定义  $\mathcal{P}$  为所有区间  $I$ , 使得  $V_I \rightarrow A \otimes_V V_I$  满足  $\mathcal{F}$  泛可下降。注意  $I = \text{Spec}(V)$  时这就回到了待证命题, 因此我们验证上述 5 条性质:

1.  $I$  长度  $\leq 1$  时此时  $V_I$  是赋值环, 并且  $V_I \rightarrow A \otimes_V V_I$  直接是  $v$ -覆盖
2. 利用  $V_I, V_J$  之间的基变换
3. 如果存在  $\mathfrak{q}$  使得  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$  长度  $\leq 1$ , 那么结果立刻成立 (第一条); 否则  $\{\mathfrak{p}\}$  是所有形如  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}'], \mathfrak{q}' \supsetneq \mathfrak{p}$  的交。此时  $\kappa(\mathfrak{p}) = \varinjlim_{I=[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}'], \mathfrak{q}' \supsetneq \mathfrak{p}} V_I$ 。现在我们已知  $\kappa(\mathfrak{p}) \rightarrow A \otimes_V \kappa(\mathfrak{p})$  是  $v$ -覆盖, 那么我们宣称存在一个  $I$ , 使得其对应的映射也是  $v$ -覆盖: 这需要一些交换代数论证, 参见 [BM18, Lemma 4.5]。

4. 这是完全对偶的

5. 我们不详细论证, 简单来说这需要利用  $I, J, I \cap J, I \cup J$  之间的拉回方块。

于是综上所述我们就完成了证明。  $\square$

我们下面利用定理 9.15 来验证一些 arc-层。

**定理 9.17** (平展上同调的 arc-下降). 给定环  $R$ ,  $(\mathrm{Spec} R)_{\acute{e}t}$  上的挠层  $\mathcal{G}$ , 那么函子

$$\mathcal{F} : \mathbf{Sch}_{qcqs, R}^{op} \rightarrow D(\mathbb{Z})^{\geq 0} : (f : X \rightarrow \mathrm{Spec} R) \mapsto R\Gamma(X_{\acute{e}t}, f^* \mathcal{G})$$

是 arc-层。

**证明. 1. v-层**

我们首先证明该预层是 v-层, 即验证任何 v-覆盖  $Y \rightarrow X$ , 都有  $\mathcal{F}$  对其可下降。由于  $Y, X_{qcqs}$ ,  $Y$  可以写为有限展示  $X$ -概形和仿射态射构成的余滤系统  $Y_\alpha$  的极限。由于平展上同调将余滤极限映为滤余极限, 并且  $Y_\alpha$  也是 v-覆盖, 我们可假定  $Y \rightarrow X$  是有限展示的。现在由 [Ryd10, Thm 3.12], 我们宣称  $Y \rightarrow X$  可以分解为一个拟紧开覆叠 (局部上是开浸入的满射) 复合上一个紧合有限展示满射。

注意拟紧开覆叠自动满足泛可下降性, 下面我们验证紧合满射也满足泛可下降。我们宣称如果  $f : Y \rightarrow X$  到  $X$  的任何严格 Hensel 化的基变换都满足  $\mathcal{F}$ -可下降, 则  $f$  也是如此。自然: 我们实际上在比较如下两个平展层  $\mathcal{F}(X) \rightarrow \varprojlim (\mathcal{F}(Y) \cdots)$ , 而平展意象具有足够多的点, 这就说明了一切。

因此我们现在不妨假设  $X$  是一个严格 Hensel 环的素谱,  $x \in X$  是闭点。那么此时由紧合基变换:  $\mathcal{F}(Y) \simeq \mathcal{F}(Y_x)$ 。因此我们只需证明  $Y_x \rightarrow X$  满足泛可下降, 进而只需证明  $Y_x \rightarrow x$  满足。注意继续基变换到几何点上不改变  $\mathcal{F}$  的取值, 因此只需证明  $Y_{\bar{x}} \rightarrow \bar{x}$  满足泛可下降。但是我们注意到

$$\begin{array}{ccc} Y_{\bar{x}} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \bar{x} & \longrightarrow & X \end{array}$$

其中提升的存在性源于  $Y \rightarrow X$  是满射以及  $\bar{x}$  代数闭, 因此这诱导了截面  $\bar{x} \rightarrow Y_{\bar{x}}$ 。但是对 Čech 脉的直接计算立刻就说明此时的确有泛可下降。

综上所述就说明  $\mathcal{F}$  是一个 v-层。

**2.  $\varinjlim \mathcal{F}(Y_\alpha) \simeq \mathcal{F}(\varprojlim Y_\alpha)$**

这是直接的: 因为平展上同调和环的滤余极限交换。

**3. 绝对整闭-v-切除**

注意  $(V, \mathfrak{p})$  是 Henselian 环对, 那么由紧合基变换 (Gabber 刚性定理):

$$H_{\acute{e}t}^r(V) \simeq H_{\acute{e}t}^r(V/\mathfrak{p})$$

类似地对  $V_{\mathfrak{p}}$  也有相应的同构, 因此这立刻说明切除方块是拉回。  $\square$

接下来我们证明如下结果, 其用来帮助证明棱镜一侧的 arc-下降。



**定理 9.18.** 完美  $\mathbb{F}_p$ -概形范畴上的结构预层  $\mathcal{O}$  是 *arc*-层。

证明.  $\triangleleft$ . 首先, 上述结果对 fpqc 拓扑成立: 这是忠实平坦下降。我们不得不加证明地宣称上述结果可以升级到 v-拓扑: 大致证明思路是宣称 v-拓扑可以写为 h-覆盖的余滤极限 [Stacks, 0EVP], 而检查 h-下降只需检查有限展示紧合满射的情形 (类似平展 arc-下降的证明, 或 [Stacks, 0EU5])。

现在再一次由定理 9.15, 我们只需检查绝对整闭-v-切除, 而这是直接的。  $\square$

因此我们说明了:

**推论 9.19.**  $\mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$  是完美仿射  $\mathbb{F}_p$ -概形之间的 *arc*-覆盖, 那么 Cech-Alexander 复形:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B \rightarrow \cdots$$

是零调的。

为了处理平展比较定理, 我们需要稍微修改一下所使用的拓扑, 将 arc-拓扑过渡到  $p$ -完备的情况。这样的拓扑称为  $\mathrm{arc}_p$ -拓扑。

**定义 9.20** ( $\mathrm{arc}_p$ -拓扑).  $f: R \rightarrow S$  是导出  $p$ -完备环之间的态射, 称  $f$  是  $\mathrm{arc}_p$ -覆盖, 如果 arc-覆盖中的定义在秩  $\leq 1$  赋值环  $V$  是  $p$ -完备的情况下提升存在。特别地, 此时  $W$  也可以选择为  $p$ -完备的。

类似地, 我们来证明平展比较定理两端的对象都满足  $\mathrm{arc}_p$ -下降。

**定理 9.21** (平展上同调的  $\mathrm{arc}_p$  下降). 给定环  $R$ ,  $(\mathrm{Spec} R)_{\acute{e}t}$  上的挠层  $\mathcal{G}$ , 那么函子

$$\mathcal{F}: \mathbf{Ring}_R^{op} \rightarrow D(\mathbb{Z})^{\geq 0}: (f: \mathrm{Spec} S \rightarrow \mathrm{Spec} R) \mapsto R\Gamma(X \mathrm{Spec} S_{(p)}^{\wedge}[p^{-1}], f^* \mathcal{G})$$

是  $\mathrm{arc}_p$ -层。

证明. 只需证明  $R, S$  均导出  $p$ -完备并且  $R \rightarrow S$  是  $\mathrm{arc}_p$ -覆盖的情况时  $\mathcal{F}$  可下降。我们宣称此时  $R \rightarrow S \oplus R/p \oplus R[p^{-1}]$  是 arc-覆盖, 原因如下:

对于任何  $R \rightarrow V, V$  秩  $\leq 1$  赋值环,  $p$  在  $V$  中的像有如下三种可能:

1. 极大理想中的一个非零元素。此时可以将  $V$  替换为其  $p$ -完备化, 那么  $R \rightarrow S$  是  $\mathrm{arc}_p$ -覆盖就说明了提升的存在性。
2. 0. 此时这个映射穿过  $R/p$ , 于是  $W = V$ , 对应的映射为到  $R/p$  的投影即可。
3. 单位, 此时这个映射穿过  $R[p^{-1}]$ , 于是  $W = V$ , 对应的映射为到  $R[p^{-1}]$  的投影即可。

现在注意  $p$ -完备化再将  $p$  可逆保证了  $R/p$  和  $R[1/p]$  都消失, 因此上述论断约化到了平展上同调的 arc-下降。  $\square$

同样, 我们证明完美胚环在  $\mathrm{arc}_p$ -拓扑下的可下降性:



**定理 9.22.** 给定完美胚环之间的  $\text{arc}_p$ -覆盖  $R \rightarrow S$ , 那么 Cech-Alexander 复形:

$$0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow S \hat{\otimes}_R S \rightarrow \cdots$$

是零调的, 其中完备张量积是  $(p, d)$ -完备化。

证明. 考虑  $R$  对应的完美棱镜  $(A_{\text{inf}}(R), \ker \theta)$ ,  $\ker \theta = (d)$ 。我们宣称  $R^\flat \rightarrow R^\flat[d^{-1}] \oplus S^\flat$  是  $\text{arc}$ -覆盖, 原因如下:

对于任何  $R^\flat \rightarrow V$ ,  $V$  秩  $\leq 1$  赋值环。  $d$  的像有两种可能:

1. 单位: 此时上述映射延拓到  $R^\flat[d^{-1}]$ , 那么提升  $W = V$ , 映射取为投影就满足要求。
2. 极大理想中: 此时可以将  $V$  换为其  $d$ -进完备化, 此时  $R^\flat \rightarrow V$  对应着  $R \rightarrow V^\sharp = A \otimes_R W(V)$ : 注意  $V^\sharp$  和  $V$  值群相同, 从而也是秩  $\leq 1$  赋值环。现在由于  $R \rightarrow S$  是  $\text{arc}$ -覆盖, 那么存在一个延拓  $S \rightarrow V'$ , 通过取完备化和整闭包可以假定  $V'$  是  $p$ -完备绝对整闭的, 此时其分式域由定义是完美胚域, 因此它是完美胚环。于是  $S^\flat \rightarrow V'^\flat$  就是满足要求的  $V$  的延拓。

现在回到原命题: 这时只需对  $R^\flat \rightarrow R^\flat[d^{-1}] \oplus S^\flat$  应用定理 9.19, 并注意取  $d$  完备化使所有  $R^\flat[d^{-1}]$  的项消失, 这就说明了结果。  $\square$

记. 这个命题的证明非常突出地体现了斜置和正置之间的对应关系。

接下来, 我们将利用上述完美胚环上的可下降性说明棱镜上同调确为  $\text{arc}_p$ -层。首先我们从说明其为  $\text{arc}$ -层出发:

**引理 9.23.** 完美胚环构成了  $p$ -完备环上  $\text{arc}_p$ -拓扑的一组基。

证明. 任给  $p$ -完备环  $R$ , 完全类似定理 4.15 的证明: 存在一个  $p$ -完备忠实平坦映射  $R \rightarrow \tilde{R}$  使得  $\tilde{R}$  是半完美胚环。

我们宣称  $R \rightarrow \tilde{R}_{\text{perfd}}$  是满足要求的  $\text{arc}$ -覆盖: 首先  $R \rightarrow \tilde{R}$  是  $\text{arc}$ -覆盖 (忠实平坦), 其次, 对于任何  $\tilde{R} \rightarrow V$ ,  $V$  是  $p$ -完备赋值环, 我们可以进一步将  $V$  替换为其绝对整闭包的  $p$ -完备化, 于是再一次地就有  $V$  是完美胚环。现在由透镜完美化 (完美胚化) 的泛性质定理 9.4, 就有所需的扩张。  $\square$

**推论 9.24.** 对于任何  $p$ -完备环  $S$ ,  $S_{\text{perfd}} = R\Gamma_{\text{arc}}(S, \mathcal{O})$ , 其中  $\mathcal{O}$  是结构层。因此  $S \mapsto S_{\text{perfd}}$  是  $\text{arc}_p$ -层。

证明. 注意完美胚环是基, 因此

$$R\Gamma_{\text{arc}_p}(S, \mathcal{O}) = R\Gamma_{\text{arc}_p}(\text{Perfd}_S, \mathcal{O}) = \Gamma_{\text{arc}_p}(\text{Perfd}_S, \mathcal{O})$$

最后一个等号正是完美胚环在  $\text{arc}_p$ -拓扑下的可下降性。因此由定理 8.16 上式就是:

$$\varprojlim_{S \rightarrow S', S' \text{ perfd}} S' = S_{\text{perfd}}$$

这就说明了结果。  $\square$

## 9.5 棱镜-平展比较定理的证明

我们现在终于可以着手处理棱镜-平展比较定理了。

定理 9.9 的证明. 由前述结果, (限制在导出  $p$ -完备代数上) 平展一侧当然满足  $\text{arc}_p$ -下降, 棱镜一侧满足的理由是: 由定理 9.13, 可以过渡到棱镜的完美化。现在由导出 Nakayama  $(-\otimes^{\mathbb{L}} A/I$  反映同构), 我们实际上只需证明  $R$  的透镜完美化 (完美胚化) 满足  $\text{arc}_p$  下降, 但这正是上一节的命题。

现在回忆定理 9.15 的证明, 我们知道任何  $p$ -完备环都有一个形如  $\prod R_i$  的  $v$ -覆盖, 进而是  $\text{arc}$ -覆盖, 进而是  $\text{arc}_p$ -覆盖, 其中  $R_i$   $p$ -完备且绝对整闭。因此我们将问题约化到了  $R = \prod_{i \in I} R_i$ , 此时对比两侧:

平展上同调一侧是 [Stacks, 0GY7]: 绝对整闭环的有限 Abel 群系数平展上同调的非零阶平展上同调群消失, 因此平展上同调一侧就是  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^I$ 。

现在处理棱镜上同调一侧: 此时  $R_i$  是完美胚环, 因此由定理 9.4:  $\Delta_{R/A, \text{perf}} = W(R^b)$ 。现在对每个  $i \in I$ , 我们只需说明有如下正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow W(R_i^b[d^{-1}])/p^n \xrightarrow{\phi-1} W(R_i^b[d^{-1}])/p^n \rightarrow 0$$

而这不过是 Artin-Schreir-Witt 正合列: 即作为  $\mathbb{F}_p$ -概形  $X$  上的平展层, 有层的短正合列

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \rightarrow W_n \xrightarrow{\phi-1} W_n \rightarrow 0$$

(特别地, 回到  $n = 1$  的情况就是 Artin-Schreir 正合列)。

因此我们说明了  $p$ -完备绝对整闭环的情况, 从而说明了比较定理。  $\square$

## 10 BK 模取值上同调

我们现在已经说明过  $A_{\text{inf}}$  上同调满足的比较定理, 最终我们兑现介绍 [BMS2] 主结果时的承诺, 构造出取值在 Breuil-Kisin 模的上同调理论。我们首先声明一些记号:

**定义 10.1.** 固定  $K$  是  $\mathbb{Q}_p$  的扩张, 其上携带离散赋值, 剩余域是特征  $p$  完美域  $k$ , 固定一个归一化子  $\varpi$ 。

记  $K_{\infty} = K(\varpi^{1/p^{\infty}})_p^{\wedge}$ ,  $C$  为  $K_{\infty}$  代数闭包的完备化,  $A_{\text{inf}} = A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C)$ 。

再记  $\mathfrak{S} = W(k)[[z]]$ , 其上有满射  $\tilde{\theta} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}_K : z \mapsto \varpi$ , 其核被一个 Eisenstein 多项式  $E(z)$  生成。  $\mathfrak{S}$  上携带有自同态  $\varphi$ : 其在  $W(k)$  上是 Frobenius, 并将  $z \mapsto z^p$ 。  $\mathfrak{S}$  可以视作  $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_{K_{\infty}}) \subseteq A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C)$  的子环: 嵌入方式由  $W(k)$  上作用 Frobenius,  $z \mapsto [\varpi^b]^p$  给出, 其中  $\varpi^b = (\varpi, \varpi^{1/p}, \dots) \in \mathcal{O}_{K_{\infty}}^b$ 。

现在记  $\theta = \tilde{\theta} \circ \varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}_K$ 。那么这和  $\mathfrak{S} \subseteq A_{\text{inf}}$  以及  $A_{\text{inf}}$  上的  $\theta$  映射相容,  $\tilde{\theta}$  同理。

BK 模取值上同调的构造依赖于如下相对版本的 THH。

**定义 10.2.**  $\text{THH}(A/\mathbb{S}[z]) = \text{THH}(A) \otimes_{\text{THH}(\mathbb{S}[z])} \mathbb{S}[z]$ 。我们下面阐明其上的 Frobenius 映射  $\varphi_p : \text{THH}(A/\mathbb{S}[z]) \rightarrow \text{THH}(A/\mathbb{S}[z])^{tC_p}$  的构造方式: 事实上这就 Tate 对角线产生的 Frobenius, 但我们有如下具体的描述。

**引理 10.3.**

$$\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z]) \cong \mathbb{S}[B^{cyc}\mathbb{N}]$$

其中  $B^{cyc}$  指循环杠构造。具体到  $B^{cyc}\mathbb{N}$ ，其对应着  $(S^1 \times \mathbb{N}_{>0}) \cup (\{1\} \times \{0\}) \subseteq S^1 \times \mathbb{Z}$ 。其上的  $\mathbb{T}$ -作用是  $t \cdot (s, n) = (t^n s, n)$ 。

*Tate Frobenius* 可以具体构造如下： $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z]) \rightarrow \mathrm{THH}(\mathbb{S}[z])^{hC_p} \rightarrow \mathrm{THH}(\mathbb{S}[z])^{tC_p}$  的复合，其中第二个箭头是典范的，第一个箭头则源于构造

$$\mathbb{S}[B^{cyc}\mathbb{N}] \rightarrow \mathbb{S}[(B^{cyc}\mathbb{N})^{hC_p}] \rightarrow \mathbb{S}[B^{cyc}\mathbb{N}]^{hC_p}$$

第一个箭头由  $(s, n) \mapsto (s^p, pn)$  诱导。

典范映射  $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z]) \rightarrow \mathbb{S}[z]$  由  $B^{cyc}\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (s, n) \mapsto n$  给出，从而我们立刻发现两者的 *Tate Frobenius* 之间交换。

证明. 我们仅解释第一行，对于任何  $\mathbb{E}_1$ -空间  $\Omega Y$ ， $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[\Omega Y])$  由定义是如下复合的几何实现：

$$N(\Lambda^{op}) \xrightarrow{\sim} N(\Lambda) \xrightarrow{V} N(\mathrm{Assoc}_{act}^{\otimes}) \xrightarrow{\Omega Y^{\otimes}} \mathcal{S}_{act}^{\otimes} \xrightarrow{(\Sigma_+^{\infty})} Sp_{act}^{\otimes} \xrightarrow{\otimes} Sp$$

但是  $\Sigma_+^{\infty}$  是对称么半的并且保持余极限，于是它就是如下复合的几何实现的纬悬谱：

$$N(\Lambda^{op}) \xrightarrow{\sim} N(\Lambda) \xrightarrow{V} N(\mathrm{Assoc}_{act}^{\otimes}) \xrightarrow{\Omega Y^{\otimes}} \mathcal{S}_{act}^{\otimes} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{S}$$

而这就是循环杠构造。

剩余构造以及和 *Tate Frobenius* 的比较来自 [NS18, Lemma IV.3.1]。 □

**推论 10.4.** 我们现在构造  $\mathrm{THH}(-/\mathbb{S}[z])$  上的分圆结构：

$$\begin{aligned} \mathrm{THH}(A/\mathbb{S}[z]) &= \mathrm{THH}(A) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z])} \mathbb{S}[z] \xrightarrow{\varphi_p \otimes 1} \mathrm{THH}(A)^{tC_p} \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z])} \mathbb{S}[z] \\ &\rightarrow \mathrm{THH}(A)^{tC_p} \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z])^{tC_p}} \mathbb{S}[z]^{tC_p} \rightarrow \mathrm{THH}(A/\mathbb{S}[z])^{tC_p} \end{aligned}$$

第一个箭头是  $\mathrm{THH}$  的分圆结构，第二个箭头是前一引理中两个 *Frobenius* 的相容性，第三个箭头是  $(-)^{tC_p}$  的松么半性。这就给出了  $\mathrm{THH}(A/\mathbb{S}[z])$  上的分圆结构。

接下来则是相对  $\mathrm{THH}$  和绝对  $\mathrm{THH}$  的比较，这是建立  $\mathrm{BK}$  模到  $A_{\mathrm{inf}}$ -上同调以及其他上同调比较定理的关键。

**命题 10.5.**  $A$  是  $\mathcal{O}_K$ -代数，通过  $z \mapsto \varpi$  成为  $\mathbb{S}[z]$ -代数，那么顺着  $\mathbb{S}[z] \rightarrow \mathbb{S} : z \mapsto 0$  基变换给出了

$$\mathrm{THH}(A/\mathbb{S}[z]) \otimes_{\mathbb{S}[z]} \mathbb{S} \simeq \mathrm{THH}(A \otimes_{\mathcal{O}_K} k)$$

并且这个同构尊重  $\mathbb{T}$ -作用和 *Frobenius*。

证明. 观察如下推出图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}[z] & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & A \\ \downarrow z \mapsto 0 & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S} & \longrightarrow & k & \longrightarrow & A \otimes_{\mathcal{O}_K} k \end{array}$$

□

另外一个比较是

**命题 10.6.**  $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]) \rightarrow \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]$  在  $p$ -完备化后是同构。

证明. 注意到只需将上述映射作用上  $-\otimes_{\mathbb{S}} \mathrm{THH}(\mathbb{Z})$ , 得到  $\mathrm{HH}(\mathbb{Z}[z^{1/p^\infty}]) \rightarrow \mathbb{Z}[z^{1/p^\infty}]$  并且这不改变问题。但是后者  $p$ -完备化后是等价, 因为检查余切复形  $L_{\mathbb{Z}[z^{1/p^\infty}]/\mathbb{Z}}$  的  $p$ -完备化: 再一次由定理 4.12 的技术其消失, 从而 HKR 滤过说明了一切。□

**推论 10.7.**  $A$  是  $\mathcal{O}_K$ -代数, 则

$$\mathrm{THH}(A/\mathbb{S}[z]) \otimes_{\mathbb{S}[z]} \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}] \simeq \mathrm{THH}(A[\varpi^{1/p^\infty}]/\mathbb{S}[z^{1/p^\infty}])$$

的  $p$ -完备化与

$$\mathrm{THH}(A[\varpi^{1/p^\infty}]; \mathbb{Z}_p) = \mathrm{THH}(A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}; \mathbb{Z}_p)$$

相同。

证明. 注意  $\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z^{1/p^\infty}])$  和  $\mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]$  在  $p$ -完备化后同构, 而上式右侧的  $p$ -完备化等同于  $\mathrm{THH}(A[\varpi^{1/p^\infty}]) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbb{S}[z^{1/p^\infty}])} \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]$  的  $p$ -完备化, 从而一切得证。□

接下来我们构造的是 BK 模上同调在 Frobenius 下的拉回, 即 (不准确地写)  $\varphi^* \hat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}}$ 。我们为了区分 Frobenius 在基底环  $\mathfrak{S}$  下的作用, 始终约定  $\mathfrak{S}^{(-1)}$  是通过  $\varphi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(-1)}$  作用的  $\mathfrak{S}$ -代数。于是类似地  $\theta^{(-1)}: \mathfrak{S}^{(-1)} \rightarrow \mathcal{O}_K: z \mapsto \varpi$  对应的是标准记号下的  $\tilde{\theta}$ 。总结一下, 我们得到的是如下两个图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{(-1)} & \hookrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty}) \\ \theta^{(-1)} \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_{K_\infty} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{(-1)} & \hookrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty}) \\ \tilde{\theta}^{(-1)} \downarrow & & \downarrow \tilde{\theta} \\ \mathcal{O}_K[\varpi^{1/p}] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{K_\infty} \end{array}$$

特别地, 第一个图表是推出图表: 因为  $\mathcal{O}_K \cong \mathfrak{S}^{(-1)}/E$ , 而  $\mathcal{O}_{K_\infty} \cong A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty})/\xi$ , 从而说明一切。这里  $\mathfrak{S}^{(-1)} \hookrightarrow A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty})$  没有任何 Frobenius twist, 自然也和前文定义的  $\mathfrak{S}$  的嵌入相容。

我们接下来所做的与  $A_{\mathrm{inf}}$  上同调的构造完全平行。我们首先检查  $\mathcal{O}_K$  对应的上同调 (就像在景  $\mathrm{QSyn}_R$  上我们检查完美胚环  $R$  的上同调一样):

**命题 10.8.**

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TC}^-(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi^{h\mathbb{T}}} & \mathrm{TP}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{THH}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{THH}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)^{tC_p} \end{array}$$

作用上  $\pi_*$  后是

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{(-1)}[u, v]/(uv - E) & \xrightarrow{u \mapsto \sigma, v \mapsto \varphi(E)\sigma^{-1}, \varphi\text{-linear}} & \mathfrak{S}^{(-1)}[\sigma, \sigma^{-1}] \\ u \mapsto u, v \mapsto 0, \theta^{(-1)} \downarrow & & \downarrow \sigma \mapsto \sigma, \tilde{\theta}^{(-1)} \\ \mathcal{O}_K[u] & \xrightarrow{u \mapsto \sigma} & \mathcal{O}_K[\varpi^{1/p}][\sigma, \sigma^{-1}] \end{array}$$

其中  $|u| = |\sigma| = 2, |v| = -2, |E| = 0$ 。

证明. 我们只证明  $\pi_* \mathrm{THH}(\mathcal{O}_K/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) \cong \mathcal{O}_K[u]$ . 注意  $\mathbb{S}[x] \rightarrow \mathbb{S}[x^{1/p^\infty}]$  忠实平坦 (后者是自由  $\mathbb{S}[x]$ -模的滤余极限), 从而由定理 10.7 知我们将命题约化到了  $A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty} = A[\varpi^{1/p^\infty}]$  的情况: 而这时它是完美胚环, 因此命题得证.  $\square$

注意到  $S$  是拟正则半完美胚环时  $S \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}$  也是如此, 因此和上一命题的证明完全相同地, 我们有

**命题 10.9.**  $S \in \mathrm{QRSPerfd}_{\mathcal{O}_K}$  时,  $\mathrm{THH}(S/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$ ,  $\mathrm{TC}^-(S/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$ ,  $\mathrm{TP}(S/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$  都聚集在偶数次, 并且我们将  $\pi_0 \mathrm{TC}^-(-/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) \cong \pi_0 \mathrm{TP}(-/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$  延拓到  $\mathrm{QSyn}_{\mathcal{O}_K}$  上, 产出了

$$\hat{\Delta}_{-/\mathbb{S}^{(-1)}} : \mathrm{QSyn}_{\mathcal{O}_K} \rightarrow \mathrm{CAlg}(D(\mathbb{S}^{(-1)}))$$

特别地, 我们记  $\mathrm{TC}^-, \mathrm{TP}$  上倍速 *Postnikov* 滤过在  $\mathrm{QRSPerfd} \subseteq \mathrm{QSyn}$  的延拓下得到的滤过为 *BMS Filtration*, 那么  $\hat{\Delta}_{-/\mathbb{S}^{(-1)}} \cong gr_{\mathrm{BMS}}^0 \mathrm{TC}^-(-/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$ .

这距离我们需要构造的 BK 模上同调仅相差一个 Frobenius, 具体来说:

**推论 10.10.**  $\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}}$  满足如下比较:

1.  $A_{\mathrm{inf}}$  比较:

$$\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}} \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}}^{\mathbb{L}} A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty}) \simeq \hat{\Delta}_{A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}}$$

完备化对  $(p, z)$  进行。

更进一步继续基变换到  $\mathcal{O}_C$  上, 有:

$$\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}} \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}}^{\mathbb{L}} A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C) \simeq \hat{\Delta}_{A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C}$$

2. *de Rham* 比较:

$$\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}} \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}, \theta^{(-1)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_K \simeq (\Omega_{A/\mathcal{O}_K})_p^\wedge$$

3. 晶体比较:

$$\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}} \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}}^{\mathbb{L}} W(k) \simeq R\Gamma_{\mathrm{cris}}(A_k/W(k))$$

其中基变换映射  $\mathbb{S}^{(-1)} \rightarrow W(k)$  是在  $W(k)$  上恒等,  $z \mapsto 0$

4. *Frobenius* 诱导了同构:

$$\hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}} \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}, \varphi} \mathbb{S}^{(-1)}[1/\varphi(E)] \simeq \hat{\Delta}_{A/\mathbb{S}^{(-1)}}[1/\varphi(E)]$$

证明. 第一部分成立的原因是我们注意  $-\hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}} A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty})$  的作用和  $-\hat{\otimes}_{\mathbb{S}[z]} \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]$  相同: 因为我们已有推出  $\mathcal{O}_{K_\infty} \simeq A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty}) \hat{\otimes}_{\mathbb{S}^{(-1)}, \theta^{(-1)}} \mathcal{O}_K$ , 从而约化成  $-\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}$ , 进一步约化为  $-\hat{\otimes}_{\mathbb{S}[z]} \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}]$ .

但是与定理 10.7 中  $\mathrm{THH}$  完全类似地,  $\mathrm{TP}(A/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p) \hat{\otimes}_{\mathbb{S}[z]} \mathbb{S}[z^{1/p^\infty}] \simeq \mathrm{TP}(A \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}; \mathbb{Z}_p)$ , 再取  $gr_{\mathrm{BMS}}^0$  就得到了欲证结果。

基变换到  $\mathcal{O}_C$  的部分只需说明

$$\hat{\Delta}_B \hat{\otimes}_{A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_{K_\infty})} A_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C) \simeq \hat{\Delta}_{B \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_\infty}} \mathcal{O}_C$$

回忆两侧都是  $\xi$  无挠的：定理 6.10，我们只需证明上式模  $\xi$  后的版本，但这时它们都是 Hodge-完备导出 de Rham 复形，从而确实满足基变换。

第二部分成立的原因是直接的，因为这一基变换作用对应着商去  $E$ ，从而给出的是  $gr_{\text{BMS}}^0 \text{HC}^-$ ，那么  $\text{HC}^-$  和 de Rham 上同调的比较就说明结果。

第三部分成立的原因完全来自定理 10.5，只需注意  $\mathcal{O}_K = \mathfrak{S}^{(-1)}/E$ ，因此其作用为  $-\otimes_{\mathfrak{S}[z]}\mathfrak{S}$ ，从而是  $\widehat{\Delta}_{A_k}$ ，于是由晶体比较得证。

第四部分成立的原因是利用忠实平坦态射  $\mathfrak{S}[z] \rightarrow \mathfrak{S}[z^{1/p^\infty}]$  基变换，从而约化到  $A_{\text{inf}}$  上同调的情况。  $\square$

我们下面将上述构造沿着 Frobenius 下降到  $\mathfrak{S}$ ：

**命题 10.11.** 对于任何  $\mathcal{O}_K$ -代数  $A$ ， $\varphi : \text{TC}^-(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{TP}(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$  延拓成

$$\text{TC}^-(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)[1/u] \otimes_{\mathfrak{S}[z]} \mathfrak{S}[z^{1/p}] \rightarrow \text{TP}(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$$

当  $A$  拟正则半完美胚时，上式左侧聚集在偶数处， $\pi_0(\text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p))$  是  $\text{QRSPerfd}_{\mathcal{O}_K}$  上的层，延拓到  $\text{QSyn}_{\mathcal{O}_K}$  变为  $gr_{\text{BMS}}^0(\text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)[1/u])$ ，从而产生了一个自然映射

$$gr_{\text{BMS}}^0(\text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)[1/u]) \otimes_{\mathbb{Z}[z]} \mathbb{Z}[z^{1/p}] \rightarrow gr_{\text{BMS}}^0 \text{TP}(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$$

当  $A$  是光滑  $\mathcal{O}_K$ -代数的  $p$ -完备化时，这个映射是等价。

证明.  $A = \mathcal{O}_K$  时  $\varphi : u \mapsto \sigma$ ，从而可以延拓，因此对任何  $\mathcal{O}_K$ -代数延拓存在。

限制在  $\text{QRSPerfd}_{\mathcal{O}_K}$  上， $\pi_i \text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$  是一个取值于导出范畴（但是在  $\text{QRSPerfd}$  情形离散）的层，于是取滤余极限其仍然是层，从而这就说明了  $\pi_i \text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)[1/u]$  是层。

对于最后一个叙述，结合定理 6.7 的正合列：我们实际上只需证明对于  $i \geq \dim A$

$$gr_{\text{BMS}}^i(\text{TC}^-(-/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)) \otimes_{\mathbb{Z}[z]} \mathbb{Z}[z^{1/p}] \rightarrow gr_{\text{BMS}}^i \text{TP}(A/\mathfrak{S}[z]; \mathbb{Z}_p)$$

是等价：因为  $i \geq 2d$  后 Hochschild 同调群消失（考虑 HKR 滤过）。

现在由于两侧都是  $z^{1/p}$ -无挠的，因此只需证明商去  $z^{1/p}$  后是同构。因此由定理 10.5，这约化到了

$$gr^i(\text{TC}^-(A_k)) \rightarrow gr^i(\text{TP}(A_k))$$

是等价。但是在纯特征  $p$  的情况下由晶体比较，我们知道：

$$gr^i(\text{THH}(A_k)) \simeq (\tau^{\leq i} \Omega_{A/k})[2i], gr^i(\text{THH}(A_k)^{tC_p}) \simeq \Omega_{A/k}[2i]$$

这是因为由定理 6.5， $\text{THH}(A_k)^{tC_p} \simeq \text{TP}(A_k)/p$ ，并且这个同构尊重 BMS 滤过，从而由晶体比较定理  $gr^i \text{THH}(A_k)^{tC_p} \simeq W\Omega_{A_k}/p[2i] = \Omega_{A_k/k}[2i]$ ， $gr^i \text{THH}(A_k)$  的描述则来自其和  $\mathcal{N}^i \widehat{\Delta}_{A_k}$  的等同（定理 6.10），特别地利用  $\varphi$  的描述：其就是  $\tau^{\leq i} \Omega_{A_k/k} \rightarrow \Omega_{A/k}$  的嵌入，因此  $i \geq \dim A$  时  $\varphi$  诱导了  $gr^i$  上的同构。

进一步地这个同构下降到  $\text{TC}^- \rightarrow \text{TP}$  就得到了结果。  $\square$

因此由上述命题我们找到了一个 Frobenius 下降的可用选项：

**定理 10.12.** 对于光滑  $\mathcal{O}_K$ -代数的  $p$ -完备化  $A$ , 记

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} = gr_{\text{BMS}}^0(\text{TC}^-(A; \mathbb{Z}_p)[1/u])$$

那么这是一个  $(p, z)$ -完备  $E_\infty$ - $\mathfrak{S}$ -代数。其上的 *Frobenius* 诱导了

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} \mathfrak{S}[1/E] \simeq \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}}[1/E]$$

以及如下比较定理:

1.  $A_{\text{inf}}$  比较:

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}}^{\mathbb{L}} A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C) \simeq \widehat{\Delta}_{A_{\mathcal{O}_C}}$$

2. *de Rham* 比较:

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}, \theta}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_K \simeq (\Omega_{A/\mathcal{O}_K})_p^\wedge$$

3. 晶体比较:

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}}^{\mathbb{L}} W(k) \simeq R\Gamma_{\text{cris}}(A_k/W(k))$$

证明. 只需证明  $\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}^{(-1)} \simeq \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}^{(-1)}}$ , 但是这就是上一命题。现在其上的 *Frobenius*

$$\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}, \varphi} \simeq \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}^{(-1)} \rightarrow \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}}$$

的定义为

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}^{(-1)} &\simeq \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}^{(-1)}} \\ &= gr^0(\text{TC}^-(A/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)) \rightarrow gr^0(\text{TC}^-(A/\mathbb{S}[z]; \mathbb{Z}_p)[1/u]) \\ &= \widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}} \end{aligned}$$

这结合  $\widehat{\Delta}_{A/\mathfrak{S}^{(-1)}}$  的比较定理就说明了所有结果。  $\square$

注记. 尽管  $\widehat{\Delta}_{-/\mathfrak{S}^{(-1)}}$  上携带了自然的 Nygaard 滤过 (同样来自不动点谱序列), 这个滤过并不能顺着 *Frobenius* 下降到  $\widehat{\Delta}_{-/\mathfrak{S}}$  上。

### III 叠观点: 棱镜化

这一部分是棱镜上同调乃至更经典的  $A_{\text{inf}}$  上同调理论的余韵和完全版本。我们将解释如何使用叠的观点来重述前文棱镜上同调以及绝对版本的棱镜上同调的构造。主要参考资料为 [Bha23]。

## 11 纯特征棱镜化

我们首先从纯特征的情形出发, 简述在纯特征的条件下如何将前述构造叠化。我们首先介绍两个最基本的观察:



**定义 11.1** (分次对象 =  $D_{qc}(B\mathbb{G}_m)$ ). 考虑分次  $R$ -复形的导出范畴  $\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}_{\mathrm{disc}}, D(R))$ , 其中  $\mathbb{Z}_{\mathrm{disc}}$  指离散的范畴。其上有来自 Day 卷积的对称么半结构。我们宣称

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}, D(R)) &\simeq D_{qc}(B\mathbb{G}_m) \\ F &\mapsto \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F(i) \otimes_R \mathcal{O}(-i) \\ (i &\mapsto R\Gamma(B\mathbb{G}_{m,R}, M(i))) \mapsto M \end{aligned}$$

注意  $B\mathbb{G}_m$  分类概形上的线丛, 从而其上有一个万有线丛  $\mathcal{O}_{B\mathbb{G}_m}(1) \in D_{qc}(B\mathbb{G}_m)$ , 即:

$$(L \rightarrow X) \mapsto L, \quad X \in \mathrm{Sch}_R, L \in \mathrm{Pic}(R)$$

在这个对应下, 遗忘分次对应着沿着  $\pi: \mathrm{Spec}(R) \rightarrow B\mathbb{G}_m$  的拉回。

**定义 11.2** (滤对象 =  $D_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)$ ). 考虑滤对象的导出范畴  $DF(R) = \mathrm{Fun}(\mathbb{Z}^{op}, D(R))$ , 这里  $\mathbb{Z}^{op}$  视为偏序集范畴。

现在考虑商叠  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m := \mathrm{Spec}(R[t])/\mathbb{G}_m$ , 即其  $T$ -点为所有  $\mathbb{G}_m$ -旋子  $T' \rightarrow T$  以及配备上一个映射  $T' \rightarrow \mathrm{Spec}(R[t])$  构成的群胚。

现在回忆仿射情形下一个  $\mathbb{G}_m$ -旋子一定形如  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^{\otimes i}$ , 其中  $A$  为  $R$  上的线丛。因此上述群胚等价于  $\mathcal{O}_T$ -线性映射  $L \in \mathcal{O}_T, L \in \mathrm{Pic}(T)$  作为对象给出的群胚。这样的对象被称为**虚拟 Cartier 除子**。

特别地, 这给出了一个万有线丛  $t: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}$ , 即:

$$(L \mapsto \mathcal{O}_T) \mapsto L, T \in \mathrm{Sch}_R, L \in \mathrm{Pic}(R)$$

现在类似前述描述, 我们有  $D_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) \simeq D_{gr}(R[t])$ , 其中  $t$  对应次数 1, 并且  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}(-1)|_{B\mathbb{G}_m} = \mathcal{O}_{B\mathbb{G}_m}(-1)$ : 即分次  $R[t]$ -模  $tR[t]/t^2R[t]$  是  $R$  坐落在次数 1。

现在我们有如下对称么半等价

$$\begin{aligned} \mathrm{Rees}: DF(R) &\simeq D_{gr}(R[t]) \simeq D_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) \\ F &\mapsto \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i F \cdot t^{-i} \end{aligned}$$

使得:

1. Rees 在标准  $t$ -结构下  $t$ -正合
2. 限制到开子叠  $\mathrm{Spec}(R) = \mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m \subseteq \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  对应着遗忘滤过
3. 限制到闭子叠  $B\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(R)/\mathbb{G}_m \subseteq \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  对应着过渡到 (分次相反的) 关联分次环
4. 滤对象的完备性对应着  $D_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)$  中的导出  $t$ -完备性
5.  $F \otimes \mathcal{O}(-n)$  对应着滤对象上的平移操作  $F\{n\}$

上述构造的逆是如下构造:

给定  $M \in \mathcal{D}_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)$ , 如下图表的全局截面给出的滤对象即为所求:

$$\cdots \rightarrow M \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}(i-1) \rightarrow M \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}(i) \rightarrow \cdots$$



### 11.1 关于叠论技术的一些评注

这里主要记录了一些后续构造中将要使用的叠论技术。

#### • 叠上的叠

我们给出刻画叠上的叠的等价条件，这能够大大减少我们描述叠上的叠时所需的工作量。

**定理 11.3** ([Met03, Theorem 82]). 如下两个定义等价。固定一个景  $(\mathcal{C}, J)$  以及其上的叠  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 。如下两个  $F$  上的叠的定义等价，即两个  $F$  上的叠范畴等价：

1. 一个叠  $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$  以及叠之间的态射  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  使得全图交换。
2. 一个叠  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ ，其中  $\mathcal{D}$  上的景结构是  $\mathcal{C}$  的拉回

因此想要决定  $F$  上的叠，只需要指定叠  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ ，即对任何  $d \in \mathcal{D}$  指定其取值，我们在后续将反复不加证明地使用这一等价，例如定理 11.8 以及其它构造叠上叠的定义。

#### • 环叠

接下来我们处理的叠通常都是所谓“环叠”，我们需要给出这一术语的严格解释。简单地说，环叠指的是取值于 1-截断生像环的叠。一般地，生像  $R$ -代数指的是

$$\mathrm{CAlg}_R^{an} := \mathrm{Fun}_\pi(\mathrm{Poly}_R^{op}, \mathrm{An})$$

其中下标  $\pi$  指所有保持有限乘积的函子张成的全子范畴（即在  $\mathrm{Poly}_R^{op}$  中添加所有筛极限）。

特别地在这里的语境中，我们的环叠指的是取值于 1-截断生像环的叠，即如下  $(2, 1)$ -范畴：

$$\mathrm{CAlg}_R^{an, \leq 1} := \mathrm{Fun}_\pi(\mathrm{Poly}_R^{op}, \mathrm{An})$$

不精确地说，生像环是经典环论的导出版本。而与之相对的， $\mathbb{E}_\infty$ -环则应当理解为  $\mathbb{S}$ -充实的“导出”环论。两者在经典环包含  $\mathbb{Q}$  时相符：例如一个简单的证据是  $H\mathbb{Q}$  自身就是有理同伦球  $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$ 。

上述直觉的精确版本被如下定理描述：

**定理 11.4.** 存在遗忘函子  $\theta : \mathrm{CAlg}_R^{an} \rightarrow \mathrm{CAlg}_R^{\geq 0}$ ，其左伴随限制在离散  $R$ -代数上是恒等当且仅当  $R$  是交换  $\mathbb{Q}$ -代数；而右伴随限制在离散  $R$ -代数上总是恒等。

证明. 注意生像环  $\mathrm{CAlg}_R^{an}$  来自  $\mathrm{Poly}_R$  添加所有筛极限，自然地泛性质保证任何  $\mathrm{Poly}_R$  到所有筛极限的范畴  $\mathcal{C}$  的保持筛极限的函子穿过  $\mathrm{CAlg}_R^{an}$ ，即：

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Poly}_R, \mathrm{CAlg}_R^{\geq 0}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{sift}}(\mathrm{CAlg}_R^{an}, \mathrm{CAlg}_R^{\geq 0})$$

特别地，由于任何经典  $R$ -代数自然地成为离散  $\mathbb{E}_\infty$ -环，其自然产生  $\theta : \mathrm{CAlg}_R^{an} \rightarrow \mathrm{CAlg}_R^{\geq 0}$ 。关于  $\theta$  的左、右伴随的性质我们述而不证，参见 [SAG, Section 25.1.2]  $\square$

在生像环的世界中经典环上的操作可以通过导出（Kan 扩张）直接扩展到生像环上，比如我们可以直接通过导出给出任何正特征环上的 Frobenius，然而我们当然知道大部分  $\mathbb{E}_\infty$ -环上并不会在整个同伦群上行为良好同伦相容的 Frobenius 映射。与此同时，生像环具有空间的性质——毕竟其有一个基底  $\mathbb{E}_\infty$ -环。

## 11.2 零特征 de Rham 叠

在本小节我们用一个简单的例子展示如何将上同调理论“叠化”，这是所有后续构造中最简单的版本，我们在本节固定一个零特征底域  $k$ 。

**定义 11.5.** 记  $\widehat{\mathbb{G}_a} \subseteq \mathbb{G}_a$  为在 0 处的形式完备化，即： $\widehat{\mathbb{G}_a}(S) = \text{Nil}(S)$ 。

给定一个投射  $R$ -模  $E$ ，即其对应的向量丛为  $\mathbb{V}(E) = \text{Spec}(\text{Sym}_R^*(E^\vee))$ 。同样记其在零截面的形式完备化为  $\widehat{\mathbb{V}(E)}$ ，即  $\widehat{\mathbb{V}(E)}(S) = E \otimes_R \text{Nil}(S)$ ， $\mathbb{V}(E)(S) = E \otimes_R S$ 。

**定义 11.6** (de Rham 叠). 记环层  $\mathbb{G}_a^{dR} = \mathbb{G}_a / \widehat{\mathbb{G}_a}$ ，将之离散地视为一个环叠。对于  $k$ -概形  $X$ ，记 de Rham 叠为

$$X^{dR}(R) = X(\mathbb{G}_a^{dR}(R)) = X(R_{red})$$

这个构造的确计算了正确的 de Rham 上同调，即 de Rham 叠的结构层上同调的确为  $X$  的上同调：

**定理 11.7** (Simpson). 对于光滑  $k$ -概形  $X$ ：

$$R\Gamma(X^{dR}, \mathcal{O}_{X^{dR}}) \simeq R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$$

左侧的叠上同调沿着  $X \rightarrow X^{dR}$  拉回对应着到 Hodge 滤过的投影

$$R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet) \rightarrow gr_H^0 R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet) \simeq R\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

接下来我们利用之前给出的  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  的描述，将上述叠化构造升级为能够记录 Hodge 滤过的构造。

**定义 11.8** (Hodge 滤过 de Rham 叠). 构造如下  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠：

$$\mathbb{G}_a^{dR,+} = \text{cofib}(\mathbb{V}(\widehat{\mathcal{O}(-1)})) \xrightarrow{t} \mathbb{G}_a$$

这里映射是  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的 Cartier 除子  $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}$  诱导出的

$$\mathbb{V}(\widehat{\mathcal{O}(-1)}) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{O}) = \mathbb{G}_a$$

具体来说：

$$\mathbb{G}_a^{dR,+}(\text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) = \text{cofib}(\text{Nil}(R)(-1) \rightarrow R)$$

即，如果  $\text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  由  $\text{id}_R \mapsto (L \in \text{Pic}(R), L \rightarrow R)$  给出，那么上述余纤维映射具体地写为  $\text{cofib}(\text{Nil}(R) \otimes_R L \rightarrow R)$ 。

1. 拉回  $\mathbb{G}_a^{dR,+}|_{\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m} = \mathbb{G}_a^{dR}$
2. 拉回  $\mathbb{G}_a^{dR,+}|_{B\mathbb{G}_m} = \mathbb{G}_a^H := \mathbb{G}_a \oplus \mathbb{V}(\widehat{\mathcal{O}(-1)})[1]$

我们类似地构造携带 Hodge 滤过的 de Rham 叠，给定  $k$ -概形  $X$ ，记其 Hodge 滤过 de Rham 叠为如下  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠：

$$X^{dR,+}(\text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) = X(\mathbb{G}_a^{dR,+}(R))$$

注记. 这里出现了经典代数几何和导出代数几何的互动, 我们将经典环视作静止生像环计算映射  $\mathrm{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR,+}(R)) \rightarrow X$  构成的群胚。

类似地, 定义 Hodge 叠

$$X^H = X^{dR,+} \times_{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m} B\mathbb{G}_m$$

从而

$$X^H(\mathrm{Spec}(R) \rightarrow B\mathbb{G}_m) = X(\mathbb{G}_a^H(R))$$

这个构造的确计算了正确的 Hodge 滤过 de Rham 上同调:

**定理 11.9** (Simpson). 对于光滑  $k$ -概形  $X, \pi_X: X^{dR,+} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$ , 那么拟凝聚层  $\mathcal{H}_{dR,+}(X) := R\pi_{X,*}\mathcal{O}_{X^{dR,+}}$  透过 Rees 同构后与  $Fil_H^* R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$  相符。

我们给出证明概要:

证明.  $\triangleleft$ . 首先我们处理 Hodge 叠:

$$X^H(\mathrm{Spec}(R) \rightarrow B\mathbb{G}_m) = X(R \oplus \mathrm{Nil}(R)(-1)[1])$$

那么由定义它实际上是  $X \times B\mathbb{G}_m$  上的分类叠  $B\widehat{\mathbb{V}(T_{X/k}(-1))}$ , 其中  $T_{X/k}(-1) = pr_1^* T_{X/k} \otimes pr_2^* \mathcal{O}_{B\mathbb{G}_m}(-1)$ .  $\triangleleft$ . 这里我们不加证明地使用了如下导出形变理论的事实:

**定理 11.10** (导出形变理论). 给定有限型  $k$ -概形, 生像  $k$ -代数  $R, \eta: \mathrm{Spec}(R) \rightarrow X$ , 假设有一个  $N \in D^{\leq 0}(R)$  诱导的平方零扩张  $R' \rightarrow R$  (例如 1-截断生像环的长度 2-Postnikov 滤过), 那么  $X(R') \rightarrow X(R)$  在  $\eta \in X(R)$  上的纤维是  $\mathrm{Map}_R(\eta^* L_{X/k}, N)$ -旋子。

特别地, 当  $X$  光滑并且  $N := L[1] \in D^{-1}(R)$  时, 此时余切复形退化为微分模, 从而由伴随性质:  $\mathrm{Map}_R(\eta^* L_{X/k}, N) \simeq B(\eta^* T_{X/k} \otimes_R L)$

我们在证明的最后解释为何零特征情形的向量丛分类叠上的上同调是可以简单计算的, 使用其叙述就有

$$\mathcal{H}_H(X) := R\pi_{X,*}\mathcal{O}_{X^H} = \oplus R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^i[-i])(i)$$

接下来处理 de Rham 叠:

我们宣称  $D_{qc}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m)$  取值层  $U \mapsto \mathcal{H}_{dR,+}(U)$  是层, 因此其对应着滤对象取值层范畴  $DF(X, k)$  中的一个对象, 特别地, 在  $U$  仿射时其值落在  $(DF(k))_B^\heartsuit$  中, 于是对比 Hodge 上同调知其被链复形

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/l}^1 \rightarrow \Omega_{X/k}^2 \rightarrow \cdots$$

表出, 检查  $X = \mathbb{A}^1$  时的微分发现其的确是 de Rham 微分, 这就说明了结果.  $\square$

我们最后解释为何可以计算向量丛分类叠上的上同调:

**命题 11.11.** 给定  $\mathbb{Q}$ -代数  $R$ , 以及有限投射  $R$ -模  $E$ , 有如下等价:

$$D_{qc}(B\widehat{\mathbb{V}(E)}) \simeq D_{qc}(\mathbb{V}(E^\vee))$$

特别地, 取  $E = \mathcal{O}$  就得到了  $D_{qc}(B\widehat{\mathbb{G}_a}) \simeq D_{qc}(k[t])$ 。

证明. 注意在零特征的情况下, 由于  $\widehat{Sym_R^n(E)}^\vee = \widehat{Sym_R^n(E^\vee)}$ , 两侧取余极限 (注意左侧的对偶将之变为极限) 就有  $\widehat{Sym_R^*(E^\vee)} \cong (\widehat{Sym_R^*E})^\vee$  (而在正特征的时候这个对偶恰好变为除幂代数, 这可以某种程度上解释晶体上同调构造的合理性)。

现在  $\widehat{B\mathbb{V}(E)}$  上的凝聚层等价于携带有  $\widehat{Sym_R^*(E^\vee)}$  余模结构的  $R$ -模, 由上述对偶, 这等价于  $\widehat{Sym_R^*(E)}$ -模, 从而完成了证明。□

**推论 11.12.** 在上述等价下, 上同调也可以得到精确描述:

$$R\Gamma(\widehat{B\mathbb{V}(E)}, M) = R\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, M) \simeq R\mathrm{Hom}_{\widehat{Sym_R^*(E^\vee)}}(R, \pi^*M)$$

其中  $\pi: \mathrm{Spec}(R) \rightarrow \widehat{B\mathbb{V}(E)}$ ,  $\pi^*M$  的  $S$ -模结构被  $M$  决定。

上述框架还有如下特性: 叠化框架不仅还原了 de Rham 上同调, 还进一步还原了局部系上同调: 即变系数版本的上同调。

**命题 11.13.** 通过拉回  $X \times \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m \rightarrow X^{dR,+}, \mathrm{Vect}(X^{dR,+})$  对应着  $X$  上的如下数据: 滤过向量丛  $(E, \nabla, F^*)$ , 使得  $\nabla$  是平坦联络,  $F^*$  为  $E$  上的滤过, 满足 *Griffiths* 横截性:  $\nabla F^i \subseteq \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F^{i-1}$ 。

类似地, 通过拉回  $X \times B\mathbb{G}_m \rightarrow X^H, \mathrm{Vect}(X^H)$  对应着分次 *Higgs* 丛: 即分次向量丛  $M = \bigoplus_i M_i$ , 以及一个 *Higgs* 场  $\Theta: M \rightarrow \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M$  满足横截性  $\Theta(M_i) \subseteq \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_{i+1}$ 。

特别地, 对这些向量丛导出前推计算了  $X$  上的 (平坦向量丛对应的) 局部系上同调。

### 11.3 纯特征 Hodge-de Rham 叠

我们接下来处理纯特征  $p$  的情况, 但是在这里我们必须强调 (除了 Witt 向量描述以外) 其中出现的大部分构造并不依赖纯特征  $p$ 。在本节中固定  $V$  为  $p$ -完备有界  $p^\infty$ -挠环, 本节总是考虑  $V$  上的有界  $p$ -进形式概形。正如同我们在研究  $\widehat{B\mathbb{G}_a}$  乃至  $\widehat{B\mathbb{V}(E)}$  的情形指出的, 为了得到纯特征的情形, 我们应当采用除幂代数。这自然引向了如下平行的构造:

**定义 11.14.**  $\mathbb{G}_a^\sharp = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^2/2!, t^3/3!, \dots])$ , 其  $R$ -点为  $R$  上的一族除幂, 注意除幂的定义发现  $\mathbb{G}_a$  上的 (加性) 群律诱导了  $\mathbb{G}_a^\sharp$  上的, 同样也有  $\mathbb{G}_a$  乘性作用, 因此这是一个  $\mathbb{G}_a$ -模概形。

类似地, 我们定义向量丛的零截面除幂闭包为  $\mathbb{V}(E)^\sharp \rightarrow \mathbb{V}(E)$ 。

和之前完全类似:

**命题 11.15.**

$$D_{qc}(\mathbb{V}(E)^\sharp) \simeq D_{qc}(\widehat{\mathbb{V}(E^\vee)})$$

$$D_{qc}(B\mathbb{G}_a^\sharp) \simeq D_{qc}(\widehat{\mathbb{G}_a})$$

类似地, 我们也能通过这个对应读取上同调。

从而构造 de Rham 叠:

**定义 11.16.**

$$\mathbb{G}_a^{dR,+} = \mathrm{cofib}(\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\sharp \rightarrow \mathbb{G}_a)$$

同样映射来自 Cartier 除子  $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}$ , 并有:

1. 拉回  $\mathbb{G}_a^{dR} = \mathbb{G}_a^{dR,+}|_{\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m} = \text{cofib}(B\mathbb{G}_a^\sharp[-1] \rightarrow \mathbb{G}_a)$
2. 拉回  $\mathbb{G}_a^H = \mathbb{G}_a^{dR,+}|_{B\mathbb{G}_m} = \mathbb{G}_a \oplus B\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\sharp$

给定  $V$  上的光滑  $p$ -进形式概形  $X$ , 定义 Hodge 滤过 de Rham 叠为如下  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠:

$$X^{dR,+}(\text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) = X(\mathbb{G}_a^{dR,+}(R)) := \text{Map}_V(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR,+}(R)), X)$$

拉回到  $\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$  产出了 de Rham 叠:

$$(X/V)^{dR}(R) = \text{Map}_V(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR}(R)), X)$$

拉回到  $B\mathbb{G}_m$  产出了 Hodge 叠

$$(X/V)^H(\text{Spec}(R) \rightarrow B\mathbb{G}_m) = \text{Map}_V(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^H(R)), X)$$

同样地, 这个构造计算了正确的 Hodge 滤过 de Rham 上同调:

**定理 11.17.**  $X/V$  是光滑 qcqs  $p$ -进形式概形,  $\pi_X : X^{dR,+} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$ , 那么拟凝聚层  $\mathcal{H}_{dR,+}(X) := R\pi_{X,*}\mathcal{O}_{X^{dR,+}}$  透过 Rees 同构后与  $p$ -完备复形  $\text{Fil}_H^* R\Gamma(X, \Omega_{X/V}^\bullet)$  相符。

注记. 注意这里我们计算的是形式概形之间相对微分模的上同调, 因此这实际上是特殊纤维  $X_{p=0}$  的晶体上同调。严格地说, 我们有形式概形之间的 de Rham 复形和计算特殊纤维晶体上同调的 de Rham-Witt 复形之间的拟同构, 更多相关的严格论述可以参见 [BLM20] 的主结果。

使用叠论框架, 晶体上同调可以重述为

$$(X/V)^{dR}(R) = \text{Map}_V(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR}(R)), X)$$

我们不加证明地宣称生像  $V$ -代数  $\mathbb{G}_a^{dR}(R)$  进一步有典范的  $V/p$  代数结构, 因此上述等价进一步变为  $\text{Map}_{V/p}(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR}(R)), X_{p=0})$ 。这就是 (通常) 概形的晶体上同调。特别地, 为了讨论通常概形的 de Rham (晶体) 空间, 我们也采用如下记号:

**定义 11.18.** 给定特征  $p$  交换环  $k$ , 光滑  $k$ -概形  $X$ , 定义其 de Rham 叠为

$$(X/k)^{dR}(R) = \text{Map}_k(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR}(R)), X)$$

并同理定义其 Hodge 滤过 de Rham 叠, 以及 Hodge 叠, 它们计算了 (携带 Hodge 滤过的) 晶体上同调。

在本节最后, 我们给出如下利用 Witt 向量描述前述构造的方法, 这是纯特征情形中独有的简单描述。大体来说这一描述本质上依赖  $\delta$ -结构和除幂结构之间的关联, 即实质上为定理 8.8 中的证明。现在我们考虑 Witt 向量概形  $W$ , 即其  $R$ -点为 Witt 环  $W(R)$ , 那么:

**引理 11.19.**  $W$  上的 Frobenius  $F$  忠实平坦, 并且  $\ker(W \xrightarrow{F} W) \subseteq W \xrightarrow{p-1} W_1 = \mathbb{G}_a$  诱导了等价  $\ker(W \xrightarrow{F} W) \simeq \mathbb{G}_a^\sharp$

证明. 首先由定义:  $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}\{x\})$ , 准确地说:  $W$  上的加法和乘法由  $\mathbb{Z}_{(p)}\{x\} \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}\{s, t\} : x \mapsto s + t, x \mapsto st$  诱导, 第  $n$  个幻影坐标  $pr_1 \circ F_n : W \rightarrow W$  对应着  $\phi^n : \mathbb{Z}_{(p)}\{x\} \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}\{x\}$ , 这具体地给出了上述等价。

注意  $F : W \rightarrow W$  作为概形 (透过幻影坐标) 与  $\prod_{i \geq 0} \mathbb{G}_a$  上的平移相符, 特别地, 在将  $p$  可逆后它是同构。另一方面  $p$ -无挠环的自同态是忠实平坦的当且仅当其将  $p$  可逆和模  $p$  约化后都忠实平坦, 因此只需检查  $\phi \bmod p$  忠实平坦, 而这就是 Frobenius 自同态的忠实平坦性。

下面我们检查  $\ker(W \xrightarrow{F} W)$ , 那么由定义其为

$$\ker(W \xrightarrow{F} W) = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x_0, x_1, \dots] / (x_0^p + px_1, x_1^p + px_2, \dots))$$

这里  $x_i$  指  $\delta^i(x)$ , 到  $\mathbb{G}_a$  的映射由  $x_0$  给出。为说明到  $\mathbb{G}_a^\sharp$  的提升, 由除幂闭包的泛性质。只需证明  $\gamma_n(x) = x^n/n! \in \mathcal{O}(\ker(W \xrightarrow{F} W))[1/p]$  真正落在  $\mathcal{O}(\ker(W \xrightarrow{F} W))$  里, 而这和定理 8.8 最后 (被省略) 的计算完全相同。

特别地, 定理 8.8 中 (被省略的) 计算更进一步说明这个提升的确是同构, 这就证明了结果。□

结合这个描述, 我们能够给出 de Rham 叠的 Witt 向量描述:

**定理 11.20** ( $\mathbb{G}_a^{dR}$  的 Witt 向量描述). 作为生像  $W$ -代数:

$$\mathbb{G}_a^{dR} = F_*W/p := \text{cofib}(F_*W \xrightarrow{p} F_*W)$$

证明. 只需检查交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_a^\sharp & \longleftarrow & \mathbb{G}_a^\sharp \oplus F_*W & \longrightarrow & F_*W \\ \text{can} \downarrow & & (\text{can}, V) \downarrow & & p \downarrow \\ \mathbb{G}_a & \xleftarrow{pr_1} & W & \xrightarrow{F} & F_*W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_a^{dR} & \xleftarrow{\sim} & C & \xrightarrow{\sim} & F_*W/p \end{array}$$

注意底部两个等价分别来源于  $V$  诱导了到  $\ker pr_1$  的单射以及  $\text{can}$  诱导了到  $\ker F$  的单射, 那么追图检查 ( $3 \times 3$ ) 就说明了等价。□

更进一步, 我们类似给出 Hodge 滤过 de Rham 叠的 Witt 向量描述:

**定理 11.21** ( $\mathbb{G}_a^{dR,+}$  的 Witt 向量描述). 作为生像环叠:

$$\mathbb{G}_a^{dR,+} \simeq \text{cofib}(\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\sharp \oplus F_*W \xrightarrow{(t^\sharp, V)} W)$$

证明.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\sharp \oplus F_*W & \longrightarrow & \mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^\sharp \\ (t^\sharp, V) \downarrow & & \downarrow t^\sharp \\ W & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{G}_a \end{array}$$

那么再一次追图 ( $3 \times 3$ ), 就得到了待证的结果。□

### 11.4 共轭滤过与 Cartier 同构

回忆第3.3节, 我们指出了特征  $p$  完美域上的代数的 de Rham 复形的上同调同构于其 Frobenius 基变换的微分模  $\Omega_{X^{(1)}/k}^i$ , 这是在特征 0 中未见的。本小节我们试图将这个额外的结构放入叠化框架中, 构造出与前文类似的描述共轭滤过的叠。

首先我们用 de Rham 叠的观点重新证明 Cartier 同构:

**定理 11.22.** 在  $\mathbb{F}_p$  上,  $\mathbb{G}_a^{dR}$  作为取值于 (1-截断) 生像环的层满足:

$$\pi_0(\mathbb{G}_a^{dR}) = F_*\mathbb{G}_a, \quad \pi_1(\mathbb{G}_a^{dR}) = F_*\mathbb{G}_a^\sharp$$

证明. 我们使用  $\mathbb{G}_a^{dR}$  的 Witt 向量模型:  $\mathbb{G}_a^{dR} = F_*W/p$ , 从而检查余纤维产生的 (1-截断) 长正合列, 因此:

$$\pi_0(F_*W/p) = F_*\mathbb{G}_a$$

以及

$$\pi_1(F_*W/p) = \ker(p: p^*F_*W \rightarrow F_*W) = \ker(F: W \rightarrow F_*W) = \mathbb{G}_a^\sharp$$

□

据此, 我们给出 de Rham 空间的结构, 它可以被理解为 “几何化” 的 Cartier 同构:

**命题 11.23.**  $k$ -叠  $(X/k)^{dR}$  是  $X^{(1)}$  上的  $B\mathbb{V}(T_{X^{(1)}/k})^\sharp$ -旋子。

证明. 注意对  $\mathbb{G}_a^{dR}$  的截断说明结构映射  $\mathbb{G}_a^{dR}(R) \rightarrow F_*\mathbb{G}_a(R) = F_*R$  的存在性, 过渡到 de Rham 空间上, 这就给出了  $k$ -叠之间的映射  $(X/k)^{dR} \rightarrow X^{(1)}$ , 再一次由定理 11.10 其纤维是  $B\mathbb{V}(T_{X^{(1)}/k})^\sharp$  并且为一旋子。□

这个几何化的同构, 再结合上前文向量丛旋子的上同调的计算方式就能够立刻回到经典的 Cartier 同构。

**推论 11.24** (Cartier 同构).

$$\oplus_i R^i \nu_* \mathcal{O}_{(X/k)^{dR}} \simeq \wedge^* \Omega_{X^{(1)}/k}^*$$

其中  $\nu$  是结构映射  $(X/k)^{dR} \rightarrow X^{(1)}$ , 特别地这还原了  $R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet) = R\pi_* \mathcal{O}_{(X/k)^{dR}}$  上的共轭滤过。

类似用 Hodge 滤过 de Rham 叠记录 Hodge 滤过, 我们也可以类似地构造一个  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠记录共轭滤过。考虑到 Cartier 同构, 我们需要记录的实际上就是 (在相差 Frobenius 意义下) 某个 de Rham 叠的 (长度 2) Postnikov 滤过。可以预见这是一个完全一般的构造, 我们叙述如下:

**定义 11.25** (Postnikov 滤过叠). 给定一个  $A$  上的叠  $F := \text{cofib}(d: I \rightarrow B)$ , 其中  $I, B$  都是  $A$  上的代数, 那么由长正合列我们知道 Postnikov 滤过的分次分别为  $gr^0 = B/d(I), gr^1 := K[1] = \ker(d)$ . 为了将之做成  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠 (从而透过 Rees 同构反映滤过), 我们需要将应该坐落在次数 1 的部分通过自言丛 “拉开” 到滤过的不同层级。

我们下面详细描述这个 Postnikov 滤过如何透过 Rees 滤过变成  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的叠：首先回忆（未导出的）Rees 同构： $\mathrm{QCoh}(\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Mod}_{gr}(A[t])$ ，那么取  $\tilde{B} = B[t]$ ， $\tilde{I}$  构造如下：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K[t] & \longrightarrow & I[t] & \longrightarrow & I/K[t] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \frac{1}{t}K[t] & \longrightarrow & \tilde{I} & \longrightarrow & I/K[t] \longrightarrow 0 \end{array}$$

映射  $\tilde{d}: \tilde{I} \rightarrow \tilde{B}$  由  $d[t]: I[t] \rightarrow B[t]$  以及零映射  $0: \frac{1}{t}K[t] \rightarrow B[t]$  诱导。

现在注意  $\frac{1}{t}K[t][1] \rightarrow \mathrm{cofib}(\tilde{I} \rightarrow \tilde{B})$  读取了后者的  $\pi_1$ ； $\mathrm{cofib}(\tilde{I} \rightarrow \tilde{B}) \rightarrow (B/d(I))[t]$  读取了前者的  $\pi_0$ 。因此（1-截断生像）商叠  $\mathrm{cofib}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{B}$  的确给出了所需的构造。特别地其限制到  $A = \mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$  和  $B\mathbb{G}_m$  分别给还原了  $\mathrm{cofib}(I \rightarrow B)$  和关联分次构造  $\pi_0 \oplus B\pi_1$ 。

注记. 不正式地说，我们通过将  $K = \pi_1$  赋予多项式分次  $t^{-1}$  从而将其和  $\pi_0$  “拉开” 为滤过的两个部分，从而透过 Rees 同构的确反映了所需的滤对象。

现在我们对  $\mathbb{G}_a^{dR}$  应用这一构造，注意  $\pi_1 \mathbb{G}_a^{dR} = F_* \mathbb{G}_a^\sharp$ ，我们就得到了

**定义 11.26** (共轭滤过 de Rham 叠).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_* \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & \alpha_p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{can} & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & F_* \mathbb{V}(\mathcal{O}(1))^\sharp & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \alpha_p \longrightarrow 0 \\ & & \searrow 0 & & \downarrow & \nearrow \text{can} & \\ & & & & \mathbb{G}_a & & \end{array}$$

定义共轭滤过 de Rham 叠  $\mathbb{G}_a^{dR,c} = \mathrm{cofib}(G \rightarrow \mathbb{G}_a)$ 。其满足：

$$\pi_0 \mathbb{G}_a^{dR,c} \simeq F_* \mathbb{G}_a, \quad \pi_1 \mathbb{G}_a^{dR,c} \simeq F_* \mathbb{V}(\mathcal{O}(1))^\sharp$$

$$\mathbb{G}_a^{dR,c}|_{\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m} \simeq F_* W/p \simeq \mathbb{G}_a^{dR}, \quad \mathbb{G}_a^{dR,c}|_{B\mathbb{G}_m} \simeq F_* \mathbb{G}_a \oplus BF_* \mathbb{V}(\mathcal{O}(1))^\sharp$$

现在给定  $k$ -概形  $X$ ，定义共轭滤过 de Rham 叠

$$(X/k)^{dR,c}(\mathrm{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m) = \mathrm{Map}_k(\mathrm{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR,c}(R)), X)$$

这个构造确实计算了共轭滤过 de Rham 上同调

**定理 11.27.**  $X/k$  光滑有限展示， $\pi_X: (X/k)^{dR,c} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$ ，那么拟凝聚层  $\mathcal{H}_{dR,c}(X) := R\pi_{X,*} \mathcal{O}_{(X/k)^{dR,c}}$  透过 Rees 同构后与  $p$ -完备复形  $Fil_*^{conj} R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$  相符。

注记 (共轭滤过 de Rham 叠的 Witt 向量描述). 注意  $\mathbb{G}_a^{dR} = F_* W/p = F_* \mathrm{cofib}(W \xrightarrow{p} W)$ ，从而我们只需要产出后者的 Postnikov 滤过，那么再一次由前述构造：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_* W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{V}(\mathcal{O}(1))^\sharp & \longrightarrow & G_W & \longrightarrow & F_* W \longrightarrow 0 \\ & & \searrow 0 & & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & W & & \end{array}$$



从而  $\mathbb{G}_a^{dR, W} \simeq F_* \text{cofib}(G_W \rightarrow W)$  即为 Witt 向量描述。

### 11.5 棱镜叠和 Nygaard 滤过棱镜叠

由于考虑的是纯特征的情况，此时想要叠化棱镜上同调不过是在 de Rham 叠（叠化晶体上同调）上再引入一个 Frobenius 了。因此我们毫无疑问给出如下定义

**定义 11.28** (棱镜叠). 定义棱镜叠,  $\mathbb{G}_a^\Delta := W/p$ . 对于光滑  $k$ -概形  $X$ , 类似地定义  $X^\Delta(R) = \text{Map}(\text{Spec}(W(R)/p), X)$ ,  $R$  是  $p$ -幂零  $W$ -代数。此时:

1.  $\phi^* X^\Delta \simeq (X/W)^{dR}$ , 结构层上同调沿 Frobenius 拉回得到了晶体上同调, 结构层上同调自身携带着共轭滤过。
2. 系数: 此时  $\phi^* D_{qc}(X^\Delta)$  恰好是晶体景  $(X/W)_{\text{cris}}$  上的全体晶体。

注意到共轭滤过和 Hodge 滤过的关联分次环都是 Hodge 上同调, 我们可以将  $\mathbb{G}_a^{dR, +}, \mathbb{G}_a^{dR, c}$  沿着闭点  $B\mathbb{G}_m$  粘起来。我们当然可以直接考虑  $(\text{Spec } k[u, v]/(uv))/\mathbb{G}_m$ : 这是两份  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  在原点处的并, 但是实际上我们可以更进一步, 将特殊纤维  $p = 0$  拉开: 而我们发现 Nygaard 滤过恰好与这个框架相符, 即:

$$k^\mathcal{N} := \text{Spf}(W(k)[u, t]/(ut - p))/\mathbb{G}_m$$

其作为  $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  上的层, 对应的分次代数就是  $\text{Rees}(p^\bullet W) = \bigoplus p^{\max\{i, 0\}} W(k) \cdot t^{-i}$ : 这就是 Nygaard 滤过坐落的地方, 特别地  $D_{qc}(k^\mathcal{N})$  对应着

$$D_{\text{comp, gr}}(W[u, t]/(ut - p)) \simeq \text{Mod}_{\text{Rees}(p^\bullet W)}(D_{\text{comp, gr}}(W[t])) \simeq \text{Mod}_{p^\bullet W}(DF_{\text{comp}}(W))$$

其中  $D_{\text{comp}}$  指  $p$ -完备,  $p^\bullet W$  为  $W$  上的  $p$ -进滤过。

**定义 11.29.** 定义  $k^\mathcal{N}$  上的叠  $\mathbb{G}_a^\mathcal{N}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_* W \longrightarrow 0 \\ & & u^\sharp \downarrow \swarrow ut=p & & \downarrow \swarrow p & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{V}(L)^\sharp & \longrightarrow & G_\mathcal{N} & \longrightarrow & F_* W \longrightarrow 0 \\ & & t^\sharp \downarrow \swarrow & & \downarrow \swarrow & & \downarrow p \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_* W \longrightarrow 0 \end{array}$$

定义  $\mathbb{G}_a^\mathcal{N} := \text{cofib}(G_\mathcal{N} \rightarrow W)$ 。以及对应的  $X^\mathcal{N}(\text{Spec}(R) \rightarrow k^\mathcal{N}) = \text{Map}_k(\text{Spec}(\mathbb{G}_a^\mathcal{N}(R)), X)$  中间一列给出了映射  $W/p \rightarrow \mathbb{G}_a^\mathcal{N}$ , 从而它诱导了  $X^\Delta \times_W k^\mathcal{N} \rightarrow X^\mathcal{N}$ ; 类似地右侧一列给出了  $\mathbb{G}_a^\mathcal{N} \rightarrow F_* W/p$ , 从而它诱导了  $X^\mathcal{N} \rightarrow \phi^* X^\Delta \times_W k^\mathcal{N}$ 。

记  $\mathcal{H}_\mathcal{N}(X) := R\pi_* \mathcal{O}_{X^\mathcal{N}} \in D_{qc}(k^\mathcal{N})$ , 那么:

1. 透过  $D_{qc}(k^\mathcal{N})$  与  $p^\bullet W$  上模的等价,  $\mathcal{H}_\mathcal{N}(X)$  对应着

$$Fil_\bullet^\mathcal{N} \phi^* R\Gamma_\Delta(X/W) = \phi_* Fil_\bullet^\mathcal{N} \phi^* R\Gamma_{\text{cris}}(X/W)$$

2. 沿  $\tilde{j}_{dR} : (k^\mathcal{N})_{t \neq 0} = \mathrm{Spf}(W[t, 1/t, p/t]) / B\mathbb{G}_m = \mathrm{Spf}(W) \hookrightarrow k^\mathcal{N}$  拉回  $\mathcal{H}_\mathcal{N}$  得到了

$$R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W) = \phi^* R\Gamma_\Delta(X/W)$$

3. 沿  $j_{HT} : (k^\mathcal{N})_{u \neq 0} \hookrightarrow k^\mathcal{N}$  拉回  $\mathcal{H}_\mathcal{N}$  得到了

$$\phi_* R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W) = R\Gamma_\Delta(X/W)$$

4. 拉回到纤维  $(k^\mathcal{N})_{u=0} \simeq \mathbb{A}_k^1/\mathbb{G}_m$  给出了

$$Fil_H^\bullet R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^*)$$

5. 拉回到纤维  $(k^\mathcal{N})_{t=0}$  给出了

$$\phi_* Fil_\bullet^{\mathrm{conj}} R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^*)$$

6. 拉回到闭点  $(k^\mathcal{N})_{u=t=0} = \mathrm{Spec}(k)/\mathbb{G}_m$  给出了

$$\bigoplus_i R\Gamma(X, \Omega_{X/k}^i)[-i](i)$$

## 12 棱镜化与合割化

### 12.1 棱镜化

**定义 12.1.** 对于一个  $p$ -幂零环  $S$ ，一个 Cartier-Witt 除子是指一个虚拟 Cartier 除子  $\alpha : I \rightarrow W(S)$ ，使得：

1.  $I \xrightarrow{\alpha} W(S) \rightarrow S$  的像生成的理想是幂零的
2.  $I \xrightarrow{\alpha} W(S) \xrightarrow{\delta} W(S)$  生成了整个环。

定义棱镜化  $X^\Delta$  为  $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$  上的叠，使得对于  $p$ -幂零环  $S$ ，其  $S$ -点为如下对象构成的群胚：

$$(I \xrightarrow{\alpha} W(S), \mathrm{Spec}(\overline{W(S)}) \rightarrow X)$$

其中  $\alpha : I \rightarrow W(S)$  是 Cartier-Witt 除子， $\bar{W}(S) = \mathrm{cofib}(I \rightarrow W(S))$ 。

**注记.** 实际上由和棱镜类似的刚性，任何 Cartier-Witt 除子之间的映射都是同构，即上述对象（以及自然的态射）已经自动构成了群胚。并且我们可以类似定义  $\mathbb{G}_a^\Delta(R) = \mathrm{cofib}(I \rightarrow W(R))$ ，那么类似地  $X^\Delta(S) = X(\mathbb{G}_a^\Delta(S))$

这个叠的确计算了棱镜上同调：

**定理 12.2.**  $X$  是有界  $p$ -进形式概形，使得  $X$  拟合割并且  $qcqs$ ，那么：

$$R\Gamma(X^\Delta, \mathcal{O}_{X^\Delta}) \cong R\Gamma_\Delta(X)$$

注意每个 Cartier-Witt 除子  $I \rightarrow W(S)$  诱导了一个虚拟 Cartier 除子  $I \otimes_{W(S)} S \rightarrow S$ ，使得其像幂零，从而这给出了叠的态射  $X^\Delta \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m}$ 。

**定义 12.3.** 定义 Hodge-Tate 叠为  $X^\Delta \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^1}/\mathbb{G}_m$  沿  $B\mathbb{G}_m \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^1}/\mathbb{G}_m$  的拉回。类似地，其计算了 Hodge-Tate 上同调。

为了给出混特征情形的 Nygaard 滤过棱镜化，回忆纯特征时采用的构造，我们给出如下  $W, F_*W\mathbb{G}_a^\sharp$  的类比：固定  $p$ -幂零环  $R$ ，一个仿射  $W$ -模概形  $M$

1.  $M$  是  $W$ -可逆的：如果  $M \simeq L \otimes_{W(R)} W, L \in \text{Pic}(W(R))$
2.  $M$  是  $F_*W$ -可逆的：如果  $M \simeq F_*L, L$  是  $W$ -可逆的
3.  $M$  是  $\sharp$ - $W$ -可逆的：如果  $M \simeq \mathbb{V}(L)^\sharp, L \in \text{Pic}(R)$
4.  $M$  是  $W$ -容许的，如果其是  $\sharp$ - $W$ -可逆模对可逆  $F_*W$  模的扩张。

**例子.** Cartier-Witt 除子利用上述对应的第一部分有着对应：每个 Cartier-Witt 除子诱导了可逆  $W$ -模的态射  $d: M \rightarrow W$ ，我们能够明显看到这个构造和上一节中诸多构造的相似性。

**定义 12.4.** 固定  $p$ -幂零环  $S$ ，一个滤过 Cartier-Witt 除子  $S$  是指一个  $W$ -模  $M$ ， $d: M \rightarrow W$ ，使得诱导的可逆  $F_*W$ -模态射  $F_*M' \rightarrow F_*W$  来自某个 Cartier-Witt 除子。

定义  $\mathbb{Z}_p^\mathcal{N}(S)$  为全体  $S$  上的滤过 Cartier-Witt 除子。与纯特征情形类似，我们也有如下构造。首先固定如下描述滤过 Cartier-Witt 除子的记号：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{V}(L_M)^\sharp & \longrightarrow & M & \longrightarrow & F_*M' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sharp(d) & & \downarrow d & & \downarrow F_*d' \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_*W \longrightarrow 0 \end{array}$$

1.  $j_{HT}$ : 对于任何 Cartier-Witt 除子  $(\alpha: I \rightarrow W(R)) \in \mathbb{Z}_p^\Delta(R)$ ，我们自动诱导了一个滤过 Cartier-Witt 除子  $(I \otimes_{W(R)} W \rightarrow W)$ 。这给出了  $j_{HT}: \mathbb{Z}_p^\Delta \rightarrow \mathbb{Z}_p^\mathcal{N}$
2. 结构映射  $\pi$ : 将  $d$  变为 (Cartier-Witt 除子)  $d'$  给出了结构映射  $\pi: \mathbb{Z}_p^\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\Delta$
3. Rees 映射  $t$ : 注意  $\sharp(d)$  是  $\sharp$ -可逆模的态射，因此它来自某个可逆  $R$ -模的态射  $t(d): L_M \rightarrow R$ ，将  $d$  变为  $t(d)$  给出了 Rees 映射  $t: \mathbb{Z}_p^\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$
4.  $i_{dR}$ : 通过平凡扩张

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{V}(L)^\sharp & \longrightarrow & \mathbb{V}(L)^\sharp \oplus F_*W & \longrightarrow & F_*W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow t^\sharp & & \downarrow d=(t^\sharp, V) & & \downarrow p \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a^\sharp & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_*W \longrightarrow 0 \end{array}$$

诱导了  $i_{dR}: \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{Z}_p^\mathcal{N}$

5.  $j_{dR}$ : 沿着  $t: \mathbb{Z}_p^\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  和  $t \neq 0: \mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$  拉回给出了  $j_{dR}: \mathbb{Z}_p^\Delta = (\mathbb{Z}_p^\mathcal{N})_{t \neq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\mathcal{N}$ ，其中第一个  $=$  由  $\pi$  诱导。

**注记.** 这个构造相当直观：我们始终谨记纯特征的情况，那么从 Cartier-Witt 除子到滤过 Cartier-Witt 除子是通过  $\mathbb{G}_a^\sharp$  扩张 Witt 环将滤过“拉开”到不同层次的滤过上。

由此我们终于完成了完全版本的 Nygaard 滤过棱镜化：

**定义 12.5.** 固定有界  $p$ -进形式概形  $X$ ，定义叠  $\mathbb{G}_a^{\mathcal{N}}$  为如下  $\mathbb{Z}_p^{\mathcal{N}}$  上的叠：

$$\mathbb{G}_a^{\mathcal{N}}(M \xrightarrow{d} W) = R\Gamma(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{cofib}(M \rightarrow W))^{[-1,0]}$$

注记. 实际上上述截断是不必要的，这个复形已然自动是一个 1-截断生像代数：注意检查长正合列知只需计算  $R\Gamma(\mathrm{Spec}(R), M)$  聚集在上同调指标  $[0, 1]$  处，从而再由  $M$  的扩张检查就能够说明结果。

定义  $X^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\mathcal{N}}$  为

$$X^{\mathcal{N}}(d : M \rightarrow W) = X(\mathbb{G}_a^{\mathcal{N}}(d : M \rightarrow W))$$

其上有来自  $\mathbb{Z}_p^{\mathcal{N}}$  的对应映射：

1.  $\pi_X : X^{\mathcal{N}} \rightarrow X^{\Delta}$
2.  $t_X : X^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$
3.  $j_{HT}, j_{dR} : X^{\Delta} \rightarrow X^{\mathcal{N}}$
4.  $i_{dR}$ ：回忆上一节我们对 de Rham 叠以及 Hodge 滤过 de Rham 叠的定义，其定义并不依赖于特征  $p$ ，因此我们依然有对应的  $\mathbb{G}_a^{dR,+} = \mathrm{cofib}(\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^{\sharp} \xrightarrow{t^{\sharp}} \mathbb{G}_a)$ 。

现在注意到我们有如下两个对象之间的拟同构

$$(\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^{\sharp} \oplus F_*W \xrightarrow{t^{\sharp}, V} W) \simeq (\mathbb{V}(\mathcal{O}(-1))^{\sharp} \xrightarrow{t^{\sharp}} \mathbb{G}_a)$$

并且左侧当然是一个滤过 Cartier-Witt 除子。因此由定义这就给出了  $i_{dR,+} : X^{dR,+} \rightarrow X^{\mathcal{N}}$ ，其坐落在前述构造的  $i_{dR} : \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\mathcal{N}}$  之上。

更进一步限制到  $X^{dR}, X^H$  上就给出了对应的  $i_{dR}, i_H$ 。

## 12.2 合割化

**定义 12.6.** 定义  $X$  的合割化为将  $X^{\mathcal{N}}$  中的两份  $X^{\Delta}$  粘合，即如下推出：

$$\begin{array}{ccc} X^{\Delta} \sqcup X^{\Delta} & \xrightarrow{j_{dR} \sqcup j_{HT}} & X^{\mathcal{N}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\Delta} & \longrightarrow & X^{syn} \end{array}$$

完全类似地，我们把“正确系数”范畴称为棱镜  $F$ -规范： $\mathrm{F-Gauge}_{\Delta}(X) := D_{qc}(X^{syn})$ 。特别地拉回到  $X^{\mathcal{N}}$  称为还原  $F$ -规范的基底规范。

特别地，结构层  $\mathcal{H}_{Syn}(X) := R\pi_*\mathcal{O}_{X^{syn}} \in D_{qc}(\mathbb{Z}_p^{syn})$ ，其计算了所谓的合割上同调。更一般地说：给定任何  $F$ -规范  $E \in D_{qc}(X^{syn})$ ，有好三角

$$R\Gamma(X^{syn}, E) \rightarrow R\Gamma(X^{\mathcal{N}}, E|_{X^{\mathcal{N}}}) \xrightarrow{j_{HT}^* - j_{dR}^*} R\Gamma(X^{\Delta}, E|_{X^{\Delta}})$$

我们简单论述上述构造在经典理论中的对应物：我们希望还原基于  $\mathrm{TC}^-$  以及其上 Nygaard 滤过给出的 Breuil-Kisin twist 的精确描述。我们首先在  $-\Delta$  层面上描述：此时对应的结构层无非是将任何有界棱镜  $(A, I)$  映至  $A\{1\} \in \mathrm{Pic}(A)$  产生的  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p^\Delta}\{1\}$ 。

进一步通过 Rees 映射拉开，我们将上述构造升级到  $\mathbb{Z}_p^\mathcal{N}$  上：

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p^\mathcal{N}}\{1\} := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p^\Delta} \otimes t^* \mathcal{O}(-1)$$

通过检查其在  $j_{dR}, j_{HT}$  下拉回相同，我们将之下降成为合割化上的层。特别地透过棱镜- $\mathrm{TC}^-$  比较以及（我们述而未证的）棱镜叠-棱镜比较，这个 Breuil-Kisin twist 层计算的就是：

$$R\Gamma_{syn}(A, \mathbb{Z}_p(i)) := gr_{\mathcal{N}}^n \mathrm{TC}(A; \mathbb{Z}_p)[-2i] = \mathrm{hofib}(\varphi - \mathrm{can} : \mathcal{N}^{\geq i} \widehat{\Delta}_A\{i\} \rightarrow \widehat{\Delta}\{i\})$$

合割上同调与 K 理论的计算有着紧密的相关性，例如 TC 上的滤过产出了谱序列

$$E_2^{ij} = H^{i-j}(R\Gamma_{syn}(R, \mathbb{Z}_p(j))) \implies \mathrm{TC}_{-i-j}(R; \mathbb{Z}_p)$$

另一方面，标准的迹方法结果保证了这给出了对 K 理论的良好逼近：

**定理 12.7** (Dundas-Goodwillie-McCarthy). 给定环  $A$  以及幂零理想  $I$ ，如下是拉回图表

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \longrightarrow & K(A/I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TC}(A) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(A/I) \end{array}$$

**推论 12.8.**  $\mathcal{O}_K$  是完备离散赋值环，具有剩余域  $k = \mathbb{F}_q$  并且  $\mathrm{Frac}(K)$  是  $\mathbb{Q}_p$  的有限扩张，固定一个归一化子  $\varpi \in \mathcal{O}_K$ 。那么：

$$K_{*\geq 0}(\mathcal{O}_K/\varpi^n; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{TC}_{*\geq 0}(\mathcal{O}_K/\varpi^n)$$

是同构

证明. 只需注意上述命题约化到  $\mathbb{F}_q$  的情形。 □

然而在实际应用中 Nygaard 滤过对应的计算 TC 的谱序列坍塌，并且没有扩张的问题：

**定理 12.9** ([AKN24, Corollary 2.16]).

$$K_{2i-1}(\mathcal{O}_K/\varpi^n; \mathbb{Z}_p) \cong H^1(R\Gamma_{syn}(\mathcal{O}_K/\varpi^n, \mathbb{Z}_p(i))), \quad i \geq 1$$

$$K_{2i-2}(\mathcal{O}_K/\varpi^n; \mathbb{Z}_p) \cong H^2(R\Gamma_{syn}(\mathcal{O}_K/\varpi^n, \mathbb{Z}_p(i))), \quad i \geq 2$$

实际上，[AKN24] 中计算  $K(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_p)$  的方法正是以此为起点，再利用  $\mathcal{O}_K/\varpi^n$  上的  $\varpi$ -进滤过计算合割上同调得到的结果。

另一方面，合割上同调和 Galois 表示紧密相连：

**定理 12.10** ([Bha23]). 存在一个平展实现函子

$$T_{\text{ét}} : \text{Perf}(X^{\text{syn}}) \rightarrow D_{\text{lis}}^b(X_\eta, \mathbb{Z}_p)$$

其中这个平展实现的来源是  $X$  完美胚环  $R$  时  $D_{\text{lis}}^b(X_\eta, \mathbb{Z}_p) = D_{\text{lis}}^b(\text{Spa}(R[1/p], R), \mathbb{Z}_p)$  以及 Nygaard 滤过棱镜叠的具体观察诱导得到的。

特别地, 在  $\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}$  上其诱导了

$$T_{\text{ét}} : \text{Perf}(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}) \rightarrow D_{\text{lis}}^b(\text{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p) \simeq D_{fg}^b(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p)$$

$\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}$  上的拟凝聚层中有一类特殊的  $\text{Perf}(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}})$  中的全子范畴, 称为自反  $F$ -规范, 它真正划出了  $Galois$  表示的导出范畴中晶体 ( $\mathbb{Z}_p$ ) 表示部分, 即:

$$\text{Coh}^{\text{refl}}(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}) \cong \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{crys}}(G_{\mathbb{Q}_p})$$

其中等价由  $F$ -规范的平展实现给出。

类似地, 我们甚至可以进一步讨论一个  $(\mathbb{Q}_p)$   $Galois$  表示的“晶体部分”: 这个术语首先被 Bloch-Kato 引进, 称为 Bloch-Kato Selmer 群。这个构造可以被几何地重述:

对于任何  $M \in \text{Coh}(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}})$ ,  $\eta : R\Gamma(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}, M)[1/p] \rightarrow R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_p}, T_{\text{ét}}(M))[1/p]$  满足:

1.  $T_{\text{ét}}(M)[1/p]$  是晶体表示
2.  $\eta^0$  是同构
3.  $\eta^1$  是单射, 其像由  $H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, T_{\text{ét}}(M)[1/p])$  中所有 (作为表示) 晶体的  $T_{\text{ét}}(M)[1/p]$  对  $\mathbb{Q}_p$  的扩张张成的子空间
4.  $H^2(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}, M)[1/p]$  消失。

因此实际上  $R\Gamma(\mathbb{Z}_p^{\text{syn}}, M)[1/p]$  划出了对应的  $Galois$  表示  $T_{\text{ét}}(M)$  的晶体部分。

## A Beilinson t-结构

本节我们主要证明如下 t-结构的存在性。

**定理 A.1** (Beilinson t-结构). 1. 记  $DF^{\leq 0}(R) \subseteq DF(R)$  为所有使得  $gr^i(F) \in D^i(R), \forall i$  的  $F$  构成的全子范畴; 记  $DF^{\geq 0}(R) \subseteq DF(R)$  为所有使得  $F(i) \in D^{\geq i}(R), \forall i$  的  $F$  构成的全子范畴。它们给出了  $DF(R)$  上的 (上调指标)  $t$ -结构。

2. 记对应的截断函子为  $\tau_B^{\leq i}, \tau_B^{\geq i}$ , 特别地,  $\tau_B^{\leq 0}$  为取连合覆盖。那么它满足:

$$gr^i \circ \tau_B^{\leq 0}(-) \simeq \tau_B^{\leq i} \circ gr^i(-)$$

3. 对于离散的环  $R$ , 那么  $DF(R)$  上的  $t$ -结构的心  $DF^\heartsuit(R)$  和  $\text{Ch}(R)$  等价。其等价有如下给出: 给定  $F \in DF(R)$ , 那么  $\pi_B^0(F) \in DF^\heartsuit(R)$  对应的链复形是  $(H^\bullet(gr^\bullet(F)), d)$ 。其中微分映射由三角

$$gr^{i+1}F = F(i+1)/F(i+2) \rightarrow F(i)/F(i+2) \rightarrow F(i)/F(i+1) = gr^iF$$

的边缘映射给出。

注记. 利用 Beilinson t-结构截断和取分次的交换性, 我们立刻得到在 Beilinson t-结构下滤过谱的 t-结构同伦群  $\pi_B$  对应着滤过谱产生的谱序列第一页的每一条链复形。

证明. 1. 我们来证明  $(DF^{\leq 0}, DF^{\geq 0})$  的确给出了一个 t-结构。注意由定义  $DF^{\leq 0}$  在余极限下封闭, 从而存在嵌入的右伴随  $R: DF(R) \rightarrow DF^{\leq 0}(R)$ 。现在记  $Q(Y) = \text{cofib}(R(Y) \rightarrow Y)$ , 我们需要说明  $Q(Y) \in DF^{>0}(R)$ 。

等价地, 这只需说明  $\forall X \in D^{\leq i}(R), \text{Map}(X, Q(Y)(i)) = 0$ 。现在注意  $-(i): DF(R) \rightarrow D(R)$  有左伴随  $L_i: L_i(X)(j) = \begin{cases} 0 & j > i \\ X & j \leq i \end{cases}$ 。于是  $\text{Map}(X, Q(Y)(i)) = \text{Map}_{DF(R)}(L_i(X), Q(Y))$ 。

现在任意给定  $\eta: L_i(X) \rightarrow Q(Y), X \in D^{\leq i}(R)$ 。那么顺着  $\eta$  就给出了纤维列之间的映射

$$\begin{array}{ccccc} R(Y) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & L_i(X) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \eta \\ R(Y) & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Q(Y) \end{array}$$

现在由于  $X \in D^{\leq i}(R), L_i(X) \in DF^{\leq 0}(R)$ 。另外  $R \in DF^{\leq 0}(R)$ , 并且直接检查知  $DF^{\leq 0}(R)$  在扩张下封闭, 从而  $F \in DF^{\leq 0}(R)$ 。但是由  $R$  的伴随性质,  $F \rightarrow Y$  穿过  $R(Y)$ , 因此上侧水平箭头分裂, 即  $F = R(Y) \oplus L_i(X)$ 。

另一方面追下图知

$$\begin{array}{ccccc} R(Y) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L_i(Y) & \longrightarrow & R(Y)[1] \\ & & \searrow & & \downarrow \\ & & & & Q(Y) \end{array}$$

但是我们知道  $L_i(Y) \rightarrow R(Y)[1]$  是零映射 (分裂), 从而  $\eta = 0$ 。

2. 注意到任何正合且 t-正合的函子保持截断结构, 并注意  $gr^i: (DF^{\leq 0}(R), DF^{\geq 0}(R)) \rightarrow (D^{\leq i}(R), D^{\geq i}(R))$  在如前标注的 t-结构下是 t-正合的, 结论立刻得证。
3. 由定义,  $F \in DF^{\heartsuit}(R)$  满足  $gr^i(F) \in D^{\leq i}(R), F(i) \in D^{\geq i}(R)$ 。

**引理 A.2.**  $F \in DF^{\heartsuit}(R)$  当且仅当如下两者成立:

- (a)  $gr^i(F)$  聚集在上同调指标  $i$  处
- (b)  $F$  完备。

证明.  $\implies$  . 一侧是显然的, 我们只证明反方向。条目 1 自然说明  $F \in DF^{\leq 0}(R)$ , 现在注意  $F(i) = \lim_{j \geq i} F(i)/F(j)$ , 并且  $gr^j(F) \in D^{\geq i}(R), j \geq i$ , 从而取极限保持这一切, 因此  $F(i) \in D^{\geq i}(R)$ 。  $\square$

下面考虑函子  $G: \text{Ch}(R) \rightarrow DF^\heartsuit(R)$ : 其将  $K^\bullet$  映为  $G(K^\bullet)$ , 使得  $G(K^\bullet)(i) = K^{\geq i}$ 。我们证明其全忠实和本质满性。我们的证明分为三步: 有界的情况, 上有界的情况和一般的情况。

- (a) 有界: 此时我们有函子  $G^b: \text{Ch}^b(R) \rightarrow DF(R)^{\heartsuit, b}$  (后者指有限滤过构成的全子范畴)。注意对每个  $K^\bullet \in \text{Ch}^b(R)$ , 其上存在一个函子性的有限滤过, 每个分次是  $M[-i]$ , 类似地任何  $F \in DF(R)^{\heartsuit, b}$  上存在一个函子性的有限滤过, 每个分次是  $L_i(M[-i])$ , 并且  $G(M[-i]) = L_i(M[-i])$ 。

现在我们希望证明  $G^b$  是等价, 如下引理指出我们如何利用分次将问题约化:

**引理 A.3.**  $G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是 *Abel* 范畴之间的正合函子, 假设存在一族对象  $S \subseteq \mathcal{A}$  使得:

- i. 每个  $\mathcal{A}$  中的对象都有有限滤过, 使得每个分次都落在  $S$  中
- ii. 每个  $\mathcal{B}$  中的对象都有有限滤过, 使得每个分次都落在  $G(S)$  中
- iii.  $\forall X, Y \in S$ ,  $G$  诱导了  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{B}}^*(G(X), G(Y))$

证明. 首先我们说明, 固定  $X \in S$ , 则  $\forall Z \in \mathcal{A}, \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, Z) \cong \text{Ext}_{\mathcal{B}}^*(G(X), G(Z))$ 。注意  $Z \in S$  时结论成立, 现在利用 5-引理就可以对滤链长度归纳说明其对所有  $Z \in \mathcal{A}$  正确。

类似地, 固定  $Z$ , 令  $X \in \mathcal{A}$  变动就类似地说明:

$$\forall X, Z \in \mathcal{A}, \text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, Z) \cong \text{Ext}_{\mathcal{B}}^*(G(X), G(Z))$$

特别地这说明了全忠实性。本质满则是因为我们利用条件 2 和  $\text{Ext}^1$  上的同构, 从而说明每个  $G(S)$  中对象之间的扩张也都落在  $G(S)$  中, 对滤链长度归纳就说明了本质满性。  $\square$

于是现在我们只需说明

$$\text{Ext}_{\text{Ch}(R)}^a(M[-i], N[-j]) \cong \text{Ext}_{DF(R)}^a(L_i(M[-i]), L_j(N[-j]))$$

现在由  $L_i$  的伴随性质:

$$\text{Ext}_{DF(R)}^a(L_i(M[-i]), L_j(N[-j])) \cong \begin{cases} 0 & i > j \\ \text{Ext}_R^{a-i+j}(M, N) & i \leq j \end{cases}$$

现在我们计算  $\text{Ext}_{\text{Ch}(R)}^a(M[-i], N[-j]) \cong \text{Ext}_{\text{Ch}(R)}^a(M, N[i-j])$ 。但是注意  $M \in$



$\text{Ch}(R)$  有如下标准的消解:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & (\cdots \longrightarrow \vdots \longrightarrow \vdots \longrightarrow \vdots \longrightarrow \vdots \longrightarrow \cdots) \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 P_1 = & & (\cdots \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 P_0 = & & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 M = & & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 0 = & & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)
 \end{array}$$

利用其计算就立刻说明了两个  $\text{Ext}$  的确同构。

- (b) 上有界: 注意  $G$  也延拓为  $G^- : \text{Ch}^-(R) \rightarrow DF(R)^{\heartsuit, -}$  (后者指滤过上有界:  $gr^i(F) = 0, i \gg 0$ )。注意  $G$  和滤余极限交换, 于是一切都来自有界情况。
- (c) 一般: 注意  $\text{Ch}^{\heartsuit}(R)$  中的对象上的 Postnikov 滤过均完备, 因此为了说明  $G$  诱导了  $\text{Ch}(R) \rightarrow DF(R)^{\heartsuit}$  上的等价, 我们只需要如下观察:  $G$  保持最终停止的  $\mathbb{N}$ -极限。但是这就立刻使我们约化到上有界的情况。

□

## B 晶体上同调

我们在这里给出一个简短的晶体上同调和 de Rham-Witt 复形的介绍。

**定义 B.1** (除幂结构). 给定环  $A$  以及理想  $I \subseteq A$ ,  $(A, I)$  上的除幂结构是指一系列  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ , 满足  $\gamma_n : I \rightarrow A$ , 以及  $\forall x, y \in I, \lambda \in A$ :

1.  $\gamma_0(x) = 1, \gamma_1(x) = x, \gamma_n(x) \in I$
2.  $\gamma_n(x + y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x) \gamma_j(y)$
3.  $\gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x)$
4.  $\gamma_i(x) \gamma_j(x) = \frac{(i+j)!}{i!j!} \gamma_{i+j}(x)$
5.  $\gamma_i(\gamma_j(x)) = \frac{(ij)!}{i!(j!)^i} \gamma_{ij}(x)$

两个除幂环之间的态射  $f : (A, I, \gamma) \rightarrow (B, J, \delta)$  定义为环同态  $f : A \rightarrow B, f(I) \subseteq J$  并且  $\delta_n \circ f = f \circ \gamma_n, \forall n \geq 0$ 。

**例子.**  $A$  是  $\mathbb{Q}$ -代数时, 对任何理想  $I$ ,  $(A, I, \gamma)$  是唯一的除幂环, 其中  $\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ 。

**例子.** 对于特征  $p$  完美域  $k$ , 定义如下两个除幂环:

1.  $(W(k), (p), \gamma)$ : 其中  $\gamma_n : (p) \rightarrow W(k) : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$  是良定义的
2.  $(W_n(k), (p), \gamma)$ : 其中  $\gamma_m : (p) \rightarrow W_n(k) : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^m}{m!} & m < n \\ 0 & m \geq n \end{cases}$

**定义 B.2** (除幂闭包). 给定除幂环  $(A, I, \gamma)$ , 环同态  $A \rightarrow B$ , 理想  $J \subseteq B$  使得  $IB \subseteq J$ , 称  $J$  在  $B$  中相对  $(A, I, \gamma)$  的除幂闭包为 (唯一的) 除幂环  $(D, \bar{J}, \bar{\gamma})$ , 满足其为  $(A, I, \gamma)$  上除幂代数 (即有除幂环态射  $(A, I, \gamma) \rightarrow (D, \bar{J}, \bar{\gamma})$ ), 并且对任何  $(A, I, \gamma)$  上除幂代数  $(C, K, \delta)$ , 都有:

$$\mathrm{Hom}_{(A, I, \gamma)}((D, \bar{J}, \bar{\gamma}), (C, K, \delta)) = \mathrm{Hom}_{(A, I)}((B, J), (C, K))$$

其中左侧为除幂代数态射。简记除幂闭包为  $D_{B, \gamma}(J)$ 。

注记. 其构造自然是形式地添加充分多变元然后商出除幂结构所需满足的代数关系。

**警告 ⚠**. 在文献中我们还会使用术语 “一个环同态 (关于某个除幂环/作为除幂代数) 的除幂闭包”, 其意义是:

给定除幂环  $(S, I, \gamma)$ , 以及环同态  $A \rightarrow B$ , 则除幂闭包  $D_S(A \rightarrow B)$  指的是除幂结构  $(D_S(A \rightarrow B), \ker(D_S(A \rightarrow B) \rightarrow B), \bar{\gamma})$  使得其是满足该除幂结构和  $S$  上相容的  $A$ -代数的初始者: 即对于任何  $S$ -代数  $X, Y$  之间的满射配备上使得其成为  $(A \rightarrow B)$  上的代数的结构态射, 并使得  $\ker(X \rightarrow Y)$  上配备有和  $S$  相容的除幂结构时, 就存在唯一的态射  $D_S(A \rightarrow B) \rightarrow X$ 。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \searrow & \nearrow \\ & D_S(\ker(A \rightarrow B)) & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & Y \end{array}$$

特别地, 取  $S = \mathbb{Z}, I = 0$  时相当于去除基底除幂环  $S$  的影响, 我们记这样产生的除幂闭包为  $D(A \rightarrow B)$ 。

我们将上述构造全局化, 定义携带除幂结构的概形:

**定义 B.3.** 给定概形  $S$  和拟凝聚理想层  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_S$ 。其上的一个除幂结构是指  $\{\gamma_n\} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_S$ , 使得对于任何开集  $U \subseteq S, \gamma_n : \mathcal{I}(U) \rightarrow \mathcal{O}_S(U)$  给出了一个除幂结构, 并且开集诱导的限制映射是除幂环之间的态射。

除幂概形之间的态射定义类似, 即  $f : (S, \mathcal{I}, \gamma) \rightarrow (S', \mathcal{I}', \gamma')$ , 概形态射  $f : S \rightarrow S'$ , 使得  $f^{-1}\mathcal{I}'\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{I}$ , 并且在每个开集上诱导了除幂环态射。

注记. 仿射除幂概形和除幂环一一对应。

**定义 B.4** (除幂加厚). 称一个除幂概形  $(T, \mathcal{I}, \gamma)$  是除幂加厚, 如果  $\mathcal{I}$  诱导的闭浸入  $U \rightarrow T$  是加厚 (即诱导了底拓扑空间的同胚)。也记之为  $(U \subseteq T, \gamma)$ 。

**命题 B.5.** 除幂概形的纤维积在乘积的某一方是除幂加厚的时候总是存在, 即:

$(U' \subseteq T', \delta') \times_{(S', \mathcal{I}', \gamma')} (S, \mathcal{I}, \gamma)$  存在, 记为  $(T, \mathcal{I}, \delta)$ , 其满足  $T = T' \times_{S'} S$  是除幂概形的纤维积。

接下来我们定义晶体景:

**定义 B.6** (晶体景). 给定  $\mathbb{Z}_{(p)}$  上的除幂概形  $(S, \mathcal{I}, \gamma)$ , 记  $S_0 = V(\mathcal{I}) \subseteq S$ .  $X$  是  $S_0$  上的概形, 使得  $p$  在  $\mathcal{O}_X$  中局部幂零。(特别地  $S$  取为截断 Witt 环  $(W_n(k), (p), \gamma)$  时该条件自动满足)。

定义 (小, Zariski) 晶体景  $\text{Cris}(X/S)$  为如下对象构成的范畴:  $(S, \mathcal{I}, \gamma)$  上的除幂加厚  $(U \subseteq T, \delta)$ , 以及一个  $S$ -态射  $U \rightarrow X$ , 满足  $U \rightarrow X$  是 Zariski 开浸入。即总结成如下图表:

$$\begin{array}{ccc} T & \longleftarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \text{Zar. open} \\ & & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S_0 \end{array}$$

态射为使得上述图表  $\times \Delta^1$  后全图交换者。

称  $\text{Cris}(X/S)$  中态射族  $\{(U_i \subseteq T_i, \delta_i) \rightarrow (U \subseteq T, \delta)\}$  是 Zariski 覆盖, 如果  $U_i = U \times_T T_i$ ,  $\{T_i \rightarrow T\}$  是 Zariski 覆盖。晶体景  $\text{Cris}(X/S)$  上配备的是 Zariski 覆盖产生的拓扑。

注记. 这里展现出了另外一种风味的 Grothendieck 拓扑: 我们没有将额外结构施加到拓扑的选取上, 而是体现在范畴的选择里。

注记. 晶体景  $\text{Cris}(X/S)$  上的层  $\mathcal{F}$  等价于如下数据:

对每个  $(U \subseteq T, \delta)$ , 有 Zariski 层  $\mathcal{F}_T$ , 其为  $\mathcal{F}$  的限制, 即:  $\mathcal{F}_T(W) = \mathcal{F}(U \cap W \subseteq W, \delta|_W)$ , 其中  $W \subseteq T$  是 Zariski 开集。

以及对任何  $f: (U \subseteq T, \delta) \rightarrow (U' \subseteq T', \delta')$ , 其有比较映射  $c_f: f^{-1}\mathcal{F}_{T'} \rightarrow \mathcal{F}_T$  使得其满足对  $f$  的函子性, 并且  $f: T \rightarrow T'$  是开浸入时它是  $T$  上层的同构。

**例子.** 晶体结构层  $\mathcal{O}_{\text{Cris}(X/S)}$  定义为  $(U, T, \delta) \mapsto \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ , 其由定义是晶体景上的层。

**定义 B.7** (晶体上同调). 定义晶体上同调为

$$H_{\text{cris}}^i(X/S) = H^i(\text{Cris}(X/S), \mathcal{O}_{\text{Cris}(X/S)})$$

注意晶体景没有终对象, 全局截面的定义变为

$$\Gamma(\text{Cris}(X/S), \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{PSh}(\text{Cris}(X/S))}(e, \mathcal{F}) = \lim_{C \in \text{Cris}(X/S)} \mathcal{F}(C)$$

其中  $e$  为  $\text{Cris}(X/S)$  上预层的终对象。

**定义 B.8** (Witt 环上晶体上同调). 给定  $k$  上概形  $X$ , 定义晶体上同调

$$H_{\text{cris}}^i(X/W(k)) = \varprojlim H_{\text{cris}}^i(X/W_n(k))$$

最后我们还要指出晶体上同调是正确的正特征 de Rham 上同调的模拟:

**定理 B.9** (晶体-de Rham 比较: [V.2.3.2 Ber74]). 如果  $Z/W_n(k)$  是  $X/k$  的光滑提升, 那么:

$$H_{\text{cris}}^i(X/W_n(k)) \cong H_{dR}^i(Z/W_n(k))$$

最后, 我们宣称存在一个 pro-复形能够具体地计算晶体上同调, 但是由于 de Rham-Witt 复形的构造实在偏离主线过远, 我们只宣称其存在性和拥有的性质:

**定理 B.10.** 给定  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数  $A$ , 存在一个 pro-复形  $W_\bullet \Omega_{B/A}^\bullet$ , 满足:

1.  $W_n \Omega_{B/A}^0 = W_n B$
2.  $\Omega_{B/A}^\bullet \rightarrow W_1 \Omega_{B/A}^\bullet$  是同构
3. 对于完美特征  $p$  域上的  $R\Gamma_{\text{cris}}(X/W_n) = R\Gamma(X, W_n \Omega_{X/k}^\bullet)$ , 从而 Witt 复形  $W\Omega_{X/k}^\bullet$  计算了  $X/W$  的晶体上同调。

## References

- [AKN24] Benjamin Antieau, Achim Krause, and Thomas Nikolaus. *On the K-theory of  $\mathbf{Z}/p^n$* . 2024. arXiv: [2405.04329 \[math.KT\]](#) (cit. on p. 77).
- [AN18c] Benjamin Antieau and Thomas Nikolaus. *Cartier modules and cyclotomic spectra*. 2020. arXiv: [1809.01714 \[math.AT\]](#) (cit. on pp. 12, 40).
- [AN18dR] Benjamin Antieau. “Periodic cyclic homology and derived de Rham cohomology”. In: *Annals of K-Theory* 4.3 (Dec. 2019), pp. 505–519. ISSN: 2379-1683. DOI: [10.2140/akt.2019.4.505](#) (cit. on pp. 12, 27).
- [Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique  $p > 0$* . Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1974. ISBN: 978-3-540-37807-5. DOI: [10.1007/BFb0068642](#) (cit. on p. 84).
- [Bha12b] Bhargav Bhatt. *p-adic derived de Rham cohomology*. 2012. arXiv: [1204.6560 \[math.AG\]](#) (cit. on p. 38).
- [Bha23] Bhargav Bhatt. *Prismatic F-gauges*. 2023 (cit. on pp. 3, 63, 78).
- [BLM20] Bhargav Bhatt, Jacob Lurie, and Akhil Mathew. *Revisiting the de Rham-Witt complex*. 2020. arXiv: [1805.05501 \[math.AG\]](#) (cit. on p. 69).
- [BM18] Bhargav Bhatt and Akhil Mathew. *The arc-topology*. 2020. arXiv: [1807.04725 \[math.AG\]](#) (cit. on p. 54).
- [BMS1] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. *Integral p-adic Hodge theory*. 2019. arXiv: [1602.03148 \[math.AG\]](#) (cit. on pp. 10, 12, 26).
- [BMS2] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. *Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory*. 2019. arXiv: [1802.03261 \[math.AG\]](#) (cit. on pp. 3, 10–12, 27, 37, 58).

- [BS19] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. *Prisms and Prismatic Cohomology*. 2022. arXiv: [1905.08229 \[math.AG\]](#) (cit. on pp. [3](#), [12](#), [41](#), [42](#), [45–48](#), [50](#)).
- [DK14] Christopher Davis and Kiran S. Kedlaya. “On the Witt vector Frobenius”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 142.7 (Mar. 2014), pp. 2211–2226. ISSN: 1088-6826. DOI: [10.1090/s0002-9939-2014-11953-8](#) (cit. on p. [13](#)).
- [HTT] Jacob Lurie. “Higher Topos Theory”. In: *AIM 2006 -20* (2006). eprint: [math/0608040](#) (cit. on pp. [13](#), [14](#)).
- [Ked21] Kiran S. Kedlaya. *Notes on prismatic cohomology*. 2021 (cit. on p. [41](#)).
- [Lod92] Jean-Louis Loday. *Cyclic Homology*. Ed. by S. S. Chern et al. Vol. 301. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. ISBN: 978-3-642-08316-7 978-3-662-11389-9. DOI: [10.1007/978-3-662-11389-9](#) (cit. on p. [28](#)).
- [Met03] David Metzler. *Topological and Smooth Stacks*. 2003. arXiv: [math/0306176 \[math.DG\]](#) (cit. on p. [65](#)).
- [NS18] Thomas Nikolaus and Peter Scholze. “On topological cyclic homology”. In: (July 2017). eprint: [1707.01799](#) (cit. on pp. [18](#), [20](#), [21](#), [34–36](#), [59](#)).
- [Ryd10] David Rydh. “Submersions and effective descent of étale morphisms”. In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 138.2 (2010), pp. 181–230. ISSN: 2102-622X. DOI: [10.24033/bsmf.2588](#) (cit. on p. [55](#)).
- [SAG] Jacob Lurie. *Spectral algebraic geometry*. 2018 (cit. on p. [65](#)).
- [Stacks] *Stacks Project* (cit. on pp. [14](#), [15](#), [31](#), [32](#), [43](#), [56](#), [58](#)).