

Notes for Algebraic Topology

ZIXI LI

2024 年 7 月 29 日

目录

第一部分 代数拓扑	1
第一章 基本群	3
1.0.1 基本群	3
1.0.2 基点的选择	3
1.0.3 同伦不变性	4
1.0.4 $\pi_1(\mathbb{R}), \pi_1(S^1)$	5
1.0.5 应用	5
Brouwer 不动点定理	5
代数基本定理	5
1.0.6 问题	6
第二章 范畴论语言与 van Kampen 定理	7
2.0.1 \mathbf{hTop} 和同伦等价	7
2.0.2 基本群胚	8
2.0.3 van Kampen 定理	8
2.0.4 例子	11
2.0.5 问题	12
第三章 覆叠空间	14
3.0.1 定义	14
3.0.2 提升性质	15
3.0.3 群胚的覆叠	16
3.0.4 群作用和轨道范畴	17
3.0.5 群胚覆叠的分类	18
3.0.6 群胚覆叠的构造	20
3.0.7 覆叠空间的分类	21
3.0.8 覆叠空间的构造	22
3.0.9 问题	24
第四章 图	27
4.0.1 定义	27
4.0.2 边路径和树	27



4.0.3	图的同伦性质	28
4.0.4	图的覆叠和 Euler 示性数	28
4.0.5	群论中的应用	28
4.0.6	问题	29
第五章	紧生成空间	30
第六章	余纤维化	31
6.0.1	定义	31
6.0.2	映射柱和余纤维化	32
6.0.3	映射的余纤维化-同伦等价分解	33
6.0.4	映射的余纤维化判别	34
6.0.5	余纤维同伦等价	34
6.0.6	问题	36
第七章	纤维化	37
7.0.1	定义	37
7.0.2	道路提升	37
7.0.3	映射的纤维化-同伦等价分解	38
7.0.4	映射的纤维化判别	38
7.0.5	纤维同伦等价	38
7.0.6	纤维的变换	39
第八章	纤维和余纤维序列	41
8.0.1	基点同伦类	41
8.0.2	锥, 纬悬, 道路, 环路	41
8.0.3	基点余纤维化	43
8.0.4	余纤维序列	43
8.0.5	基点纤维化	44
8.0.6	纤维序列	45
8.0.7	两个序列的联系	45
第九章	高阶同伦群	46
9.0.1	定义	46
9.0.2	空间偶对长正合列	46
9.0.3	纤维化长正合列	46
9.0.4	计算	47
9.0.5	基点变换	47
9.0.6	n -等价, 弱等价	48
9.0.7	问题	49



第十章 CW 复形	51
10.0.1 定义	51
10.0.2 CW 复形上的拓扑操作	52
10.0.3 HELP, Whitehead 定理	52
10.0.4 胞腔逼近定理	54
10.0.5 空间的 CW 逼近	54
10.0.6 问题	55
第十一章 同伦切除定理和 Freudenthal 纬悬定理	57
11.0.1 同伦切除定理	57
11.0.2 Freudenthal 纬悬定理	58
11.0.3 装配流形	60
11.0.4 $\pi_{n+1}(S^n)$	61
第十三章 公理化同调理论和胞腔同调	62
13.0.1 Eilenberg-Steenrod 同调公理	62
13.0.2 胞腔同调	63
13.0.3 例子: $T^2, K, \mathbb{R}P^n$	66
13.0.4 问题	67
Reidemeister torsion	68
第十四章 同调公理的推论	71
14.0.1 约化同调: 基点 vs. 非基点	71
14.0.2 余纤维化偶对的同调	72
14.0.3 纬悬和偶对长正合列	72
14.0.4 约化同调理论公理	73
14.0.5 Mayer-Vietoris 序列	74
14.0.6 余极限的同调	76
第十五章 Hurewicz 定理和唯一性定理	78
15.0.1 Hurewicz 定理	78
15.0.2 唯一性定理	79
15.0.3 问题	80
第十六章 奇异同调	82
16.0.1 奇异链复形	82
16.0.2 几何实现	82
16.0.3 分类空间和 $K(\pi, n)$	84
第十七章 同调代数	87
17.0.1 万有系数定理	87
17.0.2 Kunneth 公式	89



17.0.3 \otimes 和 Hom	90
第十八章 公理化上同调理论和胞腔上同调	91
18.0.1 Eilenberg-Steenrod 上同调公理	91
18.0.2 胞腔和奇异上同调	92
18.0.3 杯积	92
18.0.4 $\mathbb{R}P^n$ 和 Borsuk-Ulam 定理	93
18.0.5 障碍理论	94
18.0.6 问题	94
第十九章 上同调理论的推论	96
19.0.1 约化上同调	96
19.0.2 Mayer-Vietoris 序列	96
19.0.3 余极限的上同调	97
19.0.4 上同调唯一性定理	97
19.0.5 问题	98
第二十章 Poincare 对偶	100
20.0.1 卡积	100
20.0.2 定向和基本类	101
20.0.3 消没定理	103
\mathbb{R}^n 的情况	104
流形的情况	104
20.0.4 Poincare 对偶定理	106
20.0.5 Poincare 对偶定理的证明	107
20.0.6 定向覆叠	109
20.0.7 问题	109
第二十一章 闭曲面分类定理	112
第二十二章 流形的指标和带边流形	115
22.0.1 紧流形的 Euler 示性数	115
22.0.2 紧可定向流形的指标	115
22.0.3 带边流形、更多对偶定理	116
22.0.4 作为边界的流形的指标	120
22.0.5 问题	120
第二十三章 同伦极限和同伦余极限, \lim^1	122
23.1 同伦余极限	122
23.1.1 同伦推出	122
23.1.2 同伦余等化子	123
23.1.3 序列余极限	123



23.2 同伦极限	124
23.2.1 同伦拉回	124
23.2.2 同伦等化子	125
23.2.3 序列极限	125
23.3 \varprojlim^1	126
23.3.1 例: 非平凡 \varprojlim^1 和 Skeletally Phantom Map	127
23.4 余极限和极限的同调	127
第二十四章 示性类	129
24.1 分类空间	129
24.2 Grassmann 流形和示性类	131
24.2.1 Thom 同构	133
24.2.2 Gysin 序列和 Euler 类	135
24.2.3 Grassmann 流形的上同调	136
24.2.4 Whitney 乘积公式	137
24.2.5 实 Pontryagin 类	138
24.3 分裂原理	139
24.3.1 Chern 特征	140
24.4 Poincare-Hopf 定理	141
24.5 应用	144
24.5.1 射影空间的 Whitney 浸入	144
24.5.2 球面的近复结构	145
24.5.3 CP^2 中光滑代数曲线的亏格	146
第二十五章 指标定理	147
25.1 超几何	147
25.2 热核的渐进展开	148
25.2.1 热核	149
25.2.2 渐进展开	150
25.2.3 存在性	151
25.3 Dirac 算子	152
25.3.1 旋量群、旋量空间	153
25.3.2 Dirac 算子与 Clifford 超联络	155
25.4 指标定理	156
第二十六章 等变上同调与 Atiyah-Bott 局部化	160
26.1 等变上同调	160
26.2 Atiyah-Bott 局部化	162



第二部分 稳定同伦论	164
第二十七章 起源：稳定现象	165
第二十八章 古典构造：序列谱	167
28.1 序列谱与广义（上）同调	167
28.2 Adams 的稳定同伦范畴	169
28.2.1 Adams 的构造	169
28.2.2 稳定胞腔，Whitehead 和 HEP 定理	171
28.2.3 稳定同伦范畴的加性范畴结构	172
28.2.4 稳定同伦范畴的三角范畴结构	173
28.2.5 稳定同伦范畴的么半范畴结构	174
28.2.6 Spanier-Whitehead 对偶	175
28.3 同调和上同调	177
28.3.1 例子	177
28.3.2 广义同调/上同调的性质	178
28.3.3 广义（上）同调的计算：Atiyah-Hirzebruch 谱序列	178
28.3.4 （上）同调的乘积结构	180
28.3.5 谱的 Poincare 对偶	183
28.4 Steenrod 代数	184
28.4.1 构造	185
28.4.2 计算实例，Steenrod 代数	186
mod 2 计算，Hopf Invariant	186
28.4.3 Hopf Invariant One Problem	189
28.5 Adams 谱序列	190
28.5.1 E-Adams 滤过	190
28.5.2 第一页	191
平坦交换环谱	192
E-Steenrod 代数	193
E-Steenrod 代数上的余模	197
余模的万有系数定理	198
28.5.3 稳定同伦群的特殊情况	200
28.5.4 第二页	201
28.5.5 收敛性	203
谱的局部化和幂零完备化	203
收敛定理	206
28.5.6 例子	207
28.6 对古典构造的评注	207
28.7 支线：模型范畴	210
28.7.1 导出	214



28.8 传统理论的终点	215
第二十九章 现代构造：稳定无穷范畴	216
29.1 无穷范畴的模型	216
29.1.1 单纯集	216
29.1.2 拟范畴	218
29.1.3 $sSet$ — 充实范畴	219
29.1.4 模型范畴的局部化	221
29.2 极限	221
拟范畴中的（余）极限	222
Kan 复形充实范畴的（余）极限	222
29.3 稳定无穷范畴	224
29.3.1 稳定化	226
29.3.2 对现代构造的评注	227
第三部分 色展同伦论	230
第三十章 Bousfield 局部化	231
30.1 定义和性质	231
30.2 素数处的局部化	232
30.2.1 单个素数的局部化	232
30.2.2 多个素数的局部化	233
30.2.3 有理化	233
30.3 对 Moore 谱的局部化、对素数的完备化	234
第三十一章 形式群律、BP 和 LEFT	236
31.1 形式群律、Lazard 环和 MU	236
31.2 Brown-Peterson 谱	238
31.3 Landweber 正合函子定理	239
第三十二章 色展同伦论中的基本对象	243
32.1 Adams-Novikov 谱序列、色展谱序列	243
32.2 Morava E -理论和 Morava 稳定化子群 S_n	244
32.2.1 Morava 稳定化子群 S_n	244
32.2.2 Morava E -理论	245
32.3 Johnson-Wilson E -理论、Morava K -理论及其 2-周期版本 k	246
第三十三章 ALec13, Change-of-Rings, Chromatic-Filtration	248
33.1 形式群：Lurie	248
33.2	250
33.3 Phantom map	250



33.4 再读 Landweber 正合定理	250
33.5 \mathcal{M}_{FG}^n	252
33.6 \mathcal{M}_{FG}^n 如何嵌入 \mathcal{M}_{FG} ? Lubin-Tate 理论	253
33.7 L_{E_n} 和 $L_{K(n)}$	254
33.8 $K(n)$ 和幂零定理	255
33.8.1 $K(n)$ 的公理化定义	255
33.8.2 幂零定理	257
33.9 厚子范畴定理	258
33.10 周期定理	260
33.11 望远镜局部化	262

第一部分

代数拓扑

首先有几个关于收缩的定义，在此记录以供查阅：

收缩/retraction: $r : X \rightarrow A, r \circ i = \text{id}_A$

形变收缩（部分书籍称 deformation retraction, [May99] 与 [Hat01] 未出现）：收缩映射 $r : X \rightarrow A, i \circ r \simeq \text{id}_X$

强形变收缩（部分书籍称 strong deformation retraction, [May99] 与 [Hat01] 称 deformation retraction）：收缩映射 $r : X \rightarrow A, i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$ （参见定义 9.0.9）

第一章 基本群

1.0.1 基本群

定义 1.0.1 (同伦, 道路同伦). 称拓扑空间之间的两个连续映射 $f, g : X \rightarrow Y$ 是同伦 (homotopic) 的, 如果存在一个连续映射 $h : X \times I \rightarrow Y$, 使得: $h(x, 0) = f(x); h(x, 1) = g(x)$ 。这里 $I = [0, 1]$ (后文中如无特殊指定均为如此)

特别地, 对于拓扑空间上的两条 $x \rightarrow y$ 的道路 $f, g : I \rightarrow X$: 称它们道路同伦, 如果连续映射 f, g 是同伦的, 并且存在一个同伦映射 h 保持道路起终点, 即: $h : I \times I \rightarrow Y$ 满足:

$$h(s, 0) = f(s), h(s, 1) = g(s); h(0, t) = x, h(1, t) = y$$

显然, 固定道路的起终点后, 道路同伦构成了固定起终点全体道路上的等价关系: 自反性和对称性显然, 传递性只需将两个时间区间 I 各自变为 $[0, 1/2], [1/2, 1]$ 再拼接在一起即可。

称道路 f 是环, 如果 $f(0) = f(1)$ 。

定义 1.0.2 (基本群). 定义基本群 $\pi_1(X, x)$ 为全体从 x 出发的环 (自然在 x 结束) 在道路连通关系下的等价类构成的集合。

下面引进 $\pi_1(X, x)$ 上的群运算: 对于两条道路 $f : x \rightarrow y; g : y \rightarrow z$, 定义其复合为:

$$(g \cdot f)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

容易验证 $[g][f] := [g \cdot f]$ 是良定义的。并且:

$$h \cdot (g \cdot f) \simeq (h \cdot g) \cdot f$$

(这里 \simeq 指道路同伦)

并且

$$[f^{-1} \cdot f] = [c_x], [f \cdot f^{-1}] = [c_y]$$

(这里 $f^{-1}(s) = f(1 - s)$, $c_x(s) = x, \forall s \in I$)

因此可以看出在如上定义的运算 ($[g][f] = [g \cdot f]$) 下, $\pi_1(X, x)$ 称为了一个群: 其中单位元是 $e = [c_x]$, 逆元是 $[f]^{-1} = [f^{-1}]$ 。

1.0.2 基点的选择

对于一条道路 $a : x \rightarrow y$, 定义

$$\gamma[a] : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) : [f] \mapsto [a \cdot f \cdot a^{-1}]$$

命题 1.0.3.

1. $\gamma[a]$ 仅依赖于 a 所处的道路同伦类 $[a]$, 并且诱导了基本群之间的群同态。
2. 对于两条道路 $a: x \rightarrow y, b: y \rightarrow z$, 有:

$$\gamma[b \cdot a] = \gamma[b] \circ \gamma[a]$$

3. 作为推论, 得到 $\gamma[a]$ 是同构: 因为其逆为 $\gamma[a^{-1}]$ 。

因此: 如果 X 是道路连通的, 那么其基本群 (在同构意义下) 与基点选择无关。

接下来自然想问这些同构是否是自然的: 对于道路 $a: x \rightarrow y, b: y \rightarrow x$, 有:

$$\gamma[b \cdot a] = [b \cdot a][f][b \cdot a]^{-2}$$

如果基本群 $\pi_1(X, x)$ 是 Abel 的, 那么这就说明 $\gamma[b \cdot a] = \text{id}$, 此时对于任何两条道路 $a: x \rightarrow y, a': x \rightarrow y$, 都有:

$$\gamma[a'] \circ \gamma[a^{-1}] = \text{id}$$

然而 $\gamma[a]$ 和 $\gamma[a^{-1}]$ 是互逆的, 因此这就说明了:

命题 1.0.4. 如果 $\pi_1(X, x)$ 是 Abel 的, 并且存在两条道路 $a: x \rightarrow y, a': x \rightarrow y$ (于是由基本群同构知 $\pi_1(X, y)$ 是 Abel 的), 那么 $\gamma[a] = \gamma[a']$, 即两个基本群间存在典范的同构。

1.0.3 同伦不变性

对于连续映射 $p: X \rightarrow Y$, 定图 $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, p(x))$ 为: $[f] \mapsto [p \circ f]$ 。

显然 p_* 是群同态, $\text{id}: X \rightarrow X$ 诱导出恒等同态, $p: X \rightarrow Y, q: Y \rightarrow Z$ 则有 $q_* \circ p_* = (q \circ p)_*$ 。(即: 基本群可以定义出一个函子)

下面, 我们希望说明基本群具有同伦不变性。即: 如果 $p, q: X \rightarrow Y$ 满足存在同伦 $h: p \simeq q$, 那么 $p_* = q_*$ 。

尽管同伦是不保持基点的, 但是同伦映射定义出了基点像之间的一条道路。具体来说有如下结果:

命题 1.0.5. 对于点 $x \in X$, 记号同上。定义 $a(t) = h(x, t)$, 这是一条从 $p(x) \rightarrow q(x)$ 的路径。那么如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(X, x) & \\
 p_* \swarrow & & \searrow q_* \\
 \pi_1(Y, p(x)) & \xrightarrow{\gamma[a]} & \pi_1(Y, q(x))
 \end{array}$$

证明. 对于任何 x 为基点的圈 f , 需要说明 $q \circ f$ 和 $a \cdot (p \circ f) \cdot a^{-1}$ 等价。这等价于说明 $c_{p(x)}$ 和 $a^{-1} \cdot (q \circ f)^{-1} \cdot a \cdot (p \circ f)$ 。

定义 $j(s, t) = h(f(s), t): I \times I \rightarrow Y$, 那么:

$$j(s, 0) = (p \circ f)(s); j(s, 1) = (q \circ f)(s); j(0, t) = j(1, t) = a(t)$$

因此这定义出一个同伦 $k(s, t) = j(r_t(s))$, 其中 $r_t(s)$ 为正方形 I^2 中的路径: $(0, 0) \rightarrow (0, t) \rightarrow (t, t) \rightarrow (t, 0) \rightarrow (0, 0)$ 。容易验证这是一个 $a^{-1} \cdot (q \circ f)^{-1} \cdot a \cdot (p \circ f)$ 到 $c_{p(x)}$ 的道路同伦, 因此得证。

□

1.0.4 $\pi_1(\mathbb{R}), \pi_1(S^1)$

引理 1.0.6. $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0$

证明. 对于任何一个圈 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 定义同伦 $h(s, t) = (1-t)f(s)$, 那么这是 f 到 c_0 的道路同伦。□

定理 1.0.7. $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$

证明. 一旦承认 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 满足覆盖同伦性质 (CHP)/同伦提升性质 (HLP), 以及满足提升唯一性, 那么这个命题就是显然的了, 为此将此部分内容移至后文相关段落内。□

1.0.5 应用

Brouwer 不动点定理

对于圆盘 D^2 和其边界 S^1 , 有自然的嵌入映射 $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ 。

命题 1.0.8. 不存在连续映射 $r: D^2 \rightarrow S^1$, 使得: $r \circ i = \text{id}_{S^1}$ 。

证明. 如果存在, 考虑诱导的基本群同态:

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, 1) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, 1)$$

两个映射的复合是 id , 但是这相当于要求 $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ 的复合是恒等映射: 这是不可能的。□

定理 1.0.9 (Brouwer 不动点定理). 任何连续映射 $f: D^2 \rightarrow D^2$ 都有不动点。

证明. 若否, $\forall x, f(x) \neq x$. 那么定义 $r(x) \in S^1$ 为以 $f(x)$ 为起点, 经过 x 点的射线 (挖去 $f(x)$ 点) 与边界 S^1 的交。

当然在 $x \in S^1$ 时 $r(x) = x$, 并且通过直接写出 $r(x)$ 的坐标形式知它是连续的, 那么由上一命题推知矛盾。□

代数基本定理

设 $\iota \in \pi_1(S^1, 1)$ 是生成元 (逆时针旋转 1 圈), 对于每个 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 定义映射度 $\deg f$ 如下:

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow{\gamma[a]} \pi_1(S^1, 1)$$

最后 a 是 $f(1) \rightarrow 1$ 的路径。 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ 的交换性保证了这个映射与 a 的选择无关。

考虑 ι 在这个复合映射下的像, 定义为 $\deg(f)\iota$ 。自然 $\deg f$ 是同伦不变量 (并且是完全分类出所有道路同伦类的量)

定理 1.0.10 (代数基本定理). 设 $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathbb{C}[x], n > 0$, 那么一定存在 $x \in \mathbb{C}$ 使得 $f(x) = 0$ 。进一步因式分解说明它存在 n 个根 (记重数)

证明. 假定 $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) \neq 0$, 那么:

定义 $\hat{f}: S^1 \rightarrow S^1: x \mapsto f(x)/|f(x)|$.

存在一个常值映射 $\mapsto f(0)/|f(0)|$ 到 \hat{f} 的同伦: $h(x, t) = f(xt)/|f(xt)|$. 因此 $\deg(\hat{f}) = 0$.

另一方面, 存在一个 $f_n = x^n$ 到 \hat{f} 的同伦: $j(x, t) = k(x, t)/|k(x, t)|$. 其中:

$$k(x, t) = t^n f(x/t) = x^n + t(c_1 x^{n-1} + t c_2 x^{n-2} + \cdots + t^{n-1} c_n)$$

因此 $\deg(\hat{f}) = n$, 矛盾. \square

1.0.6 问题

练习 1.1. $f: S^1 \rightarrow S^1$ 满足 $\deg f \neq 1$, 则一定有一个不动点。

证明. 假定 $\forall z \in S^1, f(z) \neq z$, 考虑映射 $g: z \mapsto f(z)/z$, 因此 $g(z) \neq 1$. 于是 $g: S^1 \rightarrow S^1 - \{1\}$.

这相当于 $S^1 - \{1\}$ 上的一个起终点为 $g(1)$ 的圈。但是 $S^1 - \{1\} \cong [0, 1]$, 而后者的基本群是 0. 因此存在保持基点的同伦 $g \rightarrow c_{g(1)}, I \times I \rightarrow S^1$, 进而变为同伦 $h: S^1 \times I \rightarrow S^1$.

因此我们有了 $f(z)$ 到 $z \cdot g(1)$ 的同伦: $k(z, t) = z \cdot h(z, t)$. 于是这就说明 $\deg f = \deg(z \cdot g(1)) = 1$, 矛盾. \square

练习 1.2. 给定拓扑群 G , 取基点为单位元 e . 对于两条 e 上的圈 $\alpha, \beta: I \rightarrow G$, 定义它们的逐点乘积为: $(\alpha\beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$.

证明: $\alpha\beta$ 与 $\beta \cdot \alpha$ 是道路同伦的。由此推出 $\pi_1(G, e)$ 总是 *Abel* 的。

证明. 对于两条道路 $\alpha\beta, \beta \cdot \alpha$, 定义道路同伦如下:

$$h(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s - st)\beta(st) & s \in [0, 1/2] \\ \alpha(1 - (1 - s)t)\beta((2s - 1) - (s - 1)t) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

它是连续的, 并且保持基点不动, 且为 $\beta \cdot \alpha$ 到 $\alpha\beta$ 的同伦。

现在欲说明 $\pi_1(G, e)$ 是 *Abel* 的, 只需说明路径 $\alpha\beta$ 和 $\beta\alpha$ 等价, 定义道路同伦如下:

$$k(s, t) = [\beta(st)][\alpha(s)\beta(s)][\beta(st)]^{-1}$$

这是满足要求的从 $\alpha\beta$ 到 $\beta\alpha$ 的道路同伦, 因此这就说明了 $\pi_1(G, e)$ 是 *Abel* 的. \square

注记. 可以考虑 Eckmann-Hilton 论证。

命题 1.0.11 (Eckmann-Hilton). 对于集合 G 上的两种运算 $\cdot, *: G \times G \rightarrow G$, 若各自有么元 $1, 1_*$, 且满足:

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d)$$

则 $\cdot = *$ 且它们交换、结合。

证明. 取 $a = d = 1, b = c = 1_*$ 知 $1 = 1_*$, 记为 1; 取 $b = c = 1$ 知 $\cdot = *$; 取 $a = d = 1$ 知交换; 取 $b = 1$ 知结合. \square

因此在本题中基本群 $\pi_1(G, 1)$ 上有两种运算: $*$ 为基本群乘法, \cdot 为逐点乘积: 简单验证逐点乘积与基本群中等价类代表元选取无关, 并且当然满足了论证所需条件: 那么由 Eckmann-Hilton 论证即得交换性。

第二章 范畴论语言与 van Kampen 定理

2.0.1 hTop 和同伦等价

对于带基点的拓扑空间范畴 \mathbf{Top}_* , 基本群事实上定义出了函子 $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ 。进一步考虑带基点的拓扑空间同伦范畴 \mathbf{hTop}_* : 态射变为保持基点的同伦等价类; π_1 是同伦不变的这一事实可以由 π_1 可以分解出一个函子 $\mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ 表出。

现在考虑一般的拓扑空间范畴 \mathbf{Top} , 称其上的同伦等价 \mathbf{hTop} 的同构。即: $f : X \rightarrow Y$ 是同伦等价, 如果存在 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f \simeq \text{id}, f \circ g \simeq \text{id}$ 。类似地, 在 \mathbf{Top}_* 中有基点同伦等价。

命题 2.0.1. 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是同伦等价, 那么 $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ 是一个同构。

证明. 设 $g : Y \rightarrow X$ 是 f 在同伦意义下的逆, 那么:

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x))$$

$$\pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, g(y)) \rightarrow \pi_1(Y, (f \circ g)(y))$$

都是由 $g \circ f \simeq \text{id}, f \circ g \simeq \text{id}$ 决定的同构。

因此在上述图表中, 左侧态射都是单态射, 右侧的都是满态射。取 $y = f(x)$ (对应地 $x = g(y)$) 则说明左侧的两个态射都是既单又满, 从而都是同构。□

定义 2.0.2. 称一个空间 X 是可缩的, 如果它和一个单点同伦等价。

推论 2.0.3. 可缩空间的基本群是 0。

引理 2.0.4. 以下等价:

1. X 可缩; 2. id_X 零伦; 3. 任何连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 都是零伦的; 4. 任何连续映射 $f : Y \rightarrow X$ 都是零伦的。

证明.

1 \implies 2. 是简单的: 设 $c : x \rightarrow *$ 有同伦逆 $i : * \rightarrow x$, 那么 $\text{id}_X \simeq i \circ c$, 而后者是常值映射。

2 \implies 3.

$$\begin{aligned} f : X \rightarrow Y &= X \xrightarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{f} Y \\ &\simeq X \xrightarrow{\text{const}} X \rightarrow Y \simeq X \xrightarrow{\text{const}} Y \end{aligned}$$

3 \implies 2. 取 $f : X \rightarrow Y$ 是恒等映射。

4. 同理。□

2.0.2 基本群胚

定义 2.0.5. 定义基本群胚 $\Pi(X)$ ，其对象为 X 中的点，态射为 $x \rightarrow y$ 的道路同伦类。因此 x 的自同态正是基本群 $\pi_1(X, x)$ 。

因此事实上有基本群胚是一个函子 $\Pi: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Groupoid}$

定义 2.0.6. 称 C' 为 C 的骨架 (skelton)，如果前者是后者的全子范畴，并且对于 C 中的每个对象都存在唯一一个 C' 中的对象与之同构。（即在每个同构等价类中选出了一个对象构成的全子范畴）

注记. 承认足够强的选择公理 (小范畴:AC/任意范畴:AGC)，则任意 (小) 范畴都存在骨架。

命题 2.0.7. 对于骨架 skC ，嵌入函子 $J: skC \rightarrow C$ 是范畴等价。

证明. 取逆函子 $F: C \rightarrow skC$ 如下：

$F(A)$ 是唯一的骨架中与 A 同构的对象，并且指定一个同构 $\alpha_A: A \rightarrow F(A)$ ，特别地如果 $A \in skC$ ，指定 $\alpha_A = \text{id}_A$ 。定义 $F(f: A \rightarrow B) = \alpha_B \circ f \circ \alpha_A^{-1}$ 。

因此 $FJ = \text{id}$ ， $JF \cong \text{id}$ ，其中自然同构由 $(\alpha_A)_{A \in \text{Ob}(C)}$ 给出。 \square

定义 2.0.8. 称范畴 C 是连通的，如果对于任何两个对象，都存在一个态射序列连接它们：注意这些态射不需要同向。

推论 2.0.9. 群胚是连通的 \iff 所有对象都是同构的，因此任何单点的全子范畴都是骨架。这实际上说明了对于道路连通空间 X ，其基本群胚和任意一点的基本群之间是等价的，即：

命题 2.0.10. 对于道路连通空间 X ，任何 $x \in X$ ，嵌入 $\pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X)$ 都是范畴等价。

2.0.3 van Kampen 定理

定理 2.0.11 (van Kampen). 设 $\mathcal{O} = \{U\}$ 是 X 的一组开覆盖，其中每个 U 都是道路连通的开集，并且满足任何有限个 \mathcal{O} 中元素的交仍然在 \mathcal{O} 中。（即道路连通拓扑基）

现在将 \mathcal{O} 视为开集范畴：其中态射是嵌入。那么有函子

$$\Pi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{Groupoid}$$

则：

$$\Pi(X) \cong \varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U)$$

证明. 只需验证泛性质：如果对于一个群胚 \mathcal{G} ，以及一族 $(\Pi(U))_{U \in \mathcal{O}}$ 的满足交换性的态射 η_U ，我们希望构建出一个 $\Pi(X)$ 到 \mathcal{G} 的态射 $\tilde{\eta}$ 。

下面开始给出态射 $\Pi(X) \rightarrow \mathcal{G}$ （即群胚的函子）。首先对于 $x \in \text{Ob}(\Pi(X))$ ，即对于 X 中一点 x ，很明显定义 $\tilde{\eta}(x) = \eta_U(x)$ 是唯一选择：这个定义也与 U 无关，因为对于 U_α, U_β ，考虑 $U_\alpha \cap U_\beta$ 即可。

下面定义道路的像。如果 $f: x \rightarrow y$ 全在 U 中，那么 $\tilde{\eta}[f]$ 只能是 $\eta_U([f])$ ，基于上文同样的原因，这和 U 的选取无关。

由于 I 是紧的, 于是道路是紧的, 因此它可以拆解为有限条道路 f_i 的复合, 并且每个 f_i 都被某个 U_i 完全包含。那么此时定义 $\tilde{\eta}[f]$ 为 $\eta_{U_i}([f_i])$ 的复合, 基于同样的原因, 这也和 U_i 的选取 (以及道路的分解) 无关。

因此我们定义出了唯一的 $\tilde{\eta}$, 接下来还需要说明一些良定义性。

如果 f 和 g 是道路同伦的, 设 $h: f \simeq g$ 是道路同伦。我们同样考虑 $I \times I$ 这个正方形, 由紧性可以将它分割成若干小正方形, 每个小正方形在 h 下的像都被某个 U 包含。进一步继续加细这个正方形分割, 使得 $I \times I$ 的分割诱导出的 $I \times \{0\}$ 与 $I \times \{1\}$ 上的分割满足前文定义道路的像时分割的条件。由于在每个开集内 $[f] = [g]$, 利用上述分割即诱导出了 $\tilde{\eta}[f] = \tilde{\eta}[g]$ 。这就说明了良定义性, 从而完成了证明。 \square

接下来回到基本群版本的 van Kampen 定理:

定理 2.0.12 (van Kampen, 基本群). 设 X 道路连通, 选定基点 $x \in X$ 。设 $\mathcal{O} = \{U\}$ 是 X 的一组开覆盖, 其中每个 U 都是道路连通的开集, 并且满足任何有限个 \mathcal{O} 中元素的交仍然在 \mathcal{O} 中, 并且对于每个 $U \in \mathcal{O}$ 都有 $x \in U$ (即道路连通拓扑邻域基)

将 \mathcal{O} 视为开集范畴: 其中态射是嵌入。那么有函子

$$\pi_1(-, x): \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{Grp}$$

则:

$$\pi_1(X, x) \cong \varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x)$$

注记. 进一步, 这里的开覆盖要求相当于是考虑 \mathcal{O} 由道路连通开集 $\{U_\alpha\}$ 生成的有限交族。如果 $U_\alpha \cap U_\beta$ 两两交是道路连通的, 那么 $\varinjlim \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ 是满射; 如果 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 三三交是道路连通的 (这涵盖了两两交的情况), 那么 $\varinjlim \pi_1(U, x) \cong \pi_1(X, x)$ 。

分两段证明。

引理 2.0.13. 当覆盖 \mathcal{O} 是有限的时候 van Kampen 定理成立。

证明. 由于 X 道路连通, $J: \pi_1(X, x) \rightarrow \Pi_1(X)$ 是范畴等价。回忆命题 2.0.7 的证明, 其逆 $F: \Pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$ 是由 $(\alpha: x \rightarrow y)_{y \in X}$ 决定的。同样地取 $\alpha: x \rightarrow x$ 为 $c_x = \text{id}_x$, 这样有 $FJ = \text{id}$; 对于其余的 $\alpha: x \rightarrow y$, 由于道路连通和 \mathcal{O} 有限, 总可以假定对于任何 $y \in U$, 选定的道路 $\alpha: x \rightarrow y$ 都完全被 U 包含。(回忆 \mathcal{O} 满足有限交封闭)

因此这样我们就得到了一族 $F_U: \Pi(U) \rightarrow \pi_1(U, x)$ 。(它们是 $J_U: \pi_1(U, x) \rightarrow \Pi(U)$ 的范畴等价意义下的逆)

下面考虑泛性质, 对于 $\eta_U: \pi_1(U, x) \rightarrow G$, 有复合:

$$\Pi(U) \xrightarrow{F_U} \pi_1(U, x) \xrightarrow{\eta_U} G$$

注意到 F_U 的构造保证了有交换图

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U) & \xrightarrow{F_U} & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(V) & \xrightarrow{F_V} & \pi_1(V, x) \end{array}$$



因此由基本群胚的 van Kampen 定理, 存在 $\xi : \Pi(X) \rightarrow G$, 那么 $\tilde{\eta} = \xi \circ J$ 是满足要求的态射。(只需注意 $F_U \circ J_U = \text{id}$ 即可)

唯一性是由 ξ 的唯一性给出的: 如果 $\tilde{\eta} : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ 满足交换性条件, 那么 $\tilde{\eta} \circ F$ 满足群胚余极限图表的交换性条件 ($\eta_U \circ F_U$), 因此 $\xi = \tilde{\eta} \circ F$ 唯一确定, 从而 $\tilde{\eta} = \xi \circ J$. \square

van Kampen 定理的证明. 取 \mathcal{F} 为 \mathcal{O} 的子集族, 满足对于任何 $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$, \mathcal{T} 是有限个开覆盖并且在有限交下封闭. 对于任何 $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$, $U_{\mathcal{T}}$ 为其中开集的交, 那么 \mathcal{T} w.r.t. $U_{\mathcal{T}}$ 是满足引理使用条件的。

因此 $\varinjlim_{U \in \mathcal{F}} \pi_1(U, x) \cong \pi_1(U_{\mathcal{T}}, x)$ 。

将 \mathcal{F} 视为范畴, 其中态射 $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T} \iff U_{\mathcal{S}} \subseteq U_{\mathcal{T}}$ 。

Claim 1.

$$\varinjlim_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \pi_1(U_{\mathcal{T}}, x) \cong \pi_1(X, x)$$

如同基本群胚版本的 van Kampen 定理证明中指出的那样, 任何 $I \rightarrow X$ 和道路同伦 $I \times I \rightarrow X$, 都可以加细使得每块落入某个 U 中。因此将这有限个 U 生成出的族 \mathcal{F} 中的对应子集族 \mathcal{T} 取出, 就有两条道路和道路同伦完全落在某个 $U_{\mathcal{T}}$ 中, 因此直接验证泛性质 (仿照基本群胚) 即可说明这一论断。

Claim 2.

$$\varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x) \cong \varinjlim_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \pi_1(U_{\mathcal{T}}, x)$$

只需说明

$$\varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x) \cong \varinjlim_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \varinjlim_{U \in \mathcal{T}} \pi_1(U, x)$$

直接比较泛性质知第二项与如下余极限同构:

$$\varinjlim_{(U, \mathcal{T}) \in (\mathcal{O}, \mathcal{F})} \pi_1(U, x)$$

其中指标范畴 $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ 定义为 (U, \mathcal{T}) s.t. $U \in \mathcal{T}$, 并且态射 $(U, \mathcal{S}) \rightarrow (V, \mathcal{T}) \iff U \subseteq V$ and $U_{\mathcal{S}} \subseteq U_{\mathcal{T}}$

观察两个余极限 $\varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x)$ 和 $\varinjlim_{(U, \mathcal{T}) \in (\mathcal{O}, \mathcal{F})} \pi_1(U, x)$ 。它们的差别仅在于 $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(V, x)$ 出现的次数, 因此自然余极限同构。严格叙述如下:

考虑指标范畴之间的函子 $\mathcal{O} \rightarrow (\mathcal{O}, \mathcal{F}) : U \mapsto (U, \{U\})$ 。

因此这诱导出了余极限之间的态射:

$$\varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x) \rightarrow \varinjlim_{(U, \mathcal{T}) \in (\mathcal{O}, \mathcal{F})} \pi_1(U, x)$$

同样 $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ 到 \mathcal{O} 的投影 (第一个分量) 诱导出了余极限之间的态射:

$$\varinjlim_{(U, \mathcal{T}) \in (\mathcal{O}, \mathcal{F})} \pi_1(U, x) \rightarrow \varinjlim_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x)$$

两者是互逆的, 因为它们诱导在各个指标上是互逆的。

因此这就说明了同构。 \square

2.0.4 例子

命题 2.0.14. 设 X 是任意带基点的道路连通空间的 $(X_i)_{i \in I}$ 的一点并 (wedge sum), 并且对于每个 X_i , 存在一个基点的邻域 V_i 使得它是可缩的。那么:

$$\pi_1(X) = \ast_{i \in I} \pi_1(X_i)$$

这里因为基点已经指定故不写出基点, \ast 指任意指标自由积。

证明. 取 $U_i = X_i \cup_{j \neq i} V_j$, 取 \mathcal{O} 为全体 U_i 以及它们的有限交, 由于任何两个 (或更多) U_i 的交都是可缩的, 因此它们对于余极限没有影响。然而:

$$\pi_1(U_i) = \pi_1(X_i)$$

因为 U_i 于 X_i 间有同伦等价: $f: U_i \mapsto X_i$ 将所有 V_j 映到基点, 其余不变; $g: X_i \mapsto U_i$ 是嵌入。

利用可缩的定义, 容易验证这的确是一组同伦等价, 从而由基本群的 van Kampen 定理即说明结论。□

推论 2.0.15. 若干 S^1 的一点并的基本群是自由群, 每个 S^1 都对应着一个生成元。

引理 2.0.16. 对于带基点的拓扑空间 X, Y , 有: $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ 。

证明. 考虑直积的泛性质。对于任何 $\eta_X: G \rightarrow \pi_1(X), \eta_Y: G \rightarrow \pi_1(Y)$ 。

考虑 $\alpha \in G$, 设 $[f] = \eta_X(\alpha), [g] = \eta_Y(\alpha)$, 这唯一决定了 (在投影意义下) $[f \times g]$ 。容易验证这是良定义的, 即与 f, g 的选择无关, 因为很明显两个分量的同伦映射可以提升至乘积空间。指定 $\tilde{\eta}(\alpha) = [f \times g]$, 由已经叙述的唯一性得到结果。□

由闭曲面分类定理, 想要计算闭曲面的基本群, 只需要考虑 $S^1, T^2 = S^1 \times S^1, \mathbb{R}P^2$ 。前两个已经计算得到了, 接下来的章节将会指出 $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, 因此闭曲面的基本群都是能够计算的。

定义 2.0.17. 称拓扑空间 X 是单连通的, 如果 X 是道路联通的, 且满足 $\pi_1(X) = 0$ 。

命题 2.0.18. 设 $X = U \cup V$, $U, V, U \cap V$ 是 X 的基点的道路联通邻域, 并且 V 是单连通的。那么 $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ 是一个满态射, 并且其核是 $\pi_1(U)$ 中包含 $\pi_1(U \cap V)$ 的最小的正规子群。

证明. 由 van Kampen 定理, 这相当于证明满态射的推出是满态射: 这是一个纯范畴论的证明:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow e & & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & D \\
 & \searrow u & \nearrow v' \\
 & & E
 \end{array}$$

(Note: In the original image, there are additional dashed arrows labeled u' and v' connecting D to E .)

$u'f = v'f \implies ue = ve \implies u = v \implies u' = v'$, 因此满态射的推出仍然是满的。

同样由泛性质, 考虑 $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(U)/N$, 其中 $N = \ker(\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X))$, 自然由推出图表性质知 $\pi_1(U \cap V) \subseteq N$, 并且满足是包含它的最小正规子群。□

2.0.5 问题

练习 2.1. 计算两洞环面 M 的基本群。

证明. 将 M 分为两个 $T^2 - D^2$, 它们的交是一个柱形带 $S^1 \times I$ 。

一些熟悉的构造指出 $T^2 - D^2$ 和某个熟悉的曲面同胚, 而后者有显然的强形变收缩核 $S^1 \vee S^1$, 因此其基本群为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 。同样柱形带有强形变收缩核 S^1 , 于是基本群为 \mathbb{Z} 。

因此有推出图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1 \mapsto aba^{-1}b^{-1}} & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ 1 \mapsto aba^{-1}b^{-1} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(M) \end{array}$$

于是由余极限构造知:

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

□

练习 2.2. 一个 *Klein* 瓶 K 是指 $S^1 \times I$ 的商空间 $(z, 0) \sim (z^{-1}, 1)$, 计算其基本群。

证明. 将 K 分为 $K - D^2$, D^2 和它们相交的一个环形带 $S^1 \times I$ 。 $K - D^2$ 经过一些观察发现收缩到 $S^1 \vee S^1$, 于是有图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1 \mapsto aba^{-1}b} & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(K) \end{array}$$

$$\text{因此 } \pi_1(K) = \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$$

□

练习 2.3. 设 $X = \{(p, q) \mid p \neq -q\} \subset S^n \times S^n$, 定义 $f: S^n \rightarrow X: p \mapsto (p, p)$ 。证明 f 是同伦等价。

证明. 取 $g: X \rightarrow S^n: (p, q) \mapsto p$, 显然 $gf = \text{id}$, $fg: (p, q) \mapsto (p, p)$ 。

下面给出 fg 到 id 的同伦: 首先对于任何 $q \neq -p$, 存在唯一的一条大圆劣弧连接 p 和 q , 记为 $\alpha(p, q, t): p \rightarrow q$, 那么定义同伦为: $h((p, q), t) = (p, \alpha(p, q, t))$

这的确是满足要求的同伦。

□

练习 2.4. 如果范畴 C 满足其有任意积和等化子, 那么它有任意极限 (即完备)。

定理 2.0.19. 对于任何范畴 C, J , 如果对于任何一对箭头 C 都有等化子, 并且对于任何 $\text{obj}(J)$ 和 $\text{arr}(J)$ 指示的对象都有积时, 那么对于任何函子 $F: J \rightarrow C$, 极限存在。



证明. 由假设: $\prod_{i \in \text{obj}(J)} F_i$ 存在, $\prod_{u \in \text{arr}(J)} F_{\text{codu}}$ 存在。由积的泛性质, 存在唯一的 f 使得上半方形交换, 以及唯一的 g 使得下半方形交换。

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_{\text{codu}} & \xlongequal{\quad} & F_{\text{codu}} & \\
 & \uparrow p_u & & \uparrow p_{\text{codu}} & \\
 \prod_{u \in \text{arr}(J)} F_{\text{codu}} & \xleftarrow[f]{g} & \prod_{i \in \text{obj}(J)} F_i & \xleftarrow[e]{d} & F_i \\
 & \downarrow p_u & & \downarrow p_{\text{domu}} & \\
 & F_{\text{codu}} & \xleftarrow[F_u]{} & F_{\text{domu}} & \\
 & & & & \nearrow \mu_i
 \end{array}$$

取 f, g 的等化子 d , 再一次由积的泛性质给出 e_i 。直接验证知 (d, μ_i) 正是 F 的极限。 \square

直接应用这个定理即得到结果。

第三章 覆叠空间

3.0.1 定义

定义 3.0.1. 称拓扑空间是局部道路连通的, 如果对于每个 $x \in X$ 和邻域 $U \ni x$, 存在邻域 $x \in V \subseteq U$ 使得 V 中每一点 y , 都存在 U 中道路连接 x 和 y 。

这和 X 有一组道路连通拓扑基是等价的: 如果 X 是局部道路连通的, $U \ni x$ 是开邻域, 定义 $V = \{y | y \text{ can be connected to } x \text{ by a path in } U\}$ 。这是一个道路连通的集合, 并且更进一步是开的: 对每个 y 应用局部道路连通的定义即可看出。

因此这就说明了有道路连通拓扑基。

命题 3.0.2. 如果 X 是局部道路连通且连通的, 那么它是道路连通的。

证明. 若否, 设 $a, b \in X$ 之间没有道路连通。取 A_1 为 a 所处的道路连通分支, $A_2 = X - A_1$: 两者都不是空集。任取 $x \in A_1$, 存在 $U(x) \subseteq X$, 由局部道路连通等价定义, 存在 V 使得 $x \in V \subseteq U(x)$ 是道路连通的 (存在道路连通拓扑基), 因此 $V \in A_1$, 从而说明了 A_1 是开的。

任取 $y \in A_2$, 同样取道路连通邻域 V , 如果 $V \cap A_1 \neq \emptyset$, 设 $z \in V \cap A_1$, 就有道路: $x \rightarrow z \rightarrow y$, 与 y 定义矛盾。因此 $V \subseteq A_2$ 。

从而 A_1, A_2 都是开的, 与连通性矛盾。□

在本章, 假定所有的空间都是连通且局部道路连通的。

定义 3.0.3 (纤维丛, 覆叠). 称连续映射 $p: E \rightarrow B$ 是一个纤维丛, 如果它是满的, 并且对于每个 $b \in B$, 存在一个开邻域 V 使得在其上 p 有局部平凡化 $V \times F \rightarrow b$ 。进一步, 如果 F 是离散的, 那么称 p 为一个覆叠。

称满足可局部平凡化的道路连通开集为 B 的一个基本邻域, 称 E 为全空间, B 为底空间, $F_b = p^{-1}(b)$ 为 b 点的纤维。

例子.

1. 同胚是覆叠。
2. 覆叠的乘积是覆叠。
3. $\mathbb{R} \rightarrow S^1: z \mapsto z \bmod 2\pi$ 是覆叠。
4. $f_n: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^n$ 是覆叠。
5. $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 是覆叠。
6. 覆叠的拉回是覆叠。

再给出一个构造覆叠的方法:

命题 3.0.4. X 是连通, 局部道路连通的 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow X$ 是同胚映射, $f^n = \text{id}$, 并且 $\forall m \in \{1, \dots, n-1\}$, f^m 没有不动点。

定义等价关系 \sim 为 $x \sim y \iff \exists l.s.t. f^l(x) = y$, 记商空间为 X/f , 那么 $p: X \rightarrow X/f$ 是 n - 覆叠映射。

证明. 由 Hausdorff 性, 只需取充分小 V 使得 $V, f(V), \dots, f^{n-1}(V)$ 两两不交即可。□

当然这个结论可以有自然的推广:

定义 3.0.5. 称群作用 $G \curvearrowright \tilde{X}$ 是覆叠空间作用, 如果 $\forall x \in \tilde{X}, \exists$ 开邻域 U 使得对于任何 $g \neq e$, $gU \cap U = \emptyset$ 。

命题 3.0.6. 对于 Hausdorff 空间, 有限离散群 G 。 $G \curvearrowright \tilde{X}$ 作用是自由的 \iff 它是覆叠空间作用。

命题 3.0.7. 如果 $G \curvearrowright \tilde{X}$ 是覆叠空间作用, 那么 $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ 是覆叠映射。

这两个性质的结合就是上一命题的自然推广。

3.0.2 提升性质

定义 3.0.8 (提升). 设 $p: E \rightarrow B$ 是覆叠, 若 $f: X \rightarrow B, \tilde{f}: X \rightarrow E$ 满足 $p \circ \tilde{f} = f$, 那么称 \tilde{f} 是 f 的提升。

定理 3.0.9 (提升唯一性定理). 若 X 连通, $f: X \rightarrow B, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ 为 f 的提升且存在 $x_0 \in X$ 使得 $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$, 则 $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

证明. 记 $A = \{x \in X | \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$, 那么 A 非空。由于 X 连通, 只需 A 为开闭集。

对于 $x_1 \in A, e = \tilde{f}_1(x_1) = \tilde{f}_2(x_1)$, 由于 p 为局部同胚, 取这样的 e 的开邻域 V 是 $p|_V: V \rightarrow f(V)$ 是同胚。令 $W = \tilde{f}_1^{-1}(V) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V)$, 那么 W 是 x_1 的开邻域, 并且 $\forall x \in W, \tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x) \in V$ 。然而由同胚, $p(\tilde{f}_1(x)) = p(\tilde{f}_2(x)) \Rightarrow \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) \Rightarrow W \subset A$, 因此 x_1 是内点, 从而 A 开。

对于 $x_1 \in A^c$, 同样可以取 e_1, e_2 为 \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 的像, 取 $p(e_1) = p(e_2)$ 的局部平凡化邻域, 提升至 e_1, e_2 , 然后将它们分别用 \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 拉回, 取交得到 W 。局部同胚再次说明了 $W \subset A^c$ 。因此这就完成了证明。□

定理 3.0.10 (CHP/HLP: 覆叠同伦性质/同伦提升性质). 设 $\tilde{f}: X \rightarrow E$ 是 $f: X \rightarrow B$ 的提升, $F: X \times I \rightarrow B$, 且 $F(x, 0) = f(x)$ 。那么有 F 的提升: $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$, 使得 $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x), \forall x \in X$ 。

证明. 对于每一点 $x \in X$, 只需说明 \tilde{F}_x 在某个 x 的邻域 N_x 上存在: 粘接过程如下, 如果 $N_x \cap N_y = N_0 \neq \emptyset$, 那么考虑 $t = 0$ 时知 $\tilde{F}_x|_{N_0}, \tilde{F}_y|_{N_0}$ 在 $t = 0$ 处是相同的 (均为 $\tilde{f}|_{N_0}$) 于是由唯一提升即知可以粘接。

固定 x , 下面说明 \tilde{F}_x 的存在性。由于 I 是紧的, 可以找到充分小 N_x 和 I 的有限分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, 使得每个 $F(N_x \times [t_i, t_{i+1}])$ 都落在某个可平凡化开集内 (进而是基本邻域)。



下面对 k 归纳, 构造 $N_x \times [t_0, t_k]$ 上的提升 \tilde{F}_x 。

$k = 1$ 时, 直接将 F 依局部平凡化提升: 考虑 $p^{-1}(U_1)$ 中的某个连通分支即可。

假定 k 时已构造, 考虑 $N_x \times [t_k, t_{k+1}]$ 所处的平凡化, 同样依局部平凡化提升即可。 \square

作为重要推论, 我们可以利用覆叠来研究基本群的性质。

定理 3.0.11 (UPL: 道路唯一提升). 给定覆叠 $p: E \rightarrow B$, $b \in B$, $e, e' \in F_b$ 。

1. 道路 $f: I \rightarrow B$, 满足 $f(0) = b$ 能够被唯一地提升为道路 $g: I \rightarrow E$, 只要给定 $g(0) = e$ 。
2. 道路同伦 $f \simeq f': I \rightarrow B$ 能够被唯一地提为道路同伦 $g \simeq g': I \rightarrow E$, 给定 $g(0) = g'(0) = e$, 由纤维的离散性就有 $g(1) = g'(1)$ 。
3. $p_*: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, b)$ 是单同态。
4. 在 $\pi_1(B, b)$ 中, $p_*(\pi_1(E, e))$ 和 $p_*(\pi_1(E, e'))$ 是相互共轭的子群。
5. 当 e' 取遍 F_b 后, $p_*(\pi_1(E, e'))$ 取遍 $p_*(\pi_1(E, e))$ 所处的子群共轭类。

证明. 1. 在 CHP/HLP 中取 X 为单点, 即得到道路提升。唯一性由提升唯一保证。

2. 这是 CHP/HLP 的直接推论, 注意纤维离散性同样保证了 $g(0, t) \equiv g(0) = g'(0)$; 同样地, 唯一性由提升唯一性保证。

3. 这是 2 的直接推论。

4, 5. $p_*(\pi_1(E, e))$ 和 $p_*(\pi_1(E, e'))$ 是相互共轭的子群, 是因为只需要考虑 $e \rightarrow e'$ 的道路在 p_* 下到 $\pi_1(B, b)$ 中的像, 它就是共轭作用元。

反过来对于任何一个 $\pi_1(B, b)$ 中的元素作为共轭作用元, 其在同伦意义下能够唯一地提升为某个 $e \rightarrow e''$ 的道路, 因此它是 $p_*(\pi_1(E, e))$ 和 $p_*(\pi_1(E, e''))$ 的共轭作用元。 \square

定义 3.0.12 (正规覆叠, 万有覆叠)。

称 $p: E \rightarrow B$ 是正规覆叠, 如果 $p_*(\pi_1(E, e)) \rightarrow \pi_1(B, b)$ 是正规子群。首先这个定义与 e 的选取无关, 因为正规子群的共轭是自身; 其次与 b 选取无关, 因为连通性保证了它们是相互同构的。

称 $p: E \rightarrow B$ 是万有覆叠, 如果 E 是单连通的, 即 $\pi(E, e) = 0$ 。

3.0.3 群胚的覆叠

正如之前指出的引入基本群胚的重要性, 覆叠理论也可以使用群胚语言重述。这使得覆叠空间的研究事实上脱离了拓扑而变成了一个纯代数问题。(另外我们能够逐渐看到覆叠理论和 Galois 理论之间令人惊异的相似性)

定义 3.0.13 (群胚的覆叠)。

1. 设 C 是一个范畴, $x \in \text{obj}(C)$, 可以定义仰范畴 $x \backslash C$ 。
2. 现在令 C 是一个小群胚, 定义 x 处的星: $St(x) = \text{obj}(x \backslash C)$, 记 $\pi(C, x) = \text{Hom}(x, x)$ 。
3. 设 E, B 是小且连通的群胚, 一个覆叠 $p: E \rightarrow B$ 是一个对象满函子, 并且对每个 e 有双射 $p: St(e) \rightarrow St(p(e))$ 。对 $b \in \text{obj}(B)$, 记 F_b 为 b 在 $\text{obj}(E)$ 中的原像, 于是 $p^{-1}(St(b))$ 是 $St(e)$ 的无交并 (e 遍历 F_b)

因此道路唯一提升定理相当于如下表述:

命题 3.0.14. 对于覆叠空间 $p: E \rightarrow B$, 诱导的基本群胚之间函子 $\Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$ 是群胚的覆叠。

作为推论得到:

命题 3.0.15. 对于群胚的覆叠 $p: E \rightarrow B$, 设 $b \in \text{obj}(B), e, e' \in F_b$:

1. $p: \pi(E, e) \rightarrow \pi(B, b)$ 是单同态。
2. 在 $\pi(B, b)$ 中, $p(\pi(E, e))$ 和 $p(\pi(E, e'))$ 是相互共轭的子群。
3. 当 e' 取遍 F_b 后, $p(\pi(E, e'))$ 取遍 $p(\pi(E, e))$ 所处的子群共轭类。

证明和覆叠空间的情况是完全一样的, 因此这里就略去了。

定义 3.0.16 (转运函子). 对于群胚的覆叠 $p: E \rightarrow B$, 存在一个转运函子 $T: B \rightarrow \mathbf{Set}$. 定义如下:

$T(b) = F_b$, 对于 $f: b \rightarrow b'$, $T(f): F_b \rightarrow F_{b'}$ 将 e 映到唯一的从 $St(p(e))$ 提升到 $St(e)$ 上的态射的 codomain。

容易验证转运函子是良定义的。

定义 3.0.17. 群胚覆叠的任何纤维 F_b 的势是相同的, 于是对于覆叠空间也是如此。

证明. 对于 $f: b \rightarrow b'$, $T(f), T(f^{-1})$ 是 $F_b, F_{b'}$ 之间互逆的映射。 □

3.0.4 群作用和轨道范畴

回忆群 (左) 作用的几个基本概念。对于左作用 $G \curvearrowright S$, $s \in S$ 的稳定化子群 $G_s = \{g | gs = s\}$ 。称作用是自由的, 如果 $\forall s, G_s = e$ 。

$s \in S$ 生成的轨道为 $\{gs | g \in G\}$, 称作用是传递的, 如果 S 只含一个轨道。

例子. 对于 $H \leq G$, $G \curvearrowright G/H$ (自然地定义) 是一个传递的作用。

如果 G 传递地作用在 S 上, 有 G -集合同构: $S \cong G/H_s$ (对某个固定的 s)。定义如下: $gs \mapsto gG_s$, 这是很容易验证的。

定义 3.0.18 (Weyl 群). 对于 $H \leq G$, 取正规化子 NH , 定义 Weyl 群为 $WH = NH/H$ 。

引理 3.0.19. 如果 G 传递地作用在 S 上, 固定某个 $s \in S$, 取 $H = G_s$, 那么 $WH \cong \text{Aut}_G(S)$ 。(最后一项是 G -集合自同构)

证明. 对于 $n \in NH$, 定义自同构 $\varphi(\bar{n})(gs) = gns$ 。反过来, 对于 S 的 G -集合自同构 φ , 有 $\varphi(s) = ns$ 对某个 $n \in G$ 成立。

对于任何 $h \in H, hns = \varphi(hs) = \varphi(s) = ns$, 因此 $n^{-1}hn \in G_s = H$, 于是 $n \in NH$ 。指定 φ 在 WH 的对应为 \bar{n} , 上述讨论也说明了这个对应与 n 的选取无关。

最后, 很容易直接验证 WH 和 $\text{Aut}_G(S)$ 之间的双射是群同构。 □

我们知道了传递作用的集合的结构, 但是在那里 G_s 的选择并不典范, 因此需要了解变换子群后会发生什么。

引理 3.0.20. 对于 $H, K \leq G$, G -映射 $\alpha: G/H \rightarrow G/K$ 一定具有形式:

$$\alpha(gH) = g\gamma K$$

其中 $\gamma \in G$ 满足 $\forall h \in H, \gamma^{-1}h\gamma \in K$ 。

证明. 设 $\alpha(eH) = \gamma K$, 那么 $\alpha(gH) = g\gamma K$ 。更进一步, $\gamma K = \alpha(eH) = \alpha(hH) = h\alpha(eH) = h\gamma K$ 说明了 $\forall h \in H, \gamma^{-1}h\gamma \in K$ 。

反过来, 一旦这样的条件被满足了, 这的确定义出了一个 G -映射。 \square

定义 3.0.21. 轨道范畴 $\mathcal{O}(G)$ 定义如下: 对象为全体形如 G/H 的 G -集合, 态射为 G -集合之间的 G -映射。

重述前两个引理如下:

引理 3.0.22. $\mathcal{O}(G)$ 和如下范畴同构: 对象为 G 的子群, 态射为 H 与 K 之间的不同 *subconjugacy* 关系, 即不同的 γ 使得 $\gamma^{-1}H\gamma \subseteq K$, 这里将 γ 视作 G/H 的元素。

下面将 G 视作单点群胚, 那么 G 左作用只不过是一个共变函子 $G \rightarrow \mathbf{Set}$ 。对于一个小群胚 B , 自然地可以将函子 $B \rightarrow \mathbf{Set}$ 视作某种“群胚”作用, 当然将函子限制到某个单点 b 上就又回到了群作用。同样地, 称群胚作用是传递的, 如果每个点 b 上的群作用是传递的。如果群胚 B 是连通的, 这等价于存在一个点 b 使得其上群作用是传递的。

这个观点是很有用的, 回忆已经定义过的转运函子: $T: B \rightarrow \mathbf{Set}$, 限制到每个点上就有 $\pi(B, b) \curvearrowright F_b$ 。每一点 $e \in F_b$ 的稳定化子正是 $p(\pi(E, e))$, 并且这一作用是传递的 (考虑 $e \rightarrow e'$ 在 $\pi(B, b)$ 下的像), 因此前文关于这些子群相互共轭也不过是传递作用的稳定化子相互共轭的一种体现。

于是有

命题 3.0.23. 作为 $\pi(B, b)$ -集合, $F_b \cong \pi(B, b)/_I p(\pi(E, e))$ 。

定义 3.0.24. 称群胚覆叠是正规的, 如果 $p(\pi(E, e)) \trianglelefteq \pi(B, b)$ 。称其为万有的, 如果 $p(\pi(E, e)) = \{e\}$, 基于正规覆叠和万有覆叠的定义中同样的原因, 这个定义与 e, b 选取无关。并且覆叠空间是正规/万有的 \iff 对应的群胚覆叠是正规/万有的。

注记. 最后一句中唯一不平凡的是万有群胚覆叠 \implies 万有覆叠: 但是这只要注意到 c_b 的提升也一定是常值道路, 因此就能够说明单连通。

推论 3.0.25. 群胚覆叠是万有的 $\iff \pi(B, b)$ 自由地作用在 F_b 上, 于是 F_b 和 $\pi(B, b)$ 作为 G -集合同构。

3.0.5 群胚覆叠的分类

接下来固定一个小且连通的群胚 B , 将要给出 B 上覆叠的完全分类。在接下来的内容中都会假定出现的所有群胚都是小且连通的。



定理 3.0.26 (Lifting Criteria). 设 $p : E \rightarrow B$ 是群胚的覆叠, X 是一个群胚, 以及一个函子 $f : X \rightarrow B$. 固定基点 $x_0 \in \text{obj}(X)$, $b_0 = f(x_0)$, 固定 $e_0 \in F_{b_0}$.

那么存在提升 $g : X \rightarrow E$ (即满足 $p \circ g = f$) 且 $g(x_0) = e_0$ 当且仅当在 $\pi(B, b_0)$ 中:

$$f(\pi(X, x_0)) \subseteq p(\pi(E, e_0))$$

进一步, 如果满足这一条件, 那么 g 是唯一的。

注记. Lifting criteria 实际上说的是只要 f 不破坏圈, 就一定能够提升。

证明. 如果 g 存在, 那么当然 $\text{Im } f \subseteq \text{Im } p$, 于是就满足 $f(\pi(X, x_0)) \subseteq p(\pi(E, e_0))$ 。

反过来如果条件 $f(\pi(X, x_0)) \subseteq p(\pi(E, e_0))$ 成立, 对于任何 $x \in X$, 和 $\alpha : x_0 \rightarrow x$, 它可以唯一提升到 $\tilde{\alpha} \in St(e_0)$ 满足 $p(\tilde{\alpha}) = f(\alpha)$ 。任何满足要求的 g 都一定满足 $g(\alpha) = \tilde{\alpha}$, 于是这样 $g(x)$ 也只能被唯一确定为 $\tilde{\alpha}$ 的终点, 因此这就说明了 g 的唯一性。

下面说明良定义性: 对于任何 $\alpha' : x_0 \rightarrow x$, 考虑 $\alpha^{-1} \circ \alpha' \in \pi(X, x_0)$ 。此时有:

$$f(\alpha)^{-1} \circ f(\alpha') = f(\alpha^{-1} \circ \alpha) = p(\beta), \exists \beta \in \pi(E, e_0)$$

于是:

$$f(\alpha') = f(\alpha) \circ p(\beta) = p(\tilde{\alpha} \circ \beta)$$

因此 $\tilde{\alpha} \circ \beta$ 是 α' 的唯一的提升, 并且其道路终点和 $\tilde{\alpha}$ 的终点相同, 这就说明了良定义性。 \square

定义 3.0.27 (覆叠的态射, 覆叠范畴). 两个覆叠之间的态射 $g : E \rightarrow E'$ 定义为一个函子, 并且使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

因此可以定义群胚 B 上的全体覆叠构成的范畴 $\text{Cov}(B)$, 特别地记 $\text{Cov}(E, E')$ 为全体 E, E' 间覆叠态射构成的集合。

引理 3.0.28. 对于覆叠态射 $g : E \rightarrow E'$, 这也是一个覆叠。

证明. g 作用在对像上是满的: 直接在交换图上验证。诱导出星的双射, 因为这个双射可以通过过渡到 B 上得到。 \square

定理 3.0.29 (覆叠态射的分类). 设 $p : E \rightarrow B, p' : E' \rightarrow B$ 是两个覆叠, 选定 e, e', b , s.t. $p(e) = p(e') = b$ 。

那么存在覆叠态射 $g : E \rightarrow E'$ s.t. $g(e) = e'$ 当且仅当

$$p(\pi(E, e)) \subseteq p'(\pi(E', e'))$$

并且这一条件满足后 g 是唯一的。

特别地, g 是同构 \iff 上述包含关系变为相等。

因此 E, E' 是同构的 \iff 只要 $p(e) = p(e')$ 就有 $p(\pi(E, e))$ 和 $p(\pi(E', e'))$ 是共轭的。



证明. 由 Lifting criteria 定理 3.0.26 立得. 最后一个共轭关系是考虑 e' 和 $g(e)$ 诱导出来的像是共轭的. \square

推论 3.0.30. 如果 B 存在万有覆叠, 那么它在同构意义下唯一, 并且是其他任何覆叠的覆叠。

上述定理的条件可以转化为纤维相关的表述:

定理 3.0.31. 设 $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$ 是群胚的覆叠, 取 $b \in B, G = \pi(B, b)$. 那么 $g: E \rightarrow E'$ 是覆叠 \iff 它限制到纤维 $F_b \rightarrow F'_b$ 上是 G -集合映射. 并且这个对应建立了 $Cov(E, E')$ 和 $\text{Hom}_G(F_b, F'_b)$ 的双射。

定理 3.0.32. 如果 g 是覆叠, 那么前一定理的条件保证了它限制到纤维上是 G -集合映射。

这个对应关系是单的, 由前一定理的唯一性即可直接说明。

这个对应关系是的, 因为任何一个 G -集合映射 $\alpha: F_b \rightarrow F'_b$, 选择 $e \in F_b$ 以及 $e' = g(e)$, 由稳定化子的包含关系即知覆叠态射的存在性。

定义 3.0.33. $\text{Aut}(E) \subseteq \text{Cov}(E, E)$ 定义为覆叠的自同构群. 注意 $g: E \rightarrow E$ 可以不是一个自同构, 因为 $G/IH \rightarrow G/IH$ 的 G -集合映射不一定是自同构: 考虑上一章节的论述, 一些群作用的讨论知这是可以做到的。

推论 3.0.34. 设 $p: E \rightarrow B$ 是群胚的覆叠, $b \in \text{obj}(B), e \in F_b, G = \pi(B, b), H = p(\pi(E, e))$. 那么 $\text{Aut}(E) \cong \text{Aut}_G(F_b) \cong WH$ 。

特别地, 如果 p 是正规的, 那么 $\text{Aut}(E) \cong G/H$; 如果 p 是万有的, 那么 $\text{Aut}(E) \cong G$ 。

3.0.6 群胚覆叠的构造

上一章节已经成功说明了一个 $\pi(B, b)$ 的子群共轭类至多对应着一个覆叠的同构类, 这一章节将要说明这个关系是满的。

定理 3.0.35. 固定 $b \in \text{obj}(B), G = \pi(B, b)$. 那么存在一个函子:

$$E(-): \mathcal{O}(G) \rightarrow \text{Cov}(B)$$

是范畴等价。

其中 $E(G/H)$ 满足覆叠 $E(G/H) \rightarrow B$ 中 b 的纤维有一个自然的 e 使得 $p(\pi(E(G/H), e)) = H$. 并且对于 G -集合映射 $\alpha: G/IH \rightarrow G/IK$, $E(\alpha)$ 诱导的纤维上的映射和 α 是相同的。

证明. 定义 $E(G/H)$ 如下: 其对象是商集 $\text{St}_B(b)/H$ (这里商去定义如下: 如果 $\alpha, \alpha': b \rightarrow b'$ 满足 $\alpha'^{-1} \circ \alpha \in H$, 则称它们等价. 将 $\text{St}_B(b)$ 依此商去), 并且选取 e 为恒等元所处的等价类。

定义覆叠映射 $E(G/H) \rightarrow B$ 为将等价类映为 $\text{St}_B(b)$ 中任意选取的代表元的终点。(良定义显然)

定义 $E(G/H)$ 中的态射如下:

$$E(G/H)(fH, f'H) = \{f' \circ h \circ f^{-1} | h \in H\} \subseteq B(p(fH), p(f'H))$$

同样这也是良定义的。

容易直接检验知 $p : E(G/H) \rightarrow B$ 确实是覆叠, 并且 $p(\pi(G/H), e) = H$ 。

下面考虑 $E(-)$ 函子在态射上的作用: 对于 $\alpha : G/H \rightarrow G/K$, 如果 $\alpha(eH) = gK$, 那么 (由前述) $g^{-1}Hg \subseteq K, \alpha(fH) = fgK$ 。那么定义 $E(\alpha) : E(G/H) \rightarrow E(G/K)$ 如下:

它将对象 fH 映为 fgK ; 将群胚 $E(G/H)$ 中态射 $f' \circ H \circ f^{-1}$ 映为同一个态射 (只不过变为 $E(G/K)$ 中的了) $(f'g) \circ (g^{-1}hg) \circ (g^{-1}f^{-1})$ 。

容易检验者的确定义出了一个满足要求的函子 $E(-)$ 。

另一方面 $E(-)$ 诱导了态射集之间的双射, 并且每个 B 覆叠都和某个 $E(G/H)$ 同构, 这就说明了范畴等价。 \square

注记. 形象地描述这个构造, 就是先从万有覆叠出发, 然后将子群 H 对应的部分粘合在一起。

3.0.7 覆叠空间的分类

接下来是一些完全和群胚平行的结果, 它们几乎可以从群胚版本直接导出, 只是需要一些拓扑上的检验。

首先我们再一次有

定理 3.0.36 (Lifting Criteria). 设 $p : E \rightarrow B$ 是覆叠, X 是一个群胚, 以及一个连续映射 $f : X \rightarrow B$ 。固定基点 $x_0 \in X, b_0 = f(x_0)$, 固定 $e_0 \in F_{b_0}$ 。

那么存在提升 $g : X \rightarrow E$ (即满足 $p \circ g = f$) 且 $g(x_0) = e_0$ 当且仅当在 $\pi(B, b_0)$ 中:

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$$

进一步, 如果满足这一条件, 那么 g 是唯一的。

注记. Lifting criteria 实际上说的是只要 f 不破坏圈, 就一定能够提升。

证明. 这个命题相比于群胚版本, 只相差了要证明构造出的 g 是连续的。

这是因为如果 $y \in X, g(y) \in U$, 那么假设 $g(y) \in U' \subseteq U$ 是一个局部平凡化邻域, 其在底空间 B 上的同胚像是 V 。取 y 的一个道路连通邻域 W 使得 $f(W) \subseteq V$ (回忆我们假定所有空间都是连通且局部道路连通的), 这时就一定有 $g(W) \subseteq U'$, 从而说明了连续性。 \square

定义 3.0.37 (覆叠的态射, 覆叠范畴). 两个覆叠之间的态射 $g : E \rightarrow E'$ 定义为一个映射, 并且使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g} & E' \\
 & \searrow p & \swarrow p' \\
 & B &
 \end{array}$$

因此可以定义拓扑空间 B 上的全体覆叠构成的范畴 $Cov(B)$, 特别地记 $Cov(E, E')$ 为全体 E, E' 间覆叠态射构成的集合。

引理 3.0.38. 对于覆叠态射 $g : E \rightarrow E'$, 这也是一个覆叠。

证明. 满性是简单的, 可平凡化道路连通开集 B 在 E, E' 中的原像的每个道路连通分支正是 g 的若干可平凡化开集。 \square



定理 3.0.39 (覆叠态射的分类). 设 $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$ 是两个覆叠, 选定 $e, e', b, \text{s.t. } p(e) = p(e') = b$.

那么存在覆叠态射 $g: E \rightarrow E'$ s.t. $g(e) = e'$ 当且仅当

$$p_*(\pi_1(E, e)) \subseteq p'_*(\pi_1(E', e'))$$

并且这一条件满足后 g 是唯一的。

特别地, g 是同胚 \iff 上述包含关系变为相等。

因此 E, E' 是同胚的 \iff 只要 $p(e) = p(e')$ 就有 $p(\pi(E, e))$ 和 $p(\pi(E', e'))$ 是共轭的。

证明. 同群胚版本一样, 这是前述结果的直接推论。 \square

推论 3.0.40. 如果 B 存在万有覆叠, 那么它在同胚意义下唯一, 并且是其他任何覆叠的覆叠。

π_1 如此强的分类威力源于群胚和拓扑空间在这里展示出的惊人相似, 准确地说:

推论 3.0.41. 基本群胚函子诱导了双射

$$\text{Cov}(E, E') \rightarrow \text{Cov}(\Pi(E), \Pi(E'))$$

当然再一次地, 我们可以考虑纤维相关的表述:

定理 3.0.42. 设 $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$ 是覆叠, 取 $b \in B, G = \pi_1(B, b)$ 。那么 $g: E \rightarrow E'$ 是覆叠 \iff 它限制到纤维 $F_b \rightarrow F'_b$ 上是 G -集合映射。并且这个对应建立了 $\text{Cov}(E, E')$ 和 $\text{Hom}_G(F_b, F'_b)$ 的双射。

定理 3.0.43. 如果 g 是覆叠, 那么前一定理的条件保证了它限制到纤维上是 G -集合映射。

这个对应关系是单的, 由前一定理的唯一性即可直接说明。

这个对应关系是的, 因为任何一个 G -集合映射 $\alpha: F_b \rightarrow F'_b$, 选择 $e \in F_b$ 以及 $e' = g(e)$, 由稳定化子的包含关系即知覆叠态射的存在性。

定义 3.0.44. $\text{Aut}(E) \subseteq \text{Cov}(E, E)$ 定义为覆叠的自同构群。类似地, 覆叠的自同态不一定是自同构。

推论 3.0.45. 设 $p: E \rightarrow B$ 是覆叠, $b \in \text{obj}(B), e \in F_b, G = \pi_1(B, b), H = p_*(\pi_1(E, e))$ 。那么 $\text{Aut}(E) \cong \text{Aut}_G(F_b) \cong WH$ 。

特别地, 如果 p 是正规的, 那么 $\text{Aut}(E) \cong G/H$; 如果 p 是万有的, 那么 $\text{Aut}(E) \cong G$ 。

3.0.8 覆叠空间的构造

我们要再一次重复讨论群胚覆叠中进行的步骤, 只不过这里有了些恼人的拓扑学细节。

定义 3.0.46. 称 B 是半局部单连通的, 如果每一点 $b \in B$, 都存在邻域 U 使得 $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ 是平凡群同态。

定理 3.0.47 (万有覆叠存在性). 如果 B 是连通的, 局部道路连通的且半局部单连通的, 那么 B 有万有覆叠。



证明. 固定 $b \in B$, 定义 E 为全体 B 出发道路的道路同伦等价类. 定义 $p: E \rightarrow B$ 将道路同伦等价类映为道路终点.

由于 B 有一组拓扑基, 满足每个 U 都是道路连通的, 并且是半单连通的 ($\pi_1(U, u) \rightarrow \pi_1(B, u)$ 是平凡的): 那么这样的拓扑基 U 中的每两条起终点相同的道路都是道路同伦等价的.

依据此, 定义 E 上的拓扑如下: 对于 b 出发, 在某个上述 U 中结束的道路 f , 定义开集

$$U[f] = \{[g] | [g] = [c \cdot f] \text{ for some path } c \text{ in } U\}$$

这是一个拓扑基, 因为对于 $U[f], U'[f']$, 以及它们交中的某个元素 $[g]$, 有: $W[g] \subseteq U[f] \cap U'[f']$, 其中 W 同样是满足 $p[g] \in W \subseteq U \cap U'$ 的拓扑基.

对于每个 $u \in U$, 存在唯一的 $[g] \in U[f]$ 使得 $p[g] = u$: 唯一性源于 U 半单连通. 因此 p 将 $U[f]$ 同胚地映到 U , 并且 $p^{-1}(U)$ 是若干 $U[f]$ 的无交并, 满足 f 在某个固定的 $u \in U$ 终止. 这就说明 p 是覆叠.

下面只需说明 E 是连通, 局部道路连通且单连通的. 局部道路连通是简单的, 因为 $U[f]$ 已经满足要求了. 欲说明连通, 进一步证明道路连通. 对于 $[f] \in E$, 定义一个道路 $\tilde{f}(s) = [f(st)]$, 这样它的确是一个连接 $e = [c_b]$ 和 $[f]$ 的道路: 因此说明了道路连通.

最后, 只需说明单连通. 直接验证知 $\pi_1(B, b)$ 在 F_b 上的作用是自由的, 于是稳定化子 $p_*(\pi_1(E, e))$ 是平凡的. 因此这就说明了它是万有覆叠. \square

仿照群胚覆叠的构造, 实际上我们给出的是某种轨道空间在群胚意义下的类似物 (即将 H 作用粘合在一起). 回到拓扑空间上我们可以叙述如下.

定义 3.0.48. 给定一个拓扑群 G , 一个 G -空间 X 是一个 G -集合 X , 并且满足 $G \times X \rightarrow X$ 是连续映射. 定义轨道空间 X/G 为全体轨道构成的集合, 其上拓扑是商拓扑.

我们现在只关心 G 是离散拓扑群, 那么每个 $g \in G$ 诱导的 X 上作用都是一个自同胚.

引理 3.0.49. 对于 G -空间 X , 那么如下定义出的是一个函子:

$$X/(-): \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathbf{Top}$$

证明. 定义函子将 G/H 映至 X/H ; 将 G -映射 $\alpha: G/H \rightarrow G/K$ 映至 $X/H \rightarrow X/K: Hx \mapsto K\gamma^{-1}x$, 这里 γ 是描述 G -映射的参数: $\alpha(eH) = \gamma K$. \square

首先从正规覆叠出发:

命题 3.0.50. 设覆叠 $p: E \rightarrow B$ 使得 $\text{Aut}(E)$ 在 F_b 上的作用是传递的, 那么 p 是正规的并且 $E/\text{Aut}(E)$ 和 B 同胚.

证明. 对于任何 $e, e' \in F_b$, 存在 $g \in \text{Aut}(E)$, $g(e) = g(e')$. 因此 $p_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E, e')), \forall e' \in F_b$. 即子群的共轭类长度只有 1, 于是这就说明 $p_*(\pi_1(E, e))$ 是正规子群.

于是 $E/\text{Aut}(E)$ 也是显然的了, 考虑局部上的平凡化即立刻得到对应结论. \square

定理 3.0.51. 固定 $b \in B, G = \pi_1(B, b)$. 那么存在一个函子:

$$E(-): \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathbf{Cov}(B)$$

是范畴等价。

其中 $E(G/H)$ 满足覆叠 $E(G/H) \rightarrow B$ 中 b 的纤维有一个自然的 e 使得 $p_*(\pi_1(E(G/H), e)) = H$ 。并且对于 G -集合映射 $\alpha: G/lH \rightarrow G/lK$, $E(\alpha)$ 诱导的纤维上的映射和 α 是相同的。

证明. 取 $p: E \rightarrow B$ 为万有覆叠, 固定 $e, b: p(e) = b$, 于是 $Aut(E) \cong \pi_1(B, b) = G$: 这个同构是给定一个 $[f]$, 诱导出 E 上的自同构定义如下: 由定理 3.0.39 知: 只需决定 e 的像, $[f]$ 提升至 E 中 e 为起点的道路, 取终点为 e 的像。

在此同构对应下, 定义 $E(G/H)$ 为轨道空间 E/H , 其中 H 的作用继承自上述 G 作用。取定商映射 $q: E \rightarrow E/H$; 同样地 B 可以视为 $E/Aut(E)$, 因为 $Aut(E) = G$ 在万有覆叠上的作用是传递的。那么轨道的嵌入自然诱导了 $p': E/H \rightarrow B$, 并且 $p' \circ q = p$ 。

下面说明 p', q 确实是覆叠: 取定 $U \subset B$ 是一个可平凡化道路连通邻域 (基本邻域), V 是 $p^{-1}(U)$ 的一个分支, 那么由上一命题 $p^{-1}(U) = \coprod_{g \in Aut(E)} gV$ 。于是和群胚出现的情况一样, 这也是 p', q 对应的可平凡化邻域, 因此这就说明了 p', q 都是覆叠。

考虑 $e' = q(e)$, $p'_*(\pi_1(E/H, e')) = H$, 因为由定义: e' 在 $\pi_1(B, b)$ 作用下的稳定化子群正是 H 。那么这的确满足了要求的条件。函子性是前一个引理的直接推论。

$E(-)$ 是一个范畴等价, 因为 $\mathcal{O}(G)(G/H, G/K)$ 和 $Cov(E(G/H), E(G/K))$ 之间是双射, 并且每个 B 都和某个 $E(G/H)$ 同构。□

注记. 覆叠空间和群胚覆叠是很好地对应着的, 准确的说有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{O}(\pi_1(B, b)) & \\
 E(-) \swarrow & & \searrow \mathcal{E}(-) \\
 Cov(B) & \xrightarrow{\quad \Pi \quad} & Cov(\Pi(B))
 \end{array}$$

(第一个 E 是覆叠空间的 E , 而第二个 \mathcal{E} 是群胚覆叠的 E 。)

由于两者都是范畴等价因此就有:

推论 3.0.52. $\Pi: Cov(B) \rightarrow Cov(\Pi(B))$ 是范畴等价。

3.0.9 问题

假定 G 是连通且局部道路连通的拓扑群 G , 单位元 e 。 $p: H \rightarrow G$ 是覆叠, 固定 $f \in H, p(f) = e$ 。

练习 3.1.

- H 上可以唯一地定义出一个连续的群乘法运算, 使得 f 是单位元, p 是群同态。
- 在这个乘法下 H 是拓扑群, 并且 H 是 $Abel$ 的 $\iff G$ 是 $Abel$ 的。

练习 3.2.

- $K = \ker p$ 是 H 的离散正规子群。
- 对于一般的连通拓扑群 H , 每个离散正规子群 K 都包含在 H 的中心内。
- 回到 2a. 中的条件, 对于 $k \in K$, 定义 $t(k): H \rightarrow H: h \mapsto kh$, 那么 $k \mapsto t(k)$ 定义出了 K 和 $Aut(H)$ 之间的同构。

证明.

1a. 考虑交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 & & H \\
 & \nearrow & \downarrow p \\
 H \times H & \twoheadrightarrow G \times G & \xrightarrow{\bullet} G
 \end{array}$$

为了使用 Lifting criteria, 记最下行的合成为 f 。考虑 $f_*(\pi_1(H \times H, (f, f)))$ 中的元素。利用基本群的性质, $\pi_1(H \times H, (f, f))$ 中的元素形如 $(h_1, h_2), h_i \in \pi_1(H, f)$ 。

于是其像为逐点乘积 $p(h_1) \cdot p(h_2) \simeq p(h_2) \circ p(h_1) = p(h_2 \circ h_1) \in p_*(\pi_1(H, f))$ 。

因此它满足 Lifting criteria 的条件, 从而存在唯一的这样的映射。

1b. 我们首先给出上述群乘法的具体构造: 对于 B 中两条 e 出发的道路 $f: e \rightarrow g; f': e \rightarrow g$, 定义其平移乘积如下: $(f * f')(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, 1/2] \\ f(1) \cdot f'(2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$

由覆叠空间分类, H 一定同胚与轨道空间 E/K , 其中 E 是万有覆叠, $K \leq \pi_1(G, e)$ 。对于 $[f]K, [f']K$, 其乘积定义为 $[f * f']K$ 。它的确是满足要求的连续映射, 在此意义下 H 的确构成了一个拓扑群。

如果 G 是交换的, 那么 $f * f'$ 和 $f' * f$ 之间可以验证有道路同伦:

$$h(s, t) = \begin{cases} f(2s) \cdot f^{-1}(2st) \cdot f'(2st) & s \in [0, 1/2] \\ [f'(2s-1) \cdot f'^{-1}((2s-1)t) \cdot f((2s-1)t)] \cdot [f(1) \cdot f^{-1}(t) \cdot f'(t)] & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

于是结论当然成立。

2a. 离散由覆叠的纤维是离散保证, 正规子群是因为它是同态的核。

2b. 考虑 $H \times K \rightarrow K: (h, k) \mapsto hkh^{-1}$ 。对于每个固定的 k , 由于这是连续映射, K 离散, H 连通, 于是只能有这是常值映射, 但 $eke^{-1} = k$, 因而 $hkh^{-1} = k, \forall h, k$ 。从而说明了 K 含于中心内。

2c. 由于拓扑群覆叠的自同构完全由纤维 F_e 上的情况决定, 而后者完全由 f 的像决定, 那么结论立刻成立。□

设 X, Y 是连通, 道路连通且 Hausdorff 的空间。称 $f: X \rightarrow Y$ 是局部同胚, 如果每个 X 有开邻域是它同胚地映成 Y 中某个开集。

练习 3.3. 举一例子: 使得它是满局部同胚并且不是覆叠。

证明. 取 $E = \coprod_{i=1}^{\infty} [B(0, 1/i) \times \{i\}]$, $B = B(0, 1)$ 。 $E \rightarrow B$ 为 $B(0, 1/i) \hookrightarrow B(0, 1)$ 诱导得到, 这是一个满足要求的例子。□

练习 3.4. 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是局部同胚, X 紧。证明 f 是一个满的覆叠, 并且纤维有限。

证明. 由于 f 是紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射, 因此它是闭映射, 即 $f(X)$ 是闭集。对于任何 $y \in f(X)$, 设 $f(x) = y$ 。那么存在一个 x 的邻域 U , 使得开集 $f(U) \subseteq f(X)$, 于是 $f(X)$ 既开又闭。但是 Y 连通, 于是 $f(X) = Y$, 即 f 是满射。

对于任何 $y \in Y$, 考虑其原像集 F_y 。由于 Hausdorff, 于是 $Y - \{y\}$ 是开的, 从而 $X - F_y$ 是开的。对每个 $x_y \in F_y$, 取对应的局部同胚邻域 U_x 。由于局部同胚, 如果 $x'_y \neq x_y$, 那么一定 $x'_y \notin U_x$ 。因此这给出了一个开覆盖 $X = (X - F_y) \cup \bigcup_{x \in F_y} U_x$, 因此一定有 F_y 是有限的。

对每个 $y \in Y$, 每个 $x \in F_x$ 存在一个局部同胚邻域 U_x , 取 $V = \cap_{x \in F_x} f(U_x)$ 。再考虑对应的到各自 U_x 上的原像就满足要求, 因此这的确是一个覆盖。□

假定 X 是 G -空间, G 是离散拓扑群。对于子群 H 定义:

$$X^H = \{x | hx = x, \forall h \in H\}$$

将全体 $G/H \rightarrow X$ 的函数构成的集合赋予紧开拓扑 (由于 G/H 离散, 这相当于赋予乘积拓扑 $\prod_{G/H} X$), 将全体 G -映射 $G/H \rightarrow X$ 构成的集合赋予子空间拓扑。

练习 3.5. 全体 G -映射 $G/H \rightarrow X$ 构成的拓扑空间和 X^H 是自然同胚的。特别地, $\mathcal{O}(G/H, G/K) \cong (G/K)^H$ 。

练习 3.6. 设 X 是 G -空间, 证明 G -映射 $G/H \mapsto X^H$ 是某个反变函子 $\mathcal{O}(G) \rightarrow \mathbf{Top}$ 的作用在对象上的映射。

证明.

5.6. 映射为 $f \mapsto f(eH)$, 直接验证同胚。□

第四章 图

4.0.1 定义

定义 4.0.1. 一个图是指如下空间的商空间。

取 X^0 为离散点集, 离散的函数集 J , 由若干 $j: S^0 \rightarrow X^0$ 构成, 考虑商空间 $X \coprod (J \times I) / \sim$, \sim 是指将 $(j, 0) \sim j(0), (j, 1) \sim j(1)$ 。

$\{j\} \times I$ 的像称为边, X^0 的元素称为顶点。一个图是有限的 \iff 其边和顶点均有限 \iff 图是紧的。

一个图是局部有限的, 如果每个顶点都是有限条边的顶点, 等价地是局部紧的。

一个图是连通的, 如果它作为拓扑空间是连通的。(事实上这还等价于道路连通, 见引理 4.0.5)

一个子图是一个图 $A \subseteq X$, 且满足 $A^0 \subseteq X^0$ 。

命题 4.0.2. 一个图是局部可缩空间, 因此前文覆盖空间理论可以应用到图上。

4.0.2 边路径和树

定义 4.0.3. 一个边路径是有限条有向边 $k: I \rightarrow X$ 的合成。设它们为 k_n , 那么应满足 $k_{n+1}(0) = k_n(1)$ 。

称这个路径是既约的, 如果不存在 k_{n+1}, k_n 是同一条边的相反路径。

称一个边路径是封闭, 如果它是一个圈。

定义 4.0.4. 一个树是一个没有封闭既约边路径的连通图。

引理 4.0.5. 任何连通图中的两个顶点都能够被有限条边组成的既约路径联结。

证明. 我们首先说明这个图是道路连通的, 这是因为图总是局部可缩的, 而可缩空间都是道路连通的, 因此图是局部道路连通的。由命题 3.0.2, 即有这个图是道路连通的。

对于连通图中的任何两个顶点, 总能找到一条道路联结它们。而道路是紧的, 于是这个道路所代表的子图是紧的, 从而边和顶点都是有限的。因此这就证明了结论。 \square

引理 4.0.6. 树 T 中的任何一个顶点 v_0 都是 T 的强形变收缩核。

证明. 现在由于引理 4.0.5, 每个顶点 v 都在某个包含 v_0 的有限连通子树 $T(v)$ 中。选择一条联结 v 和 v_0 的 $T(v)$ 中的边路径, 这个路径是有限长的并且是唯一的 (否则就有圈出现)。因此可以将树中的顶点按照距 v_0 的边路径长度分开。因此强形变收缩事实上和 $[0, +\infty)$ 收缩到 $\{0\}$ 相仿, 这就说明了引理。 \square

定义 4.0.7 (极大树). 称图 X 的一个子树是其极大树, 如果它不被严格包含于任何一个子树。(特别地, 当图 X 连通时, 通常称这样的树为生成树)

引理 4.0.8. 每个子树都被某个极大树包含。如果 X 是连通图, 那么子树是极大的 \iff 它包含所有顶点。

证明. 第一部分只不过是 Zorn 引理的直接应用。第二部分说明如下:

包含所有顶点的树一定是极大的: 如果添加一条边 $v \sim v'$, 由于 $v \sim v'$ 已然能用边路径相连, 这条添加的边只会导致一个圈出现, 从而不是树。

反过来, 如果一个树极大, 它不可能有未包含的顶点: 添加一条未包含顶点和已包含顶点之间的边路径即得到更大的树。□

4.0.3 图的同伦性质

图的同伦性质是相当简单的:

定理 4.0.9. 给定一个连通图 X 和极大树 T , 那么商空间 X/T 是由非 T 的边作为指标指示的 S^1 的一点并。商映射 $q: X \rightarrow X/T$ 是同伦等价。

证明. 第一个结论是显然的。第二个结论中的同伦等价实际上是练习 6.2 的推论。不过这个同伦等价可以利用树的强形变收缩直接给出。□

4.0.4 图的覆叠和 Euler 示性数

正如意料之中的, 定义有限图 X 的 Euler 示性数 $\chi(X) = V - E$ 。归纳知对于一棵树, $\chi(T) = 1$ 。

因此上一节的结论有如下推论:

推论 4.0.10. 对于连通图 X , $\pi_1(X)$ 是一个自由群, 其中每个生成元对应着一个不在某个固定的极大树中的边。如果 X 是有限的, 那么 $\pi_1(X)$ 的生成元个数是 $1 - \chi(X)$ 。

特别地, $\chi(X) \leq 1$ 。等号取到 $\iff X$ 是树。

定理 4.0.11. 如果 B 是连通图, B^0 是顶点集, $p: E \rightarrow B$ 是一个覆叠。那么 E 也是一个连通图满足其顶点集 $E = p^{-1}(B^0)$, 每一组 $j, e \in F_{j(0)}$ 都对应着 E 中的一条边。

因此如果 B 有限, p 是有限覆叠, 纤维的势为 n , 那么 $\chi(E) = n\chi(B)$ 。

证明. 将 B 中的一条边视为一个道路, 那么自然有唯一的 $e \in F_{j(0)}$ 出发的道路提升。

对于 $E - E_0$ 中的点, 如果它是多于一条上述提到的边的内点, 那么考虑道路提升性质立刻得到矛盾。因此 E 的确也是一个图, 其余结论自然成立。□

4.0.5 群论中的应用

定理 4.0.12. 自由群 G 的子群 H 是自由的。进一步如果 G 有 k 个生成元, $[G: H] = n$, 那么 H 有 $1 - n + nk$ 个生成元。

证明. 将 G 实现为某个基本群 $\pi_1(B)$, 其中 B 是对应的边 (按照基本群生成元) 的一点并。由覆叠空间分类, 存在一个覆叠 $p: E \rightarrow B$ 使得 $p_*(\pi_1(E)) = H \leq G = \pi_1(B)$ 。由于 E 也是图, 那么它一定自由。

如果 G 有 k 个生成元, 那么 $\chi(B) = 1 - k$, 如果 $[G : H] = n$, 那么 $|F_b| = n$ 。因此 $\chi(E) = n\chi(B)$, 于是 $1 - \chi(E) = 1 - n + nk$ 。□

进一步地, 有基本群的实现:

定理 4.0.13 (基本群的实现). 对于任何群 G , 存在一个连通空间 X 使得 $\pi_1(X) \cong G$ 。

证明. 首先 $G = F/N$, 同样可以如同上一个定理中取覆叠 $p: E \rightarrow B$ 使得 $p_*(\pi_1(E)) = N \trianglelefteq F = \pi_1(B)$ 。

取 $CE = (E \times I)/(E \times \{-1\})$, 再取

$$X = (B \amalg CE) / \sim$$

其中 $\sim: (e, 0) \sim p(e)$ 。

取 $U = B \amalg (E \times [0, 3/4])$, $V = E \times (1/4, 1]$, 取基点为 $E \times \{1/2\}$ 中一点。那么应用 van Kampen 定理, 由于: U 和 B 同伦等价, V 可缩, $U \cap V$ 和 E 同伦等价, 因此:

$$\pi_1(X) = F/N = G$$

□

注记. 这个构造称为 p 的 homotopy cofiber。进一步的, 对于所有有限展示群, 可以进一步要求 X 是四维流形。

4.0.6 问题

练习 4.1. 设 F 是两个元素 a, b 生成的自由群, 有多少个指数为 2 的子群? 写出它们的生成元。

证明. 取 $E = S^1 \vee S^1$, 粘接点为基点 e 。只需考虑所有它的二重覆叠。考虑 $\pi_1(B)$ 在 F_e 上的作用, 经检验: 要么 a 作用诱导出纤维上的对换, b 平凡; 要么 b 作用诱导出纤维上的对换, a 平凡; 要么两个作用都诱导出纤维上的对换。

三者分别对应的自由群是: $\langle a^2, b, aba \rangle$; $\langle b^2, a, bab \rangle$; $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ 。□

练习 4.2. 证明自由群 F 的无限指数非平凡正规子群 N 不可能是有限生成的。

证明. 同样, 考虑两者的实现 $p: E \rightarrow B$ 。假定结论不成立, 那么 N 是有限生成的, 于是 E 是一个除极大树外只有有限条边的图。

现在覆叠的自同构 $Aut(E) \cong F/N$, 然而覆叠的自同构是图的自同构, 进而保持极大树。但是些初等的讨论可以看出这样的映射方式对于一个除极大树外只有有限条边的图是有限的, 因此与无限指数矛盾。□

第五章 紧生成空间



第六章 余纤维化

从这一章开始起，所有工作都在 **CGWH** 中进行，因此也有着 Cartesian 乘积和映射空间之间的对偶。

6.0.1 定义

定义 6.0.1. 称映射 $i: A \rightarrow X$ 是余纤维化，如果它满足同伦延拓性质 (HEP)。即只要图表交换 ($h \circ i_0 = f \circ i$)，就存在 \tilde{h} 使得下列图表交换。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow i & \nearrow f & \downarrow i \times \text{id} \\
 & Y & \\
 & \nwarrow \tilde{h} & \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I
 \end{array}$$

这里 $i_0(x) = (x, 0)$ ， \tilde{h} 不要求唯一。

等价地，这相当于

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & Y^I \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

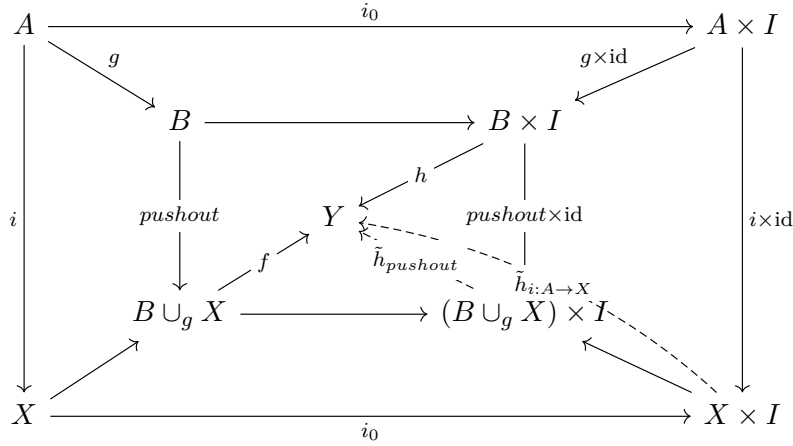
这里 $p_0(\xi) = \xi(0)$ 。

记 $B \cup_g X$ 为 $i: A \rightarrow X, g: A \rightarrow B$ 的推出。我们接下来要说明 cofibration 的推出仍然是 cofibration。

引理 6.0.2. $i: A \rightarrow X$ 是 cofibration, $g: A \rightarrow B$ 是任意一个映射。那么 $B \rightarrow B \cup_g X$ 是 cofibration。



证明.



注意推出与 Cartesian 积交换，即 $(B \cup_g X) \times I \cong (B \times I) \cup_{g \times \text{id}} (X \times I)$ 。因此上图的右侧梯形也是推出图表。

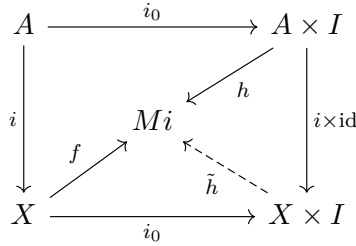
那么 i 是 cofibration 诱导了 $\tilde{h}_{i:A \rightarrow X}$ ，推出图表的泛性质诱导了 $\tilde{h}_{\text{pushout}}$ 。

□

6.0.2 映射柱和余纤维化

Cofibration 的定义中需要验证所有的 Y ，但是接下来的结果指出，实际上存在一个万有的 Y ：只需要验证这个 Y （和对应的映射）即可。

我们指出取 $Mi \equiv X \cup_i (A \times I)$ （映射柱）： $i: A \rightarrow X, i_0: A \rightarrow A \times I$ 的推出。一旦下列图表成立：

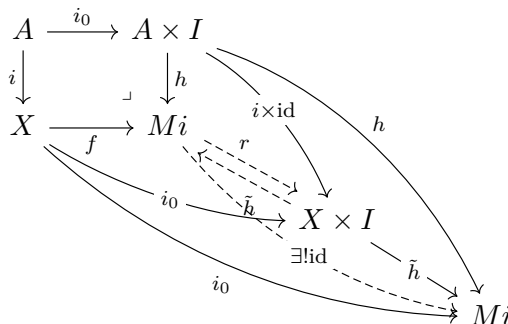


那么对于任何原来的检验图表，推出的泛性质诱导了 $Mi \times Y$ 。那么取这里的 \tilde{h} 和 $Mi \times Y$ 的复合就得到了满足要求的使检验图表交换的映射。

注记. 接下来总假定映射柱的拓扑实现是熟知的：即将 $X \times I$ 按照 $(x, 0) \sim f(x)$ 的方式与 Y 粘接。（即拓扑空间的推出的拓扑构造是熟知的）

命题 6.0.3. 在 CGWH 范畴中，余纤维化 $i: A \rightarrow X$ 是一个嵌入，并且像是 X 中的闭集。

证明. 推出的泛性质诱导了一个 $r: Mi \rightarrow X \times I$ ，那么有推出图表：





由推出泛性质保证满足交换性要求的映射唯一， $\tilde{h} \circ r = \text{id}_{M_i}$ ，因此 r 是单态射。因此，这就说明了 M_i 和 $r(M_i)$ 是同胚的。

现在有 $M_i \xrightarrow{r} X \times I \xrightarrow{\tilde{h}} M_i$ 。考虑 $(r \circ \tilde{h}, \text{id}) : X \times I \rightarrow (X \times I) \times (X \times I)$ ，对角线 $\Delta_{X \times I} \subset (X \times I) \times (X \times I)$ 是闭的（再次提醒：这里的 \times 是经历过 k -化的），而它的原像正是 $r(M_i)$ ，因此我们说明了 r 是闭嵌入。。

由拓扑空间的余极限构造，以及其在 **CGWH** 中诱导的余极限，知 $A \rightarrow M_i$ 是单射。那么交换图表

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & M_i \\ p \downarrow & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \end{array}$$

中的上、下、右三条边都是闭嵌入，于是左侧边也是如此。 □

6.0.3 映射的余纤维化-同伦等价分解

本节的目标是将一个任意的连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 分解为余纤维化和同伦等价。

对于 $Mf = Y \cup_f (X \times I)$ ，我们定义如下分解：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & Mf & \xrightarrow{r} & Y \\ \begin{array}{c} \nearrow i_1 \\ \xrightarrow{i_0} \end{array} & & \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xrightarrow{pr} & X \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & Mf & \xrightarrow{r} & Y \\ & \searrow \text{id} & & & \end{array}$$

其中 r 是由推出泛性质诱导， j 是 i_1 和 $X \times I \rightarrow Mf$ 的复合。现在 $r \circ i = \text{id}$ ，对于 $i \circ r$ ，可以定义出同伦：

$$h : Mf \times I \rightarrow Mf : h(y, t) = y, h((x, s), t) = (x, (1-t)s)$$

于是 $i \circ r \simeq \text{id}$ 。

下面考虑 $j : X \rightarrow Mf$ ，只需构造 r 使得其满足如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ j \downarrow & & \downarrow \\ Mf & \longrightarrow & Mj \\ & \searrow i_0 & \downarrow i \times \text{id} \\ & & Mf \times I \end{array}$$

$\swarrow r$

然而直观上这是简单的： Mj 是 Mf 和 $X \times I$ 将 Mf 的 $i=1$ 面以及 $X \times I$ 的 $i=0$ 的粘合。

定义 $Mf \times I \rightarrow Mj$ 正是 h 和 $Mf \hookrightarrow Mj$ 的复合，直接验证知它确实满足要求。因此这就证明了结果。

6.0.4 映射的余纤维化判别

我们希望判别一个映射是否能够成为余纤维化。接下来我们考虑所有偶对 (X, A) ，其中 A 是 X 的子空间。

定义 6.0.4 (NDR-pair). 称一个偶对 (X, A) 是 NDR-pair (neighborhood deformation retract pair)，如果存在 $u: X \rightarrow I$ 使得 $u^{-1}(0) = A$ ，以及一个同伦 $h: X \times I \rightarrow X$ 使得： $h(x, 0) = x, h(a, t) = a, \forall x \in X, a \in A, t \in I$ 。并且它满足 $h(x, 1) \in A, \text{ if } u(x) < 1$ 。

称 (X, A) 是一个 DR-pair，如果 $\forall x \in X, u(x) < 1$ 。此时 A 是 X 的强形变收缩。

注意：DR 一定是 NDR 的。

引理 6.0.5. 假定映射对 $(h, u); (j, v)$ 分别对应着 $\text{NDR-pair}(X, A)$ 和 (Y, B) ，那么 (k, w) 对应着一组 $\text{NDR-pair}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ 。其中 $w(x, y) = \min(u(x), v(y))$ ，

$$k(x, y, t) = \begin{cases} (h(x, t), j(y, tu(x)/v(y))) & \text{if } v(y) \geq u(x) \\ (h(x, tv(y)/u(x)), j(y, t)) & \text{if } u(x) \geq v(y) \end{cases}$$

特别地，如果 $(X, A), (Y, B)$ 中存在至少一个 DR-pair，那么 $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ 也是 DR-pair。

证明. Direct Check. □

定理 6.0.6. 对于 X 的闭子空间 A ，以下等价：

1. (X, A) 是 NDR-pair; 2. $(X \times I, (X \times \{0\}) \cup (A \times I))$ 是 DR-pair; 3. $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ 是 $X \times I$ 的 retract (存在 $r: X \times I \rightarrow A, r|_A = \text{id}$ ，这个条件当然是弱于强形变收缩的)。4. 嵌入 $i: A \rightarrow X$ 是余纤维化。

证明. $1 \implies 2$ 由引理得到： $(I, \{0\})$ 是 DR-pair; $2 \implies 3$ 显然; $3 \iff 4$ 是因为 3 是余纤维化的 universal test diagram (映射柱 Mi)。

$4 \implies 1$: 假定存在这样的 retraction: $r: X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ，令 $\pi_1: X \times I \rightarrow X, \pi_2: X \times I \rightarrow I$ 。

定义 $u: X \rightarrow I, u(x) = \sup\{t - \pi_2 r(x, t) | t \in I\}$ ， $h: X \times I \rightarrow X, h(x, t) = \pi_1 r(x, t)$ ，那么 (h, u) 确实使得 (X, A) 成为了 NDR-pair。

这里 $u^{-1}(0) = A$ 因为 $u(x) = 0 \implies r(x, t) \in A \times I, \forall t > 0$ ，进一步由于 $A \times I$ 在 $X \times I$ 中是闭的，这说明了对于 $t = 0, r(x, t) \in A \times I$ ，于是 $u^{-1}(0) = A$ 。 □

6.0.5 余纤维同伦等价

有时我们会限制住某个拓扑空间 A ，并考虑在这个基底空间之上考虑同伦，这就需要如下定义：

定义 6.0.7. A 之下的空间定义为一个映射 $i: A \rightarrow X$ ，称 A 下空间之间的映射为满足如下交换图者：

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

称 A 下的两个映射是同伦的，如果它们在通常意义下是同伦的，并且在每个时间 t 上的限制都是 A 下的映射。记为 $h: f \simeq f' \text{ rel } A$ 。

注记. 注意这里的记号和后文的相对同伦记号冲突，因此使用 rel 表示 A 下同伦只在本章中有效，其余均表示相对同伦。

因此定义出了 A 下空间的同伦等价，它称为余纤维同伦等价，因为：

命题 6.0.8. 设 $i: A \rightarrow X, j: A \rightarrow Y$ 是余纤维化， $f: X \rightarrow Y$ 是 A 之下映射，即： $f \circ i = j$ 。如果 f 是一个通常的同伦等价，那么 f 是余纤维同伦等价（即 A 下同伦等价）。

证明. 如果能够说明对于任何一个 A 下的同伦等价 f ，能够找到一个 A 下映射 $g: Y \rightarrow X$ ，使得 $g \circ f \simeq \text{id} \text{ rel } A$ 。

那么由于 g 是同伦等价，我们也可以找到一个 $f': X \rightarrow Y$ ，使得 $f' \circ g \simeq \text{id} \text{ rel } A$ 。因此通过映射复合保持 A 下同伦等价关系知 $f \simeq f' \text{ rel } A$ 。

那么此时 f, g 的确构成了一组余纤维同伦等价。

下面我们来说明最开始的假设：对于任何一个 A 下的同伦等价 f ，能够找到一个 A 下映射 $g: Y \rightarrow X$ ，使得 $g \circ f \simeq \text{id} \text{ rel } A$ 。

现在找到一个 f 的（一般意义下的）同伦逆 g'' ，由于 $g'' \circ f \simeq \text{id}$ ，于是复合上 i 有 $g'' \circ j \simeq i$ 。

由于 j 满足 HEP，存在一个 g' 使得 $g'' \simeq g'$ ， $g' \circ j = i$ 。

如果 $g' \circ f: X \rightarrow X$ 有 A 下的左同伦逆 e ，那么 $g = e \circ g'$ 就满足了 $g \circ f \simeq \text{id} \text{ rel } A$ 。

因此这将问题转化为：**对任何 $f: X \rightarrow X$ ， $f \circ i = i, f \simeq \text{id}$ ，能够找到 f 的一个 A 下的左同伦逆。**

下面选出一个同伦 $h: f \simeq \text{id}$ 。由于 $h_0 \circ i = f \circ i = i, h_1 = \text{id}$ ，因此可以对 $h \circ (i \times \text{id}): A \times I \rightarrow X$ ， $\text{id}: X \rightarrow X$ 应用 HEP，得到一个同伦 $k: \text{id} \simeq k_1$ ，满足 $k \circ (i \times \text{id}) = h \circ (i \times \text{id})$ 。

记 $k_1 = e$ ，当然 $e \circ i = i$ 。下面在如下图表中应用 HEP：

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times I & \xrightarrow{i_0} & A \times I \times I & & \\
 \downarrow i \times \text{id} & & \swarrow K & & \downarrow i \times \text{id} \times \text{id} \\
 & & X & \xleftarrow{L} & \\
 & \nearrow J & & & \\
 X \times I & \xrightarrow{i_0} & X \times I \times I & &
 \end{array}$$

其中 J 是 $e \circ f \simeq \text{id}$ 的同伦等价：

$$J(x, s) = \begin{cases} k(f(x), 1 - 2s) & s \leq 1/2 \\ h(x, 2s - 1) & s \geq 1/2 \end{cases}$$

$$K(a, s, t) = \begin{cases} k(i(a), 1 - 2s(1 - t)) & s \leq 1/2 \\ h(i(a), 1 - 2(1 - s)(1 - t)) & s \geq 1/2 \end{cases}$$



那么 $e \circ f = J_0 = L_{0,0} \simeq L_{0,1} \simeq L_{1,1} \simeq L_{1,0} = J_1 = \text{id rel } A$ 。

□

例子. 固定一个余纤维化 $i: A \rightarrow X$ 。

对于 $j: A \rightarrow Mi: a \mapsto (a, 1)$, 到 $i: A \rightarrow X$ 的映射 $r: Mi \rightarrow X$ (*projection to X*), 其有显然的同伦逆 $\iota(x) = (x, 0)$, 但是并不是一个 A 下的同伦逆。

上一命题保证了存在一个 A 下的同伦逆, 并且和 ι 同伦等价。

对于两个余纤维化, 一组同伦等价的偶对对应着空间偶对的同伦等价:

命题 6.0.9. 给定交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad d \quad} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

i, j 是余纤维化, d, f 是同伦等价, 那么 $(f, d): (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是同伦等价。

证明. 见 [May99, Page 45]

□

6.0.6 问题

例子. 对于一个余纤维化 $i: A \rightarrow X$, A 可缩, $X \rightarrow X/A$ 是同伦等价。

证明.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\quad \quad} & A \times I & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow f_0=\text{id}, f_1=\text{contraction to a pt} & & & \\ X & \xrightarrow{\quad \quad} & X \times I & \xrightarrow{\quad \quad} & (X \times I)/(A \times I) \equiv X/A \times I & & \\ & \searrow \text{id} & \downarrow & \swarrow g: g_0=\text{id} & & \downarrow h, h_1=q \circ r, h_0=\text{id} & \\ & & X \times \{1\} & \xrightarrow{\quad q \quad} & X & \xrightarrow{\quad q \quad} & X/A \\ & & & \uparrow g_1 & \uparrow r & & \end{array}$$

同伦逆 r 由商拓扑泛性质诱导: g_1 将 A 映为一点。 h 由商拓扑泛性质诱导, $q \circ r$ 将 $A \times I$ 映为一点。那么 $r \circ q = g_1, \text{id} = g_0$, 因此 g 诱导了同伦; $q \circ r = h_1, \text{id} = h_0$, 因此 h 诱导了同伦: 因此这的确是同伦等价。

□

第七章 纤维化

7.0.1 定义

定义 7.0.1. 称映射 $p: E \rightarrow B$ 是 (Hurewicz) 纤维化, 如果它满足覆盖同伦性质 (CHP) / 同伦提升性质 (HLP)。

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

注记. Serre 纤维化要求检验空间 Y 只能是 I^n , 这是一种更一般的纤维化。(Serre 纤维化和之前的余纤维化之间没有对偶关系, 因此在之后所有纤维化都仅指 Hurewicz 纤维化)

如同余纤维化的情况中一样, 前述图表具有等价的画法:

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xleftarrow{p_0} & & E^I & \\
 \downarrow p & \nearrow f & Y & \nwarrow \tilde{h} & \downarrow p^I \\
 B & \xleftarrow{p_0} & & B^I &
 \end{array}$$

因此直接通过对余纤维化版本证明的对偶, 有:

命题 7.0.2. 对于纤维化 $p: E \rightarrow B$, 映射 $g: A \rightarrow B$, 那么纤维化的拉回 $A \times_h E \rightarrow A$ 也是纤维化。

7.0.2 道路提升

如同余纤维化的情况一样, 我们仍然可以选取唯一的 Y 作为万有检验, 当然和余纤维一样, 取 Y 为拉回 (纤维积) $Np \equiv E \times_p B^I = \{(e, \beta) | \beta(0) = p(e)\} \subset E \times B^I$ 即可。

注记. 接下来总假定纤维积的构造是熟知的: $X \times_Z Y$ 为 $X \times Y$ 中使得 $f(x) = g(y)$ 的子空间。

这里最为重要的观察是这个泛性质相当于说明任何 B 的道路, 指定其提升到 E 的起点就能将这条道路提升, 即覆盖的唯一提升定理中去掉唯一性。

自然:

引理 7.0.3. 覆盖是纤维化。

引理 7.0.4 (Eckmann-Hilton 对偶: 纤维化-余纤维化). $i: A \rightarrow X$ 是余纤维化, 则 $p = B^i: B^X \rightarrow B^A$ 是纤维化。



证明.

$$B^{M_i} = B^{(X \times \{0\}) \cup (A \times I)} \cong B^X \times_p (B^A)^I = Np$$

$r: X \times I \rightarrow M_i$ 诱导了 $B^r: Np \cong B^{M_i} \rightarrow B^{X \times I} \cong (B^X)^I$

□

注记. 仿照这一情况, 反过来的命题 (纤维化诱导余纤维化) 也是正确的。

7.0.3 映射的纤维化-同伦等价分解

本节的目标是将任何连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 分解为纤维化和同伦等价。

对于 $Nf = X \times_f Y^I$, 我们定义如下分解:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\nu} & Nf & \xrightarrow{\rho} & Y \\ & \searrow \nu & \downarrow pr & \nearrow \ulcorner & \downarrow f \\ X & & Nf & \xrightarrow{\quad} & X \\ & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 \\ Y & \xrightarrow{y \mapsto c(y)} & Y^I & \xrightarrow[p_1]{p_0} & Y \end{array}$$

其中 ν 由拉回泛性质诱导, ρ 是 pr 和 p_1 的复合。记 $\pi: Nf \rightarrow X$, 现在 $\pi \circ \nu = \text{id}$, 反过来对于 $\nu \circ \pi$, 有同伦 $h: Nf \times I \rightarrow Nf: h(x, \chi)(t) = (x, \chi(s))$, 其中 $\chi(s)$ 是路径 $s \mapsto \chi((1-t)s)$ 。

同样, 和余纤维化一样可以直接验证 $Nf \rightarrow Y$ 具有同伦提升性质。

7.0.4 映射的纤维化判别

定义 7.0.5 (纤维丛). 称 $p: E \rightarrow B$ 是纤维丛, 如果存在一组 B 的开覆盖 \mathcal{O} 使得对于任何 $U \in \mathcal{O}$, 存在同胚 $\phi: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$, 并且 $p \circ \phi = \pi_1: U \times F \rightarrow U$ 。这里 F 是一个固定的拓扑空间。

定理 7.0.6. 假定 $p: E \rightarrow B$ 是一个映射, \mathcal{O} 是 B 的 numerable 开覆盖。那么 p 是纤维化 \iff 对于每个 $U \in \mathcal{O}$, $p^{-1}(U) \rightarrow U$ 是纤维化。

证明. 见 [May99, Page 49]

□

7.0.5 纤维同伦等价

本节所有内容与余纤维同伦等价对偶。主定理的对偶形式叙述如下:

命题 7.0.7. 设 $p: D \rightarrow B, q: E \rightarrow B$ 是纤维化, 并且 $f: D \rightarrow E$ 满足 $q \circ f = p$ 。如果 f 是同伦等价。那么它是纤维同伦等价。

同样地, 一组纤维化的同伦等价对应着纤维的同伦等价。

命题 7.0.8. 对于

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & E \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ A & \xrightarrow{d} & B \end{array}$$

p, q 是纤维化, d, f 是同伦等价, 那么 $(f, d): p \rightarrow q$ 是纤维化的同伦等价。

7.0.6 纤维的变换

假定 $p: E \rightarrow B$ 是纤维化, $i_b: F_b \rightarrow E$ 是嵌入。 b 到 b' 的路径 $\beta: I \rightarrow B$ 提升成为 F_b 某点到 $F_{b'}$ 某点的路径。

因此一条路径 β 给出了一个映射的同伦类 $[\tilde{\beta}_1]: F_b \rightarrow F_{b'}$, 即如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 F_b \times \{0\} & \xhookrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\beta} & \downarrow p \\
 F_b \times I & \xrightarrow{\pi_2} I \xrightarrow{\beta} & B
 \end{array}$$

我们下面要指出 $[\beta_1]$ 仅和道路同伦类 $[\beta]$ 的选择有关。

注记. 主要思路是: 底空间的同伦可以提至丛空间。

假定 β, β' 是等价的 $b \rightarrow b'$ 的道路, 那么存在 $h: I \times I \rightarrow B$ 。我们现在有对应的 $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'$ 。

现在取 $J^2 = (U = I \times \partial I) \times (\{0\} \times I) \subseteq I^2$, 那么有 $f: F_b \times J^2 \rightarrow E$: 满足 $F_b \times I \times \{0\}$ 上它为 $\tilde{\beta}$; $F_b \times I \times \{1\}$ 上它为 $\tilde{\beta}'$, $F_b \times \{0\} \times I$ 上它为 $i_b \circ \pi_1$ 。

另一方面 (I^2, J^2) 和 $(I^2, I \times I \setminus \{0\})$ 是同胚的, 因此应用 CHP 就有:

$$\begin{array}{ccc}
 F_b \times J^2 & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 F_b \times I^2 & \xrightarrow{\pi_2} I^2 \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

直接验证知 \tilde{h} 满足要求。

因此现在我们有 $[\beta] \mapsto [\tilde{\beta}_1]$ 是一个良定义的映射, 记为 τ 。

定理 7.0.9. B 的道路同伦类提升到 F_b 纤维之间的映射同伦类诱导了一个函子: $\lambda: \Pi(B) \rightarrow \mathbf{hTop}$ 。因此如果 B 是连通的, 那么 B 上的任何纤维都是同伦等价的。

如同 $\pi_1(B, b)$ 在 F_b 上的作用, 这里的作用是“up to homotopy”的。这一差异当然是来源于同伦的提升不一定需要唯一。我们现在将这个想法严格化:

记 $\pi_0(X)$ 是道路连通分支构成的集合, $Aut(X)$ 是 X 的自同伦等价映射, 其上拓扑诱导自 X^X 的拓扑。注意 $Aut(X)$ 是幺半群, 并且幺半群运算与拓扑相容。(这里由于考虑的是 X^X 的子空间, 当然没有道理每个自同伦等价映射都有逆) 因此 $Aut(X)$ 成为了拓扑幺半群。

推论 7.0.10. 道路同伦类的提升诱导了群同态 $\pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0(Aut(F_b))$ 。

最后还要指出的是, 这里定义的 τ 是具有自然性, 即:

定理 7.0.11. 给定两个纤维化 p, q 和交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{g} & E \\
 q \downarrow & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$



对于 a 到 a' 的道路 $\alpha: I \rightarrow A$, 那么在 **hTop** 中下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F_a & \xrightarrow{g} & F_{f(a)} \\ \tau[\alpha] \downarrow & & \downarrow \tau[f \circ \alpha] \\ F_{a'} & \xrightarrow{f} & F_{f(a')} \end{array}$$

特别地: 如果 $h: f \simeq f'$, $H: g \simeq g'$ 满足如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} D \times I & \xrightarrow{H} & E \\ q \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

那么在 **hTop** 中下图交换:

$$\begin{array}{ccc} & F'_a & \\ g \swarrow & & \searrow g \\ F_{f(a)} & \xrightarrow{\tau[h(a)]} & F_{f'(a)} \end{array}$$

证明. 同样地, 记 $\tilde{\alpha}: F_a \times I \rightarrow D$, $\tilde{\beta}: F_b \times I \rightarrow E$.

和上一个证明一样, 取 $j: F_a \times J^2 \rightarrow E$: 在 $F_a \times I \setminus \{0\}$ 上为 $g \circ \tilde{\alpha}$; 在 $F_a \times I \times \{1\}$ 上为 $\tilde{\beta} \circ (g \times \text{id})$; 在 $F_a \times \{0\} \times I$ 上为 $g \circ \pi_1$. 定义 $k: I^2 \rightarrow B$ 为在每个时间 t 上都是 $f \circ \alpha$, 那么再次运用 CHP 即有:

$$\begin{array}{ccccc} F_a \times J^2 & \xrightarrow{j} & E & & \\ \downarrow & \nearrow \tilde{k} & \downarrow p & & \\ F_a \times I^2 & \xrightarrow{\pi_2} & I^2 & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

那么这里的 \tilde{k} 就是 $g \circ \tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta} \circ (g \times \text{id})$, 因此这就给出了第一个结果的证明。

对于第二个结果, 定义 $\alpha: I \rightarrow A \times I$ 为 $\alpha(t) = (a, t)$ 。那么 $h(a) = h \circ \alpha$, 现在考虑 $\tilde{\alpha}: F_a \rightarrow F_a \times I: \tilde{\alpha}(f) = (f, t)$ 。那么 $\tau[\alpha] = [\text{id}]$, 并且 $\tilde{\alpha}$ 是 α 的提升。

因此由第一的结果即证。 □

第八章 纤维和余纤维序列

8.0.1 基点同伦类

对于带基点空间 X, Y , $[X, Y]$ 定义为其所有保持基点连续映射的保持基点同伦类。 $[X, Y]$ 天然具有一个基点：将所有 X 的元素都映到 Y 点的常值映射。

我们下面讨论 \mathbf{Top}_* 的积和余积：容易验证余积正是一点并 (wedge sum) $X \vee Y$ ；积则是所谓 smash product $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ 。这里：

$$X \vee Y = \{(x, y) | \text{either } x \text{ is the basepoint or } Y \text{ is the basepoint}\}$$

同样，可以定义 $F(X, Y)$ 为所有保持基点的连续映射构成的 Y^X 的子空间。那么直接验证有：

定理 8.0.1 (Smash-Hom 伴随). 存在基点空间之间的自然同构：

$$F(X \wedge Y, Z) = F(X, F(Y, Z))$$

当 X 是带基点的拓扑空间时，其道路连通分支 $\pi_0(X)$ 也是带基点的集合，通常记为 $\pi_0(X, *)$ 。

命题 8.0.2. $[X, Y]$ 作为基点集合与 $\pi_0(F(X, Y))$ 相同。

8.0.2 锥，纬悬，道路，环路

定义 8.0.3 (锥). 对于一般空间 X ，定义 $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$ 。

对于带基点空间 X ，定义 $CX = X \wedge I$ (I 带有基点 1) 即：

$$CX = (X \times I)/((\{*\} \times I) \cup (X \times \{1\}))$$

这相当于将 X 作为一般空间得到的锥 CX 中基点所处的母线商去，使之成为新的基点。

定义 8.0.4 (纬悬). 对于一般空间 X ，定义纬悬 $SX = (X \times I)/\sim$ 。其中 $(x, 0) \sim (y, 0)$; $(x, 1) \sim (y, 1)$ 。

我们将 S^1 视为 $I/\partial I$ ，以及基点 1。对于带基点空间 X ，定义 $\Sigma X = X \wedge S^1$ 。即：

$$\Sigma X = (X \times S^1)/((\{*\} \times S^1) \cup (X \times \{1\}))$$

这相当于将 X 作为一般空间得到的纬悬 ΣX (双锥) 的基点所处的母线商去，使之成为新的基点。这使得双锥的两个顶点变为一个，因此这实际上确实相当于 $X \wedge S^1$ 。



定义 8.0.5 (道路空间). 定义带基点的空间 X 的道路空间 $PX = F(I, X)$, 其中 I 的基点为 0。自然 PX 的基点是到基点 x 的常值路径。

定义 8.0.6 (环路空间). 同样定义带基点的空间 X 的环路空间 $\Omega X = F(S^1, X)$ 。

命题 8.0.7 (Path Space Fibration). 对于基点空间 X , 存在如下 *fibration*:

$$\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{\chi \mapsto \chi(1)} X$$

证明. 直接验证 HLP 即可。 □

在 Smash-Hom 伴随中取 $Y = S^1$ 即可。

定理 8.0.8 (纬悬-环路伴随). 存在基点空间之间的自然同构:

$$F(\Sigma X, Y) \cong F(X, \Omega Y)$$

同样作用到 π_0 上, 就有:

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$$

现在 $[\Sigma X, Y]$ 上也有群结构。给定 $f, g: \Sigma X \rightarrow Y$, 定义

$$(g + f)(x \wedge t) = (g(x) \cdot f(x))(t) = \begin{cases} f(x \wedge 2t) & t \in [0, 1/2] \\ g(x \wedge (2t - 1)) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

这一群结构对应到 $[X, \Omega Y]$ 上是环路的复合。

引理 8.0.9. $[\Sigma X, Y]$ 是群, $[\Sigma^2 X, Y]$ 是 *Abel* 群。

证明. 群结构是简单的验证的。对于 $f, g: \Sigma^2 X \rightarrow Y$ 。由于 $[\Sigma^2 X, Y] \cong [\Sigma X, \Omega Y]$

现在 $[\Sigma X, \Omega Y]$ 上有两个运算: 一个是 $[\Sigma -, -]$ 诱导的运算 \cdot ; 另一个则是 Ω 诱导的环路的复合 $*$ 。

现在考虑 Eckmann-Hilton 论证: $(a \cdot b)(x \wedge t) = \begin{cases} a & \\ b & \end{cases}$, 于是

$$(a \cdot b) * (c \cdot d) = \begin{cases} a \circ c & \\ b \circ d & \end{cases}$$

(这里 \circ 表示它们作为 ΩY 中的元素的环路复合)

然而由定义, 后者就是 $(a * c) \cdot (b * d)$ 。因此由 Eckmann-Hilton 论证, 命题得证。 □

注记. 注意到 \cdot 实际上诱导了 $[X, \Omega(\Omega Y)]$ 的路径复合, Eckmann-Hilton 论证实际上说明了诸多高阶同伦群群运算的定义的等价性。



8.0.3 基点余纤维化

定义 8.0.10 (基点余纤维化). 将 HEP 中的条件修改为每个空间和映射都是保基点的, 就称为基点余纤维化: 准确地说每个映射都要求是保基点的, $(A)X \times I$ 变为 $(A)X \wedge I^+$ (见后文)。这一事实等价于 A 上的保基点同伦可以延拓到 X 上 (成为保基点同伦)。

注记. 直接验证知: 任何基点映射 $i: A \rightarrow X$ 如果在一般意义下是余纤维化, 那么一定是基点余纤维化。

定义 8.0.11 (Nondegenerately based/Well pointed). 称基点空间 X 是 Nondegenerately based, 如果基点到空间的嵌入是一个 (一般意义下的) 余纤维化。

命题 8.0.12. 如果基点空间 A, X 都是 *nondegenerately based* 的, 那么基点映射 $i: A \rightarrow X$ 如果是基点余纤维化, 就一定是一般意义下的余纤维化。

证明. 证明大致思路是构造 NDR 的代表函数, 参见 [KP012, Lemma 1.3.4]。□

本章中接下来的余纤维化都指基点余纤维化。

记 Y_+ 为空间 Y 和一个与之不交的基点的并。因此直接验证知 $X \wedge Y_+ \cong (X \times Y)/(\{*\} \times Y)$ 。

定义 8.0.13 (约化柱). 空间 $X \wedge I_+$ 称为 X 的约化柱, 一个基点同伦 $X \times I \rightarrow Y$ 和基点映射 $X \times I_+ \rightarrow Y$ 是相同的。和前文的情况一样, 这里的约化操作也是将 X 中基点对应的母线变为一点。

因此对于基点映射 $f: X \rightarrow Y$, 我们记基点映射柱为 $Y \cup (X \wedge I_+)$ 。

和无基点的情况一样, 对于基点余纤维化只需要检验 $Mi = Y \cup_f (X \wedge I_+)$ 作为 Universal diagram 即可。这是因为这里的 Mi 依然是推出, 那么应用泛性质即证。

8.0.4 余纤维序列

定义 8.0.14 (同伦余纤维). 对于一个基点映射 $f: X \rightarrow Y$, 定义同伦余纤维

$$Cf = Y \cup_f CX = Mf/j(X)$$

其中 $j: x \mapsto (x, 1)$ 。

容易意识到这就在基点范畴中的推出。

如同一般情况, 任何基点映射也可以拆成余纤维化和同伦等价的复合: $j: X \rightarrow Mf; r: Mf \rightarrow Y$ 。

现在考虑嵌入 $i: Y \rightarrow Cf$, 它是 $X \rightarrow CX: x \mapsto x \wedge 0$ 的推出。由于 $X \rightarrow CX$ 是余纤维化: 直接验证 NDR-pair, 因此 $Y \rightarrow Cf$ 也是如此。现在取

$$\pi: Cf \rightarrow Cf/Y \cong \Sigma X$$

最后一个同构是因为 Cf 是将 Y 和 CX 的底面粘接, 而商去 Y 则直接变为纬悬 (约化双锥)。

那么考虑序列:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{\pi} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma i} \Sigma Cf \xrightarrow{-\Sigma \pi} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \longrightarrow \dots$$

其中 $-\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge (1 - t)$, 称为余纤维序列。



定理 8.0.15. 对于任何基点空间 Z ，余纤维序列诱导了基点集的正合列：

$$[\Sigma Cf, Z] \longrightarrow [\Sigma Y, Z] \longrightarrow [\Sigma X, Z] \longrightarrow [Cf, Z] \longrightarrow [Y, Z] \longrightarrow [X, Z]$$

并且在 $[\Sigma X, Z]$ 以左是群正合列， $[\Sigma^2 X]$ 以左是 $Abel$ 群正合列。

最右侧 $[Y, Z]$ 处的正合性是可以直接验证的。并且这一验证过程可以推广到任何 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf$ 上，其中 i 是 $f(Y)$ 到 Cf 的嵌入。

因此我们只需要证明正合列中的每一组相邻两个映射都是上一段提到的映射。[Claim.]

首先指出：交换 Σ 和 C 的坐标诱导出了同胚：

$$\Sigma Cf \cong C(\Sigma f)$$

使得

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma i(f)} & \Sigma Cf & \xrightarrow{\Sigma \pi(f)} & \Sigma^2 X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \tau \\ \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y & \xrightarrow{i(\Sigma f)} & C\Sigma f & \xrightarrow{\pi(\Sigma f)} & \Sigma^2 X \end{array}$$

这里 τ 是交换两个纬悬的坐标，容易验证 τ 和 $-\text{id}$ 同胚。

因此使用这个结论知只需要对 $(i, \pi), (\pi, -\Sigma)$ 验证 **Claim.** 即可。

首先证明两个引理：

引理 8.0.16. $i: A \rightarrow X$ 是余纤维化，那么商映射 $Ci \cong Ci/CA \cong X/A$ 是基点同伦等价。

证明. 由于 i 是纤维化，有收缩 $r: X \wedge I_+ \rightarrow Mi$ 。现在考虑复合 $X \hookrightarrow_{\{1\}} X \wedge I_+ \rightarrow Mi = X \cup_i (A \wedge I_+) \rightarrow Ci$ 。

这个映射将 A 映至基点，因此由商空间泛性质，有 $\phi: X/A \rightarrow Ci$ 。容易验证 ϕ 和 ψ 是同伦逆。□

引理 8.0.17. 在同伦意义下有如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i(f)} & Cf & \xrightarrow{\pi(f)} & \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \dots \\ & & & & \searrow i(i(f)) & \uparrow \psi & \nearrow \pi(i(f)) \\ & & & & & Ci(f) & \end{array}$$

那么应用这两个引理即证。

8.0.5 基点纤维化

这几乎和前文是对偶的。同样我们可以定义基点纤维化，它一定也是一般意义下的纤维化：因为 $(Y_+ \wedge I_+) \cong (Y \times I)_+$ 。如果 $p: E \rightarrow B$ 是基点映射，并且是一般意义下的纤维化，那么对于 nondegenerately-based 空间 Y 作为 test diagram 的空间，它满足 CHP。

注意到 $X \wedge I_+ \rightarrow Y$ 的基点同伦和 $X \rightarrow F(I_+, Y) = Y^I$ （只不过有了基点的变化）因此基点版本的 Mapping path space 和一般情况是一样的，定义：

$$Nf = \{(x, \chi) | \chi(1) = f(x)\} \subseteq x \times Y^I$$

和一般情况一样，universal test diagram 是只需要验证道路提升 $s: Np \rightarrow F(I_+, E)$ 。



8.0.6 纤维序列

定义 8.0.18 (同伦纤维). 对于基点映射 $f : X \rightarrow Y$, 定义同伦纤维 $Ff = X \times_f PY = \{(x, \chi) | f(x) = \chi(1)\} \subseteq X \times PY$. 即拉回图表:

$$\begin{array}{ccc} Ff & \longrightarrow & PY \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

定义 $\iota : \Omega Y \rightarrow Ff$ 为嵌入: $\iota(\chi) = (*, \chi)$. 那么有纤维序列:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega \iota} \Omega Ff \xrightarrow{-\Omega \pi} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\iota} Ff \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

并且对偶地有:

定理 8.0.19.

$$\cdots \longrightarrow [Z, \Omega Ff] \longrightarrow [Z, \Omega X] \longrightarrow [Z, \Omega Y] \longrightarrow [Z, Ff] \longrightarrow [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$$

并且同样是基点集合的正合列, 以及在 $1/2$ 阶项以左分别变为群正合列和 *Abel* 群长正合列。

8.0.7 两个序列的联系

考虑伴随函子的单位和与单位:

$$\eta : X \rightarrow \Omega \Sigma X; \varepsilon : \Sigma \Omega X \rightarrow X$$

以具体形式写出来, 就是 η 将 X 映成如下环路: $\eta(x)(t) = x \wedge t$; $\varepsilon(\chi \wedge t) = \chi t$.

因此对于一般的 $f : X \rightarrow Y$, 依然可以定义单位和余单位:

$$\eta : Ff \rightarrow \Omega Cf; \varepsilon : \Sigma Ff \rightarrow Cf$$

其中

$$\eta(x, \gamma)(t) = \varepsilon(x, \gamma, t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \leq 1/2; \\ (x, 2t - 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

引理 8.0.20. 对于基点空间映射 $f : X \rightarrow Y$, 如下图表在同伦意义下交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} \Sigma \Omega Ff & \xrightarrow{\Sigma \Omega p} & \Sigma \Omega X & \xrightarrow{\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega Y & \xrightarrow{\Sigma \iota} & \Sigma Ff & \xrightarrow{\Sigma p} & \Sigma X \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \parallel \\ \Omega Y & \xrightarrow{\iota} & Ff & \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Cf & \xrightarrow{\pi} & \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta & & \\ \Omega Y & \xrightarrow{\Omega i} & \Omega Cf & \xrightarrow{\Omega \pi} & \Omega \Sigma X & \xrightarrow{\Omega \Sigma f} & \Omega \Sigma Y & \xrightarrow{\Omega \Sigma i} & \Omega \Sigma Cf \end{array}$$

引理 8.0.21. 对于基点空间映射 $f : X \rightarrow Y$, 下列图表在同伦意义下交换, 其中 $j : X \rightarrow Mf$ 是嵌入, $r : Mf \rightarrow Y$ 是收缩, π 由商映射 $Mf \rightarrow Cf$ 诱导。

$$\begin{array}{ccc} Ff = X \times_j PMf & \xrightarrow{Fr=id \times Pr} & X \times_f PY = Ff \\ & \searrow \pi & \swarrow \eta \\ & \Omega Cf & \end{array}$$



第九章 高阶同伦群

9.0.1 定义

定义 9.0.1 (高阶同伦群). 给定基点空间 $(X, *)$, 对于 $n \geq 0$, 定义 $\pi_n(X) = \pi_n(X, *) = [S^n, X]$ 为全体基点映射同伦类的集合。如同上一章第二节所叙述的那样, 当 $n \geq 1$ 时有群结构, $n \geq 2$ 时有 Abel 群结构。

$$\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X) = \cdots = \pi_0(\Omega^n X)$$

定义 9.0.2 (相对同伦群). 给定 $* \in A \subseteq X$, 嵌入 $A \rightarrow X$ 的同伦纤维是 $P(X; *, A)$: 所有 $*$ 到 A 的 X 中道路构成的空间。

对于 $n \geq 1$, 定义 $\pi_n(X, A) = \pi_n(X, A, *) = \pi_{n-1}P(X; *, A)$ 。

9.0.2 空间偶对长正合列

给定 $* \in A \subseteq X$, 嵌入 $A \rightarrow X$ 诱导了纤维长正合列:

$$\cdots \rightarrow \Omega^2 A \rightarrow \Omega^2 X \rightarrow \Omega F i \rightarrow \Omega A \rightarrow \Omega X \rightarrow F i \rightarrow A \rightarrow X$$

那么将长正合列作用上 $\pi_0(-) = [S^0, -]$, 就得到了基点集合/群/Abel 群长正合列:

$$\cdots \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$$

我们下面指出这个长正合列中的每一个映射具体形式如何。

定义 $J^n = (\partial I^{n-1} \times I) \cup (I^{n-1} \times \{0\})$, 那么

$$\pi_n(X, A, *) = [S^{n-1}, P(X; *, A)] = [(I^n, \partial I^n, J^n), (X, A, *)]$$

因此 ∂ 为将 $(I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, *)$ 限制为 $(I^{n-1} \times \{1\}, \partial I^{n-1} \times \{1\}) \rightarrow (A, *)$ 。其余二者是自然诱导的。

9.0.3 纤维化长正合列

给定纤维化 $p: E \rightarrow B$, B 道路连通。固定 $* \in B, F = p^{-1}(*)$ 。选取 E 的基点 $* \in F$ 。那么考虑同伦纤维 $Fp: \phi: F \rightarrow Fp$ 是同伦等价, 并且一下图表中从右往左的 $3k+1, 3k+3$ 正方形是交换的, 第 $3k+2$ 个正方形是在同伦意义下是交换的。

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega^2 E & \xrightarrow{-\Omega \iota} & \Omega F i & \xrightarrow{-\Omega p_1} & \Omega F & \xrightarrow{-\Omega i} & \Omega E & \xrightarrow{\iota} & F i & \xrightarrow{p_1} & F & \xrightarrow{i} & E \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow -\Omega p & & \downarrow \Omega \phi & & \downarrow \text{id} & & \downarrow -p & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id} \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega^2 E & \xrightarrow{\Omega^2 p} & \Omega^2 B & \xrightarrow{-\Omega \iota} & \Omega F p & \xrightarrow{-\Omega \pi} & \Omega E & \xrightarrow{-\Omega p} & \Omega B & \xrightarrow{\iota} & F p & \longrightarrow & E \end{array}$$



$Fi = P(E; *, F)$, $p(\xi) = p \circ \xi$ 。第二个方块的同伦由 $h(\xi, t) = (\xi(t), p(\xi[1, t]))$ 给出: $h : \iota \circ (-p) \simeq \phi \circ p_1$, 其中 $\xi[1, t](s) = \xi(1 - s + st)$ 。

现在将这个图表作用上 $[S^0, -]$ 转换为同伦群, 利用 5-引理即有:

$$\pi_n(E, F) = [S^{n-1}, P(E; *, F)] = [S^{n-1}, Fi] \xrightarrow{\simeq p_*} [S^{n-1}, \Omega B] = [S^n, B] = \pi_n(B)$$

现在考虑上述图表的第二行, 并将 $\pi_n(Fp)$ 利用 ϕ_* 变为 $\pi_n(F)$, 就有长正合列:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow \{*\}$$

9.0.4 计算

X 可缩, 则 $\pi_n(X) = 0, \forall n \geq 0$: $\pi_n(-)$ 同伦不变。

X 离散, 则 $\pi_n(X) = 0, \forall n \geq 0$: 离散空间可缩。

$p: E \rightarrow B$ 是覆叠, 则 $p_*: \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B)$ 是同构对于 $\forall n \geq 2$: 纤维化长正合列。

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}, \pi_n(S^1) = 0, n \neq 1$: 考虑覆叠 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 。

$i \geq 2, \pi_1(\mathbb{R}P^i) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \pi_n(\mathbb{R}P^i) \cong \pi_n(S^i), n \neq 1$: 考虑覆叠 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 。

$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$: 乘积空间泛性质。

引理 9.0.3. $i < n$ 则 $\pi_i(S^n) = 0$ 。

证明. 对 $f: S^i \rightarrow S^n$ 应用光滑逼近 (Whitney), 就可以将 f 同伦至基点。□

定义 9.0.4 (Hopf 纤维化). 将 S^3 视为 \mathbb{C}^2 的单位球, 定义 $\eta: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2: (z_1, z_2) \mapsto [z_1, z_2]$ 。因此就有了一个纤维化 $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ 。

类似地考虑四元数和八元数, 有 $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4; S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$ 。

于是考虑纤维化长正合列:

引理 9.0.5. $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}, \pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2), \forall n \geq 3$ 。

引理 9.0.6. X 是嵌入序列 $X_i \rightarrow X_{i+1}$ 的余极限, 那么自然的态射 $\varinjlim_i \pi_n(X_i) \cong \pi_n(X)$ 是同构。

证明. 这是一个点集拓扑事实: 如果 K 紧, $K \rightarrow X$ 的像一定落在某个 X_i 中。□

9.0.5 基点变换

$\pi_n(X, x) = [(S^n, *), (X, x)]$, 由于 $* \rightarrow S^n$ 是余纤维化, 因此: $p: X^{S^n} \rightarrow X$ (取基点的像) 是纤维化。

于是 $\pi_n(X, x)$ 就是 $\pi_0(F_x)$, 其中 F_x 是纤维化 p 在 x 处的纤维。并且 $F_x = \Omega^n X(w.r.t.x)$ 。回忆纤维变换的内容, 一个道路同伦类 $[\xi]: I \rightarrow X: x \rightarrow x'$ 诱导了同伦等价 $\tau[\xi]: F_x \rightarrow F_{x'}$ 。

因此取 $\pi_0(-)$ 后这就变成了一个双射 $\tau[\xi]: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, x')$ 。

接下来验证这是群同构: 为此我们给出 π_n 上运算的另一个解释: 给定 $f, g: S^n \rightarrow X$, 考虑:

$$S^n \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \rightarrow X$$

这里 $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ 是将上下半球映到两个一点并分支上, $X \vee X \rightarrow X$ 将两个分支都映回 X 。因此现在我们有纤维化 $X^{S^n \vee S^n} \rightarrow X$ 到 $X^{S^n} \rightarrow X$ 的映射。

第一个纤维化中 x 的纤维是 $F_x \times F_x$, 进一步可以看做 $\Omega^n X \times \Omega^n X \rightarrow \Omega^n X$: 这就是同伦群的群结构。因此利用纤维变换的自然性就可以得到前文双射是群同态。

上述讨论对相对同伦群是同理的, 因此最终得到结论:

推论 9.0.7. 在非自然同构意义下, 同伦群/相对同伦群和基点选择无关 (在同一路径连通分支内)。进一步, 同伦等价的空间和空间对诱导了所有同伦群的同构。

注记. 对于 CW 复形, 这一事实的逆命题也成立。

9.0.6 n -等价, 弱等价

定义 9.0.8. $e: Y \rightarrow Z$ 是 n -等价, 如果对于每个 y :

$$e_*: \pi_q(Y, y) \rightarrow \pi_q(Z, e(y))$$

在 $q < n$ 是同构, $q = n$ 时是单射, 则称 n -等价。

如果对于任何 n , $e: Y \rightarrow Z$ 都是 n -等价, 那么称为弱等价。

定义 9.0.9. [相对同伦] $f, f': (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 满足在 A 上 $f = f'$ 。称它们同伦 $rel A$, 如果其同伦 h 在 A 上是恒等的。

现在取 $CX = X \times I / X \times \{1\}$ 为未约化的锥, 因此 $\pi_{n+1}(X, x)$ 可以视作映射 $(CS^n, S^n) \rightarrow (X, x)$ 的 $rel S^n$ 同伦类。那么我们有如下的 n -等价判别:

引理 9.0.10 (($n+1$)-等价判别). $e: Y \rightarrow Z$, 下列条件等价:

1. e 是 $(n+1)$ -等价。
2. 给定 $f: CS^n \rightarrow Z, g: S^n \rightarrow Y, h: S^n \times I \rightarrow Z$, 满足 $f|_{S^n} = h \circ i_0, e \circ g = h \circ i_1$ 。存在 \tilde{h}, \tilde{g} 使得图表交换。

$$\begin{array}{ccccc}
 S^n & \xrightarrow{i_0} & S^n \times I & \xleftarrow{i_1} & S^n \\
 \downarrow & \nearrow f & \downarrow h & \nwarrow g & \downarrow \\
 CS^n & \xrightarrow{i_0} & CS^n \times I & \xleftarrow{i_1} & CS^n \\
 & & \downarrow e & & \\
 & & Z & \xleftarrow{e} & Y
 \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a more complex diagram with additional arrows and labels like \tilde{h} and \tilde{g} .)

3. 在 2 中令 $f|_{S^n} = e \circ g$, h 是常值同伦时, 2 的结论总成立。

证明. 略。[May99, Page 68]

□



9.0.7 问题

练习 9.1. $n \geq 2$, 那么:

$$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$$

证明. 考虑空间偶对长正合列:

$$\pi_{n+1}(X \times Y) \rightarrow \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \rightarrow \pi_n(X \vee Y) \rightarrow \pi_n(X \times Y) \rightarrow \pi_n(X \times Y, X \vee Y)$$

我们来证明这个正合列在第三项分裂: 利用 Splitting Lemma, 只需证明存在右提升。

这是因为 $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$; 而 $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X \wedge Y), \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X \wedge Y)$ 由直和泛性质诱导出了 $\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X \wedge Y)$ 。直接验证知这的确是提升同态。

下面我们还需要说明第一个和第四个态射是零映射。然而这是简单的: 记四个态射从左到右分别为 i_1, \dots, i_4 , 提升同态为 p 。那么 $i_4 = i_4 i_3 p = 0$, 对于 i_1 同理, 这就证明了结果。 \square

练习 9.2. 计算 $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}), n \geq 2$ 。并且说明商映射 $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1}, *)$ 并没有诱导相对同伦群 $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ 到商空间同伦群 $\pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1})$ 的同构。

证明. 考虑空间偶对长正合列:

$$\pi_n(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}P^n)$$

假定 $n = 2$, 上述序列变为:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

假定 $n = 3$, 上述序列变为:

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_3(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

假定 $n \geq 4$, 那么第一项利用 Freudenthal 纬悬定理变为 $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。因此上述序列变为:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

第一个态射一定是零映射, 因此 $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 。

进一步地, 由于 $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^n$, 于是 $\pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}, n \geq 4$, 因此这的确没有诱导出同构。 \square

练习 9.3. 计算 $\mathbb{C}P^n$ 的同伦群。

证明. 由于有纤维化 $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, 因此考虑纤维化长正合列:

$$\pi_n(\mathbb{C}^*) \rightarrow \pi_n(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{C}^*)$$

当 $n = 2$ 时, 上述序列变为:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

因此 $\pi_2(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Z}$ 。

当 $n \geq 3$ 时, 上述序列变为:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_n(\mathbb{C}P^n) \rightarrow 0$$

因此 $\pi_n(\mathbb{C}P^n) = 0$ 。 □

练习 9.4. $\pi_7(S^4)$ 有无限阶元素。

证明. 考虑 Hopf 纤维化 $S^3 \rightarrow S^1 \rightarrow S^4$ 。有正合列:

$$\pi_7(S^3) \rightarrow \pi_7(S^1) \rightarrow \pi_7(S^4)$$

即

$$\pi_7(S^3) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_7(S^4)$$

现在由于 $S^3 \hookrightarrow S^7$ 的嵌入映射是零伦的, 因此短正合列变为 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_7(S^4)$, 因此这就证明了结果。 □

练习 9.5. 计算 $\mathbb{R}P^\infty$ 和 $\mathbb{C}P^\infty$ 的同伦群。

证明. $\mathbb{R}P^\infty$ 有可缩空间 S^∞ 的覆叠, 那么其同伦群除了在一阶为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 外均为 0。

$\mathbb{C}P^\infty$ 满足纤维丛 $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, 因此只有 2 阶同伦群非平凡, 为 \mathbb{Z} 。 □

第十章 CW 复形

10.0.1 定义

定义 10.0.1 (CW 复形).

1. 一个 CW 复形 X 是一个拓扑空间 X , 满足它是一组上升子空间 X^n 的并。这些子空间满足: X^0 是离散点集; X^{n+1} 是将 X^n 和 D^{n+1} 粘起来。即取为拓扑空间的推出 $X^n \cup_j (J_{n+1} \times D^{n+1})$, 其中 J_{n+1} 是若干粘结函数 $j: S^n (= \partial D^{n+1}) \rightarrow X^n$ 的离散点集。每个 $D^{n+1} \rightarrow X$ 都称为一个胞腔。 X^n 称为拓扑空间 X 的 n - 骨架。

2. 更一般地, 对于 X 的子空间 A , 定义相对 CW 复形 (X, A) 。这里 X^0 取为 A 和 (可能空的) 离散点集的并。接着按照同样的方式粘结胞腔定义 $(X, A)^n$ (或简单记成 X^n): 此时称相对 n - 骨架。

3. 称 (X, A) 维数 $\leq n$, 如果 $X = X^n$ (注意取 A 为空时即退化为普通 CW 复形)

4. 称 CW 复形 X 的子复形 A 是 X 的一个子空间, 并且满足自身也是一个 CW 复形。同时每个胞腔 $D^n \rightarrow A$ 嵌入到 X 中也是 X 的胞腔。这相当于说: A 是 X 的若干胞腔的并。 (X, A) 当然也可以此时看做相对 CW 复形。

5. 相对 CW 复形之间的映射称为胞腔映射, 如果 $f(X^n) \subseteq Y^n, \forall n$ 。

我们有如下结果:

定理 10.0.2 (Closure-finite+Weak topology). 一个 Hausdorff 空间 X 同胚于一个 CW 复形 \iff 存在 X 的划分成为若干开胞腔 $e_\alpha^{k_0}$, 每个对应的闭包 e_α^k 满足:

对于每个 e_α^k 。存在连续满射 $g_\alpha^k: D^k \rightarrow e_\alpha^k$, 使得 $g_\alpha^k: B^k \rightarrow e_\alpha^{k_0}$ 是同胚; $g_\alpha^k(\partial D^k)$ 被有限个胞腔维数低于 k 的闭胞腔覆盖。(Closure-finite)

X 的子集是闭的 \iff 它与每个闭胞腔的交是闭的。(Weak Topology)

在构造 CW 复形时, 同样由于 X 是 X^n 的余极限拓扑, 那么 X 的子空间是闭的 \iff 它和任何 X^n 的交都是闭的。

下面是 CW 复形的两个拓扑性质:

命题 10.0.3. CW 复形是一个局部可缩拓扑空间。

推论 10.0.4. CW 复形是局部可缩的, 进而局部道路连通。因此 CW 复形道路连通 \iff 连通。

命题 10.0.5. CW 复形是一个正规仿紧空间。

例子.

1. 图是 1 维 CW 复形
2. $\mathbb{R}P^2, T, K$ 是 2 维 CW 复形
3. S^n 是 CW 复形: 将 D^n 的边界粘至单点集 $\{*\}$ 上。
4. $\mathbb{R}P^n$ 是 CW 复形: 它是 $D^0 \cup D^1 \cup \dots \cup D^m$. $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ 有二重覆叠。于是可以验证 $\mathbb{R}P^n = D^n \cup_j \mathbb{R}P^{n-1}$, 这里粘接函数 j 正是二重覆叠。
5. $\mathbb{C}P^n$ 是 CW 复形: 它是 $D^0 \cup D^2 \cup \dots \cup D^{2m}$. 粘结函数是纤维丛 $S^1 \rightarrow S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ 诱导的。

10.0.2 CW 复形上的拓扑操作

引理 10.0.6. 对于相对 CW 复形 (X, A) , X/A 是一个 CW 复形, 其中顶点集是 A 对应的点和原有的点, 并且每个 (X, A) 中的 n -胞腔对应着商空间的一个 n -胞腔。

引理 10.0.7. 给定一族 CW 复形 X_i , 基点为顶点。那么它们的一点并还是 CW 复形, 并且 X_i 是新 CW 复形的子复形。

引理 10.0.8. A 是 CW 复形 X 的子复形, Y 是 CW 复形, $f: A \rightarrow Y$ 是胞腔映射。那么 $Y \cup_f X$ 是 CW 复形: 它包含 Y 并使得 Y 成为子复形。每个不在 A 中的 X 胞腔都对应了一个新复形的胞腔, 并且: $(Y \cup_f X)/Y \cong X/A$ 。

引理 10.0.9. CW 复形 X 的子复形 X_i 上升列的余极限仍然是 CW 复形。

引理 10.0.10. CW 复形的乘积是 CW 复形, 并且每个 n -胞腔都是一个 p -胞腔和一个 $(n-p)$ -胞腔的配对。

证明. $(D^n \times S^{n-1}) \cong (D^p \times D^q, (D^p \times S^{q-1}) \cup (S^{p-1} \times D^q))$. □

因此作为推论: 给定 CW 复形 X , $X \times I$ 是 CW 复形: 并且每个 n 胞腔对应了一个 $n+1$ 胞腔。

定义 10.0.11. 称胞腔映射 $f, f': X \rightarrow Y$ 之间的胞腔同伦是一个胞腔映射 $X \times I \rightarrow Y$ 满足同伦性质。

10.0.3 HELP, Whitehead 定理

定理 10.0.12 (HELP). 给定一个相对 CW 复形 (X, A) , 维数 $\leq n$, $e: Y \rightarrow Z$ 是 n -等价。那么给定 $f: X \rightarrow Z, g: A \rightarrow Y, h: A \times I \rightarrow Z$, 满足交换性, 那么存在 \tilde{g}, \tilde{h} 使得整个图表交换。

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I & \xleftarrow{i_1} & A \\
 \downarrow & & \swarrow h & & \swarrow g \\
 & & Z & \xleftarrow{e} & Y \\
 & \nearrow f & \nwarrow \tilde{h} & & \nwarrow \tilde{g} \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X
 \end{array}$$

证明. 利用上一章节的引理 9.0.10 即可。 □



特别地, 如果 e 是恒等映射, 那么 $A \rightarrow X$ 是余纤维化。现在记 $[X, Y]$ 为所有无基点的映射同伦类。那么有:

定理 10.0.13 (Whitehead 定理 1). 对于 CW 复形 X , $e: Y \rightarrow Z$ 是 n -等价, 那么 $e_*: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ 是双射, 如果 $\dim X < n$; 是满射如果 $\dim X = n$ 。

证明. 满射通过在 HELP 上取 (X, \emptyset) 得到。单射通过取 $(X \times I, X \times \partial I)$, h 为常值同伦得到。□

定理 10.0.14 (Whitehead 定理 2). 两个维数低于 n 的 CW 复形之间的 n -等价是同伦等价。进一步地, CW 复形之间的弱等价是同伦等价。

证明. $e: Y \rightarrow Z$ 应用定理 10.0.13, 那么 $e_*: [Z, Y] \rightarrow [Z, Z]$ 是双射, 于是存在 $f: Z \rightarrow Y: e \circ f \simeq \text{id}$, $e \circ f \circ e \simeq e$ 。由于 $e_*: [Y, Y] \rightarrow [Y, Z]$ 是双射, 这就说明了 $f \circ e \simeq \text{id}$ 。□

对于 CW 复形, 较低阶数的同伦群完全决定了 CW 复形的同伦等价类。这是很令人惊讶的。

上述结果还说明了 CW 复形对总是性质良好的:

命题 10.0.15. 给定相对 CW 复形 (X, A) , 嵌入映射 $i: A \rightarrow X$ 是 *cofibration*。

证明. 由定理 10.0.12, 在图表中取 $e = \text{id}$, $g = h|_1$, 那么这个图表就变成了 Cofibration 图表。□

进一步, 比 cofibration 更强地还有

命题 10.0.16. 给定 CW 复形偶对 (X, A) , 存在强形变收缩 $X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ 。

证明. 由于 $r: D^n \times I \rightarrow D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$ 是显然的强形变收缩, 这就给出了骨架的强形变收缩:

$$X^n \times I \rightarrow X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$$

下面利用 $[2^{t-1}, 2^t]$ 对 $[0, 1]$ 的分划, 我们完成对所有维度骨架的强形变收缩。□

推论 10.0.17. 1. 对于同伦的粘结映射 $f, g: \coprod S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$, 它们诱导的粘结 $\coprod e_n \cup_f X_{n-1}, \coprod e_n \cup_g X_{n-1}$ 是相对 X_{n-1} 同伦的。

2. 对于连通复形 X , $x_0 \neq x_1$ 为其中两点, 那么 $X/(x_0 \sim x_1) \cong X \vee S^1$ 。

证明. 1. $(\coprod D^n, \coprod S^{n-1})$ 的情况可以推广为一般的 CW 复形偶对 (X_1, A) 。现在考虑 $X_{n-1} \cup_F (X_1 \times I)$, 它包含 $X_{n-1} \cup_f X_1, X_{n-1} \cup_g X_1$ 。现在 $X_1 \times I \rightarrow X_1 \times \{0\} \cup A \times I$ 的强形变收缩 (前述命题) 给出了 $X_0 \cup_F (X_1 \times I) \rightarrow X_0 \cup_f X_1$ 的强形变收缩, 对另一侧同理。这就得到了结果。

2. 考虑将 $D^1 = I$ 的两端粘结到 x_0, x_1 上, 以及均粘结到 x_0 上。Cofibration 性质保证前者等同于 $X/(x_0 \sim x_1)$, 而后者是 $X \vee S^1$ 。□



10.0.4 胞腔逼近定理

定义 10.0.18 (n -连通). 称空间 X 是 n -连通的. 如果对于任何 $x \in X, 0 \leq q \leq n, \pi_q(X, x) = 0$. 称空间偶对 (X, A) 是 n -连通的, 如果 $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$ 是满射, 并且对于任何 $1 \leq q \leq n, a \in A, \pi_q(X, A, a) = 0$. 这等价于 $A \rightarrow X$ 是 n -等价. (考虑空间偶对长正合列)

引理 10.0.19. 一个相对 CW 复形 (X, A) 如果不存在 m -胞腔 ($m \leq n$, 那么它是 n -连通的. 特别地, (X, X^n) 作为相对 CW 复形是 n -连通的。

证明. 考虑 $f: (I^q, \partial I^q, J^q) \rightarrow (X, A, a), q \leq n$. 由于 f 的像是紧的, 我们只需考虑 (X, A) 的胞腔个数有限的情况. 进一步通过对胞腔归纳, 只需假定 $X = A \cup_j D^r, r > n$. 然而基于和 $\pi_q(S^n) = 0$ 相同的原因, 命题得证. \square

定理 10.0.20 (胞腔逼近定理). 相对 CW 复形 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 之间的映射和一个胞腔映射 $rel A$ 同伦等价。

推论 10.0.21. 对于 CW 复形 X, Y , 任何 $f: X \rightarrow Y$ 都同伦于一个胞腔映射, 并且任何两个同伦的胞腔映射都是胞腔同伦的。

10.0.5 空间的 CW 逼近

接下来是描述空间在弱等价意义下的 CW 逼近。

首先是单个空间的情况:

定理 10.0.22 (空间 CW 逼近). 对于任何拓扑空间 X , 存在 CW 复形 ΓX : 这里 Γ 是一个 $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{hTop}$ 的函子. 存在一个自然变换 $\gamma: \Gamma \rightarrow \text{id}$, 满足 $\gamma: \Gamma X \rightarrow X$ 是弱同伦等价。

函子性的描述可以变为: 对于任何 $f: X \rightarrow Y, \gamma: \Gamma Y \rightarrow Y, \gamma$ 和 Γf 交换。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma X & \xrightarrow{\Gamma f} & \Gamma Y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

特别地, 如果 X 是 n -连通的, ΓX 可以被选定为顶点只有一个并且不含 $1 \sim n$ 维的胞腔。

证明. 简单来说, Γ 的构造是利用 $\pi_q(X)$ 的信息不断粘接胞腔实现的. \square

然后是偶对的情况:

定理 10.0.23 (空间偶对 CW 逼近). 对于任何空间偶对 (X, A) , CW 逼近 $\gamma: \Gamma A \rightarrow A$, 存在 CW 逼近 $\Gamma X \rightarrow X$ 使得 ΓA 是 ΓX 的子复形, 两个 γ 在 ΓA 上 agree。

和单个空间一样, 它满足:

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma X, \Gamma A) & \xrightarrow{\Gamma f} & (\Gamma Y, \Gamma B) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \end{array}$$

以及 (X, A) 是 n -连通的, 则 $(\Gamma X, \Gamma A)$ 可以被选取为不含相对 q 胞腔, $q \leq n$ 。

更进一步地,我们还会处理 triad 的情况: $(X; A, B)$ 。这和相对同伦群里出现的 triple (X, A, B) 不一样: 后者要求 $X \supseteq A \supseteq B$ 。这里 triad 只要求 A, B 是 X 的子空间。

定义 10.0.24. 称 triad $(X; A, B)$ 是 excisive 的, 如果 $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ 。进一步, 称 $(X; A, B)$ 是 CW triad, 如果 A, B 是 X 的子复形, 并且满足 $X = A \cup B$ 。

定理 10.0.25 (空间 triad CW 逼近). 给定一个 excisive triad $(X; A, B)$, $C = A \cap B$ 。那么存在一个 CW triad $(\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B)$ 以及 triad 之间映射:

$$\gamma: (\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B) \rightarrow (X; A, B)$$

使得 $\Gamma C = \Gamma A \cap \Gamma B$, 并且每个 $\gamma: \Gamma T \rightarrow T; T = X, A, B, C$ 都是弱等价。

如果 (A, C) 是 n -连通的, 那么 $(\Gamma A, \Gamma C)$ 可以被选择成为不含 $q \leq n$ 的胞腔。

同样的, 函子性和自然变换依然成立。

10.0.6 问题

练习 10.1. $X = \{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ 。证明 X 不和 CW 复形同伦。

证明. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是同伦等价, Y 是 CW 复形。那么 $f(0) \in Y$ 存在一个可缩邻域, 因而是道路连通的, 设这个邻域是 V 。那么存在 0 的邻域 U 使得 $f(U) \rightarrow f(V)$, U 一定不是道路连通的。

因此 $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ 不是单射。因此 f 不是同伦等价。 \square

练习 10.2. 给定 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, g \circ f \simeq \text{id}$ 。如果 Y 是 CW 复形, 那么 X 和 CW 复形同伦等价。

证明. 考虑 CW 复形的空间逼近:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightleftharpoons[f]{g} & Y \\ \gamma_X \uparrow & & \uparrow \gamma_Y \\ \Gamma X & \xrightleftharpoons[\Gamma f]{\Gamma g} & \Gamma Y \end{array}$$

注意到 γ_Y 作为 CW 复形的弱同伦等价, 它一定是同伦等价。因此 γ_X 有同伦逆 $\Gamma g \circ \gamma_Y \circ f$: 这可以利用交换图直接验证。 \square

定义 10.0.26 (Euler 示性数). 对于一个有限 CW 复形 X , 定义 $\chi(X) = \sum (-1)^n \gamma_n(X)$ 。

这里 $\gamma_n(X)$ 是指 X 的 n -胞腔个数。

假定 A 是 X 的子复形, $f: A \rightarrow Y$ 是胞腔映射, 取 $Y \cup_f X$ 为 f 何 $A \hookrightarrow X$ 的推出。

练习 10.3. $Y \cup_f X$ 是 CW 复形并且 Y 是子复形, X/A 是其商复形。给出 $\chi(A), \chi(X), \chi(Y), \chi(Y \cup_f X)$ 之间的公式。

证明. $\chi(Y \cup_f X) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(A)$ 。

更进一步还有

$$\chi(X, A) = \chi(X) - \chi(A)$$

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

$$\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) = 1$$

□

第十一章 同伦切除定理和 Freudenthal 纬悬定理

11.0.1 同伦切除定理

在计算同伦群时我们发现, 给定 excisive triad $(X; A, B)$, $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ 并不能诱导出同伦群之间的同构。但是在一定阶数时我们的确有这样的结果成立。

定义 11.0.1 (空间偶对的 n -等价). 一个偶对的映射 $f : (A, C) \rightarrow (X, B)$ 是 n -等价, 如果:

$$(f_*)^{-1}(\text{Im}(\pi_0(B) \rightarrow \pi_0(X))) = \text{Im}(\pi_0(C) \rightarrow \pi_0(A))$$

并且对于任何 C 中选取的基点, 都有:

$$f_* : \pi_q(A, C) \rightarrow \pi_q(X, B)$$

在 $q < n$ 时是双射, $q = n$ 时是满射。

再次回忆:

定义 11.0.2 (n -连通). 称空间 X 是 n -连通的. 如果对于任何 $x \in X, 0 \leq q \leq n, \pi_q(X, x) = 0$. 称空间偶对 (X, A) 是 n -连通的, 如果 $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$ 是满射, 并且对于任何 $1 \leq q \leq n, a \in A, \pi_q(X, A, a) = 0$. 这等价于 $A \rightarrow X$ 是 n -等价。(考虑空间偶对长正合列)

那么:

定理 11.0.3 (同伦切除定理). $(X; A, B)$ 是 excisive triad, $C = A \cap B$ 非空. 假定 (A, C) 是 $(m-1)$ -连通的, (B, C) 是 $(n-1)$ -连通的, $m \geq 2, n \geq 1$. 那么 $(A, C) \rightarrow (X, B)$ 是 $(m+n-2)$ -等价。

定理 11.0.4 (Mf-Cf 等价). 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是 $(n-1)$ -等价, X, Y 是 $(n-2)$ -连通的, $n \geq 2$, 由定义 $\pi_{n-1}(f)$ 是满射. 那么: 商映射 $(Mf, X) \rightarrow (Cf, *)$ 是 $(2n-2)$ -等价, 并且 Cf 是 $(n-1)$ -连通的。

更进一步, 如果 X, Y 还是 $(n-1)$ -连通的, 那么 $(Mf, X) \rightarrow (Cf, *)$ 是 $(2n-1)$ -等价。

注记. 这里 $Mf = Y \cup_f (X \times I), Cf = Mf / (X \times \{1\})$ 都是非约化的。

证明. 对于 Cf , 有 excisive triad $(Cf; A, B): A = Y \cup (X \times [0, 2/3]), B = (X \times [1/3, 1]) / X \times \{1\}$. 于是 $C = A \cap B = X \times [1/3, 2/3]$ 。



直接检验知: $\pi : (Mf, X) \rightarrow (Cf, *)$ 和下列映射同伦:

$$(Mf, X) \xrightarrow{\sim} (A, C) \rightarrow (Cf, B) \xrightarrow{\sim} (Cf, *)$$

由于 $Mf \simeq Y$, 很容易验证 (Mf, X) 是 $(n-1)-$ 等价, 因此对 (A, C) 也是如此。注意到 $(B, C) \simeq (CX, X)$, 并且 $\pi_q(CX)$ 由于 CX 可缩从而平凡, 于是 $\pi_{q+1}(CX, X)$ 和 $\pi_q(X)$ 同构, 从而说明了 (CX, X) 进而 (B, C) 是 $(n-1)-$ 连通的。

那么由同伦切除定理结果成立。 \square

推论 11.0.5. $f : X \rightarrow Y$ 是基点映射, X, Y 是 *nondegenerately-based* 空间, 并且都是 $(n-1)-$ 连通的, $n \geq 2$ 。那么 Cf 是 $(n-1)-$ 连通的, 并且: $\pi_n(Mf, X) \rightarrow \pi_n(Cf, *)$ 是同构。

进一步地, $\eta : Ff \rightarrow \Omega Cf$ (见第 8.0.7 节) 诱导了同构: $\pi_{n-1}(Ff) \rightarrow \pi_n(Cf)$ 。

证明. 由于 Nondegenerately-based 条件保证了约化情况和非约化情况是同伦等价的, 那么第一部分是直接推论。

对于第二部分, 由 $j : X \rightarrow Mf$ 就构造出了

$$Fr : Fj = P(Mf; *, X) \rightarrow Ff$$

由 $r : Mf \rightarrow Y$ 诱导。

那么 $(Fr)_* : \pi_q(Mf, X) \rightarrow \pi_{q-1}(Ff)$ 由长正合列知是同构。进一步 η 可分解为 $Fj \rightarrow \Omega Cf$ 和 $Fj \rightarrow Ff$ 。(引理 8.0.21)

那么这就说明了结果。 \square

现在令 f 是余纤维化, 就有了:

定理 11.0.6. 假定 $i : A \rightarrow X$ 是余纤维化, 并且是 $(n-2)-$ 连通空间之间的 $(n-1)-$ 等价, $n \geq 2$ 。

那么商映射 $(X, A) \rightarrow (X/A, *)$ 是 $(2n-2)-$ 等价, 并且如果 A, X 都是 $(n-1)-$ 连通的它是 $(2n-1)-$ 等价。

证明. 注意 $(X, A) \sim (Mi, A); (X/A, *) \sim (Ci, *)$, 并且这两个同伦和投影映射交换, 那么由上一个结论即得到证明。 \square

11.0.2 Freudenthal 纬悬定理

定义 11.0.7 (纬悬同态). 对于基点空间 X , 定义 $\Sigma : \pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$ 为:

$$\Sigma f = f \wedge \text{id} : S^{q+1} \cong S^q \wedge S^1 \rightarrow X \wedge S^1 = \Sigma X$$

定理 11.0.8 (Freudenthal 纬悬定理). 假定 X 是 *nondegenerately based* 且 $(n-1)-$ 连通的, $n \geq 1$ 。那么 Σ 在 $q < 2n-1$ 时是双射, $q = 2n-1$ 时是满射。

证明. 考虑 $C'X = X \times I / [(X \times \{0\}) \cup (\{*\} \times I)]$ 。那么映射 $f : (I^q, \partial I^q) \rightarrow (X, *)$ 诱导出了 $f \times \text{id} : I^{q+1} \rightarrow X \times I$ 。进一步这给出了映射

$$(I^{q+1}, \partial I^{q+1}, J^q) \rightarrow (C'X, X, *)$$



其中: $I^q \times \{1\}$ 按照 f 映射, 因此在取商后诱导出了 Σf 。

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{q+1}(C'X, X) & \\ \partial \swarrow & & \searrow \rho_* \\ \pi_q(X) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{q+1}(\Sigma X) \end{array}$$

∂ 作为空间偶对长正合列的边缘同态, 注意到 $C'X$ 可缩, 因而是同伦。

现在 $X \rightarrow C'X$ 是一个余纤维化并且是 $(n-1)$ - 连通空间的 n - 等价, ρ 由定理 11.0.6 是 $2n$ - 等价。那么利用 ∂ 是同构就得到了 Σ 也具有这样的性质, 那么这就说明了结果。 \square

因此在计算高阶同伦群时使用的许多未加证明的结论在此都得到了证明:

定理 11.0.9. $\forall n \geq 1, \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \Sigma: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$ 是同构。

推论 11.0.10. 道路连通空间 X 的维悬 ΣX 是单连通的。

证明. $\pi_0(X) \cong \pi_1(\Sigma X)$ 。 \square

定义 11.0.11 (稳定同伦群). 拓扑空间 X 的第 q 个稳定同伦群定义为 $\pi_q^s(X) = \varinjlim_n \pi_{q+n}(\Sigma^n X)$ 。

对于性质相对良好的拓扑空间 X , 类似球面的情况可以看出 $\pi_{q+n}(\Sigma^n X)$ 最终会稳定: 因为 $\Sigma^n X$ 的连通度在不断提升。

同伦群的计算

11.0.3 装配流形

对于映射 $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$, 假定它是光滑映射。 $s_0 \in S^n$ 是正则值。于是可以在 S^n 上选取 s_0 邻域的局部坐标系, 即在局部坐标中给定 n 个函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 使得 $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_n = 0$ 同时成立当且仅当点位于 s_0 处, 并且梯度向量 $\text{grad } \varphi_i$ 在这一点处线性无关。现在 f 的正则性说明 $f^{-1}(s_0)$ 的原像是 S^{n+k} 的 k 维光滑闭流形:

$$f^{-1}(s_0) = W^k \subset S^{n+k}$$

现在考虑 W^k 的邻域中定义的函数 $\tilde{\varphi}_i(x) = f^*\varphi_i(x) = \varphi(f(x))$ 。那么 $\tilde{\varphi}_i = 0, \forall i$ 决定了 W^k 。并且正则性进一步指出: 在 $f^{-1}(s_0) = W^k$ 的任意一点上, $\text{grad } \tilde{\varphi}_i$ 是线性无关的。进一步地, 它们指向子流形 W^k 的法方向: 这里法方向是将子流形 W^k 所处的区域包含进某个 $S^{n+k}/\{\infty\} \cong \mathbb{R}^{n+k}$ 的区域, 并诱导其上的度量。(这里无穷远点的选择是不重要的: 回忆球极投影的保角性质, 因此在后文统一记为 S^n 上的法标架场, 事实上这里还可以将 S^n 嵌入 \mathbb{R}^{n+1} 诱导一个度量, 这些度量下的法空间都是相同的)。它们指向法方向的原因是诸 $\tilde{\varphi}_i$ 在子流形的切空间方向上取值都是常值, 自然其梯度向量不存在切空间分量。

于是 f 给出了一个偶对 (W^k, τ^n) , 这里 $W^k = f^{-1}(s_0)$, τ^n 是 W^k 法标架场, 满足 $\tau^n = (\text{grad } \tilde{\varphi}_1, \dots, \text{grad } \tilde{\varphi}_n)$

定义 11.0.12 (装配流形). 一个闭流形 $W^k \subseteq S^{n+k}$ (or \mathbb{R}^{n+k}) 和一个非退化的 n 维法标架场 τ^n 组成的偶对称为一个无边装配流形。这里 τ^n 称为一个装配。

现在考虑光滑同伦 $F: S^{n+k} \times I \rightarrow S^n$, 其在 $s_0 \in S^n$ 是正则的并且是连接 $f_0, f_1: S^{n+k} \rightarrow S^n$ 的同伦。同样考察原像 $V^{k+1} = F^{-1}(s_0)$, 基于和上文同样的讨论, 依然有:

V^{k+1} 由 $\Phi_1, \dots, \Phi_n = 0$ 给定, $\Phi_i = F^*\varphi_i$ 。诸梯度向量 $\text{grad } \varphi_i$ 在 V^{k+1} 上是线性无关的。因此再一次得到了一个偶对 $(V^{k+1} \subseteq S^{n+k} \times I, \tau^n = (\text{grad } \Phi_i))$, 其中后者再一次是前者的法标架场。

在边界 $t = 0, 1$, 上述偶对诱导了 $W_0^k = V^{k+1} \cap (S^{n+k} \times \{0\}), W_1^k = V^{k+1} \cap (S^{n+k} \times \{1\})$ 上的两个装配: 即将 τ^n 限制到边界上得到的法标架场。

现在正则性说明 V^{k+1} 本身和 $S^{n+k} \times I$ 的边界不相切, 因此可以假定 V^{k+1} 垂直地接近 $t = 0, 1$ 两条边界: 准确地说, 在 W_0^k, W_1^k 中每一点处存在 V^{k+1} 的一个切向量在该点与 $S^{n+k} \times I$ 的边界切空间正交 (i.e. $S^{n+k} \times \{0\}, S^{n+k} \times \{1\}$ 的切空间)

定义 11.0.13 (带边装配流形). 偶对 $(V^{k+1} \subseteq S^{n+k} \times I, \tau^n)$ 称为带边界的装配流形, 如果:

- V^{k+1} 是带边 $k+1$ 维流形, 并且它到 $S^{n+k} \times I$ 的前途垂直地接近 $t = 0, 1$ 两条边界;
- τ^n 是非退化的 n 维法标架场。

现在法标架场的存在保证 $W^k \subseteq S^{n+k}$ 的 ε 邻域 W_ε 微分同胚于 $W^k \times B_\varepsilon^n$ 。这是因为考虑法标架的单位球。

同样地, V^{k+1} 的 ε 邻域 V_ε 微分同胚于 $V^{k+1} \times B_\varepsilon^n$ 。

定义 11.0.14. 称两个装配流形 $(W_j^k, \tau_j^n), j = 1, 2$ 是等价的, 如果存在带边装配流形 (V^{k+1}, τ^n) 使得它在两个边界上正是上述原有的装配流形。

定理 11.0.15. 闭装配流形 (W^k, τ^n) 的等价类与群 $\pi_{n+k}(S^n)$ 的元素之间存在自然双射。

证明. 每个 s_0 处正则的映射 $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$ 定义了一个闭装配流形, 并且 f 的同伦等价诱导了生成装配流形之间的等价。

反过来, 任意给定一个闭装配流形 (W^k, τ^n) 。现在考虑 $W_\varepsilon \cong W^k \times B_\varepsilon^k$, 因此投影 $W^k \times D_\varepsilon^n \rightarrow B_\varepsilon = B^n$ 自然延拓成为 $f: S^{n+k} \times S^n$: 这是因为 B^n 添加一点变为 S^n 。

进一步地, 同伦也变为带边装配流形。 □

命题 11.0.16. $\pi_{n+k}(S^n)$ 中的群运算是两个分离的装配流形的并。

定理 11.0.17. 任何 $n, k \geq 1$ 的闭装配流形等价类中都存在连通的闭装配流形位于此等价类。

证明. 对于不连通的闭装配流形 $(W^k, \tau^n) = (W_1^k, \tau_1^n) \cup (W_2^k, \tau_2^n)$, 考察一条连接 $x_1 \in W_1^k, x_2 \in W_2^k$ 的自身不交的光滑路径。并且我们要求这条路径在起终点处和两个 k 维切平面重合。现在将这条路径进行 k 维加厚, 就得到了一个连通的闭装配流形。

同伦在这样的情况下是简单但是需要一定繁琐验证的。 □

11.0.4 $\pi_{n+1}(S^n)$

利用两个主定理, 每个 $\pi_{n+1}(S^n)$ 中的元素都对应着一个 S^{n+1} 中连通的 1 维装配流形。即 S^{n+1} 中的携带法标架场的子流形 S^1 。

$n > 2$ 时所有 $S^1 \rightarrow S^{n+1}$ 都是同痕的。无妨将其放置在 \mathbb{R}^{n+1} 中的某个二维平面。然而 S^1 上的标架装配只有两种: $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 因此这就说明了

$$\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

。

第十三章 公理化同调理论和胞腔同调

13.0.1 Eilenberg-Steenrod 同调公理

定理 13.0.1 (Eilenberg-Steenrod 同调公理). 固定 $Abel$ 群 π , 存在一组空间偶对的同伦范畴到 $Abel$ 群的函子 $H_q(X, A; \pi), q \in \mathbb{N}$, 以及一族自然同构 $\partial: H_q(X, A; \pi) \rightarrow H_{q-1}(A, \pi)$ 。这里 $H_q(-; \pi) = H_q(-, \emptyset; \pi)$, 并且它们满足如下公理。

维数公理 X 是一个单点, 那么 $H_0(X; \pi) = \pi, H_q(X; \pi) = 0, \forall q > 0$ 。

正合公理 下列序列是正合的:

$$\cdots H_q(A; \pi) \rightarrow H_q(X; \pi) \rightarrow H_q(X, A; \pi) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A; \pi) \rightarrow \cdots$$

其中未指明的态射是由 $A \rightarrow X, (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ 诱导的。

切除公理 如果 $(X; A, B)$ 是 *excisive triad*: $Int(A) \cup Int(B) = X$, 那么嵌入 $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ 诱导了同构:

$$H_*(A, A \cap B; \pi) \rightarrow H_*(X, B; \pi)$$

加性公理 如果 $(X, A) = \coprod (X_i, A_i)$, 那么嵌入 $(X_i, A_i) \rightarrow (X, A)$ 诱导了同构:

$$\bigoplus_i H_*(X_i, A_i; \pi) \rightarrow H_*(X, A; \pi)$$

弱等价公理 如果 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是空间偶对的弱等价 (即同时给出了 $X, Y; A, B$ 间的弱等价), 那么它诱导了同构

$$f_*: H_*(X, A; \pi) \rightarrow H_*(Y, B; \pi)$$

对于 CW 复形, 有:

定理 13.0.2 (Eilenberg-Steenrod 同调公理: CW 复形). 固定 $Abel$ 群 π , 存在一组 CW 复形偶对的同伦范畴到 $Abel$ 群的函子 $H_q(X, A; \pi), q \in \mathbb{N}$, 以及一族自然同构 $\partial: H_q(X, A; \pi) \rightarrow H_{q-1}(A, \pi)$ 。这里 $H_q(-; \pi) = H_q(-, \emptyset; \pi)$, 并且它们满足如下公理。

维数公理 X 是一个单点, 那么 $H_0(X; \pi) = \pi, H_q(X; \pi) = 0, \forall q > 0$ 。

正合公理 下列序列是正合的:

$$\cdots H_q(A; \pi) \rightarrow H_q(X; \pi) \rightarrow H_q(X, A; \pi) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A; \pi) \rightarrow \cdots$$

其中未指明的态射是由 $A \rightarrow X, (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ 诱导的。

切除公理 如果 X 是子复形 A, B 的并, 那么嵌入 $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ 诱导了同构:

$$H_*(A, A \cap B; \pi) \rightarrow H_*(X, B; \pi)$$

加性公理 如果 $(X, A) = \coprod (X_i, A_i)$, 那么嵌入 $(X_i, A_i) \rightarrow (X, A)$ 诱导了同构:

$$\bigoplus_i H_*(X_i, A_i; \pi) \rightarrow H_*(X, A; \pi)$$

注记. 由于 CW 复形的弱同伦等价等价于同伦等价, 因此一般拓扑空间的同调理论和 CW 复形的同调理论相互决定: 它们之间的转化只需要通过固定一个 CW 逼近函子 Γ 即可。

进一步地, 利用弱同伦等价的传递性: 当固定一个 CW 复形的同调理论后, 它诱导的拓扑空间的同调理论和逼近函子 Γ 在自然同构意义下是不变的。

因此我们看到给出一个好的拓扑空间同调理论实际上相当于给出一个 CW 复形同调理论, 和一个比较容易操作的 CW 逼近函子, 事实上奇异同调就是这样的产物: 这是公理化同调理论的整体思路。

13.0.2 胞腔同调

我们现在来建立满足 Eilenberg-Steenrod 公理的 CW 复形同调理论。

给定一个 CW 复形 X , 我们定义出它的胞腔链复形 $C_\bullet(X)$ 。首先令 $C_n(X)$ 为 X 的所有 n -胞腔生成的自由 π -群: 即 $\bigoplus_j n\text{-cell} \pi$, (当然对于 $\pi = \mathbb{Z}$ 时这就是自由 Abel 群) 每个 π 的单位元记为 $[j]$ 。

对于任何 n -胞腔 j :

$$j : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$$

于是有同胚:

$$\alpha : \bigvee_j D^n/S^{n-1} \rightarrow X^n/X^{n-1}$$

定义 $\pi_j : X^n/X^{n-1} \rightarrow S^n$ 为 $f \circ \alpha^{-1}$ 。这里 f 在 j 对应的 wedge summand 上是 $\nu_n : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$, 在其它 wedge summand 是到基点的常值映射。

定义 13.0.3 (胞腔同调的边缘映射). 对于 n -胞腔 j , $(n-1)$ -胞腔 i ($n \geq 1$): 有复合

$$S^{n-1} \xrightarrow{j} X^{n-1} \xrightarrow{q} X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{\pi_i} S^{n-1}$$

记这个映射的映射度 (诱导的 $\mathbb{Z} \cong \pi_i(S^i) \rightarrow \pi_i(S^i) \cong \mathbb{Z}$ 映射中 1 的像) 为 a_{ij} 。那么定义边缘映射:

$$d_n[j] = \sum_i a_{ij}[i]$$

对于 $n = 1$ 时, 我们指定 $X^0/X^{-1} = X^0/\emptyset = X_+^0$ (回忆 Y_+ 指和不交基点的并), S^0 的基点指定为 1。这时定义:

$$d_1[j] = [j(1)] - [j(-1)]$$

定义 13.0.4 (胞腔同调群). 一旦成功说明 $d_{n-1} \circ d_n = 0$, 我们就有链复形 $C_\bullet(X)$, 定义 $H_*(X) = H_*(C_\bullet(X))$ 为 CW 复形的胞腔同调群。

接下来说明 $d_{n-1} \circ d_n = 0$ 。

为了说明这一点, 我们需要用另一种方法给出 d_n 的等价定义。在这里会处理 3 种球面:



$$S^n \subset D^{n+1}; D^n/S^{n-1}; \Sigma S^{n-1}$$

我们需要规定三者之间的映射：

$$\nu_n : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n : (tx_1, \dots, tx_n) \mapsto (ux_1, \dots, ux_n, 2t-1), u = \sqrt{1-(2t-1)^2}$$

$$\iota_n : S^n \rightarrow \Sigma S^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (vx_1, \dots, vx_n) \wedge (x_{n+1})/2, v = 1/\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\xi_n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (CS^{n-1}, S^{n-1}) : (tx_1, \dots, tx_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \wedge (1-t)$$

于是 ξ_n 诱导出 $D^n/S^{n-1} \cong CS^{n-1}/S^{n-1} = \Sigma S^{n-1}$ 。将这个同胚映射也定义为 ξ_n 。计算验证知 $\iota_n \circ \nu_n = -\xi_n : D^n/S^{n-1} \rightarrow \Sigma S^{n-1}$ （符号指 suspension 的符号）

$$\begin{array}{ccc} D^n \cup_{S^{n-1}} CS^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma S^{n-1} \\ \psi \downarrow & & \uparrow \iota_n \\ D^n/S^{n-1} & \xrightarrow{\nu_n} & S^n \end{array}$$

在同伦意义下交换。这里 π 是先将 D^n 依照 ξ_n 变为 CS^{n-1} ，再利用 $CS^{n-1} \cup_{S^{n-1}} CS^{n-1} \rightarrow \Sigma S^{n-1}$ 。

定义 13.0.5 (拓扑边缘映射). $\partial_n : X^n/X^{n-1} \rightarrow \Sigma(X^{n-1}/X^{n-2})$ 定义为：

$$X^n/X^{n-1} \xrightarrow{\psi^{-1}} Ci \xrightarrow{\pi} \Sigma X^{n-1} \xrightarrow{\Sigma \rho} \Sigma(X^{n-1}/X^{n-2})$$

其中 i 是嵌入 $X^{n-1} \rightarrow X^n$ 。 ψ^{-1} 是上文的 ψ 的粘合的同伦逆。

定义 13.0.6. 给定基点 $(n-1)$ - 连通空间 X ，定义 $\tilde{H}'_n(X)$ 为：

$n=0$: $\pi_0(X) - \{*\}$ 生成的自由 Abel 群（非基点分支）

$n=1$: $\pi_1(X)$ 的 Abel 化

$n \geq 2$: $\pi_n(X)$

那么在自然同构意义下 $\tilde{H}'_n(X)$ 和基点在道路连通分支中的选取无关。事实上它是非基点同伦类 $[S^n, X]$ 。

定义 13.0.7 (纬悬同态). 给定基点 $(n-1)$ - 连通空间，定义纬悬同态：

$$\Sigma : \tilde{H}'_n(X) \rightarrow \tilde{H}'_{n+1}(\Sigma X)$$

其中 $\Sigma[f] = [\Sigma f \circ \iota_{n+1}] : f : S^n \rightarrow X$ 。即映射 $S_{n+1} \xrightarrow{\iota_{n+1}} \Sigma S^n \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma X$ 的复合。

对于 $n=0$ ， $\Sigma[x] = [f_*^{-1} \cdot f_x], f_x : t \mapsto x \wedge t$

引理 13.0.8. 如果 X 是 n - 球面的一点并，那么纬悬同态 Σ 是同构。

这是可以直接验证的。

现在回到 CW 复形，将 $[j \circ \nu_n^{-1}] : S^n \rightarrow D^n/S^{n-1} \rightarrow X^n/X^{n-1}$ 视为 $\tilde{H}'_n(X^n/X^{n-1})$ 的基。



引理 13.0.9.

$$d'_n : \tilde{H}'_n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{(\partial_n)_*} \tilde{H}'_n(\Sigma(X^{n-1}/X^{n-2})) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} \tilde{H}'_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$$

和 $d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ 之间是同构的。

证明. 首先群 $C_n(X)$ 和 $\tilde{H}'_n(X^n/X^{n-1})$ 之间的同构是由 $[j] \leftrightarrow [j \circ \nu_n^{-1}]$ 给出的。下图由 ψ, π 的自然性是在同伦意义下交换的。

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{a_{ij}} & S^{n-1} & & S^{n-1} & & S^{n-1} \\ \nu_n^{-1} \downarrow & & \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota_n \\ D^n/S^{n-1} & \xrightarrow{\psi^{-1}} & D^n \cup CS^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma S^{n-1} & \xrightarrow{a_{ij}} & \Sigma S^{n-1} \\ j \downarrow & & j \cup Cj \downarrow & & \Sigma j \downarrow & & \uparrow \Sigma \pi_i \\ X^n/X^{n-1} & \xrightarrow{\psi^{-1}} & X^n \cup CX^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma X^{n-1} & \xrightarrow{\Sigma \rho} & \Sigma(X^{n-1}/X^{n-2}) \end{array}$$

最下一行是拓扑边缘映射, 那么

$$d'_n[j \circ \nu_n^{-1}] = \Sigma^{-1}(\partial_n)_*[j \circ \nu_n^{-1}] = \sum_i a'_{i,j}[i \circ \nu_{n-1}^{-1}]$$

现在 $\pi_i \circ (i \circ \nu_{n-1}^{-1}) : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ 是单位映射, 因此 a_{ij} 和 $a'_{i,j}$ 之间利用交换图得到它们相等, 这就说明了结果。□

命题 13.0.10. $d_{n-1} \circ d_n = 0$

证明. 利用上一结果, 只需说明 $\Sigma \partial_{n-1} \circ \partial_n$ 是零伦的。这是因为

$$\begin{array}{ccccccc} X^n \cup CX^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \Sigma X^{n-1} & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma(X^{n-1} \cup CX^{n-2}) & \xrightarrow{\Sigma \pi} & \Sigma^2 X^{n-2} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \Sigma \rho & & \downarrow \Sigma \psi & & \downarrow \Sigma^2 \rho \\ X^n/X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_n} & \Sigma(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xlongequal{\quad} & \Sigma(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xrightarrow{\Sigma \partial_{n-1}} & \Sigma^2 X^{n-2}/X^{n-3} \end{array}$$

并且 $\Sigma \pi \circ \Sigma i$ 是平凡映射。这就说明了结果。□

定义 13.0.11 (约化同调群, 胞腔相对同调群)。

现在定义 $\tilde{C}_*(X) = C_*(X)/C_*(*)$, $\tilde{H}_*(X) = H_*(\tilde{C}_*(X))$ 。

$$C_*(X, A) = C_*(X)/C_*(A) \cong \tilde{C}_*(X/A)$$

$$H_*(X, A) = H_*(C_*(X, A)) = \tilde{H}_*(X/A)$$

同调长正合列由 $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$ 给出, 这也自然给出了连接同态。

如果 $f : X \rightarrow Y$ 是胞腔映射, 它诱导了 $X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$, 并且在同伦意义下和拓扑边缘映射交换。因此这就说明了函子性。

这是一个同伦范畴上的函子, 因为 $C_*(X \times I) \cong C_*(X) \otimes C_*(I)$ (见下一部分), 很容易验证同伦映射诱导了链同伦。

维数和加性公理显然, 切除公理因为 $C_*(X)/C_*(A) \rightarrow C_*(B)/C_*(A \cap B)$ 是同构。

最后我们讨论乘积空间的链群:



定理 13.0.12 (乘积空间的链群). 现在假定 \mathbb{Z} 系数, 给定 X, Y CW 复形, $X \times Y$ 是 CW 复形, 满足:

$$C_*(X \times Y) \cong C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

证明. 由于 $(X \times Y)^n = \cup_{p+q=n} X^p \times Y^q$, 定义:

$$\kappa : C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y) : [i] \otimes [j] = (-1)^{pq} [i \times j]$$

可以验证 κ 的确是链映射, 并且是同构。 □

13.0.3 例子: $T^2, K, \mathbb{R}P^n$

T^2 的链群分别为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$: 并且每个生成元都是一个圈。那么这就说明 $H_*(T; \mathbb{Z}) \cong C_*(T)$ 。

K 的链群在 0 阶有一个生成元 $[v]$, 1 阶有两个生成元 $[e_1], [e_2]$, 二阶有一个生成元 $[j]$ 。直接验证边缘映射知:

$$H_0(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}; H_1(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2; H_q(K; \mathbb{Z}) = 0, q \geq 2$$

下面来计算 $\mathbb{R}P^n$ 的胞腔同调。首先 $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup \dots \cup e^n$, 它是由 $S^n = 2e^0 \cup \dots \cup 2e^n$ 商掉对极映射得到的。我们指定 q -骨架为倒数 $n - q$ 个坐标都是 0 的情况。对于两个 e^n , 记它们的闭包 (上下半球) 为 E_{\pm}^q 。

$$S^q = E_+^q \cup E_-^q, S^{q-1} = E_+^q \cap E_-^q$$

定义

$$j_{\pm}^q : D^q \rightarrow E_{\pm}^q \subset S^q : (x_1, \dots, x_q) = (\pm x_1, \dots, \pm x_q, \pm \sqrt{1 - \sum x_i^2})$$

$j_+^q|_{S^{q-1}} = \text{id}, j_-^q|_{S^{q-1}} = a_{q-1}$ (a_{q-1} 是 S^{q-1} 的对极映射)。注意有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} S^{q-1} & \xrightarrow{\pi_+} & E_+^{q-1}/S^{q-2} & \xleftarrow{j_+^{q-1}} & D^{q-1}/S^{q-2} \\ a_{q-1} \downarrow & & \downarrow a_{q-1} & & \parallel \\ S^{q-1} & \xrightarrow{\pi_-} & E_-^{q-1}/S^{q-2} & \xleftarrow{j_-^{q-1}} & D^{q-1}/S^{q-2} \end{array}$$

因此利用上图和胞腔映射定义知: $d_q[j_+^q] = (-1)^q d_q[j_-^q] = [j_+^{q-1}] + (-1)^q [j_-^{q-1}], q \geq 1$

那么转换到 $\mathbb{R}P^n$ 上知 $d[j^q] = (1 + (-1)^q)[j^{q-1}]$, 从而作为推论得到:

例子.

$$H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 < q < n, q \text{ odd} \\ \mathbb{Z} & q = n, n \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq q \leq n \\ \mathbb{Z} & \text{otherwise} \end{cases}$$

13.0.4 问题

练习 13.1. 对于 CW 复形 X , 子复形 A , CW 复形 Y , 胞腔映射 $f: A \rightarrow Y$. 给出 $H_*(X, A), H_*(Y \cup_f X, Y)$ 之间的关系, 并说明这一关系若换为 π_* 则不正确。

证明. 由于 $(Y \cup_f X; X, Y)$ 是 excisive triad, 因此 $H_*(X, A) \cong H_*(Y \cup_f X, Y)$, 对于同伦群只需考虑同伦切除定理的反例即可。□

练习 13.2. 计算 $H_*(S^m \times S^n), m \geq 1, n \geq 1$ 。

证明. Kunneth 公式, 或胞腔分解为 $0, e^m, e^n, e^{m+n}$ 。□

练习 13.3 (透镜空间). 给定奇素数 p , 记 $\pi = \mathbb{Z}_p$ 为 S^1 上的 p 阶单位根。现在将 S^{2n-1} 视为 \mathbb{C}^n 中的单位球, $n \geq 2$ 。那么记 $L(p; q_1, \dots, q_n) = S^{2n-1}/\pi$: 这里 π 自由地作用在 S^{2n-1} 上:

$$\zeta(z_1, \dots, z_n) = (\zeta^{q_1} z_1, \zeta^{q_2} z_2, \dots, \zeta^{q_n} z_n)$$

(q_i, p 互素)

现在 $S^{2n-1} \rightarrow L$ 的确是万有覆叠。

- 计算 $H_*(L(p; q_1, \dots, q_n), \mathbb{Z})$ 。
- 计算 $H_*(L(p; q_1, \dots, q_n), \mathbb{Z}_p)$ 。

证明. [Hat01]

$$H_k(L(p; q_1, \dots, q_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2n-1 \\ \mathbb{Z}_p & 0 < k < 2n-1, k \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

简单地说, 通过正文里类似给出的 $\mathbb{R}P^n$ 的胞腔分解可以得到链复形为:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \dots \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

换为 \mathbb{Z}_p 系数即为:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{0} \dots \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

因此

$$H_k(L(p; q_1, \dots, q_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & 0 \leq k \leq 2n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

□

注记. 透镜空间是一个著名的同调群相同但不同伦以及同伦但不同胚的例子: $L(5; 1, 1), L(5; 1, 2)$ 不同伦; $L(7; 1, 1), L(7; 1, 2)$ 同伦但不同胚。

对于 $n = 2$ 时 Reidemeister (利用 Reidemeister torsion) 给出了如下结果:

$L(p; 1, q_1), L(p; 1, q_2)$ 是同伦的 $\iff q_1 q_2 \equiv \pm n^2 \pmod{p}, \exists n \in \mathbb{Z}$

$L(p; 1, q_1), L(p; 1, q_2)$ 是同胚的 $\iff q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \pmod{p}$



Reidemeister torsion

考虑 A -自由模构成的链复形 C_\bullet , 称链复形是 acyclic 的如果 $H_r(C) = 0, (\forall r \geq 0)$ 。

命题 13.0.13. 自由 A -模构成的链复形 C_\bullet 是 acyclic 的等价于 $\text{id} : C \rightarrow C$ 和 $0 : C \rightarrow C$ 之间存在链同伦。

证明. 反过来的命题是简单的, 只需假定 C_\bullet 是 acyclic 的。

我们来构造 $s_k : C_k \rightarrow C_{k+1}$ 使得 $s_{k-1}d_k - d_{k+1}s_k = \text{id}_{C_k}$ 。那么 $(-1)^k s_k$ 就给出了满足要求的链同伦。

现在 d_1 是满射, C_0 是自由模, 因此可以找到一个 R -模同态 $s_0 : C_0 \rightarrow C_1$ 使得 $d_1 s_0 = \text{id}_{C_0}$ 。

归纳地, 如果已经得到了 s_0, \dots, s_{k-1} , 需要给出 $s_k : C_k \rightarrow C_{k+1}$ 使得:

$$d_{k+1}s_k = s_{k-1}d_k - \text{id}_{C_k}$$

这时尽管 d_{k+1} 不是满射, 它的像和 $s_{k-1}d_k - \text{id}_{C_k}$ 的像相同: 原因如下:

- 假定 $x = d_{k+1}y$, 那么 $d_k x = 0$, 从而 $x = x - s_{k-1}d_k x$ 。
- 假定 $x = (\text{id} - s_{k-1}d_k)(y) = y - s_{k-1}d_k y$, 那么 $d_k x = d_k y - d_k s_{k-1}d_k y = d_k y - (s_{k-2}d_{k-1} - \text{id})(d_k y) = 0$ 。而链复形是 acyclic 的说明了 x 在 d_{k+1} 的像中。

现在由 C_k 的自由性, 有图表:

$$\begin{array}{ccc} & & C_{k+1} \\ & \nearrow & \downarrow d_{k+1} \\ C_k & \xrightarrow{s_{k-1}d_k - \text{id}} \text{Im}(s_{k-1}d_k - \text{id}) & \xrightarrow{=} \text{Im}(d_{k+1}) \end{array}$$

这样就完成了构造。 □

引理 13.0.14. 现在假定 C 是 acyclic A -模链复形, 并且链可缩: $\Gamma : 0 \simeq 1 : C \rightarrow C$ 。那么 A -模同态:

$$f = d + \Gamma = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \cdots \\ \Gamma & d & 0 & \cdots \\ 0 & \Gamma & d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} : C_{\text{odd}} \rightarrow C_{\text{even}}$$

是同构, 这里 $C_{\text{odd}} = C_1 \oplus C_3 \oplus \cdots, C_{\text{even}} = C_0 \oplus C_2 \oplus \cdots$ 。

证明. 考虑同态

$$g = d + \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma & d & 0 & \cdots \\ 0 & \Gamma & d & \cdots \\ 0 & 0 & \Gamma & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} : C_{\text{even}} \rightarrow C_{\text{odd}}$$



计算 fg, gf 知它们有形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \Gamma^2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \Gamma^2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

它们都是 $C_{even} \rightarrow C_{even}, C_{odd} \rightarrow C_{odd}$ 的同构映射。因此 $f^{-1} = (gf)^{-1}g = g(fg)^{-1} : C_{even} \rightarrow C_{odd}$ 是 f 的逆映射。□

定义 13.0.15 (Reidemeister Torsion of Acyclic Chain Complexes). 称有限生成自由 A -模构成的有限 acyclic 链复形 C_\bullet 的 Reidemeister Torsion 为:

$$\Delta(C) = \det(d + \Gamma : C_{odd} \rightarrow C_{even}) \in A^*$$

这里 Γ 是任意选取的 $\Gamma : 0 \simeq 1$, 直接验证知这和 Γ 无关。

现在考虑有限 CW 复形 X , 那么它的万有覆盖 \tilde{X} 具有 $\pi_1(X)$ -等变胞腔结构。因此 $C_*(\tilde{X})$ 的每一个分量都是有限生成 $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -模。现在为了和前文的 Reidemeister Torsion, 我们考虑系数环的变换: 即找到一个 $f : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \rightarrow A$ 使得 $C(X; A) = A \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} C(\tilde{X})$ 是 acyclic 的。

这样就有了如下定义:

定义 13.0.16 (Reidemeister Torsion of finite CW Complexes). 称有限 CW 复形 X 关于某个使得 $H_*(X; A) = 0$ 的环同态 $f : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \rightarrow A$ 的 Reidemeister Torsion 是:

$$\Delta(X) = \Delta(C(X; A)) \in A^* / \{f(\pm\pi_1(X))\}$$

(直接验证知在商去 $\{f(\pm\pi_1(X))\}$ 的意义下 Torsion 和诱导等变 CW 复形的选取无关)

例子 (Lens Space). 取 $X = L(m, n) = L(m; 1, n)$, 那么 $\pi_1(X) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 设 t 为生成元。于是

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^m - 1)$$

现在 $L(m, n)$ 有胞腔分解 $e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$, 因此这诱导了万有覆盖 S^3 上的等变胞腔结构, $j \leq 3$ 维的胞腔有 $t^k \tilde{e}^j, k = 0, \dots, m-1$ 。

由于 m, n 互素, 存在 a, b 使得 $an + bm = 1$ 。

因此这给出了 S^3 上的自由 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$ 模链复形:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \xrightarrow{1-t^a} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$$

这里 $N = 1 + t + \cdots + t^{m-1} \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$ 。

• 选取环同态 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \zeta$, ζ 是本原 m 次单位根。

那么 $H_*(L(m, n); \mathbb{C}) = 0$ (这里是指上述链复形进行系数扩张后的同调)

计算知 $\Delta_\zeta(L(m, n)) = (1 - \zeta)(1 - \zeta^a) \in \mathbb{C}^* / \{f(\pm\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\}$ 。

• 选取环同态 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \rightarrow A = \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]/(N)$ 。



那么张量积后的复形变为

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{1-t^a} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1-t} A$$

那么 $H_*(L(m, n); A) = 0$, $\Delta(L(m, n)) = (1-t)(1-t^a) \in A^\bullet / \{f(\pm \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\}$ 。注意 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射 ($t \mapsto \zeta$) 给出了前一种 *Reidemeister Torsion*。

定理 13.0.17 (Franz, Rueff, Whitehead).

$L(m, n)$ 和 $L(m, n')$ 是同伦等价的 $\iff \exists r \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, n \equiv \pm n' r^2 \pmod{m}$

$L(m, n)$ 和 $L(m, n')$ 是同胚的 $\iff n \equiv \pm n' r^2 \pmod{m}, r \equiv 1 \text{ or } n \pmod{m} \iff$ 存在同伦等价 $h: L(m, n') \rightarrow L(m, n)$ 使得:

$$h_* \Delta_\zeta(L(m, n')) = \Delta_\zeta(L(m, n))$$

对任何本原 m 次单位根 ζ 成立。 \iff 存在同伦等价 $h: L(m, n') \rightarrow L(m, n)$ 使得:

$$h_* \Delta(L(m, n')) = \Delta(L(m, n))$$

证明. 首先如果 n, n' 满足了定理中的条件, 那么它们之间的同胚/同伦映射是可以直接写出的。

接下来假定 $L(m, m)$ 和 $L(m, n')$ 是同胚的: $h: L(m, n') \rightarrow L(m, n)$ 。

那么它诱导了基本群的同构:

$$h_*: \pi_1(L(m, n')) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(L(m, n)) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, t \mapsto t^d$$

其中 $d \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ 。

由于 Reidemeister torsion 在同胚映射下保持, $(1-\zeta)(1-\zeta^a) = (1-\zeta^d)(1-\zeta^{a'd}) \in \mathbb{C}/\{\pm \zeta^n\}$, 于是: $(\zeta-1)(\zeta^a-1) = \pm \zeta^l (\zeta^d-1)(\zeta^{a'd}-1)$

于是

$$(\zeta-1)(\zeta^{-1}-1)(\zeta^a-1)(\zeta^{-a}-1) = (\zeta^d-1)(\zeta^{-d}-1)(\zeta^{a'd}-1)(\zeta^{-a'd}-1)$$

。一些数论手段可以说明这直接给出了要证的结果。

同伦等价的证明略。

□

第十四章 同调公理的推论

定义 14.0.1 (广义同调理论). 广义同调理论 E_* 是指一系列函子 $E_q(X, A)(= H_q(X, A; \pi))$, 以及自然变换 ∂ : 满足 Eilenberg-Steenrod 公理中除维数公理以外的所有公理。

那么前文内容可以毫无困难地推广到此, 例如:

定理 14.0.2. CW 复形 (偶对) 上的广义同调理论和空间 (偶对) 上的广义同调理论是相互决定的。

我们当然希望给出这样一个抽象的公理化同调的一些性质: 这样在建立后文中的一些实际使用的同调理论时可以毫无困难地直接使用。

14.0.1 约化同调: 基点 vs. 非基点

和胞腔同调中发生的一样, 定义:

定义 14.0.3 (约化同调). 对于基点空间 X , 定义 $\tilde{E}_q(X) = E_q(X, *)$

由于正合列 $\cdots \rightarrow E_q(*) \rightarrow E_q(X) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow \cdots$ 有左提升: $X \rightarrow *$: 这是因为存在收缩 $r: X \rightarrow *$, 那么 Splitting lemma 和简单的论述就能够说明:

命题 14.0.4. $E_*(X) \cong \tilde{E}_*(X) \oplus E_*(*)$

这个同构是自然的: $* \in A \subset X$, 那么 $E_*(*)$ 在 $E_*(A) \rightarrow E_*(X)$ 中展现出函子性。因此由正合公理就有

命题 14.0.5 (约化同调正合公理).

$$\cdots \rightarrow \tilde{E}_q(A) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow E_q(X, A) \rightarrow \tilde{E}_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

命题 14.0.6 (约化同调与同调的转换). 回忆对于非基点空间 X , X_+ 指 X 和基点的不交并。那么加性公理保证了:

$$E_*(X) = \tilde{E}_*(X_+)$$

这一对应和 $f: X \rightarrow Y, f_+: X_+ \rightarrow Y_+$ 在同调群上的作用是相符的。



14.0.2 余纤维化偶对的同调

定理 14.0.7. 对于基点空间 $* \in A \subset X$, 余纤维化 $i: A \rightarrow X$: 诱导的商映射 $q: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ 诱导了同调群同构:

$$E_*(X, A) \rightarrow E_*(X/A, *) \cong \tilde{E}_*(X/A)$$

证明. 考虑非约化余纤维 $Ci = X \cup_i CA$, 以及它的 excisive triad $(Ci; X \cup_i (A \times [0, 2/3]), A \times [1/3, 1]/A \times \{1\})$ 。

对这个 triad 应用切除公理, 以及注意到对应的空间偶对是和 $(X, A), (X/A, *)$ 分贝同伦等价的, 并且空间偶对之间的映射和商映射通过两个同伦等价交换, 这就说明了结果。□

注记. 现在考虑一般的嵌入 $i: A \rightarrow X$, 自然有余纤维化 $A \rightarrow Mi$, 那么此时就有

$$E_*(X, A) \cong \tilde{E}_*(Ci)$$

和胞腔同调时的情况一样, 定义:

定义 14.0.8 (拓扑边缘映射). $\partial: X/A \rightarrow \Sigma A$ 定义为复合:

$$X/A \xrightarrow{\psi^{-1}} Ci \xrightarrow{\pi} \Sigma A$$

14.0.3 纬悬和偶对长正合列

定理 14.0.9 (纬悬同构). 对于 *nondegenerately based* 空间 X , 存在自然同构:

$$\Sigma: \tilde{E}_q(X) \cong \tilde{E}_{q+1}(\Sigma X)$$

这里 $\Sigma X, CX$ 是约化纬悬, 约化锥。

证明. 由于 CX 可缩, 那么 $\tilde{E}_*(CX) = 0$: 考虑长正合列的终点。

因此在约化同调长正合列中

$$\tilde{E}_{q+1}(\Sigma X) \cong \tilde{E}_{q+1}(CX/X) \cong E_*(CX, X) \xrightarrow{\partial} \tilde{E}_q(X)$$

第二个同构是因为 $* \rightarrow X$ 是 Cofibration 推出 $X \rightarrow CX$ 也是。□

推论 14.0.10. $\Sigma^{-n}: \tilde{E}_q(S^n) \cong E_{q-n}(*)$ 是自然同构。

因此仿照前文

命题 14.0.11. $* \in A \subset X$, $i: A \rightarrow X$ 是 *nondegenerately based* 空间之间的余纤维化。那么长正合列的边缘同态 ∂ 是复合:

$$\tilde{E}_q(X/A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{E}_q(\Sigma A) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} \tilde{E}_{q-1}(A)$$

这里第一个态射 ∂_* 是由拓扑边缘映射诱导的。

证明. 这与胞腔同调中的引理 13.0.9 证明是完全类似的。□



14.0.4 约化同调理论公理

定义 14.0.12 (广义约化同调理论公理: 单空间-nondegenerately based). 一个约化同调理论是一组 nondegenerately based 空间的同伦范畴到 Abel 群的函子 $\tilde{E}_q, q \in \mathbb{N}$, 满足以下公理。

正合公理 对于余纤维化 $i: A \rightarrow X$, 序列

$$\tilde{E}_q(A) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow \tilde{E}_q(X/A)$$

是正合的。

韦悬公理 对于每个 q , 存在自然同构

$$\Sigma: \tilde{E}_q(X) \cong \tilde{E}_{q+1}(\Sigma X)$$

(韦悬是约化韦悬)

加性公理 如果 X 是若干 nondegenerately based 空间 X_i 的一点并, 那么 $X_i \rightarrow X$ 诱导出了同构:

$$\bigoplus_i \tilde{E}_*(X_i) \rightarrow \tilde{E}_*(X)$$

弱等价公理 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是弱等价, 那么它诱导了同构

$$f_*: \tilde{E}_*(X) \rightarrow \tilde{E}_*(Y)$$

注记. 维数公理在这里将会变为 $\tilde{H}_0(S^0) = \pi, \tilde{H}_q(S^0) = 0, q \neq 0$

定理 14.0.13 (广义约化同调 [单空间-Nondegenerately based] \leftrightarrow 广义同调 [空间偶对]). 空间偶对上的广义同调理论 E_* 和 Nondegenerately based 空间上的广义约化同调理论相互决定。

证明. 给定 E_* , 取 $\tilde{E}_*(-) = E_*(-, *)$ 即可验证满足要求。

反过来给定 \tilde{E}_* , 取 $E_*(-) = \tilde{E}_*(-_+), E_*(X, A) = \tilde{E}_*(C(i_+)): i_+: A_+ \rightarrow X_+$ 。这里 C 是约化余纤维, 它等价于 i 的余纤维并选取锥点为基点。

现在说明正合公理: 构造边缘同态 $\partial_q: E_q(X, A) \rightarrow E_{q-1}(A)$ 为复合

$$\tilde{E}_q(X_+/A_+) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{E}_q(\Sigma A_+) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} \tilde{E}_{q-1}(A_+)$$

直接验证得到结果。

对于切除公理: 我们可以通过说明广义既约同调理论到 CW 复形上的限制完成论述。

对于加性公理: 这是可以利用上述构造直接验证的。

□

推论 14.0.14. 在这两种理论的对应下, Nondegenerately based 空间 X 满足自然同构: $E_*(X) \cong \tilde{E}_*(X) \oplus E_*(*)$

现在考虑 based CW 复形: 基点是 CW 复形的一个顶点 (它自然是 Nondegenerately based 的)



定义 14.0.15 (广义约化同调理论公理: 单空间-based CW). 一个约化同调理论是一组 based CW 空间的同伦范畴到 Abel 群的函子 $\tilde{E}_q, q \in \mathbb{N}$, 满足以下公理。

正合公理 对于 X 的子复形 A , 序列

$$\tilde{E}_q(A) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow \tilde{E}_q(X/A)$$

是正合的。

纬悬公理 对于每个 q , 存在自然同构

$$\Sigma : \tilde{E}_q(X) \cong \tilde{E}_{q+1}(\Sigma X)$$

(纬悬是约化纬悬, S^1 配备标准 CW 结构)

加性公理 如果 X 是若干 based CW 复形 X_i 的一点并, 那么 $X_i \rightarrow X$ 诱导出了同构:

$$\bigoplus_i \tilde{E}_*(X_i) \rightarrow \tilde{E}_*(X)$$

定理 14.0.16 (广义约化同调 [单空间-Nondegenerately based] \leftrightarrow 广义约化同调 [单空间-based CW]).

证明. CW 逼近。 □

定理 14.0.17 (广义同调 [CW 偶对] \leftrightarrow 广义约化同调 [单空间-based CW]). CW 复形偶对上的广义同调理论和 based CW 复形上的广义约化同调理论相互决定。

证明. 同样, 一个方向是显然的。另一个方向: 给定 based CW 复形上的广义约化同调理论 \tilde{E}_* , 定义 $E_*(X) = \tilde{E}_*(X_+)$, $E_*(X, A) = \tilde{E}_*(X/A)$, 直接验证和上一定理同理得到结果: 注意切除公理这时是简单的, 因为 excisive triad 诱导了同构 $A/A \cap B \rightarrow X/B$ 。 □

至此我们建立起了诸多抽象理论的一一对应。

General Reduced Homology Theory : Nondegenerately Based space

14.0.16 \updownarrow

General Reduced Homology Theory : based CW complex

14.0.17 \updownarrow

General Homology Theory : CW pair

第 13.0.1 节 \updownarrow

General Homology Theory : Space pair

因此利用这个衔接, 我们完成了定理 14.0.13 的证明 (或者说是切除公理的验证)。

14.0.5 Mayer-Vietoris 序列

命题 14.0.18. 对于三元组 (X, A, B) ($B \subset A \subset X$), 有正合列:

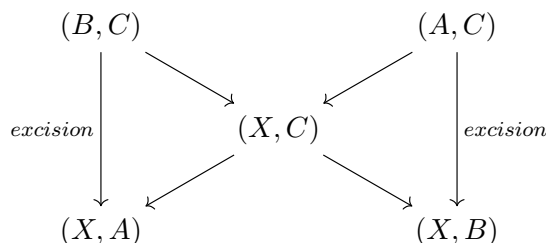
$$\cdots \rightarrow E_q(A, B) \rightarrow E_q(X, B) \rightarrow E_q(X, A) \xrightarrow{\partial} E_{q-1}(A, B)$$

这里 ∂ 是复合 $E_q(X, A) \rightarrow E_{q-1}(A) \rightarrow E_{q-1}(A, B)$ 。

证明. 转换为 CW 复形上的同调理论, 那么 $X/A \cong (X/B)/(A/B)$ 自然得到结论. \square

引理 14.0.19. 给定 *excisive triad* $(X; A, B), C = A \cap B$, 那么嵌入诱导的 $E_*(A, C) \oplus E_*(B, C) \rightarrow E_*(X, C)$ 是同构。

证明.



利用熟知的代数结果, 考虑对应的同调群就得到了结果. \square

定理 14.0.20 (Mayer-Vietoris 序列). 给定 *excisive triad* $(X; A, B), C = A \cap B$. 那么下列序列是正合的:

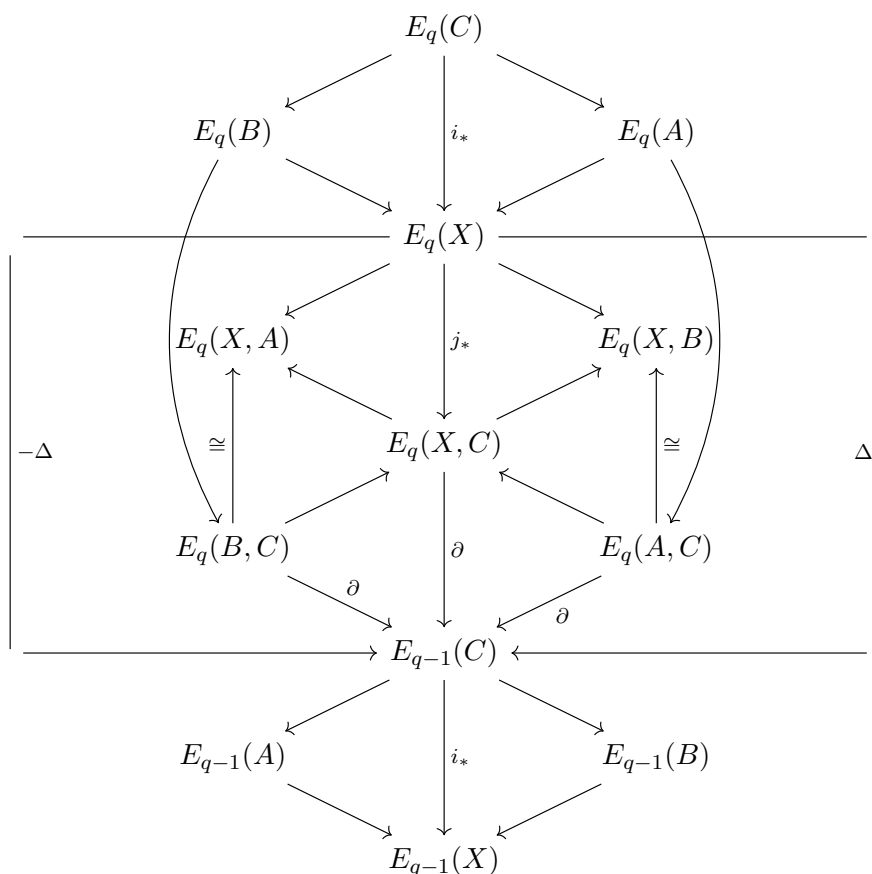
$$\cdots \rightarrow E_q(C) \xrightarrow{\psi} E_q(A) \oplus E_q(B) \xrightarrow{\phi} E_q(X) \xrightarrow{\Delta} E_{q-1}(C) \rightarrow \cdots$$

取嵌入 $i : C \rightarrow A, j : C \rightarrow B, k : A \rightarrow X, l : B \rightarrow X, \psi = (i_*(c), j_*(c)), \phi(a, b) = k_*(a) - l_*(b)$

Δ 是复合

$$E_q(X) \rightarrow E_q(X, B) \cong E_q(A, C) \xrightarrow{\partial} E_{q-1}(C)$$

证明.



简单追图就得到了结果。

另一方面, 还可以考虑 CW 复形上的情况, 对应的 $0 \rightarrow C_*(C) \rightarrow C_*(A) \oplus C_*(B) \rightarrow C_*(X) \rightarrow 0$ 诱导了这一序列。□

完全类似地, 还有

定理 14.0.21 (Mayer-Vietoris 序列: 相对同调). 给定 *excisive triad* $(X; A, B)$, $C = A \cap B$, $X \subseteq Y$, 那么下列序列是正合的:

$$\cdots \rightarrow E_q(Y, C) \xrightarrow{\psi} E_q(Y, A) \oplus E_q(Y, B) \xrightarrow{\phi} E_q(Y, X) \xrightarrow{\Delta} E_{q-1}(Y, C) \rightarrow \cdots$$

取嵌入 $i: (Y, C) \rightarrow (Y, A), j: (Y, C) \rightarrow (Y, B), k: (Y, A) \rightarrow (Y, X), l: (Y, B) \rightarrow (Y, X)$, $\psi = (i_*(c), j_*(c)), \phi(a, b) = k_*(a) - l_*(b)$

Δ 是复合

$$E_q(Y, X) \xrightarrow{\partial} E_{q-1}(X, B) \cong E_{q-1}(A, C) \rightarrow E_{q-1}(Y, C)$$

证明. 完全类似的。□

推论 14.0.22. 两条 $M-V$ 序列之间的关系为:

$$\begin{array}{ccccccc} E_q(Y, C) & \xrightarrow{\psi} & E_q(Y, A) \oplus E_q(Y, B) & \xrightarrow{\phi} & E_q(Y, X) & \xrightarrow{\Delta} & E_{q-1}(Y, C) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \oplus \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ E_{q-1}(C) & \xrightarrow{\psi} & E_{q-1}(A) \oplus E_{q-1}(B) & \xrightarrow{\phi} & E_{q-1}(X) & \xrightarrow{\Delta} & E_{q-2}(C) \end{array}$$

14.0.6 余极限的同调

定理 14.0.23. 给定一空间升链 $X_i \rightarrow X_{i+1}$, 那么自然态射 $\varinjlim E_*(X_i) \rightarrow E_*(X)$ 是同构。

由加性公理, 不妨假定 X, X_i 都是道路连通的。

对于 $j_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$, 这给出了映射柱 $(X_i \times [i, i+1]) \cup X_{i+1}$ (将 $X_i \times \{i+1\}$ 和 X_{i+1} 粘起)。现在记 $Y_0 = X_0 \times \{0\}$, 定义 $Y_{i+1} = Y_i \cup M_{i+1}$, 将 $(x, i) \in Y_i$ 和 $(x, i) \in M_{i+1}$ 粘起。

定义

$$tel X_i = \varinjlim Y_i = \cup_{i=0}^{\infty} X_i \times [i, i+1]$$

很明显, Y_i 可以收缩到 X_i (收缩到望远镜的最大面上), 设收缩映射 $r_i: Y_i \rightarrow X_i: (x, t) \mapsto (j(j(\cdots j(x))), \{i\})$, 那么有交换图:

$$\begin{array}{ccc} Y_i & \hookrightarrow & Y_{i+1} \\ \downarrow r_i & & \downarrow r_{i+1} \\ X_i & \xrightarrow{j_i} & X_{i+1} \end{array}$$

然而 r_i 事实上是同伦等价, 并且同伦群和余极限交换: 考虑余极限的泛性质; 因此 $r: tel X_i \rightarrow X$ 是弱同伦等价。

由弱同伦等价公理, $E_*(tel X_i) \rightarrow E_*(X)$ 是同构。

现在, 取 $\varepsilon < 1$:

$$A = (X_0 \times [0, 1]) \coprod \left(\coprod_{i \geq 1} (X_{2i-1} \times [2i - \varepsilon, 2i]) \cup (X_{2i} \times [2i, 2i + 1]) \right)$$

$$B = \coprod_{i \geq 0} (X_{2i} \times [2i + 1 - \varepsilon, 2i + 1]) \cup (X_{2i+1} \times [2i + 1, 2i + 2])$$

$$C = A \cap B = \coprod_{i \geq 0} X_i \times [i + 1 - \varepsilon, i + 1]$$

这是一个 excisive triad, 并且有自然的同伦等价

$$A \simeq \coprod_{i \geq 0} X_{2i}, B \simeq \coprod_{i \geq 0} X_{2i+1}, C \simeq \coprod_{i \geq 0} X_i$$

并且在这个同伦等价下, $C \rightarrow A$ 限制到各个分量上是 $\text{id} : X_{2i} \rightarrow X_{2i}, j_{2i+1} : X_{2i+1} \rightarrow X_{2i+2}$.

$C \rightarrow B$ 限制到各个分量上是 $j_{2i} : X_{2i} \rightarrow X_{2i+1}, \text{id} : X_{2i+1} \rightarrow X_{2i+1}$.

由于 $E_*(A) = \oplus E_*(X_{2i}), E_*(B) = \oplus E_*(X_{2i+1}), E_*(C) = \oplus E_*(X_i)$, 那么有图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & E_q(C) & \longrightarrow & E_q(A) \oplus E_q(B) & \longrightarrow & E_q(\text{tel } X_i) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \cdots & \longrightarrow & \oplus E_q(X_i) & \xrightarrow{\alpha'} & \oplus E_q(X_{2i}) \oplus E_q(X_{2i+1}) = \oplus E_q(X_i) & \xrightarrow{\beta'} & E_q(X) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \oplus (-1)^i & & \downarrow \oplus (-1)^i & & \downarrow \text{---} \\
 0 & \longrightarrow & \oplus E_q(X_i) & \xrightarrow{\alpha: a_i \mapsto a_i - f_i(a_i)} & \oplus E_q(X_i) & \xrightarrow{\beta} & \varinjlim E_q(X_i) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

简单计算知全图表交换, 那么简单追图知右下角虚线箭头是同构, 这就说明了结果。

第十五章 Hurewicz 定理和唯一性定理

15.0.1 Hurewicz 定理

取 $\pi = \mathbb{Z}$, 固定生成元 $i_0 \in \tilde{H}_0(S^0)$, 归纳地给出 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的生成元 $i_n = \Sigma i_{n-1}$ 。(回忆定理 14.0.9)

定义 15.0.1 (Hurewicz 同态). 对基点空间 X , 定义 Hurewicz 同态 $h: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ 为:

$$h([f]) = f_*(i_n)$$

引理 15.0.2. $n \geq 1$ 时 h 是群同态。

证明. 对于 $f, g: S^n \rightarrow X$, 回忆 $[f + g]$ 的合成方式

$$S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

现在由约化同调的加性公理: $p_*(i_n) = (i_n, i_n)$, ∇ 诱导了 $\tilde{H}_*(X)$ 中的加法, 这就说明了结果。□

引理 15.0.3. Hurewicz 同态是自然的, 并且下列图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{h} & \tilde{H}_n(X) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ \pi_{n+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{h} & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \end{array}$$

证明. $(h \circ \Sigma)([f]) = (\Sigma f)_*(\Sigma i_n) = \Sigma(f_*(i_n)) = \Sigma(h([f]))$ □

引理 15.0.4. 当 X 是若干 S^n 的一点并时, $h: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ 在 $n = 1$ 是 Abel 化, $n \geq 2$ 是同构。

证明. 首先 $\pi_n(\vee S^n)$ 的计算如下: $\vee S^n$ 是 $\prod S^n$ 的 n -骨架。考虑 Whitehead 定理, $[S^n, \vee S^n] \cong [S^n, \prod S^n]$ 是双射 (进一步是同伦群同态)

因此 $\pi_n(\vee S^n)$ 是自由 Abel 群。

现在考虑 h 在生成元上的作用, 这就得到了结论。□

定理 15.0.5 (Hurewicz). 设 X 是 $(n-1)$ -连通的基点空间, 那么 Hurewicz 同态 $h: \pi_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ 在 $n = 1$ 时是 Abel 化, $n \geq 2$ 时是同构。

证明. 不妨假定 X 是一个顶点的 CW 复形, 不存在 $1 \leq q < n$ 的胞腔, $(n+1)$ -骨架的嵌入诱导了 π_n 的同构 (考虑 n -连通); 由胞腔同调的构造可以验证 (或者见下一章) 嵌入诱导了 \tilde{H}_n 的同构。因此不妨 $X = X^{n+1}$

X^{n+1} 是 $f: K \rightarrow L$ 的余纤维 Cf , 其中 K, L 都是 n -球面的一点并。这是因为考虑 $K = X^n$, L 的每个 S^n 都对应着 X^{n+1} 中 e_{n+1} 的边界, 粘结方式正是 $(n+1)$ -胞腔的粘结方式。因此有图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \longrightarrow & Cf & \xrightarrow{r} & L & & \\
 & & & & & & \\
 \pi_n(K) & \longrightarrow & \pi_n(Cf) & \longrightarrow & \pi_n(Cf, K) & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow r_* & & \downarrow & & \\
 \pi_n(K) & \longrightarrow & \pi_n(L) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \vdots & & \\
 \tilde{H}_n(K) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(L) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

然而 $\tilde{H}_n(X) = \tilde{H}_n(Cf/K) = H_n(Cf, K) = H_n(L, K)$: 那么由同调长正合列, 第三行是正合的。($\tilde{H}_{n+1}(K) = 0$)

第二行在 $n = 1$ 时通过简单的计算知是正合的, $n > 1$ 时考虑第一行, 由定理 11.0.4, $\pi_n(Cf, K) \rightarrow \pi_n(X)$ 是同构, 因此第一行的正合转移到了第二行的正合。

因此简单追图就得到了结果。 □

15.0.2 唯一性定理

给定一个同调理论 H_n (或与之相配的 \tilde{H}_n), 对于 CW 复形 X 定义:

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1})$$

定义 $d: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ 为复合

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

容易验证 $d \circ d = 0$

定理 15.0.6. $C_*(X)$ 和 X 的胞腔链复形同构。

证明. 由于 X^n/X^{n-1} 是若干 n -球面的一点并, $C_n(X)$ 的确是每个胞腔对应一个生成元生成的自由 Abel 群。下面只需比较边缘映射:

考虑命题 14.0.11, d 是如下的复合:

$$\tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(Ci) \longrightarrow \tilde{H}_n(\Sigma X^{n-1}) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$$

同样胞腔同调中有类似结果: 引理 13.0.9。于是由 Hurewicz 同态的自然性, 其和 Σ 的交换性, 比较两个边缘映射的定义就得到了两个边缘映射是相容的。 □

现在还要给出相对同调的情况: 定义 $C_*(X, A) = \tilde{C}_*(X/A) = C_*(X)/C_*(A)$ 。

定理 15.0.7. 存在自然同构 $H_*(X, A) \cong H_*(C_*(X, A))$, 使得左侧中的 ∂ 和右侧中短正合列 $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$ 给出的长正合列连接同态是相容的。

证明. 考虑几种同调理论之间的一一对应, 我们不妨只考虑基点 CW 复形的约化同调理论。因此假定 X 是基点 CW 复形, 并且加性公理可以进一步假定 X 连通。

现在由于 $X^{n-1} \rightarrow X^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$, 考虑长正合列, 有 $\tilde{H}_q(X^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_q(X^n)$ 在 $q < n-1$ 时是同构, 在 $q > n$ 时满足 $\tilde{H}_q(X^n) = 0$ 。

特别地, $\forall i > 1, \tilde{H}_n(X^{n+1}) \cong \tilde{H}_n(X^{n+i})$ 。因此同调和余极限交换保证了 $\tilde{H}_n(X^{n+1}) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ 是同构。

现在我们有图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \tilde{H}_{n+1}(X^{n+1}/X^n) & & & & 0 \\
 & & \downarrow \partial & \searrow d_{n+1} & & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X^n) & \xrightarrow{\rho_*} & \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & \downarrow i_* & \nearrow \alpha & \searrow d_n & & \downarrow \\
 & & \tilde{H}_n(X^{n+1}) \cong \tilde{H}_n(X) & & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

定义 $\alpha: \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(\tilde{C}_*(X)): x \mapsto \rho_*(y), x = i_*(y)$, 简单追图知这是一个良定义的同构。

通过纬悬同态, 有和微分结构相容的纬悬同构 $\tilde{C}_{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{C}_n(X)$, 因此这说明 α 和纬悬同构相容, 从而完成了所有内容。 \square

15.0.3 问题

练习 15.1. 假定 π 是任意一个群, 构造一个连通的 CW 复形 $K(\pi, 1)$ 使得 $\pi_1(K(\pi, 1)) = \pi, \pi_q(K(\pi, 1)) = 0, q > 1$ 。

证明. 首先考虑定理 4.0.13, 可以假定 X_1 是 CW 复形, 并且维数不超过 2, 并且有 $\pi_1(X_1) = \pi$ 。

我们归纳地构造 X_n , 首先考虑 $\pi_n(X_{n-1})$, 如果它不平凡, 假定其生成元对应的映射为 $j_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$, 那么可以直接指定若干 e_α , 使得其边缘映射就是 j_α 。

那么这样构造出来的 X_n 满足 $\pi_n(X_n) = 0$: 通过胞腔逼近将任何 $[S^n, X]$ 中的元素转化为胞腔映射, 前文的构造就直接说明了结果。因此考虑余极限 $\varinjlim X_i$, 它是一个满足要求的 CW 复形。 \square

练习 15.2. 如果 π 有挠元, 那么任何 CW 复形 $K(\pi, 1)$ 都是无限维的。

证明. 若否, 假定 X 是有限维的, 并且满足 $K(\pi, 1)$ 的条件: 那么 π 有一个子群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 于是存在覆叠 $\tilde{X} \rightarrow X$, 使得 $\pi_1(\tilde{X}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。

因此 \tilde{X} 是空间 $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1)$, 只需要说明它不可能是有限维 CW 复形。如果这说明了, 那么考虑 X, \tilde{X} 共同的万有覆叠 E 。由于 X 有限维, 那么 E 有限维, 它不可能是一个无限维 CW 复形的覆叠。

现在说明 $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1)$ 不可能是有限维的, 而这是因为 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的群上同调不会在充分大时变为 0。 \square

练习 15.3 (Moore 空间). 对于 $n \geq 1$, π 是 Abel 群, 构造一个连通 CW 复形 $M(\pi, n)$ 使得 $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) = \pi$; $\tilde{H}_q(X, \mathbb{Z}) = 0, q \neq n$.

证明. 首先由于 π 是 Abel 群, 因此它可以表示为两个自由 Abel 群的商 $\pi = F/H$.

现在假定 F 有一组基 f_α , H 有一组基 h_β . 构造 $M(\pi, n)$ 如下:

首先取 $X_n = \bigvee_{f_\alpha} S^n$, 定义 $n+1$ 胞腔的粘结如下: 假定 $h_\beta = \sum d_{\alpha\beta} f_\alpha$.

我们将 $S^n_{\alpha\beta}$ 以映射度 $d_{\alpha\beta}$ 的方式粘结到 S_β 上, 将其视为 $e_{\alpha\beta}$ 的粘结映射. 这样就得到了一个 CW 复形 X . 其奇异链群形如: $\cdots 0 \rightarrow \mathbb{Z}[e_{\alpha\beta}] \rightarrow \mathbb{Z}[e_\alpha] \rightarrow 0 \cdots$

那么它的 n 阶同调群的确是 $F/H = \pi$, $n+1$ 阶同调群是 0, 这就说明 X 满足要求. \square

练习 15.4 (Eilenberg-MacLane 空间). 对于 $n \geq 1$, π 是 Abel 群, 构造一个连通 CW 复形 $K(\pi, n)$ 使得 $\pi_n(X) = \pi, \pi_q(X) = 0, q \neq n$.

证明. 首先考虑 $M(\pi, n)$, 它只包含 $n, n+1$ 胞腔. 那么 Hurewicz 定理保证它的直到 n 阶同伦群和 n 阶同调群同构. 现在仿照 $K(\pi, 1)$ 的构造, 不断粘结胞腔使得高阶同伦群消失, 这就给出了构造. \square

例子. $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{R}P^\infty$, $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$

练习 15.5. 计算 $[K(\pi, n), K(\rho, n)]$, 这里 $[-, -]$ 指全体保持基点的映射同伦类.

证明. 这相当于 $H^n(K(\pi, n); \rho)$. \square



第十六章 奇异同调

16.0.1 奇异链复形

对于单形 $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) | 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

存在面映射 $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n : (t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$;

还存在退化映射 $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n : (t_0, \dots, t_{n+1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1})$

对于空间 X , 定义 $S_n X$ 是全体 $f : \Delta_n \rightarrow X$ 连续映射构成的集合。因此 X 和 $S_0 X$ 作为集合是相同的。

自然定义面算子 $d_i : S_n X \rightarrow S_{n-1} X$ 为 $d_i(f)(u) = f(\sigma_i(u))$; 同样有退化算子 $s_i : S_n X \rightarrow S_{n+1} X : s_i(f)(v) = f(\sigma_i(v))$ 。

直接计算知

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i, i < j \\ d_i \circ s_j &= \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & i < j \\ \text{id} & i = j \text{ or } j + 1 \\ s_j \circ d_{i-1} & i > j + 1 \end{cases} \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i, i \leq j \end{aligned}$$

定义 16.0.1 (奇异单形). 称 $f : \Delta^n \rightarrow X$ 是奇异单形。称单形 f 是非退化的, 如果它不能写成 $s_i(g)$ 的形式。即这个单形到 X 的映射不能够退化到低维单形上。称 $C_n(X)$ 是全体非退化奇异单形生成的自由 Abel 群。记:

$$d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

简单验证知 $d \circ d = 0$ 。那么定义:

定义 16.0.2 (奇异同调). 奇异同调群被定义为 $C_*(X) \otimes \pi$ 的同调。

16.0.2 几何实现

我们给出一个相当广义的范畴论结果。

命题 16.0.3. 给定函子 $F : M \rightarrow T$, 它沿 Yoneda 嵌入 $\gamma : M \rightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set})$ 的左 Kan 扩张是如下函子的左伴随:

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\ x &\longmapsto \text{Hom}_T(F-, X) \end{aligned}$$



即：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\gamma} & \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\ & \searrow F & \downarrow \text{Lan } \gamma \\ & & T \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ X \mapsto \text{Hom}_T(F-, X) \end{array}$$

定义 16.0.4 (单形范畴). 定义单纯范畴 Δ 如下：

其对象为所有形如 $[n] = \{0, \dots, n\}$ 的集合, $n \geq 0$

态射集 $\text{Hom}_\Delta([m], [n])$ 为所有集合 $[m]$ 到 $[n]$ 的保序映射构成。

类似地, Δ 中有面映射和退化映射, 并且任何 Δ 中的态射都是若干面映射和退化映射的复合。

定义 16.0.5 (单纯集范畴). 定义单纯集范畴 $\mathbf{sSet} = \text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$, 即 Δ 上的预层。

现在我们取 $M = \Delta$ 为单形范畴, $\text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$ 即为单纯集范畴 \mathbf{sSet} 。取 T 为拓扑空间范畴 \mathbf{Top} , F 为将 Δ 的元素 n 映为标准单形 Δ^n , 单形范畴中的面映射和退化映射对应到标准单形的面映射和退化映射。那么我们就得到：

定理 16.0.6. 存在如下伴随对：

$$\mathbf{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow[\text{Sing}(-)]{\perp} \end{array} \mathbf{Top}$$

其中 $\text{Sing}(-)$ 为 *Singular simplicial complex* 函子, $|-|$ 则为几何实现。

更进一步地, 利用一些具体构造, 我们还得到：

定理 16.0.7 (几何实现的拓扑构造). $\Gamma X = \coprod_{n \geq 0} (S_n X \times \Delta_n) / (\sim)$: \sim 由如下给出：

$$(f, \delta_i u) \sim (d_i f, u), f: \Delta_n \rightarrow X, u \in \Delta_{n-1}$$

$$(f, \sigma_i v) \sim (s_i f, v), f: \Delta_n \rightarrow X, v \in \Delta_{n+1}$$

$$\gamma: \Gamma X \rightarrow X: \gamma|f, u| = (f, u)$$

定理 16.0.8 (几何实现的拓扑性质). 取 $\Gamma X = |\text{Sing}(X)|$, 那么我们可以选取 ΓX 使得它成为 CW 复形; 每个非退化奇异 n -单形对应着一个胞腔, 胞腔链复形 $C_*(\Gamma X)$ 和奇异链复形 $C_*(X)$ 是同构的链复形。并且我们可以要求 $\gamma: \Gamma X \rightarrow X$ 是弱同伦等价。

证明. [May99, Chapter 16.3] □

现在再次回忆伴随对, $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|K_*|, X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K_*, \text{Sing}(X))$ 。因此如果取 $K_* = \text{Sing}(X)$, 那么右侧的 id 对应到左侧正是余单位 $\gamma: |\text{Sing}(X)| \rightarrow X$ 。

进一步, 伴随的性质指出 $f_*: K_* \rightarrow \text{Sing}(X)$ 对应到左侧变为 $\gamma \circ |f_*|$ 。

现在我们指出通过几何实现和 $\text{Sing}(-)$, 同调理论可以在 \mathbf{sSet} 和 \mathbf{Top} 之间来回转换。例如对于一个 \mathbf{sSet} 中的元素, 我们可以如同奇异链复形一样建立一个同调理论 (单纯同调), 那么奇异同调不过是将 \mathbf{sSet} 的元素取为 $\text{Sing}(X)$ 罢了。

现在 Δ 是 \mathbf{Set} 中的单纯对象, 但是我们可以考虑更广泛范畴中的单纯对象。那么这个时候得到的则是更为抽象、一般的理论。



现在对于单纯集 X_*, Y_* , 定义它的乘积 $X_* \times Y_*$ 为范畴积。具体来说: 它的 n -单形是 $X_n \times Y_n$, 对应的映射为 $d_i \times d_i, s_i \times s_i$ 。乘积的投影映射在几何实现的作用下变为

$$|X_* \times Y_*| \rightarrow |X_*| \times |Y_*|$$

事实上这一定是同胚。

然而上述映射并不是胞腔映射, 将它同伦到胞腔映射后给出的实际上是链同伦等价 $C_*(|K_* \times L_*|) \rightarrow C_*(|K_*|) \otimes C_*(|L_*|)$ 。这实际上提示了 Kunneth 公式。

16.0.3 分类空间和 $K(\pi, n)$

正如前文说的, 我们还可以考虑单纯拓扑空间, 并且有类似的结果成立:

命题 16.0.9. 考虑 **Top**-充实后的范畴 Δ 。这里 Δ 之间的态射集充实为全体作为欧式空间中标准单形的全体连续映射构成的拓扑空间, 因此现在有推广的 Yoneda 嵌入 $\gamma: \Delta \rightarrow \mathbf{sTop}$: $c \mapsto \text{Hom}(-, c)$ 。

再一次考虑函子 $F: \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$, 将单形映为标准单形。它沿 Yoneda 嵌入 $\gamma: \Delta \rightarrow \mathbf{sTop}$ 的左 Kan 扩张是如下函子的左伴随:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{sTop} \\ x & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(F-, X) \end{array}$$

(注: 这相当于取某种奇异拓扑复形) 即:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{(\mathbf{Top}\text{-enriched})} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{sTop} \\ & \searrow F & \downarrow \text{Lan}_{\gamma} F \\ & & \mathbf{Top} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ X \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(F-, X) \end{array}$$

现在我们得到的即为单纯拓扑空间的几何实现, 它的具体构造和单纯集的几何实现类似【?】。

【未完】【Milnor's Construction: $\varinjlim (G * \cdots * G)$ 】给定拓扑群 G 。

首先考虑 $p_*: E_*(G) \rightarrow B_*(G)$ 是单纯拓扑空间之间的态射: 取 $E(G) = G^{n+1}, B(G) = G^n$, p_n 是在前 n 个坐标上的投影。

$E_n(G)$ 上的面映射和退化映射的定义为:

$$d_i(g_1, \cdots, g_{n+1}) = \begin{cases} (g_2, \cdots, g_{n+1}) & i = 0 \\ (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n+1}) & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$s_i(g_1, \cdots, g_{n+1}) = (g_1, \cdots, g_{i-1}, e, g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})$$

同样我们可以在 $B_n(G)$ 上同样定义, 只不过省略最后一个坐标。特别地, $d_n(g_1, \cdots, g_n) = (g_1, \cdots, g_{n-1})$ 。

因此 p_* 自然是单纯空间之间的映射。现在 $E_n(G)$ 上有 G 的右作用：

$$(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) = (g_1, \dots, g_n, g_{n+1}g)$$

那么 $E_*(G)$ 成为单纯 G -空间。(G 的作用和面映射与单纯映射交换), 因此 $B_n(G)$ 可以视作轨道空间 $E_n(G)/G$ 。

现在定义

$$E(G) = |E_*(G)|, B(G) = |B_*(G)|, p = |p_*(G)| : E(G) \rightarrow B(G)$$

这里 $E(G)$ 是若干 $E(G)^n$ 的并, 其中 $E(G)^n = \coprod_{m \leq n} G^{m+1} \times \Delta_m$, 并且 $E(G)^n - E(G)^{n-1} = (G^n - W) \times G \times (\Delta_n - \partial\Delta_n)$, 这里 $W \subseteq G^n$ 是至少有一个分量是单位元的集合。

同理我们有 $B(G)$, 并且 $B(G)^n - B(G)^{n-1} = (G^n - W) \times (\Delta_n - \partial\Delta_n)$, 自然有分量投影定义的 p 。

定理 16.0.10. 当 e 是 G 的 *Nondegenerately based point* 时有 p 是以 G 为纤维的覆叠, 并且 $E(G)$ 是可缩的。

作为推论, 有 $\pi_{q+1}(BG) \cong \pi_q(G)$

由于显然的 $(G \times H)^n \cong G^n \times H^n$, 作为推论 $E_*(G \times H) \cong E_*(G) \times E_*(H)$, $B_*(G \times H) \cong B_*(G) \times B_*(H)$ 。并且这两个同构在投影下是 coincide 的。于是过渡到几何实现下, 就有 $B(G \times H) = B(G) \times B(H)$ 。

如果 G 是交换拓扑群, 那么 $G \times G \rightarrow G$, 以及逆映射 $G \rightarrow G$ 都是同态, 于是 $B(G), E(G)$ 也是交换拓扑群。这里乘法由 $B(G) \times B(G) \cong B(G \times G) \rightarrow B(G)$ 给出。更进一步地 G 到 $E(G)$ 的嵌入: 映到 $B_0(G)$ 中的单位元所处的纤维是一个同胚。因此我们可以反复如此构造: 取 $B^0(G) = G, B^n(G) = B(B^{n-1}(G))$ 。

现在对于离散 Abel 群 π , 取 $K(\pi, n) = B^n(\pi)$, 于是由前述同构: $\pi_q(K(\pi, n)) = \dots = \pi_{q-n}(K(\pi, 0)) = \begin{cases} \pi & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$

练习 16.1. 给定拓扑空间 X , 假定有万有覆叠 \tilde{X} , $\pi = \pi_1(X)$, π 在 \tilde{X} 上有覆叠变换, 即 $\pi \cong \text{Aut}(\tilde{X})$ 。

现在 A 是一个 Abel 群, 环 $\mathbb{Z}[\pi]$ 以平凡的方式作用在 A 上: $a \cdot \sigma = a, \sigma \in \pi$ 。

假定 X 是 CW 复形, \tilde{X} 上也可选取一个 CW 复形结构使得它和前者结构在投影下相容。 π 在 \tilde{X} 上的作用诱导了 $\mathbb{Z}[\pi]$ 在 $C_*(\tilde{X})$ 上的作用: 由于 $\sigma \in \pi$ 将胞腔映到胞腔, 那么只需指定 $n\sigma$ 将 e 映到 $n\sigma(e)$ 。

因此 $C_q(\tilde{X})$ 自动成为自由 $\mathbb{Z}[\pi]$ 模: 它的生成元仍然是 X 的所有胞腔。任何 \tilde{X} 的胞腔都可以由 $p(\tilde{X})$ 通过 π 的作用生成。

进一步地:

$$C_*(X; A) \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X) \cong A \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_*(\tilde{X})$$

注记. 由于万有覆叠 \tilde{X} 的高阶同伦群和 X 的高阶同伦群是相同的。然而 $\pi_1(X)$ 诱导了 \tilde{X} 上的覆叠映射, 因此自然诱导了 $\pi_q(X)$ 的自同态。这就给出了一个自然的 π_1 在 π_q 上的作用 ($q \geq 2$)。

练习 16.2. 现在考虑群 π , 以及 $K(\pi, 1)$ 是连通 CW 复形。那么:

$$H_*(K(\pi, 1); A) \cong \text{Tor}_*^{\mathbb{Z}[\pi]}(A, \mathbb{Z})$$

证明. 注意 $K(\pi, 1) = B\pi$, 其万有覆叠 $E\pi$ 可缩, 因此约化同调平凡。即:

$$\cdots \rightarrow C_2(E\pi) \rightarrow C_1(E\pi) \rightarrow C_0(E\pi) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

是自由 $\mathbb{Z}[\pi]$ 模消解。

因此

$$\text{Tor}_*^{\mathbb{Z}[\pi]}(A, \mathbb{Z}) = H_*(A \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C_*(E\pi)) = H_*(B\pi; A)$$

□

练习 16.3. 设 $p : Y \rightarrow X$ 是有限纤维的覆叠, 假定是 n -覆叠。那么存在一个同态 $t : H_*(X; A) \rightarrow H_*(Y; A)$, 使得 $p_* \circ t : H_*(X; A) \rightarrow H_*(X; A)$ 是乘以 n 。称 t 为转移同态。

证明. 考虑 $t : C_*(X; A) \rightarrow C_*(Y; A)$, 假定 X, Y 有相容的 CW 结构使得 p 是胞腔映射, 那么令 t 将 e_n 映至其 n 个原像对应的胞腔之和: 很明显它是链映射, 因此给出了 $t : H_*(X; A) \rightarrow H_*(Y; A)$, 并且 $p_* \circ t$ 是乘以 n 。□

第十七章 同调代数

17.0.1 万有系数定理

定理 17.0.1 (同调万有系数定理 1). 给定环 R , 左 R -模 A , (\mathbf{K}, d) 是平坦右 R -模组成的链复形, 并且全体边缘 $(\text{Im } d_n = B_{n-1})$ 组成的子链复形满足每一项都仍然是平坦的。那么对于 $n \geq 0$, 有正合列:

$$0 \rightarrow H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A \xrightarrow{\lambda_n} H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \xrightarrow{\mu_n} \text{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \rightarrow 0$$

其中 $\lambda_n : \text{cls}(z) \otimes a \mapsto \text{cls}(z \otimes a)$, 这里 $\text{cls}(-)$ 指同调类的代表元, 并且 λ_n, μ_n 都是自然的。

证明. 考虑序列 $0 \rightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} K_n \xrightarrow{d'_n} B_{n-1} \rightarrow 0$

由于 B_{n-1} 平坦, 那么 $\text{Tor}_1^R(B_{n-1}, A) = 0$, 于是有正合列:

$$0 \rightarrow Z_n \otimes_R A \xrightarrow{i_n \otimes 1} K_n \otimes_R A \xrightarrow{d'_n \otimes 1} B_{n-1} \otimes_R A \rightarrow 0$$

另一方面讨论 Tor 长正合列可以看出 Z_n 也是平坦的。

现在注意到 d_n 诱导了

$$Z_n \hookrightarrow K_n \rightarrow B_{n-1} \hookrightarrow Z_{n-1}$$

$$B_n \hookrightarrow Z_{n-1} \hookrightarrow K_n \rightarrow B_{n-1}$$

因此我们将上文中的短正合列用这些态射组装起来, 有链复形的短正合列:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_R A \xrightarrow{i \otimes 1} \mathbf{K} \otimes_R A \xrightarrow{d \otimes 1} \mathbf{B}[-1] \otimes_R A \rightarrow 0$$

现在考虑这个链复形短正合列的长正合列:

$$H_{n+1}(\mathbf{B}[-1] \otimes_R A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\mathbf{Z} \otimes_R A) \xrightarrow{(i_n \otimes 1)^*} H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \rightarrow H_n(\mathbf{B}[-1] \otimes_R A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathbf{Z} \otimes_R A)$$

然而组成 $\mathbf{Z}, \mathbf{B}[-1]$ 的态射都是零映射: 这是由定义保证的。因此 $H_{n+1}(\mathbf{B}[-1] \otimes_R A) = B_n \otimes_R A, H_n(\mathbf{Z} \otimes_R A) = Z \otimes_R A$ 。

即:

$$B_n \otimes_R A \xrightarrow{\partial_{n+1}} Z_n \otimes_R A \rightarrow H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \rightarrow B_{n-1} \otimes_R A \xrightarrow{\partial_n} Z_{n-1} \otimes_R A$$

这里第三项处的短正合列 $0 \rightarrow \text{coker } \partial_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \xrightarrow{\beta_n} \ker \partial_n \rightarrow 0$ 由如下给出:

$$\alpha_n : (z + \text{Im } \partial_{n+1}) \otimes a \mapsto \text{cls}(i_n z \otimes a)$$



$$\beta_n : cls(z \otimes a) \mapsto d_n z \otimes a$$

现在计算连接同态:

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1} \otimes_R A & \xrightarrow{d'_{n+1} \otimes 1} & B_n \otimes_R A \\ d_{n+1} \otimes 1 \downarrow & & \\ Z_n \otimes_R A & \xrightarrow{i_n \otimes 1} & K_n \otimes_R A \end{array}$$

$b \in B_n, b = d_{n+1}k, k \in K_{n+1}$, 那么:

$$\partial_{n+1} : b \otimes a \mapsto k \otimes a \mapsto b \otimes a \mapsto (i_n \otimes 1)^{-1}(b \otimes a) = b \otimes a$$

即 $\partial_{n+1} = (j_n : B_n \hookrightarrow Z_n) \otimes 1$ 。

于是 $0 \rightarrow B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \rightarrow H_n(\mathbf{K}) \rightarrow 0$ 是平坦消解。因此:

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) = \ker(j_{n-1} \otimes 1)$$

$$H_{n-1}(\mathbf{K}) \otimes_R A \cong \mathrm{Tor}_0^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) = \mathrm{coker}(j_n \otimes 1)$$

于是前文短正合列变成了:

$$0 \rightarrow H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A \rightarrow H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \rightarrow 0$$

并且诸态射由前文条件满足要求。 □

推论 17.0.2 (同调万有系数定理 2). 如果 R 是右遗传环, A 是左 R -模, (\mathbf{K}, d) 是投射右 R -模复形。那么对于 $n \geq 0$, 有正合列:

$$0 \rightarrow H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A \xrightarrow{\lambda_n} H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \xrightarrow{\mu_n} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \rightarrow 0$$

其中 $\lambda_n : cls(z) \otimes a \mapsto cls(z \otimes a)$, 这里 $cls(-)$ 指同调类的代表元, 并且 λ_n, μ_n 都是自然的。

这个序列有非典范的分裂。

证明. 由于 R 是右遗传环, 那么投射 R -模的子模都是投射的。因此 $B_n \subseteq K_n$ 是投射的, 于是平坦, 因此由万有系数定理得到正合列。

现在由投射模的性质, $0 \rightarrow Z_n \rightarrow K_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$ 分裂。由于直和与张量积交换:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_R A \rightarrow \mathbf{K} \otimes_R A \rightarrow \mathbf{B}[-1] \otimes_R A \rightarrow 0$$

是分裂的链复形短正合列。

现在 $Z_n \otimes A \cong \mathrm{Im}(i_n \otimes 1)$ 是 $K_n \otimes A$ 的直和项。于是有嵌入: $\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1) \subseteq \mathrm{Im}(i_n \otimes 1) \subseteq \ker(d_n \otimes 1) \subseteq K_n \otimes A$ 。

因此 $\mathrm{Im}(i_n \otimes 1)$ 是 $\ker(d_n \otimes 1)$ 的直和项。(考虑 $M = N \oplus P \implies S = N \oplus (P \cap S), N \subseteq S \subseteq M$)

同样地, $\mathrm{Im}(i_n \otimes 1) / \mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1)$ 是 $\ker(d_n \otimes 1) / \mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1) = H_n(\mathbf{K} \otimes_R A)$ 的直和项。

现在 $d_{n+1} = i_n j_n d'_{n+1}$, 于是 $\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1) = (i_n \otimes 1) \mathrm{Im}(j_n d'_{n+1} \otimes 1)$, 并且 $\mathrm{Im}(j_n d'_{n+1} \otimes 1) = (j_n \otimes 1) \mathrm{Im}(d'_{n+1} \otimes 1)$ 。但是 $\mathrm{Im}(d'_{n+1} \otimes 1) = B_n \otimes_R A$: d'_{n+1} 满足 $- \otimes_R A$ 是右正合的。

因此

$$(j_n \otimes 1) \operatorname{Im}(d'_{n+1} \otimes 1) = (j_n \otimes 1)(B_n \otimes_R A) = \operatorname{Im}(j_n \otimes 1)$$

于是

$$\operatorname{Im}(i_n \otimes 1) / \operatorname{Im}(d_{n+1} \otimes 1) = \operatorname{Im}(i_n \otimes 1) / (i_n \otimes 1) \operatorname{Im}(j_n \otimes 1)$$

但是 $\operatorname{Im}(i_n \otimes 1) = Z_n \otimes_R A$, 于是 $\operatorname{Im}(i_n \otimes 1) / (i_n \otimes 1) \operatorname{Im}(j_n \otimes 1) = (Z_n \otimes_R A) / (\operatorname{Im}(j_n \otimes 1)) = \operatorname{coker}(j_n \otimes 1) = H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A$. \square

下面我们考虑 $\operatorname{Hom}(-, M)$ 在链复形上的作用: 链群变为 $\operatorname{Hom}(C_q, M)$, 微分映射则是 $d^q = \operatorname{Hom}(d_{q+1}, \operatorname{id})$

对偶地, 我们有

定理 17.0.3 (上同调万有系数定理 1,2). 给定环 R , 左 R -模 A , (\mathbf{K}, d) 是投射左 R -模组成的链复形, 并且全体边缘 $(\operatorname{Im} d_n = B_{n-1})$ 组成的子链复形满足每一项都仍然是投射的。那么对于 $n \geq 0$, 有正合列:

$$0 \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \xrightarrow{\lambda_n} H^n(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{K}, A)) \xrightarrow{\mu_n} \operatorname{Hom}_R(H_n(\mathbf{K}), A) \rightarrow 0$$

其中 λ_n, μ_n 都是自然的。

进一步, 如果 R 是左遗传的, 那么上述正合序列有不典范的分裂。

推论 17.0.4. 如果 R 是域, A 是 R 上的模, (\mathbf{K}, d) 是 R 上的链复形, 那么:

$$H^*(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{K}, A)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(H_*(\mathbf{K}), A)$$

是自然同构。

17.0.2 Kunneth 公式

我们现在大致叙述 Kunneth 公式的想法: 很容易发现万有系数定理事实上可以推广到任何 Abel 范畴上。因此如果我们在全体 R -模的链复形构成的范畴 **Comp** 中工作, 我们就得到了这个重要的结果。

定理 17.0.5 (同调 Kunneth 公式 1). 给定环 R , 左 R -模构成的链复形 (\mathbf{C}, d) , (\mathbf{A}, δ) 是右 R -模构成的链复形使得 \mathbf{A} 中的项和全体边缘构成的子链复形 \mathbf{B} 中的项都是平坦 R -模。那么对于每个 n , 有正合列:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathbf{A}) \otimes_R H_q(\mathbf{C}) \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{A}), H_q(\mathbf{C})) \rightarrow 0$$

并且满足 $\alpha: \sum_p \operatorname{cls}(b_p) \otimes \operatorname{cls}(c_{n-p}) \mapsto \sum_p \operatorname{cls}(b_p \otimes c_{n-p})$, α, β 对 \mathbf{A}, \mathbf{C} 都是自然的。

证明. 简单来说, 就是直接验证发现在链复形上张量积一个模或者一个链复形在这个命题上是没有区别的。 \square

定理 17.0.6 (同调 Kunneth 公式 2). 如果 R 是右遗传环, \mathbf{C} 是左 R -模构成的链复形, (\mathbf{A}, d) 是投射右 R -模复形。那么对于 $n \geq 0$, 有正合列:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathbf{A}) \otimes_R H_q(\mathbf{C}) \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{A}, \mathbf{C})) \rightarrow 0$$

并且满足 $\alpha: \sum_p \text{cls}(b_p) \otimes \text{cls}(c_{n-p}) \mapsto \sum_p \text{cls}(b_p \otimes c_{n-p})$, α, β 对 \mathbf{A}, \mathbf{C} 都是自然的。

这个序列有非典范的分裂。

定理 17.0.7 (上同调 Kunneth 公式). 给定环 R , 左 R -模构成的上链复形 \mathbf{C} , (\mathbf{A}, d) 是投射左 R -模组成的链复形, 并且全体边缘 $(\text{Im } d_n = B_{n-1})$ 组成的子链复形满足每一项都仍然是投射的。那么对于 $n \geq 0$, 有正合列:

$$0 \rightarrow \prod_{p-q=n-1} \text{Ext}_R^1(H_p(\mathbf{A}), H^q(\mathbf{C})) \xrightarrow{\lambda_n} H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{A}, \mathbf{C})) \xrightarrow{\mu_n} \prod_{p-q=n} \text{Hom}_R(H_p(\mathbf{A}), H^q(\mathbf{C})) \rightarrow 0$$

其中 λ_n, μ_n 都是自然的。

进一步, 如果 R 是左遗传的, 那么上述正合序列有不典范的分裂。

17.0.3 \otimes 和 Hom

命题 17.0.8. 对于 R -模 L, M, N , $\text{Hom}_R(L \otimes M, N) \cong \text{Hom}_R(L, \text{Hom}_R(M, N))$ 。

命题 17.0.9. 有自然态射 $\text{Hom}_R(L, M) \otimes_R N \rightarrow \text{Hom}_R(L, M \otimes_R N)$, 这是一个同构如果 L 或 N 是有限生成投射 R 模。

命题 17.0.10. 自然态射 $\text{Hom}_R(L, M) \otimes_R \text{Hom}_R(L', M') \rightarrow \text{Hom}_R(L \otimes_R L', M \otimes_R M')$ 是同构, 如果 L, L' 都是有限生成且投射的; 或者 L 是有限生成且投射的, 而 $M = R$ 。

现在上述命题中我们也可以将 L 替换为链复形 X , 那么链同伦 $X \otimes \mathcal{J} \rightarrow X'$ 诱导了链映射:

$$\text{Hom}(X', M) \rightarrow \text{Hom}(X \otimes \mathcal{J}, M) \cong \text{Hom}(\mathcal{J}, \text{Hom}(X, M)) \cong \text{Hom}(X, M) \otimes \mathcal{J}^*$$

这里 $\mathcal{J}^* = \text{Hom}(\mathcal{J}, R)$ 。最后一个同构是因为 $\text{Hom}(\mathcal{J}, \text{Hom}(X, M)) = \text{Hom}(\mathcal{J}, R \otimes \text{Hom}(X, M)) \cong \text{Hom}(\mathcal{J}, R) \otimes \text{Hom}(X, M)$ 。

因此这诱导了上链映射之间的链同伦: $f^* \simeq g^*: \text{Hom}(X', M) \rightarrow \text{Hom}(X, M)$ 。

现在对于上链复形, 有自然态射 $\alpha: H^*(Y) \otimes H^*(Y') \rightarrow H^*(Y \otimes Y')$ 。现在考虑 $Y = \text{Hom}(X, M), Y' = \text{Hom}(X', M)$ 。这时有

$$\omega: \text{Hom}(X, M) \otimes \text{Hom}(X', M') \rightarrow \text{Hom}(X \otimes X', M \otimes M')$$

那么考虑 ω 在上同调上诱导的映射, 现在有了复合:

$$\omega \circ \alpha: H^*(\text{Hom}(X, M)) \otimes H^*(\text{Hom}(X', M')) \rightarrow H^*(\text{Hom}(X \otimes X', M \otimes M'))$$

如果 $M = M' = A$ 是交换 R 代数, 那么还可以继续复合 $H^*(\text{Hom}(X \otimes X', A \otimes A)) \rightarrow H^*(\text{Hom}(X \otimes X', A))$ 。因此我们有了:

$$H^*(\text{Hom}(X, A)) \otimes H^*(\text{Hom}(X', A)) \rightarrow H^*(\text{Hom}(X \otimes X', A))$$

第十八章 公理化上同调理论和胞腔上同调

18.0.1 Eilenberg-Steenrod 上同调公理

定理 18.0.1 (Eilenberg-Steenrod 上同调公理). 固定 $Abel$ 群 π , 存在一组空间偶对的同伦范畴到 $Abel$ 群的反变函子 $H^q(X, A; \pi), q \in \mathbb{N}$, 以及一族自然同构 $\delta : H^q(A; \pi) \rightarrow H^{q+1}(X, A; \pi)$ 。这里 $H^q(-; \pi) = H^q(-, \emptyset; \pi)$, 并且它们满足如下公理。

维数公理 X 是一个单点, 那么 $H^0(X; \pi) = \pi, H^q(X; \pi) = 0, \forall q > 0$ 。

正合公理 下列序列是正合的:

$$\cdots H^q(X, A; \pi) \rightarrow H^q(X; \pi) \rightarrow H^q(A; \pi) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X, A; \pi) \rightarrow \cdots$$

其中未指明的态射是由 $A \rightarrow X, (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ 诱导的。

切除公理 如果 $(X; A, B)$ 是 *excisive triad*: $Int(A) \cup Int(B) = X$, 那么嵌入 $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ 诱导了同构:

$$H^*(X, B; \pi) \rightarrow H^*(A, A \cap B; \pi)$$

加性公理 如果 $(X, A) = \coprod (X_i, A_i)$, 那么嵌入 $(X_i, A_i) \rightarrow (X, A)$ 诱导了同构:

$$H^*(X, A; \pi) \rightarrow \prod_i H^*(X_i, A_i; \pi)$$

弱等价公理 如果 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是空间偶对的弱等价 (即同时给出了 $X, Y; A, B$ 间的弱等价), 那么它诱导了同构

$$f^* : H^*(Y, B; \pi) \rightarrow H^*(X, A; \pi)$$

对于 CW 复形, 有:

定理 18.0.2 (Eilenberg-Steenrod 上同调公理: CW 复形). 固定 $Abel$ 群 π , 存在一组 CW 复形偶对的同伦范畴到 $Abel$ 群的反变函子 $H^q(X, A; \pi), q \in \mathbb{N}$, 以及一族自然同构 $\delta : H^q(A; \pi) \rightarrow H^{q+1}(X, A; \pi)$ 。这里 $H^q(-; \pi) = H^q(-, \emptyset; \pi)$, 并且它们满足如下公理。

维数公理 X 是一个单点, 那么 $H^0(X; \pi) = \pi, H^q(X; \pi) = 0, \forall q > 0$ 。

正合公理 下列序列是正合的:

$$\cdots H^q(X, A; \pi) \rightarrow H^q(X; \pi) \rightarrow H^q(A; \pi) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X, A; \pi) \rightarrow \cdots$$

其中未指明的态射是由 $A \rightarrow X, (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ 诱导的。

切除公理 如果 X 是子复形 A, B 的并, 那么嵌入 $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ 诱导了同构:

$$H^*(X, B; \pi) \rightarrow H^*(A, A \cap B; \pi)$$

加性公理 如果 $(X, A) = \coprod (X_i, A_i)$, 那么嵌入 $(X_i, A_i) \rightarrow (X, A)$ 诱导了同构:

$$H^*(X, A; \pi) \rightarrow \prod_i H^*(X_i, A_i; \pi)$$

注记. 同样, CW 复形上同调理论和一般拓扑空间偶对上同调理论也是相互决定的。

18.0.2 胞腔和奇异上同调

定义奇异上链群 $C^*(X, A; \pi) = \text{Hom}(C_*(X, A), \pi)$, 定义胞腔上同调 $H^*(X, A; \pi)$ 为上链复形的上同调群。

进一步对于一个环 R 上的模 M , 取 $C^*(X, A; M) = \text{Hom}_R(C_*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} R, M)$, 这使得我们可以将问题转化为环系数 R 。特别地, R 是域时:

$$H^*(X, A; M) \cong \text{Hom}_R(H_*(X, A; R), M)$$

同样我们也可以定义奇异上同调, 并且前文的通过几何实现和 Singular simplicial complex 来回转化的相关讨论仍然正确。

18.0.3 杯积

首先对于 CW 复形, 有胞腔链复形的同构 $C_*(X \times Y) \cong C_*(X) \otimes C_*(Y)$ 。胞腔上链复形满足 $C^*(X \times Y; \pi \otimes_{\mathbb{Z}} \pi') \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X) \otimes C_*(Y), \pi \otimes \pi')$ 。

现在由上一章的讨论, 有自然的态射 $H^*(X; \pi) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(Y; \pi') \rightarrow H^*(X \times Y; \pi \otimes \pi')$ 那么如果取 $X = Y, \pi = \pi' = R$, 再考虑对角映射 $\Delta: X \rightarrow X \times X$, 就有:

$$\cup: H^*(X; R) \otimes_R H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R)$$

现在 \cup 使得 $H^*(X; R)$ 变成分次, 含么, 结合, 超交换的 R -代数。这里么元是 $\pi^*: H^0(*; R) \rightarrow H^0(X; R)$ ($\pi: X \rightarrow *$) 诱导的 $1 \in R$ 的像。其余性质的验证都是简单的。

简单来说, \cup 是由 $C^\bullet(X; R) \times C^\bullet(X; R) \xrightarrow{Kunnet} C^\bullet(X \times X; R) \xrightarrow{\Delta^*} C^\bullet(X; R)$ 诱导的: 这里的 Δ^* 应当是和 Δ 同伦的胞腔映射诱导出来的, 而非直接由 Δ 得到。

上述定义在计算意义下并不是简单的, 现在对于 CW 复形的胞腔上同调, 我们给出具体的杯积。首先给定 $\varphi \in C^k(X; R), \psi \in C^l(X; R)$, 定义 $\varphi \cup \psi \in C^{k+l}(X; R)$ 如下:

$$\varphi \cup \psi(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$$

其中右侧乘积是系数环 R 的乘积。

引理 18.0.3. 对于 $\varphi \in C^k(X; R), \psi \in C^l(X; R)$, $\delta(\varphi \cup \psi) = \delta\varphi \cup \psi + (-1)^k \varphi \cup \delta\psi$

因此直接验证知 \cup 诱导了一个良定义的同态:

$$H^k(X, R) \times H^l(X, R) \rightarrow H^{k+l}(X, R)$$

这是一个结合, 分配的运算。特别地 $1 \in H^0(X, R)$ 是它的么元。

命题 18.0.4. 上述定义的 \cup 满足自然性: $f: X \rightarrow Y$, 则 $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$ 。

命题 18.0.5. 上述定义的 \cup 满足超交换性: $\alpha \cup \beta = (-1)^{kl} \beta \cup \alpha$ 。

更一般地, 我们还有相对上同调上的杯积, 详细论述见练习 19.1

18.0.4 $\mathbb{R}P^n$ 和 Borsuk-Ulam 定理

$$H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 < q \leq n, q \text{ even} \\ \mathbb{Z} & q = n, \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 \leq q < n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

命题 18.0.6. 假定 $f: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 使得 $f_*: \pi_1(\mathbb{R}P^m) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n)$ 不是零映射, 那么 $m \leq n$ 。

证明. 首先 $n = 1$ 时的情况是显然的。现在假定 $m > n \geq 2$ 。

由 Hurewicz 同构的自然性: $H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$ 是非零映射。由于 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, 因此我们可以将问题转化为: $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是非零映射。

因此对于 $x \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 如果非 0, 那么 $f^*(x)$ 也是如此, 现在 $(f^*(x))^m = f^*(x^m)$ 。

由于 $m > n$, $x^m = 0$, 因此这就说明了矛盾。□

定理 18.0.7. $m > n \geq 1$ 时, 不存在将 S^m 中对极点映到 S^n 中对极点的连续映射。

证明. 假定存在 $g: S^m \rightarrow S^n$, 它诱导了 $f: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$, 因此 $f_*: \pi_1(\mathbb{R}P^m) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n)$ 是零映射。

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{g} & S^n \\ p_m \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p_n \\ \mathbb{R}P^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

由 Lifting Criteria, 存在 $\tilde{f}: \mathbb{R}P^m \rightarrow S^n$, 使得 $p_n \tilde{f} = f$ 。现在 $\tilde{f}(p_m(s)) = \tilde{f}(p_m(-s))$ 只能是 $g(s)$ 或 $g(-s)$ 。于是一定存在 $t \in \{-s, s\}$ 使得 $\tilde{f}(p_m(t)) = g(t)$ 。

因此 $\tilde{f} \circ p_m$ 和 g 在某一点相同, 于是由提升的唯一性一定处处相同。然而这是不可能的: 一方面 g 将对极点映为对极点, 另一方面 $\tilde{f} \circ p_m$ 将对极点映为同一个点, 矛盾。□

定理 18.0.8 (Borsuk-Ulam). 任何连续映射 $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 存在 $x \in S^n$ 使得 $f(x) = f(-x)$ 。

证明. 若否, 定义 $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$: $g(x) = [f(x) - f(-x)]/|f(x) - f(-x)|$, 这是一个连续的将对极点映为对极点的映射。□

18.0.5 障碍理论

我们来指出如下结果： X 的 Y 的同伦群系数上同调控制了 $[X, Y]$ 。

定义 18.0.9. 固定 $n \geq 1$, 称连通空间 X 是 n -简单的, 如果 $\pi_1(X)$ 是 Abel 的并且平凡地作用在同伦群 $\pi_q(X), q \leq n$ 上。称 X 是简单的, 如果 $\forall n, X$ 都是 n 简单的。

假定 (X, A) 是相对 CW 复形, 相对骨架 X^n, Y 是 n -简单空间。现在的问题是 $X^n \rightarrow Y$ 能否被延拓到 $X^{n+1} \rightarrow Y$ 上。

现在考虑 X^{n+1} 在 X^n 上胞腔 e 的粘结映射 $S^n \rightarrow X$, 这个粘结映射和 f 的复合得到了 $\pi_n(Y)$ 中的一个元素。 Y 的性质保证了基点选择在这里是无关的。

因此将全体 $(n+1)$ -胞腔对应的 $\pi_n(Y)$ 中的元素加起来, 就得到了一个元素

$$c_f \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

因此如果 $c_f = 0$, 就可以将 f 按照胞腔一个一个进行延拓, 但是 $c_f = 0$ 并不是一个简单的条件。

如果 $f, f' : X^n \rightarrow Y$, 以及一个 f, f' 在 X^{n-1} 上的限制之间存在 A 上同伦 $h : f \simeq f' \text{ rel } A : X^{n-1} \times I \rightarrow Y$ 。那么这定义出了:

$$h(f, f') : (X \times I)^n \rightarrow Y$$

将 $h(f, f')$ 对应到胞腔 $j \times I$ 上, 按照前文 c_f 的构造, 也得到了

$$d_{f, f', h} \in C^n(X, A; \pi_n(Y))$$

并且 $\delta d_{f, f', h} = c_f - c_{f'}$ 。并且给定 f, d , 能够构造出 f' 满足它和 f 在 X^{n-1} 上相同, 并且 $d_{f, f'} = d, h$ 是常值同伦。因此:

定理 18.0.10. 对 $f : X^n \rightarrow Y, f|_{X^{n-1}}$ 能够延拓到 X^{n+1} 上 $\iff [c_f] = 0 \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$

更进一步地, 我们还有唯一性:

定理 18.0.11. 给定 $f, f' : X^n \rightarrow Y$, 以及一个 f, f' 在 X^{n-1} 上的限制之间存在 A 上同伦 $h : f \simeq f' \text{ rel } A : X^{n-1} \times I \rightarrow Y$ 。那么障碍类 $H^n(X, A; \pi_n(Y))$ 消失 $\iff h$ 在 X^{n-2} 上的限制能够提升到 $f \simeq f' : \text{rel } A, X^n \times I \rightarrow Y$ 。

18.0.6 问题

练习 18.1. 给定拓扑空间 X , 假定有万有覆叠 $\tilde{X}, \pi = \pi_1(X), A$ 是 Abel 群。

那么 $C^*(X; A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X); A)$ 。基于和练习 16.1 相同的原因, 它自然同构于 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_*(\tilde{X}), A)$ 。

进一步, 由于 $K(\pi, 1) = B\pi$ 。万有覆叠 $E\pi$ 可缩, 因此约化同调平凡。即:

$$\cdots \rightarrow C_2(E\pi) \rightarrow C_1(E\pi) \rightarrow C_0(E\pi) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

是自由 $\mathbb{Z}[\pi]$ 模消解。

因此

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}[\pi]}^*(\mathbb{Z}, A) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_*(E\pi), A)) = H^*(B\pi; A)$$

注记. 当 A 是交换环时, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[\pi]}^*(\mathbb{Z}, A)$ 上有一个自然的乘积结构。

练习 18.2.

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]}^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

练习 18.3. H -空间是指空间 X , 基点 e , 乘积 $\phi: X \times X \rightarrow X$, 使得 $\lambda: e \times -, \rho: - \times e$ 和恒等映射同伦。

如果 e 是 X 的 *Nondegenerately based* 的, 那么 $\psi: X \times X \rightarrow X$ 和某个 $\psi': X \times X \rightarrow X$ 是同伦的, 并且在 ψ 下基点的左右乘都是恒等映射。[Cofibration 性质]

$\pi_1(X, e)$ 上由 $\psi': X \times X \rightarrow X$ 诱导的乘积和路径复合的乘法是交换的, 并且它们都是交换的运算 [Eckmann-Hilton]

有交换图:

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\Delta \times \Delta} & X \times X \times X \times X \xrightarrow{\text{id} \times t \times \text{id}} X \times X \times X \times X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \times \phi \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

其中 t 是交换两个分量。

如果 X 是 $(n-1)$ -连通的, $n \geq 2, x \in H^n(X)$, 那么:

$$\phi^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

进一步:

$$(\Delta \times \Delta)^*(\text{id} \times t \times \text{id})^*(\phi \times \phi)^*(x \otimes x) = x^2 \otimes 1 + (1 + (-1)^n)(x \otimes x) + 1 \otimes x^2$$

现在如果 n 是偶数, 那么要么 $2(x \otimes x) = 0 \in H^*(X \times X)$, 要么 $x^2 \neq 0$, 于是 n 是偶数时 S^n 不是 H -空间。



第十九章 上同调理论的推论

19.0.1 约化上同调

这和第 14.0.1 节相同。

19.0.2 Mayer-Vietoris 序列

命题 19.0.1. 对于三元组 (X, A, B) ($B \subset A \subset X$), 有正合列:

$$\cdots \rightarrow E^{q-1}(A, B) \xrightarrow{\delta} E^q(X, A) \rightarrow E^q(X, B) \rightarrow E^q(A, B) \rightarrow \cdots$$

这里 δ 是复合 $E^{q-1}(A, B) \rightarrow E^{q-1}(A) \rightarrow E^q(X, A)$ 。

引理 19.0.2. 给定 *excisive triad* $(X; A, B)$, $C = A \cap B$, 那么嵌入诱导的 $E^*(X, C) \rightarrow E^*(A, C) \oplus E^*(B, C)$ 是同构。

定理 19.0.3 (Mayer-Vietoris 序列). 给定 *excisive triad* $(X; A, B)$, $C = A \cap B$. 那么下列序列是正合的:

$$\cdots \rightarrow E^{q-1}(C) \xrightarrow{\Delta^*} E^q(X) \xrightarrow{\phi^*} E^q(A) \oplus E^q(B) \xrightarrow{\psi^*} E^q(C) \rightarrow \cdots$$

取嵌入 $i: C \rightarrow A, j: C \rightarrow B, k: A \rightarrow X, l: B \rightarrow X$, $\phi^*(\chi) = (k^*(\chi), l^*(\chi)); \psi^*(\alpha, \beta) = i^*(\alpha) - j^*(\beta)$

Δ^* 是复合

$$E^{q-1}(C) \xrightarrow{\delta} E^q(A, C) \cong E^q(X, B) \rightarrow E^q(X)$$

完全类似地, 还有

定理 19.0.4 (Mayer-Vietoris 序列: 相对同调). 给定 *excisive triad* $(X; A, B)$, $C = A \cap B$, $X \subseteq Y$, 那么下列序列是正合的:

$$\cdots \rightarrow E^{q-1}(Y, C) \xrightarrow{\Delta^*} E^q(Y, X) \xrightarrow{\phi^*} E^q(Y, A) \oplus E^q(Y, B) \xrightarrow{\psi^*} E^q(Y, C) \rightarrow \cdots$$

取嵌入 $i: (Y, C) \rightarrow (Y, A), j: (Y, C) \rightarrow (Y, B), k: (Y, A) \rightarrow (Y, X), l: (Y, B) \rightarrow (Y, X)$, $\phi^*(\chi) = (k^*(\chi), l^*(\chi)), \psi^*(\alpha, \beta) = i^*(\alpha) - j^*(\beta)$

Δ^* 是复合

$$E^{q-1}(Y, C) \rightarrow E^{q-1}(A, C) \cong E^{q-1}(X, B) \xrightarrow{\delta} E^q(Y, X)$$

推论 19.0.5. 两条 $M-V$ 序列之间的关系为:

$$\begin{array}{ccccccc} E^{q-1}(C) & \xrightarrow{\Delta^*} & E^q(X) & \xrightarrow{\phi^*} & E^q(A) \oplus E^q(B) & \xrightarrow{\psi^*} & E^q(C) \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \oplus \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ E^q(Y, C) & \xrightarrow{\Delta^*} & E^{q+1}(Y, X) & \xrightarrow{\phi^*} & E^{q+1}(Y, A) \oplus E^{q+1}(Y, B) & \xrightarrow{\psi^*} & E^{q+1}(Y, C) \end{array}$$



19.0.3 余极限的上同调

首先自然数系统上的 Abel 群逆向极限满足如下性质：

定理 19.0.6. 给定 $f_i : A_{i+1} \rightarrow A_i, i \geq 1$, 那么有正合列：

$$0 \rightarrow \varprojlim A_i \xrightarrow{\beta} \prod_i A_i \xrightarrow{\alpha} \prod A_i \rightarrow \varprojlim^1 A_i \rightarrow 0$$

β 是诸 $\varprojlim A_i \rightarrow A_i$ 给出的, $\alpha(a_i) = a_i - f_{i-1}(a_i)$ 。

定理 19.0.7. 对于每个 q , 有自然的短正合列：

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 E^{q-1}(X_i) \rightarrow E^q(X) \xrightarrow{\pi} \varprojlim E^q(X_i) \rightarrow 0$$

其中 π 是由 $X_i \rightarrow X$ 诱导的 $E^q(X) \rightarrow E^q(X_i)$ 。

证明. 首先回忆定理 14.0.23 中的各个构造。并且：

$$E^*(A) = \prod E^*(X_{2i}), E^*(B) = \prod E^*(X_{2i+1}), E^*(C) = \prod E^*(X_i)$$

那么有图表：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E^q(\text{tel } X_i) & \longrightarrow & E^q(A) \oplus E^q(B) & \longrightarrow & E^q(C) \longrightarrow E^{q+1}(\text{tel } X_i) \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & E^q(X) & \longrightarrow & \prod E^q(X_{2i}) \times \prod E^q(X_{2i+1}) = \prod E^q(X_i) & \longrightarrow & E^{q+1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & \pi \downarrow & & \prod(-1)^i \downarrow & & \prod(-1)^i \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim E^q(X_i) & \xrightarrow{\beta} & \prod E^q(X_i) & \xrightarrow{\alpha} & \prod E^q(X_i) \longrightarrow \varprojlim^1 E^q(X_i) \longrightarrow 0 \end{array}$$

于是追图就得到了结果。 \square

定义 19.0.8 (Mittag-Leffler 条件). 如果对每个固定的 i , 存在 $j \leq i$ 使得对任何 $k > j$, $A_k \rightarrow A_i$ 的像和 $A_j \rightarrow A_i$ 的像相同。

命题 19.0.9. 如果逆向系统 $f_i : A_{i+1} \rightarrow A_i$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 那么 $\varprojlim^1 A_i = 0$ 。

推论 19.0.10. 给定 CW 复形 X : 对于 $q < n$, $H^q(X^{n+1}; \pi) \rightarrow H^q(X^n; \pi)$ 是同构, 这就说明了 $H^q(X^i)$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 从而 $H^q(X; \pi) \rightarrow H^q(X^n; \pi)$ 对于 $q < n$ 是同构。

19.0.4 上同调唯一性定理

同理第 15.0.2 节, 给定一个上同调理论 H^n (或与之相配的 \tilde{H}_n) 对于 CW 复形 X 定义：

$$C^n(X; \pi) = H^n(X^n, X^{n-1}; \pi)$$

定义 $d : C^n(X; \pi) \rightarrow C^{n+1}(X; \pi)$ 为复合

$$H^n(X^n, X^{n-1}; \pi) \rightarrow H^n(X^n) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; \pi)$$

容易验证 $d \circ d = 0$ 。

定理 19.0.11. $C^*(X; \pi)$ 和 $\text{Hom}(C_*(X); \pi)$ 同构。

定理 19.0.12. 存在自然同构 $H^*(X, A; \pi) \cong H^*(C^*(X, A; \pi))$, 使得左侧中的 δ 和右侧的长正合列连接同态是相容的。

19.0.5 问题

练习 19.1 (相对杯积). 固定系数为交换环 R , \otimes 指 \otimes_R .

给定 A, B 为 X 的子空间, 构造相对杯积

$$H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B)$$

如下:

不妨 A, B 是 CW 复形 X 的子复形。首先 $C^*(X, A) = C^*(X)/C^*(A)$ 可以理解为在 A 上消失的上链构成的上链群。因此杯积 $C^*(X) \otimes C^*(X) \rightarrow C^*(X)$ 限制到相对链群上变为:

$$\cup : C^*(X, A) \otimes C^*(X, B) \rightarrow C^*(X, A \cup B)$$

这里 $C^*(X, A \cup B)$ 是 $C^*(X)$ 的子群, 其在 A, B 对应的链群元素上消失。因此对于 CW 复形这等价于在 $A \cup B$ 对应的链群元素上消失。

现在这就诱导了 $C^*(X, A) \otimes C^*(X, B) \rightarrow C^*(X, A \cup B)$, 进而得到了同调群上的映射。

同样地, 杯积的自然性说明了相对杯积的自然性, 超交换性同理。

上述构造保证了

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) & \longrightarrow & H^{p+q}(X, A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X) \otimes H^q(X) & \longrightarrow & H^{p+q}(X) \end{array}$$

是交换的。

同样, 固定基点 $*$ $\in A \cap B$, 那么

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) & \longrightarrow & H^{p+q}(X, A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^p(X) \otimes \tilde{H}^q(X) & \longrightarrow & \tilde{H}^{p+q}(X) \end{array}$$

是交换的。

作为推论: 如果 A, B 可缩, $A \cup B = X, A \cap B \neq \emptyset$, 那么 $\tilde{H}^p(X) \otimes \tilde{H}^q(X) \rightarrow \tilde{H}^{p+q}(X)$ 是零同态。这是因为左侧箭头现在是同构, 从而第二行的杯积可以转化为第一行的杯积。但是 $H^{p+q}(X, A \cup B) = H^{p+q}(X, X) = 0$, 因此说明了杯积的平凡性。

现在如果 $X = \Sigma Y = Y \wedge S^1$, 那么 $\tilde{H}^p(X) \otimes \tilde{H}^q(X) \rightarrow \tilde{H}^{p+q}(X)$ 是零同态: 因为 ΣY 是两个 $Cone$ 的并。

注记. 作为加法群, $\tilde{H}^{n+k}(\Sigma^k X)$ 是稳定的, i.e. $\tilde{H}^p(X) \cong \tilde{H}^{p+1}(\Sigma X)$ 对充分大 p 成立。然而杯积结构在这之上却不是如此, 上文结论说明了它会消失。

这样的思路可以推广到 multiplicative cohomology theory。具体地说:

称三个 unreduced generalized 上同调理论之间的一个配对 $\mu : E_1 \square E_2 \rightarrow E_3$ 是指

$$\mu_{n_1, n_2} : E_1^{n_1}(X, A) \otimes E_2^{n_2}(Y, B) \longrightarrow E_3^{n_1+n_2}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$$

构成的一族自然变换。



现在我们要要求这个配对和三个边缘同态都是相容的，即有交换图：

$$\begin{array}{ccc}
 E_1^{n_1}(A) \otimes E_2^{n_2}(Y, B) & \xrightarrow{\delta_1 \otimes \text{id}_2} & E_1^{n_1+1}(X, A) \otimes E_2^{n_2}(Y, B) \\
 \downarrow \mu_{n_1, n_2} & & \downarrow \mu_{n_1+1, n_2} \\
 E_3^{n_1+n_2}(A \times Y, A \times B) & \xrightarrow{\delta_3} & E_3^{n_1+n_2+1}(X \times Y, A \times B) \\
 \simeq & & \\
 E_3^{n_1+n_2}(A \times Y \cup X \times B, X \times B) & &
 \end{array}$$

以及

$$\begin{array}{ccc}
 E_1^{n_1}(X, A) \otimes E_2^{n_2}(B) & \xrightarrow{(-1)^{n_1} \text{id}_1 \otimes \delta_2} & E_1^{n_1}(X, A) \otimes E_2^{n_2+1}(Y, B) \\
 \downarrow \mu_{n_1, n_2} & & \downarrow \mu_{n_1, n_2+1} \\
 E_3^{n_1+n_2}(A \times Y, A \times B) & \xrightarrow{\delta_3} & E_3^{n_1+n_2+1}(X \times Y, A \times B) \\
 \simeq & & \\
 E_3^{n_1+n_2}(A \times Y \cup X \times B, A \times Y) & &
 \end{array}$$

一个 multiplicative cohomology theory 是指一个 unreduced generalized 上同调理论 E ，以及一个配对 $\mu : E \square E \rightarrow E$ ；和一个 $1 \in E^0(*)$ 使得：

1. 结合： $\mu \circ (\text{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \text{id})$ 。
2. 单位： $\mu(1 \otimes x) = \mu(x \otimes 1) = x, \forall x \in E^n(X, A)$ 。

进一步称它是交换的，如果还要求：

3. 分次交换：

$$\begin{array}{ccc}
 E^{n_1}(X, A) \otimes E^{n_2}(Y, B) & \xrightarrow{u \otimes v \mapsto (-1)^{n_1 n_2} (v \otimes u)} & E^{n_2}(Y, B) \otimes E^{n_1}(X, A) \\
 \downarrow \mu_{n_1, n_2} & & \downarrow \mu_{n_1, n_2} \\
 E^{n_1+n_2}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) & \xrightarrow{(\text{switch}_{(X, A), (Y, B)})^*} & E^{n_1+n_2}(Y \times X, B \times X \cup Y \times A)
 \end{array}$$

现在给定一个 multiplicative cohomology theory $(E, \mu, 1)$ ，我们有其上的一个杯积：即 \square （称为 external multiplication）复合上沿着对角 $\Delta(X, A) : (X, A) \rightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times A)$ 的拉回。即：

$$(-) \cup (-) : E^{n_1}(X, A) \otimes E^{n_2}(X, A) \xrightarrow{\mu_{n_1, n_2}} E^{n_1+n_2}(X \times X, A \times X \cup X \times A) \xrightarrow{\Delta_{(X, A)}^*} E^{n_1+n_2}(X, A \cup B).$$



第二十章 Poincare 对偶

20.0.1 卡积

考虑 $\Delta : X \rightarrow X \times X$, 设它和胞腔映射 Δ' 同伦, 那么有链映射:

$$\Delta'_* : C_*(X; R) \rightarrow C_*(X \times X; R \otimes_R R) \cong C_*(X; R) \otimes_R C_*(X; R)$$

定义 20.0.1 (Cap Product). 对于一个 R -模 π , 定义:

$$\cap : C^*(X; \pi) \otimes_R C_*(X; R) \rightarrow C_*(X; \pi)$$

为

$$\begin{aligned} C^*(X; \pi) \otimes_R C_*(X; R) &\xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta'_*} C^*(X; \pi) \otimes_R C_*(X; R) \otimes_R C_*(X; R) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} \pi \otimes_R C_*(X; R) \cong C_*(X; \pi) \end{aligned}$$

这里 ε 是配对映射, 当两个分量次数不同时它是零。因此卡积是由如下分次映射给出的:

$$\cap : C^p(X; \pi) \otimes_R C_n(X; R) \rightarrow C_{n-p}(X; \pi)$$

如同我们对杯积的验证一样, 有:

引理 20.0.2. 给定 $\alpha \in C^p(X; \pi), x \in C_{p+1}(X; R)$, 有:

$$d(\alpha \cap x) = (d\alpha) \cap x + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cap dx$$

因此卡积可以限制到诸同调/上同调群上:

定义 20.0.3. 对于 R -模 π , 卡积可以限制到 (上) 同调上, 变为:

$$\cap : H^*(X; \pi) \otimes_R H_*(X; R) \rightarrow H_*(X; \pi)$$

命题 20.0.4. 对于 $\alpha, \beta \in C^*(X; R), x \in C_*(X; R)$, 有:

$$\langle \alpha \cup \beta, x \rangle = \langle \beta, \alpha \cap x \rangle$$

证明. 由于杯积由

$$\Delta'^* : C^*(X; R) \otimes_R C^*(X; R) \cong C^*(X \times X, R) \rightarrow C^*(X; R)$$



诱导得到，并且直接验证知有交换图：

$$\begin{array}{ccc} C^*(X \times X; R) \otimes_R C_*(X; R) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta'_*} & C^*(X \times X; R) \otimes_R C_*(X \times X; R) \\ \Delta'_* \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ C^*(X; R) \otimes_R C_*(X; R) & \xrightarrow{\varepsilon} & R \end{array}$$

这里两个 ε 依然是配对映射。

注意这个交换图的两条路径对应的正是待证等式的两侧，那么结果得证。 \square

定义 20.0.5 (相对卡积). 给定 R -模 π ，定义两种相对卡积

$$\cap : H^p(X, A; \pi) \otimes_R H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-p}(X; \pi)$$

$$\cap : H^p(X; \pi) \otimes_R H_n(X, A; R) \rightarrow H_{n-p}(X, A; \pi)$$

如下：

将卡积定义的第一部分修改为：

$$\Delta'_* : C_*(X, A; R) \rightarrow C_*(X, A; R) \otimes C_*(X; R)$$

$$\Delta'_* : C_*(X, A; R) \rightarrow C_*(X; R) \otimes C_*(X, A; R)$$

20.0.2 定向和基本类

给定任意流形，由切除公理有

$$H_n(M, M - \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) = \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) = \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$$

定义 20.0.6 (基本类). R 是交换环，如无特殊说明下文中都指 R -系数（上）同调群。流形 M 在子空间 X 上的 R -基本类是指元素 $z \in H_n(M, M - X)$ 使得对于每个 $x \in X$ ， z 在映射 $H_n(M, M - X) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$ 下的像都是后者的生成元。

特别地，如果 $X = M$ ，称 $z \in H_n(M)$ 是 M 的基本类。流形 M 的 R -定向是一组开覆盖 $\{U_i\}$ （进一步通过流形的仿紧性不妨诸 $U_i \cong \mathbb{R}^n$ ），和对应的 M 在 U_i 上的基本类 z_i ，满足 z_i, z_j 在 $H_n(M, M - U_i \cap U_j)$ 中的像是相同的。

如果 M 上存在一个 R -定向，那么称它是 R -可定向的。特别地，如果不指定系数而讨论流形定向是，这意味着我们在讨论的是 \mathbb{Z} -定向。

注记. 可以将这个定义与利用微分形式定义的流形定向进行对比。

命题 20.0.7. 每个流形 M 都是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -可定向的。

证明. 对于一组坐标域开覆盖 $\{U_i\}$ ，由切除定理， $H_n(M, M - U_i; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B(0, R); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 。

因此选择基本类为 1 对应的元素即可，注意此时粘接条件自动成立。 \square

每个 R -基本类都决定了一个 R -定向，对任何开覆盖，取 z_i 为基本类 z 在 $H_n(M, M - U_i)$ 中的像。我们将要说明对于紧流形，逆命题是正确的。

定理 20.0.8 (同调消没定理). 对于 n 维流形 M , 任何系数群 π , $H_i(M; \pi) = 0, i > n$. 进一步如果 M 是连通且非紧的, 那么 $\tilde{H}_n(M; \pi) = 0$.

这个重要结果的证明将在下一节给出。

定理 20.0.9. 给定 M 的紧子集 K , 任给系数群 π , 那么 $H_i(M, M - K; \pi) = 0, i > n$, 并且 M 的 R -定向决定了 M 在 K 上的基本类。特别地, M 紧时 M 的 R -定向决定了 M 的基本类。

证明. 无妨 $n > 0$. 首先如果 K 被某个 R -定向中出现的坐标域 $U \cong \mathbb{R}^n$ 包含, 那么立刻有:

$$H_i(M, M - K) \cong H_i(U, U - K) \cong \tilde{H}_{i-1}(U - K)$$

现在由于 $U - K$ 是开的, 那么它也是一个 n -流形, 消没定理说明了结果。

此时给定 M 的一个 R -定向, 自然考虑 $H_n(M, M - U) \rightarrow H_n(M, M - K)$ 中的像是满足要求的 K 基本类。

现在对于一般情况下只需证明如果结论对 $K, L, K \cap L$ 成立, 那么结论对 $K \cup L$ 成立。

利用 Mayer-Vietoris 序列, 消没性 $H_i(M, M - K \cup L; \pi) = 0, i > n$ 是简单的。

现在对于 $i = n$ 的情况: 考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$H_i(M, M - K \cup L) \xrightarrow{\psi} H_i(M, M - K) \oplus H_i(M, M - L) \xrightarrow{\phi} H_i(M, M - K \cap L)$$

ψ 是单射。现在 R -定向决定的 K, L 的基本类 z_K, z_L 满足它们都映到 $z_{K \cap L} \in H_n(M, M - K \cap L)$ 。因此 $\phi(z_K, z_L) = 0$, 从而存在唯一 $z_{K \cup L}$ 使得 $\psi(z_{K \cup L}) = (z_K, z_L)$, 而这就是满足要求的基本类。 \square

命题 20.0.10. 如果 M 是连通紧 n -流形, $n > 0$. 那么要么 M 不可定向, 此时 $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$; 要么 M 可定向, 此时 $\forall x \in X$

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, M - x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

是同构映射。

证明. 由于 $M - x$ 是连通且非紧的, $H_n(M - x; \pi) = 0$, 于是对于任何系数群 π ,

$$H_n(M; \pi) \rightarrow H_n(M, M - x; \pi) \cong \pi$$

是一个单射。

由于万有系数定理, $H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_q \rightarrow H_n(M, M - x; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_q$ 也是单射。

现在如果 $H_n(M; \mathbb{Z}) \neq 0$, 只能有 $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. 现在考虑生成元的像以及 $\bmod q$ 下是单射, 只能有生成元映为 ± 1 , 从而完成了证明。 \square

此时可以给出一个万有系数定理的分裂不自然的例子。

例子. 给定连通紧不可定向 n -流形 M , $x \in M, M_x = (M, M - x)$. 现在流形 M 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -可定向的, 那么有:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_n(M) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \cong & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & H_n(M_x) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & H_n(M_x; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M_x), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

首先 $H_{n-1}(M, M-x) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-x) \cong \tilde{H}_{n-2}(S^{n-1}) = 0$, 上文内容说明 $H_n(M) = 0$, 因此左右箭头都是零映射。于是这就给出了不自然分裂的例子。

进一步地, 上述内容可以推广到任意系数环 R 的情况:

定理 20.0.11. 对于紧无边连通 n -流形, 如果 M 是 R -可定向的, 那么 $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M-x; R) \cong R$ 是同构映射。

如果 M 不是 R -可定向的, 那么 $H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M-x; R) \cong R$ 是单射, 并且像是 $\{r \in R \mid 2r = 0\}$ 。

$$H_i(M; R) = 0, \forall i > n.$$

如果 M 是非紧连通 n -流形, 那么 $H_i(M; R) = 0, \forall i \geq n$ 。

推论 20.0.12. 紧无边连通不可定向 n -流形满足 $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$ 。

最后还要讨论一下流形的操作给出的诱导定向:

无交并: 给定流形 $M, M', M \amalg M'$ 上自然有一组诱导定向: 将原有的两组开覆盖取并即可。

积流形: 考虑 CW 复形偶对 $(X, A), (Y, B)$, 那么 $(X \times Y) / ((X \times B) \cup (Y \times A)) \cong (X/A) \wedge (Y/B)$, 于是得到 $C_*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \cong C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B)$ 。

在一般空间上, 有

$$(M \times N, M \times N - K \times L) = (M \times N, M \times (N - L) \cup (M - K) \times N)$$

特别地, 取 K, L 是单点集就有:

$$(M \times N, M \times N - (x, y)) = (M \times N, M \times (N - y) \cup (M - x) \times N)$$

结合前文讨论, z_K, z_L 决定了 $M \times N$ 在 $K \times L$ 上的基本类 (通过张量积推出): 特别地, $M \times N$ 的基本类正是 M, N 基本类在 $H_m(M) \otimes H_n(N) \rightarrow H_{m+n}(M \times N)$ 下的像。

20.0.3 消没定理

引理 20.0.13. 对于任何空间 X , $x \in H_q(X)$, 存在一个紧子空间 K , 以及 $k \in H_q(K)$ 使得 k 推出到 x 。

证明. 考虑 CW 逼近 $\gamma: Y \rightarrow X$, $x = \gamma_*(y)$, 假定 y 由 $z \in C_q(Y)$ 代表, z 是若干 q -胞腔的有限线性组合, 因此被有限子复形 L 包含。现在取 $K = \gamma(L)$ 满足要求。□

本章节中所有关于流形的命题的证明都遵循着如下的思路: 说明命题对 \mathbb{R}^n 中开集成立; 说明命题在粘接的情况下成立。

\mathbb{R}^n 的情况

引理 20.0.14. 如果 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集, 那么 $\forall i \geq n, H_i(U) = 0$

证明. 给定 $s \in H_i(U), i \geq n$, 存在一个紧子空间 $K \subseteq U$, 以及 $k \in H_i(K)$ 推出到 s . 可以划分 \mathbb{R}^n 成为若干网格 (n 超立方体构成), 使得存在有限子复形 L 满足 $K \subseteq L \subseteq U$.

现在有交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbb{R}^n, U) \\
 \partial \downarrow & & \downarrow \\
 H_i(L) & \longrightarrow & H_i(U) \\
 \downarrow & & \\
 H_i(\mathbb{R}^n) & = & 0
 \end{array}$$

由于 \mathbb{R}^n, L 不存在相对 q -胞腔, $q > n$, 因此 $H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) = 0$, 于是图表左一列全为 0. 然而 s 是 $H_i(K) \rightarrow H_i(U)$ 像中的元素, 自然是 $H_i(L) \rightarrow H_i(U)$ 中的元素, 于是只能 $s = 0$. \square

引理 20.0.15. 如果 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集, 假定 $t \in H_n(\mathbb{R}^n, U)$ 在 $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x)$ 中的像是 0, $\forall x \in \mathbb{R}^n - U$, 那么 $t = 0$.

证明. 通过长正合列转化: 等价的命题是: 如果 $s \in \tilde{H}_{n-1}(U)$ 在 $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - x)$ 中的像是 0, $\forall x \in \mathbb{R}^n - U$, 那么 $s = 0$.

选取一个紧子空间 $K \subseteq U$, 使得 s 是 $\tilde{H}_{n-1}(K) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U)$ 的像中的元素, 那么 K 包含在一个 U 中预紧开集 V 内. 因此 s 是 $\tilde{H}_{n-1}(V)$ 中某个元素 r 的像.

下面我们来证明 r 映到 $\tilde{H}_{n-1}(U)$ 中是 0.

如果 $x \notin U$, r 在 $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - x)$ 中的像是 0: 这是由条件直接得到的. 现在假定 T 是一个可缩开集, $\bar{V} \subseteq T$, 并且 \bar{T} 是紧的: 例如可以取 T 是一个充分大的立方体. 记 $L = T - (T \cap U)$, 那么对于任何 $x \in \bar{L}$, 选择一个闭立方体 D_x 包含 x 并且和 V 不交. 全体 D_x 的开核构成了 \bar{L} 的覆盖, 于是可以选取出有限的 $\{D_1, \dots, D_q\}$ 覆盖了 \bar{L} .

现在令 $C_i = D_i \cap T, (\mathbb{R}^n - D_i) \cap T = T - C_i$. 我们归纳地说明 $\tilde{H}_{n-1}(T - (C_1 \cup \dots \cup C_p))$ 中 r 的像是 0, 其中 $0 \leq p \leq q$. 结论在 $p = 0$ 时是简单的, 现开始归纳:

由于 $T - (C_1 \cup \dots \cup C_p) = (T - (C_1 \cup \dots \cup C_{p-1})) \cap (\mathbb{R}^n - D_p)$. 由前一引理, $H_n((T - C_1 \cup \dots \cup C_{p-1}) \cap (\mathbb{R}^n - D_p)) = 0$. 于是由 M-V 序列:

$$\tilde{H}_{n-1}(T - (C_1 \cup \dots \cup C_p)) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(T - (C_1 \cup \dots \cup C_{p-1})) \oplus \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - D_p)$$

是单射. 由于 r 映入右端变成 0 (第一项是归纳假设, 第二项是 0 因为 D_p 可缩为一点 $x \notin U$), 那么单性保证了 r 映入左端变成 0. 然而 $V \subseteq T - (C_1 \cup \dots \cup C_q) \subseteq T \cap U \subseteq U$, 这就证明了结果. \square

流形的情况

引理 20.0.16. 在非紧连通流形 M 上, $H_n(M) \rightarrow H_n(M - y)$ 总是零同态, $\forall y \in M$.

证明. 若 $x \in M$, 考虑连接 x, y 的路径 L (注意流形局部道路连通): 那么有图表

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_n(M, M-x) \\
 & \nearrow \cong & \\
 H_n(M) & \longrightarrow & H_n(M, M-L) \\
 & \searrow \cong & \\
 & & H_n(M, M-y)
 \end{array}$$

因此如果 $s \in H_n(M)$ 在某个点 $H_n(M, M-x)$ 的像为零, 那么在 $H_n(M, M-y)$ 中的像为 0.

现在假设 s 是某个 $H_n(K)$ 的像, K 是紧子集. 取 $x \in M-K$, 考虑 $K \rightarrow M \rightarrow (M, M-x)$: 它和 $K, (M-x, M-x) \rightarrow (M, M-x)$ 相同. 然而 $H_n(M-x, M-x) = 0$, 因此这就说明了 s 在 $H_n(M, M-x)$ 的像为 0. \square

同调消没定理. 给定 $s \in H_i(M)$, 需要证明 $i > n$ 以及 $i = n$ 且 M 连通非紧情况时 $s = 0$.

首先选取紧子空间 K , 使得 s 在 $H_i(K) \rightarrow H_i(M)$ 的像中. 由于 K 被有限个坐标域的并包含: $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_q$, 因此只需证明 $H_i(U_1 \cup \cdots \cup U_q) = 0$.

利用归纳, 只需说明: $H_i(U \cup V) = 0$, 如果 U 是坐标域, V 是一个 M 的开子集并且 $H_i(V) = 0$.

由 M-V 序列:

$$H_i(U) \oplus H_i(V) \rightarrow H_i(U \cup V) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(U) \oplus \tilde{H}_{i-1}(V)$$

如果 $i > n$, 那么归纳法立刻说明了消没: 注意 $U \cap V$ 事实上是 $U \cong \mathbb{R}^n$ 的开子集.

如果 $i = n$, M 连通非紧, 那么现在我们有 $H_n(U) = H_n(V) = \tilde{H}_{n-1}(U) = 0$. 那么只需要说明 $i_*: \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(V)$ 是单射.

考虑这样的交换图, $y \in U - U \cap V$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U \cup V) & \longrightarrow & H_n(M) \\
 & & \swarrow & & \downarrow 0 \\
 H_n(V, U \cap V) & \longrightarrow & H_n(U \cup V, U \cap V) & \longrightarrow & H_n(M, M-y) \\
 \downarrow \partial & \swarrow \partial & \uparrow & & \uparrow \cong \\
 \tilde{H}_{n-1}(U \cap V) & \xleftarrow{\partial} & H_n(U, U \cap V) & \longrightarrow & H_n(U, U-y) \\
 \downarrow i_* & & & & \\
 \tilde{H}_{n-1}(V) & & & &
 \end{array}$$

取 $r \in \ker i_*$, 由于 $\tilde{H}_{n-1}(U) = 0$, 因此 $\partial: H_n(U, U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U \cap V)$ 是满射. 取出原像中的元素 $s \in H_n(U, U \cap V)$.

我们来证明 $\forall y \in U - (U \cap V)$, s 在 $H_n(U, U-y)$ 中的像是 0, 从而由前文说明了 $s = 0$, 于是 $r = 0$: 这就说明了单射.

现在 $i_*(r) = 0$, 于是存在原像 $t \in H_n(V, U \cap V)$. 设 s', t' 是 s, t 在 $H_n(U \cup V, U \cap V)$, 那么 $\partial(s' - t') = 0$, 于是存在 $w \in H_n(U \cup V)$ 是 $s' - t'$ 的原像. 由于 w 在 $H_n(M, M-y)$ 的像是 0, 那么 $s' - t'$ 也是如此.

注意 t' 映到 $H_n(M, M - y)$ 中经过 $(M - y, M - y)$, 那么 t' 在 $H_n(M, M - y)$ 是 0, 因此 s' 也映到 0. 从而由同构 s 映到 $H_n(U, U - y)$ 是 0, 这就说明了结果。□

20.0.4 Poincare 对偶定理

事实 1 (流形的 CW 结构和 CW 逼近).

任何紧拓扑流形 M 都和有限 CW 复形同伦等价, 从而它的同调和上同调都是有限生成的。

低于 4 维的闭流形总是同胚于某个单纯集的几何实现 (单纯复形), 这在 4 维上存在反例。

4 维闭流形能否一定和一个 CW 复形同胚仍然是 *open problem*.

对于高于 4 维的闭流形, 它一定和一个 CW 复形同胚。然而它是否总能够成为单纯复形仍然是未知的。

定理 20.0.17 (Poincare 对偶). M 是紧 R -定向 n -流形 M , 那么对于任何 R -模 π , 存在同构:

$$D: H^p(M; \pi) \rightarrow H_{n-p}(M; \pi)$$

这个同构由如下给出:

紧流形上的 R -定向等价于一个紧流形的基本类, 设为 $z \in H_n(M)$, 那么 $D(\alpha) = \alpha \cap z$ 。

推论 20.0.18. 考虑 \mathbb{Z} 系数同调, M 是连通紧定向 n -流形, 那么 $H_n(M) \cong H^0(M) \cong \mathbb{Z}$, 其中生成元正是基本类 z ; 同样 $H^n(M) \cong H_0(M) \cong \mathbb{Z}$, 其中生成元是基本类 z 的对偶。

推论 20.0.19. M 是连通紧定向 n -流形, 指定 T_p 表示 $H^p(M)$ 的挠子群, 那么杯积配对 $\alpha \otimes \beta \rightarrow \langle \alpha \cup \beta, z \rangle$ 诱导了 *non-singular pairing* (*pairing* $A \otimes B \rightarrow P$ 是 *non-singular* 的, 如果 $A \rightarrow \text{Hom}(B, P), B \rightarrow \text{Hom}(A, P)$ 都是同构, 这是比 *perfect pairing* 还强的性质):

$$H^p(M)/T_p \otimes H^{n-p}(M)/T_{n-p} \rightarrow \mathbb{Z}$$

证明. 首先我们说明对于配对 $H^p(M) \otimes H^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$, 它在挠元上消失: 这是因为如果 $\alpha \in T_p$, $r\alpha = 0$, 那么 $r(\alpha \cup \beta) = 0$ 。然而 $H^n(M) \cong \mathbb{Z}$, 只能有 $\alpha \cup \beta = 0$ 。

现在由于 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, 并且诸同调群都是有限生成的, 那么 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_*(M), \mathbb{Z})$ 正是挠元部分, 现在上同调万有系数定理说明了:

$$H^p(M)/T_p \cong \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{Z})$$

因此: 如果 α 在自由 Abel 群 $H^p(M)/T_p$ 中的像是一个生成元, 那么存在一个 $a \in H_p(M)$, 使得 $\langle \alpha, a \rangle = 1$ 。

现在由 Poincare 对偶, 存在 $\beta \in H^{n-p}(M)$ 使得 $\beta \cap z = a$, 那么:

$$\langle \beta \cup \alpha, z \rangle = \langle \alpha, \beta \cap z \rangle = 1$$

这就说明了结果。□

熟知复流形是可定向的, 我们来计算 $\mathbb{C}P^n$ 的上同调环:

推论 20.0.20. 作为分次环, $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 是截断多项式代数 $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ 。其中 α 赋予的次数是 2。

证明. 由于 $\mathbb{C}P^n$ 有熟知的 CW 复形结构, 上述群作为加法群同构于 $H_*(\mathbb{C}P^n)$ 。

由于 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 的 $(2n-1)$ -骨架, 那么 $H^{2q}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{2q}(\mathbb{C}P^{n-1}), q < n$ 是同构。

现在对于乘法结构, 归纳说明如下: $n=1$ 时 $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$, 结果是简单的。现在如果 α 生成了 $H^2(\mathbb{C}P^n)$, α^q 也是 $H^{2q}(\mathbb{C}P^n)$ 的生成元, $q < n$: 这是因为它们化归为 $H^{2q}(\mathbb{C}P^{n-1})$ 的情况。

现在存在 $\beta \in H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$ 使得 $\langle \alpha \cup \beta, z \rangle = 1$, 如果 β 不是生成元, 设 $\beta = r\gamma$, 那么 $\langle \alpha \cup \beta, z \rangle = r \langle \alpha \cup \gamma, z \rangle$, 这不可能是 1。

因此 $\beta = \pm \alpha^{n-1}$ 一定是生成元, 从而 $\alpha^n = \alpha \cup \beta$ 生成了 $H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ 。 □

作为特例:

推论 20.0.21. M 是连通紧 R -定向 n -流形, R 是一个域。那么 $\alpha \otimes \beta \rightarrow \langle \alpha \cup \beta, z \rangle$ 给出了一个 nonsingular pairing:

$$H^p(M; R) \otimes H^{n-p}(M; R) \rightarrow R$$

现在每个实流形是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 定向的, 因此仿照 $\mathbb{C}P^n$ 的情况:

推论 20.0.22. $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是截断多项式代数 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, 其中 α 赋予的次数是 1。

20.0.5 Poincare 对偶定理的证明

我们来考虑一般的非紧流形的情况:

定义 20.0.23 (紧支上同调)。

$$H_c^q(M) = \varinjlim H^q(M, M - K)$$

这里 K 取遍紧子空间, 正向系统由 $K \subseteq L$ 诱导的 $H^q(M, M - K) \rightarrow H^q(M, M - L)$ 给出。

注记. 紧支上同调的直观含义是考虑所有在紧子空间外消失的上链: 这一点在转化成为 de Rham 上同调后有着更好的体现。

对于任何 M 的紧子空间 K , M 的 R -定向决定了 K 上的基本类 $z_K \in H_n(M, M - K; R)$ 。通过取相对卡积, 有同态:

$$D_K : H^p(M, M - K) \rightarrow H_{n-p}(M) : \alpha \mapsto \alpha \cup z_K$$

如果 $K \subseteq L$, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(M, M - K) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H^p(M, M - L) \\
 & \searrow D_K & \swarrow D_L \\
 & H_{n-p}(M) &
 \end{array}$$



因此余极限的泛性质给出了态射 $D: H_c^p(M) \rightarrow H_{n-p}(M)$ 。并且有自然性:

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) & \xrightarrow{D} & H_{n-p}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^p(M) & \xrightarrow{D} & H_{n-p}(M) \end{array}$$

其中 U 是开集并且赋予诱导定向。

定理 20.0.24 (Poincare 对偶). M 是 R -定向 n 流形, 那么 $D: H_c^p(M) \rightarrow H_{n-p}(M)$ 是同构。

证明. 我们证明对于任何开集 $U \subseteq M$, $D: H_c^p(U) \rightarrow H_{n-p}(U)$, 为此使用归纳法:

Step 1. 对于任何坐标域 U , 结论成立。

由于 \mathbb{R}^n 的紧子空间中紧立方体 K 是共尾元, 因此:

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) \cong H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \cong H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x) \cong \tilde{H}^{p-1}(S^{n-1}) \cong \tilde{H}^p(S^n)$$

此时 D 的确是同构。

Step 2. 如果结论对 $U, V, U \cap V$ 成立, 那么对 $U \cup V$ 结论成立。

U 的紧子空间和 V 的紧子空间的并是 $U \cup V$ 的紧子空间中的共尾元。我们假设 $K \subseteq U, L \subseteq V$ 是紧子空间, 那么有行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^p(U \cup V, U \cup V - K \cap L) & \longrightarrow & H^p(U \cup V, U \cup V - K) \oplus H^p(U \cup V, U \cup V - L) & \longrightarrow & H^p(U \cup V, K \cup L) & \longrightarrow & H^{p+1}(U \cup V, U \cup V - K \cap L) & \longrightarrow \\ & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \parallel & & \cong \downarrow & \\ \longrightarrow & H^p(U \cap V, U \cap V - K \cap L) & \longrightarrow & H^p(U, U - K) \oplus H^p(V, V - L) & \longrightarrow & H^p(U \cup V, K \cup L) & \longrightarrow & H^p(U \cap V, U \cap V - K \cap L) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_{n-p}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-p}(U) \oplus H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(U \cup V) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(U \cap V) & \longrightarrow \end{array}$$

其中第一行是相对 M-V 序列, 第二行由切除同构诱导, 第三行是绝对 M-V 序列。自然性和卡积保证了上图交换, 并且全图对 K, L 都是自然的。因此可以过渡到余极限上, 那么由五引理结果成立。

Step 3. 如果结论对一族全序指标上集合升链 $\{U_i\}$ 成立, 那么结论对 $\bigcup U_i$ 成立。

任何紧子空间 $K \subseteq U$ 只能被有限个 U_i 包含。

一方面 $\varinjlim H_{n-p}(U_i) \cong H_{n-p}(U)$, 另一方面:

$$\begin{aligned} \varinjlim H_c^p(U_i) &= \varinjlim_i \varinjlim_{\{K|K \subseteq U_i\}} H^p(U_i, U_i - K) \\ &\cong \varinjlim_{\{K \subseteq U\}} \varinjlim_{\{i|K \subseteq U_i\}} H^p(U_i, U_i - K) \\ &= \varinjlim_{\{K \subseteq U\}} H^p(U, U - K) = H_c^p(U) \end{aligned}$$

Step 4. 结论对 \mathbb{R}^n 的开子集成立。

如果开子集 U 是凸的, 那么它同胚于 \mathbb{R}^n , 结论已经成立。由于凸集的交还是凸集, 因此有限个凸集的交成立。现在任何开集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 都可以表示为可数个凸集的并, 那么考虑升链结论成立。

Step 5. 结论对任何 M 的开集成立。

由 Step 3 和 Zorn 引理, 存在极大开集 $V \subseteq U$ 使得结论成立。如果 $x \notin V$, 选择包含 x 的坐标域 W , 结论对 W, V 都成立。Step 4 说明结论对 $W \cap V$ 成立, 那么由 Step 2 结论对 $W \cup V$ 成立, 与极大性矛盾。 \square

注记. 可以看出 Poincare 对偶定理中真正重要的只是 \mathbb{R}^n 的性质以及 $M-V$ 序列带来的性质上的过渡, 因此我们自然期待有没有更一般的结果成立, 事实上的确如此。

20.0.6 定向覆叠

命题 20.0.25. 给定连通 n -流形 M , 存在 2-覆叠 $p: \tilde{M} \rightarrow M$ 使得 \tilde{M} 是连通的 $\iff M$ 不可定向。

证明. 定义 \tilde{M} 为 (x, α) 的偶对构成的, 其中 $x \in M, \alpha \in H_n(M, M-x) \cong \mathbb{Z}$ 是生成元。 $p(x, \alpha) = x$ 。如果 $U \subseteq M$ 是开集, $\beta \in H_n(M, M-U)$ 是 M 在 U 上的生成元, 定义:

$$\langle U, \beta \rangle = \{(x, \alpha) | x \in U, \beta \text{ maps to } \alpha\}$$

全体 $\langle U, \beta \rangle$ 构成了 \tilde{M} 的一个拓扑基, 同时局部平凡化是容易直接验证的。

现在 \tilde{M} 是 n -流形, 并且它是可定向的, 因为: 给定一个开集 $\langle U, \beta \rangle$ 注意到:

$$(M, \tilde{M} - \langle U, \beta \rangle) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{M} - (x, \alpha)) \longleftarrow (\langle U, \beta \rangle, \langle U, \beta \rangle - (x, \alpha))$$

$$(M, M - U) \longrightarrow (M, M - x) \longleftarrow (U, U - x)$$

以及 $(U, U - x) \cong (\langle U, \beta \rangle, \langle U, \beta \rangle - (x, \alpha))$, 那么 $\beta \in H_n(M, M - U)$ 决定了 $\tilde{\beta} \in H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \langle U, \beta \rangle)$, 并且这和 (x, α) 的选择无关。现在就得到了一个 M 上的定向。

M 的定向事实上就是一个截面 $s: M \rightarrow \tilde{M}$, 如果 M 可定向, 那么 $\tilde{M} = \text{Im}(-s) \amalg \text{Im}(s)$, 这就说明了结果。 \square

推论 20.0.26. 如果 M 单连通, 或者 $\pi_1(M)$ 不含指数为 2 的子群, 那么 M 可定向。如果 M 可定向, 它最多有两种定向。

20.0.7 问题

练习 20.1. 不存在同伦等价 $f: \mathbb{C}P^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^{2n}$ 翻转定向, i.e. 诱导了 $H_{4n}(\mathbb{C}P^{2n})$ 上的乘以 -1 的运算。

证明. 由于 $H^*(\mathbb{C}P^{2n}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{2n+1})$, 其中 $\deg \alpha = 2$ 。假定 $f^*(\alpha) = \beta$, 由于这是同伦等价, 那么 $\beta = \pm \alpha$ 。

因此 $f^*(\alpha^{2n}) = (\pm 1)^{2n} \alpha^{2n} = \alpha^{2n}$, 于是只能有 $H_{4n}(\mathbb{C}P^{2n})$ 上诱导的映射是恒等映射。 \square

接下来假定 M 是紧致连通 (无边) n -流形, $n \geq 2$ 。

练习 20.2. M 是 Lie 群, 那么 M 可定向。

证明. 注意 M 上有左不变微分形式, 因此给出了一个定向。□

练习 20.3. 如果 M 可定向, 那么 $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ 是自由 Abel 群。

证明. 由同调万有系数定理, 对任何系数群 π , 都有:

$$0 \rightarrow H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi \rightarrow H_n(M; \pi) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M; \mathbb{Z}), \pi) \rightarrow 0$$

由于 M 紧可定向, 那么 $H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes \pi \cong \pi, H_n(M; \pi) \cong \pi$, 并且诱导的上一个序列中是恒等映射。因此 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M; \mathbb{Z}), \pi) = 0, \forall \pi$ 。

然而这说明 $H_n(M; \mathbb{Z})$ 是平坦 \mathbb{Z} -模, 因此是自由的。□

练习 20.4. 如果 M 不可定向, 那么 $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ 的挠子群是 2 阶循环群, 并且 $H_n(M; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ 在 q 是奇数时为 0; q 是偶数时是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

证明. 考虑 \tilde{M} 上的转移同态, 使得 $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(\tilde{M}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ 是乘以 2. 由于 $H_{n-1}(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ 是自由 Abel 群, 于是 $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ 的挠元在第一个箭头中只能映到零, 因此 $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ 只有 2-torsion, 即挠子群是若干 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的直和。

由于流形都是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 定向的, 那么有序列:

$$0 \rightarrow H_n(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

不可定向性保证 $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$, 于是 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

现在由于 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = \ker\{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \rightarrow_a \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\}$, 那么 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 因此挠子群有且只能有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

现在考虑 $H_n(M; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$: 由万有系数定理, 有 $H_n(M; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ 。应用前文结论得证。□

练习 20.5. M 可定向, 基本类 z 。 $f: S^n \rightarrow M$ 满足 $f_*(i_n) = qz$, 其中 $i_n \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ 是基本类, $q \neq 0$ 。

那么 $f_*: H_*(S^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 是同构, 如果 p 是一个不整除 q 的素数。

并且: 乘以 q 会零化 $H_i(M; \mathbb{Z}), 1 \leq i \leq n-1$ 。

证明. 如果 $H^*(M; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 中有非零元素 α , 那么由于 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是域, 存在 $\beta \in H^{n-*}(M; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 使得 $\langle \alpha \cup \beta, z \rangle = 1$, 即 $\langle \beta, \alpha \cap z \rangle = 1$ 。

于是这就说明了 $\langle f^*\alpha \cup f^*\beta, k \cdot i_n \rangle = 1, k \neq 0$ 。然而 $f^*\alpha = 0$, 因此矛盾。故 $\forall 0 < k < n, H^k(M; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ 。从而说明了诸 f_* 都是同构映射。

下面考虑 $H_i(M; \mathbb{Z})$ 。此时万有系数定理给出了:

$$0 \rightarrow H_i(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H_i(M; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) (= 0) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

因此 $H_i(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$, 即 $H_i(M; \mathbb{Z})$ 不含自由部分, 也不含 p -torsion。

因此假定 $q = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, $H_i(M; \mathbb{Z})$ 只有 p_1, \dots, p_n -torsion。

如果 $\alpha \in H^i(M; \mathbb{Z})$ 使得 $q\alpha \neq 0$,

?

□



练习 20.6. 设 M 是紧 n -流形, 如果它和 ΣY 同伦等价, Y 是某个连通基点空间。那么 M 的整系数同调和 S^n 相同。

证明. 如果 M 是可定向的: 由练习 19.1, $\tilde{H}^*(\Sigma Y)$ 上的杯积是零同态, 然而 $H^p/T_p \otimes H^{n-p}/T_{n-p} \rightarrow \mathbb{Z}$ 是 non-singular pairing, 因此只能有 $p \neq 0, n$ 时 $T_p = H^p$, 即 $H^i(M; \mathbb{Z})$ 在 $1, \dots, n-1$ 上没有自由部分。

由 Poincare 对偶, 这一事实对 $H_i(M; \mathbb{Z})$ 也正确。于是同调万有系数定理说明了 H_{n-1} 是无挠的: 因为 $H_n(X) \otimes \pi \cong H_n(X; \pi), \forall \pi$, 因此 $H_{n-1}(X)$, 进而 $H_{n-1}(X; \pi)$ 是平凡群。从而 H^1 也是。

由上同调万有系数定理, H_1 是平凡的, 因为对于任何 π 都有 $\text{Hom}(H_1(X), \pi) = 0$, 这说明 $H_1(X)$, 进而 $H_1(X; \pi)$ 是平凡群。于是 H^{n-1} 也是如此。

现在反复执行前两段论证, 就说明了结果。

如果 M 是不可定向的, 如果 Y 是道路连通的, 那么 ΣY 单连通, 那么 M 也是如此。然而 M 不可定向从而矛盾。对于 Y 连通但不道路连通的情况? \square

第二十一章 闭曲面分类定理

定义 21.0.1. 对于偶数边的多边形, 通过一个 word 来表示按照 word 给出的方式将多边形 ($\cong D^2$) 粘结为 CW 复形。记这样的 word 为 D , 对应的拓扑空间为 Σ_D 。在 word D 中, 我们要求每个字出现且仅出现两次。

引理 21.0.2. 这样得到的 CW 复形总是闭曲面。

证明. 紧致性显然, 局部同胚对于多边形内部和边上的情况是简单的, 对于顶点的情况只需要简单的验证即可。□

定义 21.0.3. 1. $g \geq 1$, $D = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, 那么 Σ_D 称为亏格为 g 的可定向闭曲面, 记为 Σ_g 。

2. $g \geq 1$, $D = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$, 那么 Σ_D 称为亏格为 g 的不可定向闭曲面, 记为 Σ_g^μ 。

例子. 1. $\Sigma_1 \cong T^2$

2. Σ_2 是两洞环面。

3. $\Sigma_1^\mu \cong \mathbb{R}P^2$

4. $\Sigma_2^\mu \cong K$ (Klein 瓶)

定理 21.0.4 (闭曲面分类定理). 1. $\forall m \geq 0, n \geq 1$, $\Sigma_m \not\cong \Sigma_n^\mu$. (这里 $m = 0$ 的情况约定为 S^2 。

2. 对于任何连通闭曲面 Σ , 存在 m 使得 $\Sigma \cong \Sigma_m$ 或 Σ_m^μ 。

定义 21.0.5 (连通和). 对于两个连通 n -闭曲面 X_0, X_1 , 各自选取 x_0, x_1 , 以及一个同胚于 \mathbb{R}^n 的开邻域 U_i , 设同胚映射为 $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ 定义它们的连通和为:

$$X_0 \# X_1 = (X_0 - \varphi_0^{-1}(D^n)) \coprod (X_1 - \varphi_1^{-1}(D^n)) / \sim$$

其中 \sim 是 $\varphi_0^{-1}(\alpha) \sim \varphi_1^{-1}(\alpha), \forall \alpha \in \partial D^n$ 。

这在 $n = 2$ 时与 $x_0, x_1, U_0, U_1, \varphi_0, \varphi_1$ 的选取无关。

命题 21.0.6.

$$\Sigma_g \cong T^2 \# \cdots \# T^2 \quad (g \text{ copies})$$

$$\Sigma_g^\mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2 \quad (g \text{ copies})$$



引理 21.0.7.

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

$$\pi_1(\Sigma_g^\mu) \cong \langle a_1, \dots, a_g \mid \prod_{i=1}^g a_i^2 \rangle$$

证明. 这只需观察 Σ_g, Σ_g^μ 的 CW 结构:

Σ_g 包含一个 0-胞腔, $2g$ 个 1-胞腔, 1 个 2-胞腔, 从而直接得到了结果。

Σ_g^μ 的情况同理。 □

注意到上述群的交换化分别为 \mathbb{Z}^g 和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{g-1}$, 因此显然两两不同构, 从而说明了亏格, 定向不同的闭曲面之间互相不同伦等价。

下面来说明任何连通闭曲面 Σ , 都能找到 Σ_m 或 Σ_m^μ 与之同胚。分两步说明:

1. 对于任何 Σ , 存在一个“多边形”表示 $D: \Sigma \cong \Sigma_D$;
2. 对于任何 D , 都能够将其化为“标准”表示: Σ_m, Σ_m^μ 。

我们先说明第二步:

命题 21.0.8. $\Sigma_D \cong \Sigma_g$ or Σ_g^μ

证明. 考虑在 D 上的作用:

1. 循环轮换 D
2. 将一对 $\dots a \dots a \dots$ 变为 $\dots a^{-1} \dots a^{-1} \dots$ (或者可以将 a, a^{-1} 变为 a^{-1}, a)
3. 反射: $D \mapsto D^{-1}$
4. Surgery of type A: $D = D_1 a a^{-1} D_2 \rightarrow D_1 D_2$ (粘结后的 $a a^{-1}$ 变为流形内部)
5. Surgery of type B: $D = D_1 a D_2 D_2 a^{-1} D_4 \rightarrow D_1 D_4 a'^{-1} D_3 D_2 a'$

这些操作都不改变同胚型, 组合手段说明了它总能变为标准型。 □

定义 21.0.9. 称一个 D 是可定向的, 如果任何两个配对的边方向相反。(即一个字如果出现两次, 那么一定一个是 a , 一个是 a^{-1} 。否则称它不可定向的。

命题 21.0.10. 可定向的 D 对应到可定向的标准型上; 不可定向的 D 对应到不可定向的标准型上。

证明. 只需验证前述操作不会改变 D 的可定向性。 □

这是一个简单的判断 D 给出的流形定向性的方法。

命题 21.0.11.

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

$$\chi(\Sigma_g^\mu) = 2 - g$$

证明. 由 CW 结构直接计算。 □

这给出了一个直接而简单地由 D 计算出对应的标准型的方法：它能够绕过证明中使用的繁琐的组合手段。

例子. $D = aba^{-1}b^{-1}cc^{-1}$: 这是可定向的, 它诱导的 CW 复形满足有 2 个 0-胞腔, 3 个 1-胞腔, 1 个 2-胞腔, 因此: $\chi(\Sigma_D) = 0$, 从而 $g = 1$, 于是 $\Sigma_D \cong \Sigma_1 \cong T^2$ 。

推论 21.0.12. 闭曲面是可定向的 \iff 不存在 *Mobius* 带到这个闭曲面的嵌入。

推论 21.0.13. Σ_D 是可定向流形 $\iff D$ 是可定向的

证明. 只需注意前文对基本群的计算以及可定向紧流形的余 1 维同调群是无挠的, 以及显然的 Σ_g 到 \mathbb{R}^3 的嵌入, 以及不可定向余 1 维流形不能嵌入到 \mathbb{R}^n 中的事实, 我们立刻说明了结果。 □

再来说明第一步:

命题 21.0.14. 对于任何闭曲面 Σ , 存在一个多边形表示: $\Sigma \cong \Sigma_D$ 。

证明. 我们承认任何 2 维流形都有三角剖分的事实 (事实 1)。假定其有三角剖分, 那么每个三角形的重心构成的点集是离散点集, 因此由紧空间的性质三角剖分只能是有限的。现在假定这些 2-单形 $\Delta_1^2, \dots, \Delta_n^2$, 我们归纳地构造多边形 P 。

由于流形不带边, 每条边恰好属于两个 2-单形。

$P_1 = \Delta_1^2$, 假定我们构造了一个 $P_m = \Delta_{i_1}^2 \cup \Delta_{i_2}^2 \cdots \Delta_{i_m}^2$ 。

存在 P_m 中的边 e 使得 e 在某个非已构造的单形内 (否则所有边都已经粘结完成, 这已经得到了一个子闭曲面, 于是只能是归纳结束的情况: 因为闭曲面不存在子闭曲面): 将其加入并粘结。 □

第二十二章 流形的指标和带边流形

22.0.1 紧流形的 Euler 示性数

定义 22.0.1 (Euler 示性数). 有限生成同调的空间 X 定义为: $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \text{rank } H_i(X; \mathbb{Z})$. 万有系数定理保证了对于任何域系数 F , $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim H_i(X; F)$.

现在考虑链群 C_i , 简单的短正合列计算说明 $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \text{rank } C_i(X; \mathbb{Z})$. 这里为使等式有意义, X 是有限 CW 复形.

命题 22.0.2. 奇数维紧 (无边) 流形 M 满足 $\chi(M) = 0$

证明. 考虑 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数同调, 注意 $H_i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 那么 $\chi(X)$ 求和式中两两相消, 从而得到结果. \square

对于 $n = 2m$, 且 M 是紧可定向流形, 那么:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i 2 \dim H_i(M) + (-1)^m \dim H_m(M)$$

这里同调群是域系数 F , 现在取 $F = \mathbb{Q}$, 那么这里当然可以把同调变为上同调.

半维数的上同调群在拓扑中相当重要. 首先考虑杯积: $\phi: H^m(M; \mathbb{Q}) \otimes H^m(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}: \phi(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, z \rangle$. Poincare 对偶指出这个配对是非奇异的. 另一方面 $\alpha \cup \beta = (-1)^m \alpha \cup \beta$, 它在 m 是奇数时是反对称的, m 是偶数时是对称的.

命题 22.0.3. 如果 M 是紧可定向 n -流形, $n \equiv 2 \pmod{4}$, 那么 $\chi(M)$ 是偶数.

证明. 只需证明 $\dim H^m(M)$ 是偶数, $n = 2m$. 结果由如下引理得到: \square

引理 22.0.4. F 是域满足 $\text{char } F \neq 2$. V 是 F 上有限维线性空间, $\phi: V \times V \rightarrow F$ 是非奇异反对称双线性型. 那么 V 有一组基 $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r\}$ 使得 $\phi(x_i, y_i) = 1$, 并且对于基中的其他配对都是 0. 作为推论, V 的维度是偶数.

证明. 考察反对称二次型即可. 维度偶数是简单的, 因为奇数为反对称矩阵行列式是 0, 从而不可能非奇异. \square

22.0.2 紧可定向流形的指标

定义 22.0.5. 给定紧定向 n -流形, 以及其上一个定向 (注意这说明 I 和定向是有关的) 如果 $n = 4k$, 定义它的指标 $I(M)$ 是 $H^{2k}(M; \mathbb{R}) \otimes H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 这个对称双线性型惯性指数, 如果 $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, 定义 $I(M) = 0$.

注记. 注意到翻转定向后指标也反号, 即 $I(-M) = -I(M)$ 。

命题 22.0.6. 对于任何紧定向 n -流形, $\chi(M) \equiv I(M) \pmod{2}$ 。

证明. $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ 的情况已经被前面的命题证明了, 下面假定 $4|n$ 。

考虑双线性型的正负惯性指数 r, s 。由于非退化, $r + s = \dim H^{2k}(M; \mathbb{R}) \equiv \chi(M) \pmod{2}$ 。
 $I(M) = r - s$ 。因此这就说明了结果。 \square

命题 22.0.7. 给定紧定向 n -流形 M, M' , 那么:

$$I(M \amalg M') = I(M) + I(M')$$

(定向由无交并诱导)

证明. 只需考虑 $n = 4k$ 的情况。此时 $H^{2k}(M \amalg M') = H^{2k}(M) \times H^{2k}(M')$, 那么考虑二次型的直和立刻得到结果。 \square

命题 22.0.8. 给定紧定向 m -流形 M 和紧定向 n -流形 N , 那么:

$$I(M \times N) = I(M)I(N)$$

(定向由积流形诱导)

证明. 再一次, 只需考虑 $m + n = 4k$: $H^{2k}(M \times N) = \sum_{i+j=2k} H^i(M) \otimes H^j(N)$
杯积形式为:

$$\phi(x \otimes y, x' \otimes y') = (-1)^{\deg y \deg x' + mn} \langle x \cup x', z_M \rangle \langle y \cup y', z_N \rangle$$

对二次型的具体验算给出了结果。 \square

22.0.3 带边流形、更多对偶定理

定义 22.0.9 (带边流形). 称拓扑空间 M 是带边流形, 如果它是 Hausdorff 第二可数空间, 并且每个点都存在开邻域同胚于 \mathbb{H}^n 中的开集。

称 $x \in M$ 是内点, 如果它存在一个同胚于 \mathbb{R}^n 的开邻域, 否则称边界点。

带边流形中的边界点有如下的等价刻画:

命题 22.0.10. X 是带边流形, 那么 x 是边界点 \iff 存在 x 的开邻域 U 使得 $U \cong \mathbb{H}^n$, 并且 x 在 \mathbb{H}^n 中的像位于边界超平面上。

证明. 首先计算相对同调群知: 如果 U 是 \mathbb{R}^n 中零点的开邻域, V 是 n 中零点的开邻域, 那么 $U \not\cong V$ 。

\implies 是简单的, 考虑 \impliedby : 假定存在 $V \cong \mathbb{R}^n$, 这会给出 $(U \cap V)$ 在 n, \mathbb{R}^n 分别是 0 在其中的两个开邻域, 刚刚已经说明这是不可能的。 \square

简单的拓扑讨论知 ∂M 是一个无边 $(n-1)$ -流形。称一个流形是闭流形, 如果它紧致无边。

命题 22.0.11. 如果 $M = \partial W$, W 是紧带边 $(2m+1)$ -流形, 那么 $\chi(M) = 2\chi(W)$ 。

证明. $W \times I$ 是 $(2m+2)$ -紧流形, $\partial(W \times I) = (W \times \{0\}) \cup (M \times I) \cup (W \times \{1\})$ 。

现在取 $U = (W \times \{0\}) \cup (M \times I)$, $V = (M \times I) \cup (W \times \{1\})$ 。于是 U, V 和 W 同伦等价, $U \cap V$ 和 M 同伦等价, 那么考虑 U, V 诱导的 M-V 序列, 知:

$$2\chi(W) = \chi(M) + \chi(\partial(W \times I))$$

现在 $\partial(W \times I)$ 是奇数维紧致无边流形, 命题 22.0.2 说明 $\chi(\partial(W \times I)) = 0$, 于是就得到了结果。□

推论 22.0.12. 如果 $M = \partial W$ 对某个紧致带边流形 W 成立, $\chi(W)$ 是偶数。特别地, $\mathbb{R}P^{2m}, \mathbb{C}P^{2n}$ 不可能是紧拓扑流形的边界。

证明. 如果 W 是奇数维, 那么前文已证, 如果 W 是偶数维, 那么 $M = \partial W$ 是紧致 (紧流形的闭子集) 无边流形, 因此 χ 是 0。□

接下来的目标是证明更一般的情形下的 Poincare 对偶定理: 这些结果在很多时候都是有用的。首先先说明带边流形的一个基本的拓扑性质:

定理 22.0.13 (Topological collaring). 对于带边流形 M , 存在 ∂M 的开邻域 V , 使得 $V \cong \partial M \times [0, 1)$ 并且 ∂M 对应着 $\partial M \times \{0\}$ 。

证明. 假定 $M' = M \cup \partial M \times [0, 1]/x \sim (x, 0)$, 这里 $x \in \partial M$, 明显 M' 中存在满足要求的开邻域, 因此只需证明存在同胚 $h: M \rightarrow M'$,

现在由于流形是仿紧且 C_2 的, 那么可以找到可数个 $\varphi_\alpha: \partial M \rightarrow [0, 1]$, 使得 $V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(0, 1]$ 构成了 ∂M 的局部有限开覆盖, 并且每个 V_α 的闭包都被包含在某个同胚于 \mathbb{H} 的开集 U_α 中。进一步假定 $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ 。

现在由于指标 α 是可数的, 不妨改记为 i 。取 $\psi_k = \varphi_1 + \cdots + \varphi_k$, $M_k \subseteq M'$ 为 M 何满足 $(x, t) \in \partial M \times [0, 1], t \leq \psi_k(x)$ 的并。

那么 $\psi_0 = 0, M_0 = M$, 现在给出 $h_k: M_{k-1} \rightarrow M_k$ 的同胚映射。 $U_k \cong \mathbb{H}$ 给出了一个 $\partial U_k \times [-1, 0]$, 再考虑外部的环状邻域我们有 $\partial U_k \times [-1, 1] \hookrightarrow M'$ 。现在定义 h_k 在 $\partial U_k \times [-1, 1]$ 外是恒等映射, 在 $x \in \partial U_k$ 上令 $\{x\} \times [-1, \psi_{k-1}(x)]$ 线性地映到 $\{x\} \times [-1, \psi_k(x)]$ 。这就给出了一列同胚 h_k

现在 M' 是 M_k 的余极限拓扑, 但是嵌入映射都是同胚, 于是就有 $M \cong M'$, 完成了证明。□

推论 22.0.14. $\text{Int } M \rightarrow M$ 是同伦等价, $\partial M \rightarrow M$ 是余纤维化。

现在我们对带边流形上的定向进行一些讨论。

命题 22.0.15. 对于交换环 R (下同), M 的 R -定向决定了 ∂M 的 R -定向。

证明. 对于 $x \in \partial M$, 考虑坐标卡 $U \cong \mathbb{H}$, $V = \partial U = U \cap \partial M, y \in \text{Int } U = U - V$ 。

$$H_n(\text{Int } M, \text{Int } M - \text{Int } U) \cong H_n(\text{Int } M, \text{Int } M - y) \cong H_n(M, M - y)$$

$$\cong H_n(M, M - \text{Int } U) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(M - \text{Int } U, M - U)$$

(这个连接同态是同构, 因为 $H_*(M, M - U) \cong H_*(M, M) = 0$)

$$\cong H_{n-1}(M - \text{Int } U, M - \text{Int } U - x) \xrightarrow{\text{excision}} H_{n-1}(\partial M, \partial M - x) \cong H_{n-1}(\partial M, \partial M - V)$$

□

命题 22.0.16. 对于紧 R -定向流形 M , 它诱导的 ∂M 上的定向给出了一个基本类 $z_{\partial M} \in H_{n-1}(\partial M)$ (注意 ∂M 作为紧流形的边界也是紧的)。那么存在唯一的元素 $z \in H_n(M, \partial M)$ 使得 $\partial z = z_{\partial M}$, 称 z 是 R -定向 M 决定的 R -基本类。

证明. 由于 $\text{Int } M$ 是非紧连通流形, 并且 $\int M \rightarrow M$ 是同伦等价, 那么 $H_n(M) \cong H_n(\text{Int } M) = 0$ (消没定理), 因此 $\partial: H_n(M, \partial M) \rightarrow H_{n-1}(\partial M)$ 是单同态。

现在取 V 是边界环状邻域, $N = M - V$, 那么 N 是一个紧子空间并且是 $\text{Int } M$ 的强形变收缩核, 那么就有 $H_n(\text{Int } M, \text{Int } M - N) \cong H_n(M, M - \text{Int } M) = H_n(M, \partial M)$ 。

从而 $\text{Int } M$ 上的定向决定了基本类 $\in H_n(\text{Int } M, \text{Int } M - N)$, 假定 z 是它在 $H_n(M, \partial M)$ 中的像, 那么对于任何 $y \in \text{Int } M$, z 限制到 $H_n(M, M - y) \cong H_n(\text{Int } M, \text{Int } M - y)$ 都是生成元, 那么和上一引理一样的说明就得到了结果。□

定理 22.0.17 (Lefschetz - Relative Poincare Duality). 假定 M 是紧 R -定向流形, 并且边界 ∂M 可以分解为两个紧 $(n-1)$ -流形 A, B , 满足 $\partial A = \partial B = A \cap B$ 。那么与基本类 $[M] \in H_n(M, \partial M; R)$ 给出了同构:

$$D_M: H^k(M, A; R) \rightarrow H_{n-k}(M, B; R)$$

注记. 这里 A, B 都是可以为空集的, 并且如果 $A = B = \emptyset$ 就退化到了普通的 Poincare 对偶。

证明. $D_M: H^k(M, A; R) \rightarrow H_{n-k}(M, B; R)$ 的具体定义如下: 考虑 $A \cap B, A, B, \partial M$ 的环状邻域, 那么 A, B 分别是某个 U, V 的强形变收缩核, 并且 ∂M 是 $U \cup V$ 的强形变收缩核, $A \cap B$ 是 $U \cap V$ 的强形变收缩核, 然后考虑相对卡积即可。

$B = \emptyset$ 的情况是通过对 $M - \partial M$ 应用 Poincare 对偶得到的:

$$H^k(M, \partial M; R) \cong H_c^k(M - \partial M; R) \cong H_{n-k}(M - \partial M; R) \cong H_{n-k}(M; R)$$

第一个同构号是因为 $H^p(M, \partial M \times [0, t]; R) \cong H^p(M, \partial M; R)$, 而前者构成了 $M - K$ 中的 cofinal, 因此由余极限性质就得到了结果。

一般情况可转化为 $B = \emptyset$, 因为有交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^k(M, \partial M) & \longrightarrow & H^k(M, A) & \longrightarrow & H^k(\partial M, A) \longrightarrow H^{k+1}(M, \partial M) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow [M] \cap - & & \downarrow D_M & & \downarrow \text{excision} \\
 & & & & & & H^k(B, \partial B) \\
 & & & & & & \downarrow [B] \cap - \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k}(M, B) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(B) \longrightarrow H_{n-k-1}(M) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$



注意中间的交换性只需要说明 M 的基本类诱导了 ∂N 的基本类，而这正是上一命题保证的。

现在对上图运用五引理即证。 \square

现在回想计算 $H_i(M, M-x)$ 时有 $H_i(M, M-x) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-x) \cong \tilde{H}_i(S^{n-1}) \cong H^{n-i}(*),$ 我们将这种对偶关系进行推广：

定理 22.0.18. 如果 K 是可定向 n - 紧致无边流形 M 的局部可缩紧子空间，那么 $H_i(M, M-K; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(K; \mathbb{Z})$ 。

证明. 取 $U \supseteq K$ 是 K 的开邻域，那么：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_i(M-K) & \longrightarrow & H_i(M) & \longrightarrow & H_i(M, M-K) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \text{rel.} \cap - & & \uparrow & & \uparrow \text{exc.} \\
 & & H^{n-i}(M-K, U-K) & & P.D. & & H_i(U, U-K) \\
 & & \uparrow \text{exc.} & & \uparrow & & \uparrow \text{rel.} \cap - \\
 \cdots & \longrightarrow & H^{n-i}(M, U) & \longrightarrow & H^{n-i}(M) & \longrightarrow & H^{n-i}(U) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

现在对全体 $U \supseteq K$ 取极限，第一列上箭头变为 Poincare 对偶 $H_i(M-K) \cong H_c^{n-i}(M-K)$ ，那么五引理给出了：

$$H_i(M, M-K) \cong \varinjlim H^{n-i}(U)$$

下面我们证明 $\varinjlim H^{n-i}(U) \rightarrow H^{n-i}(K)$ 这个自然的态射是同构，一些拓扑的讨论保证了这一点，见 [Hat01, Page 255]。 \square

推论 22.0.19 (Alexander duality). 如果 K 是 S^n 的紧局部可缩非空真子集，那么 $\tilde{H}_i(S^n - K; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K; \mathbb{Z})$ 。

证明. 长正合列给出 $\tilde{H}_i(S^n - K; \mathbb{Z}) \cong H_{i+1}(S^n, S^n - K; \mathbb{Z})$, $i \neq n-1$ 。此时上一定理给出了结果。

现在当 $i = n-1$ 时有短正合列：

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, S^n - K; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^n - K; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

(注意 $S^n - K$ 是非紧的)

现在这个正合列是分裂的，因为考虑 $H_n(S^n, S^n - K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, S^n - x; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$ 事实上是一个左提升。因此 $\tilde{H}_{n-1}(S^n - K; \mathbb{Z})$ 是 $H_n(S^n, S^n - K; \mathbb{Z})$ 中 \mathbb{Z} 的直和补，而 $\tilde{H}^0(K; \mathbb{Z})$ 也是 $H^k(\mathbb{Z})$ 中 \mathbb{Z} 的直和补，这就说明了结果。 \square

推论 22.0.20. 如果 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧且局部可缩的，那么 $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0, i \geq n$ ，并在 $i = n-1, n-2$ 时是无挠的。

证明. 进一步将 X 视为 S^n 的紧子空间，那么 $\tilde{H}^i(X; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{n-i-1}(S^n - X; \mathbb{Z})$ 。后者在 $i \geq n$ 时是零；在 $i = n-1$ 时无挠。

现在考虑万有系数定理，就说明了结果。 \square

推论 22.0.21. 紧致无边不可定向 n - 流形 M 不能嵌入 \mathbb{R}^{n+1} 。

证明. 若否，由上一推论， $H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$ 是无挠的；这和练习 20.4 矛盾。 \square

22.0.4 作为边界的流形的指标

定理 22.0.22. 如果 M 是一个紧可定向 $(4k+1)$ -流形的边界, 那么 $I(M) = 0$ 。

取实系数同调群:

引理 22.0.23. 设 $M = \partial W$, W 是紧定向 $(4k+1)$ -流形, $i: M \rightarrow W$ 是嵌入。 $\phi: H^{2k}(M) \otimes H^{2k}(M)$ 是杯积形式, 那么 $i^*: H^{2k}(W) \rightarrow H^{2k}(M)$ 的像是一个子空间, 它的维数是 $H^{2k}(M)$ 维数的一半, 并且在其上 ϕ 恒等于 0。

证明. 取 $z \in H_{4k+1}(W, M)$ 是基本类, 那么对于 $\alpha, \beta \in H^{2k}(W)$, 有 $\phi(i^*(\alpha), i^*(\beta)) = \langle i^*(\alpha \cup \beta), \partial z \rangle = \langle \alpha \cup \beta, i_* \partial z \rangle = 0$

这是因为 (W, M) 长正合列给出了 $i_* \partial = 0$ 。这就说明了 ϕ 在 $\text{Im } i^*$ 上恒为 0。

现在有行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(W) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(M) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k}(M, W) \\ \downarrow D. & & \downarrow D. & & \downarrow \\ H_{2k+1}(W, M) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k}(W) \end{array}$$

这就说明了 $H^{2k}(M) \cong \text{Im } i^* \oplus \text{Im } \delta \cong \text{Im } i^* \oplus \text{Im } i_*$ 。然而最后两者的像维数相同, 因此就说明了结果。 \square

Proof of the Main Theorem. 我们只需要注意如果一下命题成立: ϕ 是一个 $2t$ 维空间 V 上的对称非退化双线性型, 以及一个 t 维空间 W 使得 ϕ 在 t 上恒等于 0 能够推出 ϕ 的惯性指数为 0, 那么结论成立。

现在我们来证明这个纯代数结果: 假定 r, s 分别为正负惯性指数。 \square

22.0.5 问题

练习 22.1. 假定 M 是紧连通 n -流形, 边界 ∂M , $n \geq 2$:

- 证明: 不存在 M 到 ∂M 的收缩映射。
- 如果 M 可缩, 那么 ∂M 是同调球。
- 如果 M 可定向, $n = 2m + 1$, K 是映射 $H_m(\partial M) \rightarrow H_m(M)$ 的核, 其中同调取域系数。那么 $\dim H_m(\partial M) = 2 \dim K$ 。

证明.

- 假定存在这样的映射 $r: M \rightarrow \partial M$, 以及自然的嵌入映射 $i: \partial M \rightarrow M$ 。那么考虑正合列:

$$\cdots H^{n-1}(M, \partial M) \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(\partial M) \rightarrow H^n(M, \partial M) \rightarrow \cdots$$

同理练习 9.1 的做法知: $H^n(\partial M) \cong H^n(M) \oplus H^n(M, \partial M)$ 。

考虑 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 域系数同调, 那么 $H^n(M) \cong H_0(M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 但是 $H^n(\partial M) = 0$, 矛盾。

- 现在 $\text{Int } M$ 是单连通的, 于是不存在非平凡定向覆叠, 从而说明了 $\text{Int } M$ 是定向的, 于是 $(M, \partial M)$ 也是如此。

由长正合列:

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(M) \rightarrow H_{i+1}(M, \partial M) \rightarrow H_i(\partial M) \rightarrow H_i(M) \rightarrow \cdots$$

当 $i \geq 1$ 时 $H_i(\partial M) \cong H_{i+1}(M, \partial M) \xrightarrow{\text{Lefschetz}} H^{n-i-1}(M) = H_i(S^{n-1})$ 。

$i = 0$ 的情况考虑长正合列:

$$0 \rightarrow H_1(M, \partial M) (= H^{n-1}(M) = 0) \rightarrow H_0(\partial M) \rightarrow H_0(M) (= \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(M, \partial M) (= H^n(M) = 0)$$

这就得到了结果。

c. 这和引理 22.0.23 的证明是完全类似的。 \square

接下来研究 3 维紧连通流形 M 。

练习 22.2. 如果 M 是可定向的, 并且 $\partial M = \emptyset$, $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$, 那么 M 是 3-同调球。

证明. $H_0 = H^0 = \mathbb{Z}$, H^1 由上同调万有系数定理知为 0, 从而 $H_2 = 0$; $H^2 = H_1 = 0$ 。
 $H^3 = H_0 = \mathbb{Z}$, $H_3 = H^0 = \mathbb{Z}$, 这就说明了结果。 \square

练习 22.3. 如果 M 是不可定向的, 并且 $\partial M = \emptyset$, 那么 $H_1(M; \mathbb{Z})$ 不是有限群。

证明. 如果 H_1 有限, 那么: 由于 $\chi(M) = 0$, $\text{rank } H_0 = 1, \text{rank } H_1 = 0, \text{rank } H_3 = 0$, 那么 $\text{rank } H_2 < 0$, 矛盾。 \square

练习 22.4. 如果 M 可定向, $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$, 那么 ∂M 是若干 S^2 的无交并。

证明. 考虑长正合列:

$$H_2(M, \partial M) \rightarrow H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M) = 0$$

由 Lefschetz 对偶, $H_2(M, \partial M) = H^1(M)$, 而由上同调万有系数定理: $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_0(M), \mathbb{Z}) = 0$, 从而说明了 $H^1(M) = H_1(M) = 0$, 于是 $H_1(\partial M) = 0$ 。

现在由于 ∂M 是定向闭曲面, 那么它一定是 $\coprod_{i=1}^n M_{g_i}$, 然而 $H_1(M_{g_i}) = \text{Ab}(\pi_1(M_{g_i})) = 2g_i$ (最后一式是因为考虑 M_{g_i} 的 1 个 2 胞腔给出的 CW 复形实现)

从而 $\sum_i 2g_i = 0$, 这就说明了所有 $g_i = 0$, 即 $M = \coprod S^2$ 。 \square

练习 22.5. M 是可定向的, $\partial M \neq \emptyset$, ∂M 不含 S^2 , 那么 $H_1(M; \mathbb{Z})$ 不是有限群。

证明. 如果 $H_1(M; \mathbb{Z})$ 是有限群, 那么 $H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$ 。

现在 $H_2(M, \partial M; \mathbb{Q}) = H^1(M; \mathbb{Q}) \cong H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$, 那么长正合列知 $H_1(\partial M; \mathbb{Q}) = 0$ 。由闭曲面分类定理, 只能有 ∂M 为 S^2 的无交并。 \square

练习 22.6. 如果 M 是不可定向的, ∂M 不包含 $\mathbb{R}P^2$ 和 S^2 , 那么 $H_1(M; \mathbb{Z})$ 不是有限群。

证明. 现在 $0 \geq \chi(\partial M) = 2\chi(M)$: 命题 22.0.11。

然而 $H_3(M; \mathbb{Z}) = H_3(\text{Int } M; \mathbb{Z})$, 由不可定向性, 它为 0。(推论 20.0.12)

因此 $1 - b_1 + b_2 \leq 0$, 从而 $b_1 \geq 1$, 这就得到了结果。 \square



第二十三章 同伦极限和同伦余极限, \lim^1

约定：本章中的空间都是 Nondegenerately Based Space，考虑的 \mathbf{hTop}_* 也是如此。

23.1 同伦余极限

23.1.1 同伦推出

在研究 \mathbf{hTop} 以及 \mathbf{hTop}_* 时，我们自然也想寻找其中的余极限和极限，然而通常这是不能做到的。 \mathbf{hTop}_* 范畴中的极限和余极限并不一定存在，存在的大多是只能是弱极限和弱余极限。

定义 23.1.1 (同伦推出：双映射柱). 给定 $f: A \rightarrow X, g: A \rightarrow Y$ ，同伦推出 $M(f, g)$ 定义为： $X \cup_f (A \wedge I_+) \cup_g Y$ 。即将约化柱 $A \wedge I_+$ 的两端和 X, Y 粘结。

命题 23.1.2 (弱余极限). 对于任何空间 Z ：带基点集合之间的映射

$$[M(f, g), Z] \rightarrow [X, Z] \times_{[A, Z]} [Y, Z]$$

是满射。这说明同伦推出是弱余极限。

它的核是（右）作用 $[\Sigma X, Z] \times [\Sigma Y, Z] \curvearrowright [\Sigma A, Z]$ 的轨道：其中作用由

$$a * (x, y) = (\Sigma f)^*(x)^{-1} \cdot a \cdot (\Sigma g)^*(y)$$

给出， $a \in [\Sigma A, Z], x \in [\Sigma X, Z], y \in [\Sigma Y, Z]$ 。

证明. 直接构造原像即可。 □

引理 23.1.3 (粘结引理).

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & Y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ X' & \xleftarrow{f'} & A' & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array}$$

给定交换图（不是同伦意义的，而是严格交换的）， f, f' 是余纤维化， α, β, γ 是同伦等价，那么它们的推出（不是同伦推出）也是同伦等价。

推论 23.1.4. 如果 f 是余纤维化，那么典范映射 $M(f, g) \rightarrow X \cup_A Y$ 是同伦等价。

证明. 在粘结引理中取 $X' = Mf, A' = A, Y' = Y$ 即可。 □



23.1.2 同伦余等化子

记折叠映射为 $\nabla : X \vee X \rightarrow X$ 。

定义 23.1.5 (同伦余等化子：映射环面). 定义 $f, f' : X \rightarrow Y$ 的同伦余等化子 $T(f, f')$ 为 $(f, f') : X \vee X \rightarrow Y$ 和 $\nabla : X \vee X \rightarrow X$ 的同伦推出。

注记. 直观来说, 这是将两个约化映射柱 $X \cup_f Y, X \cup_{f'} Y$ 的底面 X 粘结在一起。

命题 23.1.6 (弱余极限). 对于任何空间 Z , 带基点集合之间的映射

$$[T(f, f'), Z] \rightarrow E(f^*, f'^*)$$

是满射。

这里 E 是带基点集合里的余等化子, f^*, f'^* 是诱导的 $[Y, Z] \rightarrow [X, Z]$ 之间的映射。

特别地: 这个映射的核同构于 (右) 作用 $[\Sigma Y, Z] \curvearrowright [\Sigma X, Z]$ 的轨道: 其中作用由

$$x * \gamma = (\Sigma f)^*(\gamma)^{-1} \cdot x \cdot (\Sigma f')^*(\gamma)$$

给出, $x \in [\Sigma X, Z], \gamma \in [\Sigma Y, Z]$ 。

23.1.3 序列余极限

定义 23.1.7 (序列余极限：映射望远镜). 序列 $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ 的同伦余极限 $\text{tel } X_i$ 定义为 $\text{id} : \bigvee_i X_i \rightarrow \bigvee_i X_i$ 和 $\bigvee_i f_i : \bigvee_i X_i \rightarrow \bigvee_i X_i$ 的同伦余等化子。它和定理 14.0.23 中的 tel 是同胚的。

我们熟知 Abel 群列的导出极限 $\varprojlim^1 G_i$, 现在在非 Abel 群上有如下推广 (类似非 Abel 群的一阶群上同调中的定义)

定义 23.1.8 (非 Abel 群的导出极限). 给定同态序列 $\gamma_i : G_{i+1} \rightarrow G_i, i \geq 0$, 定义 $G = \prod G_i$ 在集合 $S = \prod G_i$ 上的 (右) 作用为:

$$(s_i) * (g_i) = (g_i^{-1} s_i \gamma_i(g_{i+1}))$$

称这个作用的轨道集合为导出极限 $\varprojlim^1 G_i$, 基点选取为 $(1) \in S$ 所在的轨道。

$\varprojlim G_i$ 是 (1) 的稳定化子, 那么等价地是 $\text{id} : S \rightarrow S$ 和 $\prod \gamma_i : S \rightarrow S$ 的等化子。

命题 23.1.9 (弱余极限). 对于任何空间 Z , 带基点集合之间的映射

$$[\text{tel } X_i, Z] \rightarrow \varprojlim [X_i, Z]$$

是满射, 核同构于 $\varprojlim^1 [\Sigma X_i, Z]$ 。

引理 23.1.10 (序列余极限的粘结引理). 两列 *cofibration* 组成的空间映射列 $\{X_i, f_i\}, \{X'_i, f'_i\}$ 之间的使得全图交换的映射 α_i 如果是同伦等价, 那么 $\varinjlim X_i \rightarrow \varinjlim X'_i$ 也是同伦等价。

推论 23.1.11. 如果 $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ 是余纤维化, 那么 $\text{tel } X_i \rightarrow \varinjlim X_i$ 是同伦等价。

证明. 这是因为 $\text{tel } X_i$ 是映射柱前 n 段的余极限。 □

这一结果在考虑 CW 复形的骨架时是很有意义的。

定义 23.1.12 (Skeletally Phantom Map). 令 X 为一个带基点的 CW 复形, 以及 n -骨架 X^n 。称 $f: X \rightarrow Z$ 是 Skeletally Phantom Map, 如果其在每个 X^n 的限制上是零伦的。

注记. Skeletally Phantom Map 在同伦群, 同调群, 上同调群上诱导的映射都是零映射, 但是 Skeletally Phantom Map 并不一定同伦于零映射。

推论 23.1.13. $X \rightarrow Z$ 的全体 Skeletally Phantom Map 的同伦类同构于 $\varprojlim^1 [\Sigma X^n, Z]$ 。

证明. 余极限 $\text{tel } X^n$ 和 X 同伦等价, 因此序列余极限的弱极限性质 (命题 23.1.9) 就给出了结果。□

关于导出极限和 Mittag-Leffler 条件的进一步讨论给出了:

推论 23.1.14. 如果 X^n 是有限的, 并且 $\pi_q(Z)$ 是可数的, 并且 $[\Sigma X^n, Z]$ 是 Abel 群, 并且 Mittag-Leffler 条件对逆向系统 $\{[\Sigma X^n, Z]\}$ 不成立, 那么导出极限 $\varprojlim^1 [\Sigma X^n, Z]$ 是不可数可除 Abel 群。

推论 23.1.15. $[CP^\infty, S^3]$ 包含了一个不可数可除子群。

23.2 同伦极限

23.2.1 同伦拉回

定义 23.2.1 (同伦拉回: 双 Mapping Path Fibration). 给定 $f: X \rightarrow A, g: Y \rightarrow A$, 同伦拉回 $N(f, g)$ 定义为: $X \times_f F(I_+, A) \times_g Y$ 。它是 $X \times F(I_+, A) \times Y$ 中 (x, ω, y) 满足 $\omega(0) = f(x), \omega(1) = g(y)$ 的子空间。

命题 23.2.2 (弱极限). 对于任何空间 Z : 带基点集合之间的映射

$$[Z, N(f, g)] \rightarrow [Z, X] \times [Z, A][Z, Y]$$

是满射。这说明同伦推出是弱极限。

它的核是 (右) 作用 $[Z, \Omega X] \times [Z, \Omega Y] \curvearrowright [Z, \Omega A]$ 的轨道: 其中作用由

$$a * (x, y) = (\Omega f)_*(x)^{-1} \cdot a \cdot (\Omega g)_*(y)$$

给出, $a \in [Z, \Omega A], x \in [Z, \Omega X], y \in [Z, \Omega Y]$ 。

推论 23.2.3. 对于连通 (基点) 空间之间的映射 $f: X \rightarrow A, g: Y \rightarrow A$, 存在长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(A) \rightarrow \pi_n(N(f, g)) &\xrightarrow{(p_0, p_1)^*} \pi_n(X) \times \pi_n(Y) \xrightarrow{f_* - g_*} \pi_n(A) \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(A) \rightarrow \pi_0(N(f, g)) \rightarrow * \end{aligned}$$

$N(f, g)$ 是连通的 \iff 每个 $\pi_1(A)$ 中的元素都是 $f_*\pi_1(X)$ 中元素和 $g_*\pi_1(Y)$ 中元素的积。

对于 $n \geq 1$, $\pi_n(N(f, g)) \rightarrow \pi_n(X) \times_{\pi_n(A)} \pi_n(Y)$ 是同构 \iff 每个 $\pi_{n+1}(A)$ 中的元素都是 $f_*\pi_{n+1}(X)$ 中元素和 $g_*\pi_{n+1}(Y)$ 元素的积。

证明. 这是因为 $N(f, g) \rightarrow X \times Y$ 是一个 fibration, 那么由纤维化同伦群长正合列即可。□

再一次地有对偶的粘结引理:

引理 23.2.4.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & A & \xleftarrow{g} & Y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ X' & \xrightarrow{f'} & A' & \xleftarrow{g'} & Y' \end{array}$$

给定交换图, f, f' 是纤维化, α, β, γ 是同伦等价, 那么它们的拉回 (不是同伦拉回) 也是同伦等价。

推论 23.2.5. 如果 f 是纤维等价, 那么 $X \times_A Y \rightarrow N(f, g)$ 是同伦等价。

证明. 在粘结引理中取 $X' = Nf, A' = A, Y' = Y$ 即可。□

23.2.2 同伦等化子

记对角映射为 $\Delta: X \rightarrow X \times X$ 。

定义 23.2.6 (同伦等化子: 双纤维). 定义 $f, f': X \rightarrow Y$ 的同伦等化子 $F(f, f')$ 为 $(f, f'): X \rightarrow Y \times Y$ 和 $\Delta: Y \rightarrow Y \times Y$ 的同伦推出。

命题 23.2.7 (弱极限). 对于任何空间 Z , 带基点集合之间的映射

$$[Z, F(f, f')] \rightarrow E(f_*, f'_*)$$

是满射。这里 E 是带基点集合里的等化子, f_*, f'_* 是诱导的 $[Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ 之间的映射。

特别地: 这个映射的核同构于 (右) 作用 $[Z, \Omega X] \curvearrowright [Z, \Omega Y]$ 的轨道: 其中作用由

$$y * \chi = (\Omega f)_*(\chi)^{-1} \cdot y \cdot (\Omega f')_*(x)$$

给出, $y \in [Z, \Omega Y], \chi \in [Z, \Omega X]$ 。

23.2.3 序列极限

定义 23.2.8 (序列极限: 映射显微镜). 序列 $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ 的同伦极限 $\text{mic } X_i$ 定义为 $\text{id}: \prod X_i \rightarrow \prod X_i$ 何 $\prod f_i: \prod X_i \rightarrow \prod X_i$ 的同伦等化子。它和定理 14.0.23 中的 tel 是对偶的。

命题 23.2.9 (弱极限). 对于任何空间 Z , 带基点集合之间的映射

$$[Z, \text{mic } X_i] \rightarrow \varprojlim [Z, X_i]$$

是满射, 核同构于 $\varprojlim^1 [Z, X_i]$ 。

特别地: 有自然的短正合列

$$0 \rightarrow \varprojlim_i^1 \pi_{n+1}(X_i) \rightarrow \pi_n(\text{mic } X_i) \rightarrow \varprojlim \pi_n(X_i) \rightarrow 0$$

引理 23.2.10 (序列极限的粘结引理). 两列 fibration 组成的空间映射列 $\{X_i, f_i\}, \{X'_i, f'_i\}$ 之间使得全图交换的映射 α_i 如果是同伦等价, 那么 $\varprojlim X_i \rightarrow \varprojlim X'_i$ 也是同伦等价。

推论 23.2.11. 如果 $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ 是纤维化, 那么 $\varprojlim X_i \rightarrow \text{mic } X_i$ 是同伦等价。

23.3 \varprojlim^1

我们现在处理 \varprojlim^1 项。回忆 Mittag-Leffler 条件 (定义 19.0.8)

定义 23.3.1 (Mittag-Leffler 条件). 对于一系列同态 $\gamma_i : G_{i+1} \rightarrow G_i$, 称它组成的逆向系统满足 Mittag-Leffler 条件, 如果记 $\gamma_i^j : G_j \rightarrow G_i$, $G_i^j = \text{Im } \gamma_i^j$, 对于每个 i , 存在 $j(i)$ 使得 $\forall k > j(i), G_i^k = G_i^{j(i)}$ 。

命题 23.3.2. 对于逆向系统的短正合列:

$$0 \rightarrow \{G'_i, \gamma'_i\} \rightarrow \{G_i, \gamma_i\} \rightarrow \{G''_i, \gamma''_i\} \rightarrow 0$$

有长正合列:

$$0 \rightarrow \varprojlim G'_i \rightarrow \varprojlim G_i \rightarrow \varprojlim G''_i \rightarrow \varprojlim^1 G'_i \rightarrow \varprojlim^1 G_i \rightarrow \varprojlim^1 G''_i \rightarrow 0$$

引理 23.3.3 (稳定化). 对于严格增的序列 $\{j(i)\}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & G_{i+1}^{j(i+1)} & \xrightarrow{\gamma_i} & G_i^{j(i)} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow G_1^{j(1)} \xrightarrow{\gamma_0} G_0^{j(0)} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & G_{i+1} & \xrightarrow{\gamma_i} & G_i & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\gamma_0} G_0
 \end{array}$$

诱导了同构 $\varprojlim G_i^{j(i)} \rightarrow \varprojlim G_i$, 和单射 $\varprojlim^1 G_i^{j(i)} \rightarrow \varprojlim^1 G_i$ 。

如果对每个 i , $G_i^{j(i)} \subseteq G_i$, 那么 $\varprojlim^1 G_i^{j(i)} \rightarrow \varprojlim^1 G_i$ 也是同构。

定理 23.3.4. \varprojlim^1 满足如下性质:

- 如果 $\{G_i, \gamma_i\}$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 那么 $\varprojlim^1 G_i$ 项是 0.
- 如果 $G_i^j \subseteq G_i, \forall j > i$, 每个 G_i 是可数的: 那么要么 $\{G_i, \gamma_i\}$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 要么 $\varprojlim^1 G_i$ 是不可数的。
- 如果每个 G_i 都是有限生成 Abel 群, 那么 $\varprojlim^1 G_i$ 是可除 Abel 群。

证明. 第一点是熟知的。

对于第二点, 固定 i 考虑逆向系统的正合列:

$$0 \rightarrow \{G_i^{i+t}\}_t \rightarrow \{G_i\}_t \rightarrow \{H_i^t\}_t \rightarrow 0$$

其中 $H_i^j = G_i/G_i^{i+j}$, 那么有长正合列:

$$0 \rightarrow \varprojlim G_i^{i+j} \rightarrow G_i \rightarrow \varprojlim H_i^j \rightarrow \varprojlim^1 G_i^{i+j} \rightarrow 0$$

对于逆向系统的正合列

$$0 \rightarrow \{\ker \gamma_i^j\} \rightarrow \{G_j\} \rightarrow \{G_i^{i+j}\} \rightarrow 0$$

再一次运用长正合列, 有满射 $\varprojlim^1 G_j \rightarrow \varprojlim^1 G_i^{i+j}$ 。

如果 $\varprojlim H_i^j$ 是不可数的, 那么 $\varprojlim^1 G_i^{i+j}$ 也是不可数的, 从而 $\varprojlim^1 G_j$ 也是不可数的。

现在如果 $\varprojlim H_i^j$ 是可数的: 注意到 $\varprojlim H_i$ 的势是 $\prod_j |G_i^{i+j}/G_i^{i+j+1}|$, 那么这等价于 G_i^{i+j}/G_i^{i+j+1} 除有限个 j 外都是平凡群: 而这就是 Mittag-Leffler 条件。

对于第三点, 直接计算即可。 □

23.3.1 例：非平凡 \varprojlim^1 和 Skeletally Phantom Map

引理 23.3.5. 假定 X 是带基点 CW 复形满足 $\pi_i(X) = 0, \forall i < q$, 并且 $\pi_q(X) = \mathbb{Z}$ 。其中 $q \geq 2$ 是一个偶数。假定 X 是 CW 复形, 其 q -骨架为 S^q , 并且 ΣX 上诱导了 CW 复形结构。假定 $f: S^{q+1} \rightarrow \Sigma X$ 是 $\pi_{q+1}(\Sigma X) = \mathbb{Z}$ 的生成元 (Freudenthal 纬悬)。

假定对于每个 $g: \Sigma X \rightarrow S^{q+1}$, $g \circ f$ 映射度为 0, 那么序列 $[\Sigma X^n, S^{q+1}]$ (活动指标 n) 不满足 Mittag-Leffler 条件。

证明. 【未完】 □

引理 23.3.6. 取 $q = 2$, $\mathbb{C}P^\infty$ 满足条件要求。

证明. 需要证明对于任何 $g: \Sigma \mathbb{C}P^\infty \rightarrow S^3$, $g \circ f$ 映射度为 0。

假定基本类 $i \in H^3(S^3)$, $x \in H^3(\Sigma \mathbb{C}P^\infty) = H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ 是生成元。现在如果 $g \circ f$ 映射度为 m , 那么在不计符号的意义下 $g^*(i) = mx$ 。

现在取系数环 $R = \mathbb{F}_p$, $(p, m) = 1$ 。那么 g^* 诱导了 H^3 的同构。然而 Steenrod 运算 P^1 满足 $P^1x \neq 0$, 和 $P^1(i) = 0$ 矛盾。 □

推论 23.3.7. 存在不可数个 Skeletally Phantom Map $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow S^3$ 。

23.4 余极限和极限的同调

前文已经证明过同调和序列余极限的交换性, 这可以推广到滤过余极限上。

定义 23.4.1 (Filtered). 称一个小范畴 D 是滤过的: 如果任何两个对象 d, d' , 存在 e 以及态射 $d \rightarrow e, d' \rightarrow e$; 对于任何两个平行态射 $\alpha, \beta: d \rightarrow e$, 存在 $\gamma: e \rightarrow f$ 使得 $\gamma\alpha = \gamma\beta$ 。

定义 23.4.2. 称基数 λ 是正则的, 如果对于任何 I 使得其基数小于 λ , 以及任何集合族 $\{S_i | i \in I\}$ 满足每个 S_i 的基数小于 λ , 那么 $\cup S_i$ 的基数小于 λ 。

定义 23.4.3. 令 λ 是正则基数, 称一个小范畴 D 是 λ -滤过的, 如果:

对于每个集合 $|I| < \lambda$, 以及 I 指标对象 $\{d_i | i \in I\}$, 存在对象 e 使得 $d_i \rightarrow e, \forall i \in I$ 。

对于 I 指标平行态射 $\{\alpha_i: d \rightarrow e | i \in I\}$, 存在 $\gamma: e \rightarrow f$ 使得 $\gamma\alpha_i = \gamma\alpha_j, \forall i, j \in I$ 。

注记. 原有定义的滤过范畴在这里实际上是 ω -滤过范畴。

命题 23.4.4. X 是指标图表 $X_*: D \rightarrow \mathbf{Top}$ 的余极限: 其中箭头都是空间的闭嵌入, D 是 λ -滤过的, λ 是正则基数。如果 $\lambda > \omega$ 进一步假定 D 中存在序列余极限并且在 X_* 下保持。那么如果 K 是紧空间, 任何 $f: K \rightarrow X$ 可以分解为 $K \rightarrow X_d \rightarrow X$ 。

证明. 这是利用 $f(K)$ 的紧性得到的。 □

推论 23.4.5. X_*, X 定义同上, 那么:

$$H_*(X) \cong \varinjlim_{d \in D} H_*(X_d)$$

$$\pi_*(X) \cong \varinjlim_{d \in D} \pi_*(X_d)$$

证明. 奇异链和同伦群都是 $S^q \rightarrow X, \Delta^n \rightarrow X$: 它们都是紧空间到 X 上的映射, 那么由上一个命题就得到了结果。□

引理 23.4.6. q -等价 $f: X \rightarrow Y$ 诱导了维数低于 q 的同调群和上同调群的同构。

证明. 由于弱等价诱导了同调群和上同调群的等价, 可以通过考虑映射柱使得 f 成为余纤维化, 并且让 X, Y 是 CW 复形, q 骨架相同, f 是胞腔映射, 并且限制在 q -骨架上是恒等映射。

那么由胞腔同调群的定义结论自明。□

定义 23.4.7. 称逆向系统 $f_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ 是收敛的, 如果对于任何 q 存在 n_q 使得 $X \rightarrow X_n$ 是一个 q -等价 $\forall n \geq n_q$ 。

命题 23.4.8. 令 $X = \varprojlim X_n$, 并且 $\{X_n\}$ 是一个收敛的纤维化构成的逆向系统, 那么存在自然同构

$$\pi_*(X) \cong \varprojlim \pi_*(X_n), H_*(X) \cong \varprojlim H_*(X_n), H^*(X) \cong \varinjlim H^*(X_n)$$

证明. 再一次将 X 替换为 $\text{mic } X_n$, 同伦群的逆向系统满足 Mittag-Leffler 条件, 那么这就说明了结果。□

第二十四章 示性类

24.1 分类空间

定义 24.1.1 (纤维丛, 主丛). 拓扑空间 B 上纤维丛是映射 $p: E \rightarrow B$ 满足局部平凡条件. 诸局部平凡化给出了局部平凡映射 $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F_\alpha$, 因此对于局部平凡邻域的交中一点 $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, 这给出了纤维的自同胚 $F = p^{-1}(b)$:

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: F \rightarrow F$$

称为转移映射。

现在如果拓扑群 G 连续地左作用在纤维丛的纤维 F 上, 无妨要求这个作用是忠实的. 那么如果在局部平凡邻域的交中每个转移映射都是一个 G 中的元素作用得到的, 并且有连续映射 $t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ (即变换是连续的), 那么称纤维丛是带有结构群 G 的。

拓扑空间 B 上的 \mathbb{K} -向量丛是纤维是 \mathbb{K} -线性空间, 转移映射是线性映射的纤维丛。

拓扑群 G , 拓扑空间 B 上的 G -主丛是一个纤维丛 $p: E \rightarrow B$, 以及保持纤维的右 G -作用, 满足每个纤维作为 G -空间同构于 G 。

定义 24.1.2 (结构群纤维丛-主丛对应).

给定结构群为 G 的纤维丛 $E \rightarrow B$, 它有关联主丛:

对于局部平凡邻域 U_i, U_j , 由定义知纤维丛的转移函数诱导了 $t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, 现在定义关联主丛是取同样的转移函数: 即

$$\coprod U_\alpha \times G / ((u, g)_\beta \sim (u, t_{\alpha\beta}(u)g)_\alpha)$$

同样给定 G -主丛 $P \rightarrow B$, 给定纤维 F , G 在其上的连续左作用 (无妨假定忠实), 它有关联纤维丛:

考虑 $P \times F \curvearrowright G: (p, f) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})f)$ 那么取 $E = P \times_\rho F = (P \times F)/G$, 即 $[p \cdot g, f] = [p, \rho(g)f]$, 这样就给出了一个纤维丛 $E \rightarrow B$, 同样它也是保持着转移函数的。

因此我们建立了纤维丛-主丛的一一对应, 特别地, 对于向量丛的情况这就是向量丛-标架丛对应. 在后文中同样也不会再区分向量丛和对应的 $GL(n, \mathbb{K})$ -主丛。

分类空间的起点在于拉回丛的同伦不变性:

定义 24.1.3 (拉回丛). $f: X \rightarrow Y$, E 是 Y 上的纤维丛/主丛, E 的拉回是 $f^*E = X \times_Y E$, 它仍然是一个纤维丛/主丛, 拉回丛的直观构造是将每一点的纤维和转移函数拉回。

命题 24.1.4 (拉回丛同伦不变性). 给定纤维丛/主丛 $E \rightarrow Y$, $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ 是同伦的, 那么 $f_0^*E \cong f_1^*E$ 。

推论 24.1.5. 可缩仿紧空间上的纤维丛/主丛是平凡的。

定义 24.1.6 (万有丛, 分类空间). 设 G 是拓扑群, 一个 G 主丛 $EG \rightarrow BG$ 称为万有的, 如果对于任何仿紧空间 X , 映射

$$[X, BG] \rightarrow \text{Bund}_G(X) : f \mapsto f^*(EG)$$

是集合的同构。此时 BG 称为 G 的分类空间。

我们将要证明全空间可缩的 G 主丛是万有的。 BG 实际上是某种同伦商 $*/G$ 。

定理 24.1.7 (Milnor's Construction). BG 总是存在的, 并且构造关于 G 具有函子性。

证明.

$$EG = \{(t_1 g_1, t_2 g_2, \dots) | t_i \in [0, 1], g_i \in G, \text{finite } t_i \text{ nonzero}, \sum t_i = 1\}$$

现在 EG 赋予余极限拓扑 $\varinjlim_n \{(t_1 g_1, \dots, t_n g_n, 0, \dots) \in EG\}$, 其中余极限的每一项中的拓扑是由 G 的拓扑诱导下来的。

定义 G 在 EG 上的右作用为在每一个分量上右乘, 这个作用是自由的。 $BG = EG/G$ 就是一个 G -主丛。

下面对于任何 G -主丛 $E \rightarrow B$, B 仿紧。那么有局部有限的可平凡化邻域 U_α 。仿紧性保证可以取这些 U_α 的不交并将开集个数变为至多可数: 记为 $\{U_1, \dots\}$ (每个 U_n 都是原来的若干 U_α 的不交并)

取一组单位分拆 $\{\rho_i : U_i \rightarrow [0, 1]\}$, 定义

$$f : E \rightarrow EG : x \mapsto (\rho_1(x)g_1(x), \rho_2(x)g_2(x), \dots)$$

其中 $g_i(x) \in G$ 是 x 在 $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times G$ 上的纤维坐标。这个映射和 G 作用相容, 因此诱导了 $\tilde{f} : B \rightarrow BG$, 并且 E 确实是 EG 的拉回。

映射 \tilde{f} 的同伦类和开覆盖、单位分拆的选取无关。因此这实际上就验证了我们构造的 EG 确实是分类空间。 \square

注记. 定义拓扑空间的连接 (join) 为

$$X \star Y = (X \times Y \times I) / \sim$$

其中 $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$, 那么 \star 具有结合律。于是我们构造的 $EG = G \star G \star G \star \dots$

命题 24.1.8. EG 是可缩的。

证明. $\text{id} : EG \rightarrow EG$ 和如下映射是同伦的: $(t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3, \dots) \mapsto (t_1 g_1, 0, t_2 g_2, t_3 g_3, \dots)$ 。后者有到常值映射的同伦:

$$((1-t)t_1 g_1, te, (1-t)t_2 g_2, (1-t)t_3 g_3, \dots)$$

这就说明了可缩。(这个思路和说明 S^∞ 可缩是相同的) \square



命题 24.1.9. 对于任何 G 主丛 $E \rightarrow B$, 如果全空间 E 可缩, 那么它是万有的。

证明. 给定 G 主丛 $E \rightarrow B$, 那么它有关联的 EG 纤维丛 $E \times_G EG \rightarrow B$, 于是任何截面都作为截面和零截面同伦。

现在关联纤维丛 $E \times_G EG \rightarrow B$ 的一个截面对应着丛映射 $\alpha: E \rightarrow EG$, 同理由 E 是可缩的, 这给出了一个丛映射 $\beta: EG \rightarrow E$ 。

$\alpha\beta$ 和恒等映射同伦, $\beta\alpha$ 同伦于恒等映射是因为截面之间都是同伦的。 \square

命题 24.1.10 (Delooping). 弱同伦等价 $G \simeq \Omega BG$ 。

证明. 有正合列

$$\cdots \Omega EG \rightarrow \Omega BG \rightarrow G \rightarrow EG \rightarrow BG$$

EG 可缩说明 ΩEG 可缩, 于是 $[X, \Omega BG] \simeq [X, G]$ 。因此 $G \simeq \Omega BG$ 是弱同伦等价。 \square

推论 24.1.11. 如果 G 主丛 $E \rightarrow B$ 满足 E 弱可缩, 那么有弱同伦等价 $B \simeq BG$

证明. E 由 $B \rightarrow BG$ 拉回得到, 那么这个映射诱导了图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_n(G) & \longrightarrow & \pi_n(E) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(E) \\ \downarrow \cong & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow 0 \\ \pi_n(G) & \longrightarrow & \pi_n(EG) & \longrightarrow & \pi_n(BG) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(E) \end{array}$$

于是由五引理得证。 \square

定义 24.1.12 (示性类). G -主丛的示性类是指一个上同调类 $c \in H^*(BG; R)$, R 是系数环。对于任何 G -主丛 $E \rightarrow X$, 它由 $f: X \rightarrow BG$ 拉回得到。定义 $c(E) = f^*(c) \in H^*(X; R)$ 。等价地, 它是两个函子之间的自然变换: $c: \text{Bund}_G(-) \Rightarrow H^*(-; R)$ 。

24.2 Grassmann 流形和示性类

定义 24.2.1 (Stiefel 流形、Grassmann 流形). 定义 Stiefel 流形和 Grassmann 流形如下:

$$V_n(\mathbb{K}^N) = \{\text{linear independent ordered } n \text{ vector tuple in } \mathbb{K}^N\}$$

$$G_n(\mathbb{K}^N) = \{n - \dim \text{ linear subspace in } \mathbb{K}^N\}$$

它有自然的拓扑和光滑流形结构。定义

$$V_n(\mathbb{K}^\infty) = \varinjlim_N V_n(\mathbb{K}^N)$$

$$G_n(\mathbb{K}^\infty) = \varinjlim_N G_n(\mathbb{K}^N)$$

自然有 $GL(n, \mathbb{K})$ 主丛:

$$GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow V_n(\mathbb{K}^N) \rightarrow G_n(\mathbb{K}^N)$$

它和嵌入映射 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow \mathbb{K}^{N+1}$ 相容, 因此过渡到余极限上有主丛

$$GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow V_n(\mathbb{K}^\infty) \rightarrow G_n(\mathbb{K}^\infty)$$

命题 24.2.2. $V_n(\mathbb{K}^\infty)$ 是可缩的, 从而 $BGL(n, \mathbb{K}) \cong G_n(\mathbb{K}^\infty)$

证明. 同理 S^∞ 的情况, 通过同伦 $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ (前 n 个分量是 0), 我们可以将 $V_n(\mathbb{K}^\infty)$ 同伦地变到前 n 个坐标为 0 的子空间中. 那么同理可以将前 n 个坐标以为的部分压回 0, 给出了形变收缩. \square

命题 24.2.3. 定义

$$V'_n(\mathbb{K}^N) = \{\text{ordered } n \text{ orthonormal vector tuple in } \mathbb{K}^N\}$$

再次定义 $V'_n(\mathbb{K}^\infty)$ 以及正交群/酉群主丛 $V'_n(\mathbb{K}^\infty) \rightarrow G_n(\mathbb{K}^\infty)$, 这类似地定义出了它们的万有主丛。

推论 24.2.4.

$$BGL(n, \mathbb{R}) = G_n(\mathbb{R}^\infty) = BO(n)$$

$$BGL(n, \mathbb{C}) = G_n(\mathbb{C}^\infty) = BU(n)$$

$$BGL(n, \mathbb{H}) = G_n(\mathbb{H}^\infty) = BSp(n)$$

特别地:

$$BO(1) \cong \mathbb{R}P^\infty, BU(1) = \mathbb{C}P^\infty, BSp(1) = \mathbb{H}P^\infty$$

向量示性类就是 Grassman 流形的上同调环的元素, 现在我们来计算它. 接下来记 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 中的某一个。

定义 24.2.5 (向量丛的定向). $p: E \rightarrow B$ 是 \mathbb{K} - 向量丛. R 是一个环, 则 E 的 R - 定向是指:

1. 对每个 $b \in B$, 选取 $p^{-1}(b) = \mathbb{K}^n$ 的相对上同调类

$$\pm 1 \in H^{dn}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n - \{0\}; R) \cong R$$

其中 $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. 满足每个点 b 处的选取方式和 b 的某个邻域是相容的 (即通过某个 $U \times \mathbb{K}^n$ 诱导下来)

如果存在这样的 R - 定向, 就称 E 为 R - 可定向的。

定义 24.2.6. 称一个环 R 是 \mathbb{K} - 定向的, 如果以下等价条件成立:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 或 $2R = 0$
2. \mathbb{K} - 向量丛都是 R - 可定向的。

注意 $2R = 0$ 这件事事实上源自 $GL(n, \mathbb{R})$ 有两个连通分支。

定理 24.2.7. 设 R 是 \mathbb{K} - 可定向的:

1. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时有分次环同构

$$H^*(BO(n); R) \cong R[w_1, \dots, w_n]$$

其中 $\deg w_i = i$. 上同调类 w_i 对应了实向量丛的示性类, 称为第 i 个 Stiefel-Whitney 类。

2. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时有分次环同构

$$H^*(BU(n); R) \cong R[c_1, \dots, c_n]$$

其中 $\deg c_i = 2i$ 。上同调类 c_i 对应了复向量丛的示性类，称为第 i 个 Chern 类。

3. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ 时有分次环同构

$$H^*(BSp(n); R) \cong R[p_1, \dots, p_n]$$

其中 $\deg p_i = 4i$ 。上同调类 p_i 对应了四元数向量丛的示性类，称为第 i 个四元数 Pontryagin 类。

现在来研究 Grassmannian 的上同调：一个思路是它的 Schubert 胞腔分解，这是代数组合中的很重要的结果。但是这里采用 Thom 理论相关内容的方法证明。

24.2.1 Thom 同构

定义 24.2.8 (球丛，圆盘丛，Thom 空间)。

1. 球丛是纤维为球面 S^n 的纤维丛，其转移映射是球的旋转或翻转；
2. 圆盘丛是纤维为 D^n 的纤维丛，其转移映射是圆盘的旋转或翻转。

现在对于任何实向量丛 $E \rightarrow B$ ，取好一个 Euclid 度量使得转移函数都是正交的 ($GL(n) \rightarrow O(n)$ 的约化)

1. 在每个纤维上取出单位球面 S^{n-1} ，得到的球丛记为 $S(E) \rightarrow B$ ；
2. 在每个纤维上取出单位圆盘 D^n ，得到的圆盘丛记为 $D(E) \rightarrow B$ 。

定义 E 的 Thom 空间为 $Th(E) = D(E)/S(E)$ ：它可以理解成给 E 的纤维添加一个共同无穷远点得到的空间。

注记. Thom 空间的约化上同调 (取无穷远点为基点) 由切除性质知正是 $(E, E - B)$ 的相对上同调 (这里 $B \hookrightarrow E$ 是取零截面嵌入)，同时从微分形式的观点看它是纤维紧支 de Rham 上同调。因此对于 Thom 同构的讨论有纯代数拓扑和计算微分形式两种观点，对于后者可以参见 [BT82]。

定理 24.2.9 (Thom 同构). 设 $E \rightarrow B$ 是 R -可定向的向量丛，纤维为 \mathbb{R}^n 。固定 E 的一个 R -定向：

1. 存在唯一的上同调类

$$u \in \tilde{H}^n(Th(E); R) = H^n(E, E - B; R)$$

称为 Thom 类，使得它限制在每个纤维 S^n 上都是由定向确定的元素 $\tilde{H}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1}) \cong \tilde{H}^n(S^n; R)$



2. 对每个 $q \in \mathbb{Z}$ 有同构

$$\cup u : H^q(B; R) \cong \tilde{H}^{q+n}(Th(E); R)$$

这里约定负数上同调群为 0.

注记. 这里的杯积是相对杯积 $\cup : H^*(D(E)) \otimes H^*(D(E), S(E)) \rightarrow H^*(D(E))$, 它们分别对应着 $H^*(B), \tilde{H}^*(Th(E))$ 。

注记. 直观上 Thom 类是将定向拼起来得到的 Thom 空间中的上同调。

引理 24.2.10. 记 $e^n = 1 \in H^n(D^n, S^{n-1}) \cong R$, 那么相对上同调类的 exterior product

$$\times e^n : H^q(X, A) \rightarrow H^{q+n}(X \times D^n, X \times S^{n-1} \cup A \times D^n)$$

是同构。

证明. $n = 1$ 是考虑 $(X \times D^1, X \times S^0 \cup A \times D^1, X \times * \cup A \times D^1)$ 的相对上同调长正合列。由于有同伦等价 $X \times D^1 \simeq X \times *$, $X \times * \cup A \times D^1 \simeq X \times *$, 因此 $H^q(X \times D^1, X \times * \cup A \times D^1) = 0$ 。从而长正合列给出了结果。

对于一般的 n , 对于任何 $y \in H^q(X, A)$: 有 $y \times e^n = y \times e^1 \times \cdots \times e^1$, 因此前述论证已经说明了结果。 \square

Thom 同构的证明.

1. E 是平凡丛时, 在引理 24.2.10 中取 $(X, A) = (B, \emptyset)$ 。于是有同构

$$\times e^n : H^q(D(E)) \cong \tilde{H}^{q+n}(Th(E))$$

那么这就完成了构造。

2. $B = B_1 \cup B_2$, B_1, B_2 是开子集并且 E 限制到其上平凡丛。设为 $E_i = p^{-1}(B_i)$, 那么由 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \rightarrow H^q(D(E), S(E)) \xrightarrow{\alpha} H^q(D(E_1), S(E_1)) \oplus H^q(D(E_2), S(E_2)) \xrightarrow{\beta} H^q(D(E_1 \cap E_2), S(E_1 \cap E_2)) \rightarrow \cdots$$

现在对于每个平凡丛都存在 Thom 类 $u_i \in H^n(D(E_i), S(E_i))$ 。这两个 Thom 类限制在 $E_1 \cap E_2$ 上也是 Thom 类, 由前文平凡丛 Thom 类的唯一性, 它们的限制相同。因此由 Mayer-Vietoris 序列的正合性, 存在 $u \in H^n(D(E), S(E))$ 是 (u_1, u_2) 的原像。这就证明了 Thom 类的存在性。

再来看唯一性, 这只需证明 α 是单射。这是因为正合列的前一项是 $H^{n-1}(D(E_1 \cap E_2), S(E_1 \cap E_2)) \cong H^{-1}(B) = 0$ 。

3. B 是有限个可平凡化邻域的并: 反复进行上述归纳。

4. $B = \cup_{\alpha} B_{\alpha}$: 考虑 Čech to Derived Functor 谱序列 (Grothendieck 谱序列取函子复合为 $\mathbf{Sh}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\tilde{H}^0} \mathbf{Ab}$ 的特例):

$$E_1^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{B}, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H^{p+q}(D(E), S(E); R)$$



其中 \mathcal{B} 是开覆盖 $\{B_\alpha\}$, \mathcal{H}^q 是预层, 定义为:

$$\mathcal{H}^q(U) = H^q(D(E|_U), S(E|_U); R)$$

注意到 B_i 上的 Thom 类在第 $(0, n)$ 位中, 而其在微分映射下的像总会落入零区 ($E_1^{p,q}$ 只有在 $q \geq n$ 时非零)。因此这些 $\{u_i\}$ 永远在谱序列中保留, 最后成为 $H^n(D(E), S(E))$ 中的一个元素 u : 它就是满足要求的 Thom 类。

□

24.2.2 Gysin 序列和 Euler 类

定理 24.2.11 (Gysin 序列). 设 $E \rightarrow B$ 是 R -可定向的球丛, 固定好一个 R -定向, 那么存在 Euler 类 $e = e(E) \in H^{n+1}(B; R)$ 使得存在两个长正合列构成的图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^q(B) & \xrightarrow{p^*} & H^q(E) & \xrightarrow{\int} & H^{q-n}(B) & \xrightarrow{\cup e} & H^{q+1}(B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong: \cup u & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^q(D(E')) & \longrightarrow & H^q(S(E')) & \longrightarrow & H^{q+1}(D(E'), S(E')) & \longrightarrow & H^{q+1}(D(E')) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

E' 是 E 所对应的 \mathbb{R}^{n+1} -丛。第二行是上同调长正合列, 第一行称为球丛 E 的 Gysin 序列。

证明. 取 Euler 类 $e = i^*u$, 其中 $i: B \rightarrow Th(E')$ 是零截面的嵌入映射。这里 $H^q(E) \rightarrow H^{q-n}(B)$ 的映射记为 \int 是因为它实际上是微分形式沿着纤维的积分: 它将 q -形式变成 $(q-n)$ -形式。□

定义 24.2.12 (Euler 类). 设 $E \rightarrow B$ 是 R -可定向的 \mathbb{R}^n -丛, 固定好一个 R -定向。定义 E 的 Euler 类为 $e(E) = e(S(E)) \in H^n(B; R)$ 。它是示性类, 但是依赖于向量丛的定向: 因此 Euler 类实际上是 $BSO(n)$ 的上同调类, 只有在 $2R = 0$ 时才能够成为 $BO(n)$ 的上同调类。

命题 24.2.13 (Thom 类和 Euler 类的乘积公式). 设 $E_1 \rightarrow B_1$ 和 $E_2 \rightarrow B_2$ 是 R -可定向的 \mathbb{R}^{n_1} -丛和 \mathbb{R}^{n_2} -丛, 固定好给定的定向。这诱导了一个 $E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ 的已定向的向量丛。它的 Thom 类是

$$\begin{aligned} u(E_1 \times E_2) &= u(E_1 \otimes E_2) \in \tilde{H}^{n_1}(Th(E_1)) \otimes \tilde{H}^{n_2}(Th(E_2)) \\ &\subseteq \tilde{K}^{n_1+n_2}(Th(E_1) \wedge Th(E_2)) \cong \tilde{H}^{n_1+n_2}(Th(E_1 \times E_2)) \end{aligned}$$

同样的意义下有 $e(E_1 \times E_2) = e(E_1) \otimes e(E_2)$

作为推论, E_1, E_2 是 B 上的两个 R -可定向的向量丛, 固定好各自的定向。则 $E_1 \oplus E_2$ 也是已定向的向量丛, 并且

$$e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1)e(E_2)$$

证明. $u(E_1) \otimes u(E_2)$ 在纤维上的限制是 $1 \otimes 1 \in \tilde{H}^{n_1+n_2}(S^{n_1} \wedge S^{n_2}) \cong \tilde{H}^{n_1+n_2}(S^{n_1+n_2})$: 从而 Thom 类的唯一性给出了结果。Euler 类的结果是由 Thom 类在底空间的限制给出的。

现在 $E_1 \oplus E_2$ 是向量丛 $E_1 \times E_2$ 沿着对角映射 $B \hookrightarrow B \times B$ 的拉回。但是上同调的杯积正是 exterior product 沿对角映射的拉回, 因此这是前一命题的推论。□

24.2.3 Grassmann 流形的上同调

命题 24.2.14. 有球丛

$$S^{n-1} \rightarrow BO(n-1) \rightarrow BO(n)$$

$$S^{2n-1} \rightarrow BU(n-1) \rightarrow BU(n)$$

$$S^{4n-1} \rightarrow BSp(n-1) \rightarrow BSp(n)$$

证明. 由于球丛

$$S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1) \rightarrow EO(n)/O(n-1) (\cong BO(n-1)) \rightarrow EO(n)/O(n) \cong BO(n)$$

这就给出了两个球丛。 □

接下来对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, 记 $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 1, 2, 4$, $G(n) = O(n), U(n), Sp(n)$ 。

推论 24.2.15 (Gysin 序列). 系数环 R 是 \mathbb{K} -可定向的, 则有 Gysin 序列:

$$\cdots \rightarrow H^{q-dn}(BG(n)) \xrightarrow{\cup e} H^q(BG(n)) \xrightarrow{p^*} H^q(BG(n-1)) \xrightarrow{f} H^{q+1-dn}(BG(n)) \rightarrow \cdots$$

证明. R 的可定向说明前文给出的球丛是可定向的。 □

定理 24.2.7 的证明. 我们先证明 $n = 1$ 的情况。此时 Grassmann 流形就是射影空间。因此我们要证明

$$H^\bullet(\mathbb{K}P^\infty) \simeq R[x], \quad \deg x = d.$$

在 Gysin 序列中取 $n = 1$, 并注意到 $BG(0) \simeq B\{*\} \simeq \{*\}$, 我们得到同构

$$\cup e : H^{q-d}(BG(1)) \simeq H^q(BG(1)) \quad (q \geq 2).$$

当 $q = d = 1$ 时这个映射也是同构。因为在正合列中它右边一项是 0, 它左边的映射 $p^* : H^0(BG(1)) \rightarrow H^0(BG(0))$ 是同构。因此就得到了

$$H^\bullet(BG(1)) \simeq R[e], \quad \deg e = d.$$

下面考虑一般的情况: 对 n 归纳, 假设我们已经证明了

$$H^\bullet(BG(n-1)) \simeq R[c_1, \dots, c_{n-1}], \quad \deg c_i = di.$$

由 Gysin 序列: 当 $q \leq dn - 2$ 时, 有同构

$$p^* : H^q(BG(n)) \simeq H^q(BG(n-1)).$$

我们断言当 $d = 1, q = dn - 1$ 时这个映射也是同构。我们先承认这个断言, 那么 $BG(n-1)$ 的生成元 c_1, \dots, c_{n-1} 都在 p^* 的像中。因此环同态

$$p^* : H^\bullet(BG(n)) \rightarrow H^\bullet(BG(n-1))$$



是分裂的满射 (这个分裂是自然的)。这就把 Gysin 序列切成了分裂的短正合列

$$0 \rightarrow H^{q-dn}(BG(n)) \xrightarrow{\cup e} H^q(BG(n)) \xrightarrow{p^*} H^q(BG(n-1)) \rightarrow 0.$$

换言之: 如果定义 $c_n = e$, 那么对每个 q 都有

$$H^q(BG(n)) \simeq H^q(BG(n-1)) \oplus c_n \cdot H^{q-dn}(BG(n)).$$

这就蕴涵了要证的结论。

最后是上面的断言的证明。这时 Gysin 序列是

$$0 \rightarrow H^{n-1}(BO(n)) \xrightarrow{p^*} H^{n-1}(BO(n-1)) \xrightarrow{\int} H^0(BO(n)) \xrightarrow{\cup e} H^n(BO(n)) \rightarrow \cdots.$$

只需证明, 其中的映射 $\cup e$ 是单射. 这等价于 e 不是 R -挠元. 因此我们只需找一个 \mathbb{R}^n -丛 E , 使得 $e(E)$ 不是挠元。我们找的例子是

$$E = EO(1)^n \rightarrow BO(1)^n =: B.$$

由 $n = 1$ 的情况我们知道 $e(EO(1)) = e = w_1$ 不是 R -挠元。因此, 由乘积公式知

$$e(E) = w_1^{\otimes n} \in H^1(BO(1))^{\otimes n} \subset H^n(BO(1)^n)$$

不是 R -挠元。 □

推论 24.2.16. 特别地, 如果 $E \rightarrow B$ 是 \mathbb{K}^n -丛, R 是 \mathbb{K} -可定向的。那么 $w_n(E), c_n(E), p_n(E) = e(E)$, 即 *Top Stiefel-Whitney/Chern/Quaternion Pontryagin Class* 是 *Euler Class*。

24.2.4 Whitney 乘积公式

定义 24.2.17. 给定 $E \rightarrow B$ 是 \mathbb{K} -向量丛, R 是 \mathbb{K} -可定向的。定义全 Stiefel-Whitney 类、全陈类、四元数全 Pontryagin 类为 $1 + w_1(E) + w_2(E) + \cdots$, etc.

定理 24.2.18 (Whitney 乘积公式). 对于 E_1, E_2 两个 B 上的 \mathbb{K} -向量丛, 那么

$$w(E_1 \oplus E_2) = w(E_1)w(E_2)$$

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$$

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1)p(E_2)$$

证明. 对 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情况。记 n_1, n_2 分别为 E_1, E_2 的秩, $N = n_1 + n_2$ 。固定 n , 对 N 归纳地证明 w_n 满足结果。

当 $N = n$ 时 $w_n(E_1 \oplus E_2) = e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1)e(E_2) = w_{n_1}(E_1)w_{n_2}(E_2)$ 。

当 $N > n$ 时, 假定结果对 $< N$ 的情况都成立。现在 $E_1 \oplus E_2$ 的分类映射有分解:

$$B \xrightarrow{E_1, E_2} BO(n_1) \times BO(n_2) \xrightarrow{\mu} BO(n_1 + n_2)$$

其中 μ 是 $O(n_1) \times O(n_2) \hookrightarrow O(n_1 + n_2)$ 诱导的, 也是 $EO(n_1) \times EO(n_2)$ 的分类映射。



现在有投影映射

$$pr_k : H^n(BO(n_1) \times BO(n_2)) \rightarrow H^k(BO(n_1)) \oplus H^{n-k}(BO(n_2))$$

, 需要证明 $\pi_k(\mu^*(w_n)) = w_k \otimes w_{n-k}$ 。此时要么 $k < n_1$, 要么 $n - k < n_2$ 。无妨前者, 那么有交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^n(BO(n_1 + n_2)) & \xrightarrow{\mu^*} & H^n(BO(n_1) \times BO(n_2)) & \xrightarrow{pr_k} & H^k(BO(n_1)) \otimes H^{n-k}(BO(n_2)) \\ i^* \downarrow & & & & \downarrow \cong: i^* \otimes \text{id} \\ H^n(BO(k + n_2)) & \xrightarrow{\mu^*} & H^n(BO(k) \times BO(n_2)) & \xrightarrow{pr_k} & H^k(BO(k)) \otimes H^{n-k}(BO(n_2)) \end{array}$$

最右侧箭头是同构。因此只需验证 $w_n \in H^n(BO(n_1 + n_2))$ 沿着下面一行走得到 $w_k \otimes w_{n-k}$, 这是因为 $i^*w_n = w_n$ 和归纳假设。 \square

注记. 我们这里构造的示性类还有另外一种观点: 它是寻找向量丛 k 个 \mathbb{K} -线性无关截面的阻碍。特别地如果存在这样的 k 个截面, 那么 $i > n - k$ 时相应的示性类 w_i, c_i, p_i 消失。

24.2.5 实 Pontryagin 类

引理 24.2.19. 给定复向量丛 E 。考虑它的复共轭丛 \bar{E} (转移函数取共轭), 那么:

$$c_i(\bar{E}) = (-1)^i c_i(E)$$

证明. 只需对万有丛 $EU(n) \rightarrow BU(n)$ 证明。取共轭后 \mathbb{C}^n 的定向变成原来的 $(-1)^n$ 倍, 因此

$$c_n(\overline{E(n)}) = e(\overline{E(n)}) = (-1)^n e(E(n)) = (-1)^n c_n(E(n))$$

对于 $1 \leq k \leq n$, 利用 $i: BU(k) \rightarrow BU(n)$ 诱导的上同调群的同构即可。 \square

推论 24.2.20. 实向量丛 E 的复化 $E \otimes \mathbb{C}$ 满足其非特征 2 系数环的奇数阶 Chern 类为 0。

证明. 由于共轭给出了自然的同构 $E \otimes \mathbb{C} \cong \overline{E \otimes \mathbb{C}}$, 对于奇数 i : $2c_i(E \otimes \mathbb{C}) = 0$ 。 \square

定义 24.2.21 (实 Pontryagin 类). 给定实向量丛 $E \rightarrow B$, 定义 E 的第 i 个实 Pontryagin 类为

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbb{C})$$

由 Chern 类的 Whitney 乘积公式可以直接得到

定理 24.2.22 (Whitney 乘积公式). 如果 E_1, E_2 是 B 上的两个实向量丛, 且系数环 R 中 2 不是零因子, 那么

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1)p(E_2)$$

定理 24.2.23. 设 E 是可定向的 \mathbb{R}^{2n} -丛, 那么 $p_n(E) = e(E)^2$

证明. $p_n(E) = (-1)^n c_n(E \otimes \mathbb{C}) = (-1)^n e(E \otimes \mathbb{C})$ 。但是有实向量丛同构 $V \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus iV$ 。这个同构将定向变为原来的 $(-1)^n$ 倍: $v_1, iv_1, \dots, v_{2n}, iv_{2n}; v_1, \dots, v_{2n}, iv_1, \dots, iv_{2n}$ 之间相差 $(2n)(2n-1)/2$ 次兑换, 因此定向相差 $(-1)^n$ 。

于是 $p_n(E) = (-1)^n e(E \otimes \mathbb{C}) = e(E \oplus E) = e(E)^2$ 。 \square

同理 BO 的情况, 对于可定向实向量丛的示性类, 有:

命题 24.2.24. 系数环 R 中 2 不是零因子, 则有分次环的同构

$$H^*(BSO(2n); R) \cong R[p_1, \dots, p_{n-1}, e]$$

$$H^*(BSO(2n+1); R) \cong R[p_1, \dots, p_n]$$

其中 $\deg p_i = 4i, \deg e = 2n, e^2 = p_n$

24.3 分裂原理

定理 24.3.1 (分裂原理). 设 $E \rightarrow B$ 是 \mathbb{K}^n - 丛, 系数环 R 是 \mathbb{K} - 可定向的。那么存在 $Y, f: Y \rightarrow B$, 使得拉回丛 $f^*E \rightarrow Y$ 满足:

1. 拉回向量丛分裂为线丛的直和: $f^*E \cong L_1 \oplus \dots \oplus L_n$
2. 上同调映射 $f^*: H^*(B; R) \rightarrow H^*(Y; R)$ 是单射, 因此 f^*E 的示性类满足的关系也对 E 的示性类成立。

这个结果相当于说明研究示性类的一些性质通常只需对线丛考虑。

首先给出 Thom 同构的推广, 它的证明和 Thom 同构是完全相同的。

定理 24.3.2 (Leray-Hirsch). 设 $E \rightarrow B$ 是纤维为 F 的纤维丛。有限个元素 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in H^*(E; R)$ 使得它们限制在每条纤维 F 上都自由地生成了 R - 模 $H^*(F; R)$ 。那么这些元素也自由地生成了 $H^*(B; R)$ - 模 $H^*(E; R)$, 即:

$$H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \cong H^*(E; R)$$

证明. 从另一个角度看, 这是 Leray-Serre 谱序列的直接结果。

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \mathcal{H}^q) \implies H^{p+q}(E; R)$$

其中层 $\mathcal{H}^q(U) = H^q(E|_U; R)$ 。 □

接下来证明分裂原理, 我们直接构造满足要求的拓扑空间。

定义 24.3.3 (旗流形). V 是 n 维 \mathbb{K} - 向量空间, 它的一面旗是指一个升链 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V, \dim V_i = i$ 。全体旗构成的空间记为 $Fl(V)$, 它有着自然的流形结构, 称为旗流形。

于任何一个向量丛 $E, Fl: \mathbf{Vect}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{Top}$ 将向量丛 E 变为纤维为旗流形的纤维丛, 即旗丛, 记为 $Fl(E) \rightarrow B$

定理 24.3.1 的证明. 我们证明映射 $f: Fl(E) \rightarrow B$ 满足条件。首先说明拉回丛分裂: 固定 E 上的 Euclid/Hermite 度量, 那么每个旗等价于一组正交直线。于是

$$f^*E = \{(x, l_1, \dots, l_n, v) | x \in B, v \in E_x, l_i \subset E_x\}$$

那么

$$L_i = \{(x, l_1, \dots, l_n, v) | v \in l_i\} \subseteq f^*E$$

是一个子线丛, 并且

$$f^*E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$$

再来看 $f^*: H^*(B) \rightarrow H^*(Fl(E))$, 这是因为有图表

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_n^* \cdots p_1^* E & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & p_2^* p_1^* E & \longrightarrow & p_1^* E \longrightarrow E \\
 \downarrow & \lrcorner & & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\
 P^n(E) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P^2(E) & \xrightarrow{p_2} & P(E) & \xrightarrow{p_1} & B
 \end{array}$$

其中每个 $P^i(E)$ 为右边竖直映射的向量丛的射影化。由于拉回的拉回是拉回, 并且 $P^n(E) = Fl(E)$, 因此只需证明每个 p_i 诱导了单射, 特别地只需考虑 $p_1^*: H^*(B) \rightarrow H^*(P(E))$ 即可。

设 $x \in B$, 考虑 $P(E) \rightarrow B$ 的纤维 $P(E_x) \cong \mathbb{K}P^{n-1}$, 那么向量丛 p_1^*E 限制在 $P(E_x)$ 上是平凡丛 $\mathbb{K}P^{n-1} \times \mathbb{K}^n$ 。自言线丛是它的子丛。

现在将每个 $P(E_x)$ 上的自言线丛拼起来, 得到了 p_1^*E 的子线丛 L 。那么考虑 $P(E)$ 的上同调类 $1, c_1(L), c_1(L)^2, \dots, c_1(L)^{n-1}$: 它们限制在每个 $P(E_x)$ 上都自由生成了 $P(E_x) \cong \mathbb{K}P^{n-1}$ 的上同调: 这是因为自言线丛的示性类和射影空间的上同调环是截断多项式代数。于是由 Leray-Hirsch 定理, $H^*(P(E))$ 是自由 $H^*(B)$ 模, 由 $1, c_1(L), \dots$ 生成。因此这就说明了单射。 \square

24.3.1 Chern 特征

定义 24.3.4 (Chern 特征). 给定复向量丛 $E \rightarrow B$, 它是 n 个线丛的直和 $E \cong L_1 \oplus L_n$ 。定义 E 的 Chern 特征为:

$$ch(E) = e^{c_1(L)} + \dots + e^{c_1(L_n)} \in H^{2*}(B) = \prod H^{2k}(B)$$

这里指数是形式幂级数。

对于一般的复向量丛 $E \rightarrow B$, 通过分裂原理定义其 Chern 特征。事实上, 它可以通过如下方式显示写出

$$chE = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & c_1 \\ c_1 & 1 & 0 & \cdots & 2c_2 \\ c_2 & c_1 & 1 & & 3c_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{k-1} & \cdots & c_2 & c_1 & kc_k \end{vmatrix},$$

定理 24.3.5. Chern 特征给出了 K 理论到上同调的环同态, 即:

$$ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$$

$$ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$$

证明. 分裂原理保证我们只需考虑线丛的情况。第一个等式显然, 对于第二个等式我们可以进一步约化到万有线丛 $EU(1) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ 的情况。注意 $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ 诱导了上同调 H^2 上的单射, 因此我们只需证明 $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ 满足等式。这是可以由 Chern-Weil 理论直接计算得到的。 \square

注记. 我们可以对四元数 Pontryagin 类和实 Pontryagin 类定义相应的满足同样性质的 Pontryagin 特征, 但是 Stiefel-Whitney 类则不能。

24.4 Poincare-Hopf 定理

定理 24.4.1 (Poincare-Hopf 定理). 固定域系数 R , M 是 R -定向的紧、连通流形。那么

$$e(TM) = \chi(M) = [M \cap M]_{TM}$$

这里 $\chi(M)$ 是将示性数和 M 的最高次上同调等同, $[M \cap M]_{TM}$ 是 TM 中 M 的自相交数。

引理 24.4.2. M 是流形, 那么考虑对角嵌入 $M \rightarrow M \times M$, 这个嵌入的法丛同构于切丛 TM 。作为推论:

$$\tilde{H}^*(Th(TM)) \cong H^*(M \times M, M \times M - M)$$

证明. 在点 $x \in M$ 处, 同构由 $T_x M \rightarrow T_{(x,x)}(M \times M) : v \mapsto (v, -v)$ 给出。□

考虑同构 $\tilde{H}^*(Th(TM)) \cong H^*(M \times M, M \times M - M)$, 那么切丛 TM 的 Thom 类给出了一个上同调类 $u \in H^*(M \times M, M \times M - M)$, 也可以视作 $H^*(M \times M)$ 的元素。此时它是子流形 $M \subseteq M \times M$ 基本类的 Poincare 对偶。

定理 24.4.3 (对角类的描述). 固定域系数 R , M 是 R -定向的紧、连通流形。取 R -线性空间 $H^*(M; R)$ 的一组齐次基 b_1, \dots, b_r , 那么:

1. 存在 $H^*(M; R)$ 的一组 $\{b_i^*\}$, 满足 $b_i \cup b_j^* = \delta_{ij} \in H^n(M; R)$, 这里 δ_{ij} 指作用在基本类 $[M]$ 上是 δ_{ij} 。
2. 记 $|b_i| = \deg b_i$, 那么

$$u = \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} b_i \times b_i^* \in H^n(M \times M; R)$$

下面, 我们来证明这个对对角类的描述。证明的概要如下: 首先把 u 写成 $\sum_{i=1}^r b_i \times c_i$ 的形式。通过 u 的性质, 我们实际上能证明, $\{(-1)^{|b_i|} c_i\}$ 构成 $\{b_i\}$ 的一组对偶基。这样, 我们就在描述对角类的同时, 重新证明了 Poincare 对偶定理。

定义 24.4.4 (除积). 设 X, Y 是拓扑空间。我们定义 $\overset{\text{slant product}}{\text{除积}}$

$$/ H^{p+q}(X \times Y) \otimes H_q(Y) \rightarrow H^p(X),$$

定义的方法是将 Y 的上同调和下同调进行配对。具体地说, 它是由奇异链复形、奇异上链复形的映射

$$S^\bullet(X \times Y) \otimes S_\bullet(Y) \rightarrow S^\bullet(X) \otimes S^\bullet(Y) \otimes S_\bullet(Y) \xrightarrow{\text{配对}} S^\bullet(X)$$

诱导的映射。



由这个定义, 如果 $a \in H^p(X)$, $b \in H^q(Y)$, $c \in H_q(Y)$, 那么

$$(a \times b)/c = \langle b, c \rangle \cdot a.$$

引理 24.4.5. 设 $[M] \in H_n(M)$ 是 M 的基本类. 则

$$u/[M] = 1 \in H^0(M),$$

其中 $u \in H^n(M \times M)$ 是之前定义的对角类.

证明. 只需对一个 $x \in M$, 证明 $(u/[M])|_x = 1 \in H^0(x)$. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^n(M \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(M) \\ \downarrow i_x^* & & \downarrow \\ H^n(x \times M) & \xrightarrow{/[M]} & H^0(x), \end{array}$$

其中 $i_x: x \times M \hookrightarrow M \times M$ 是含入映射. 对角类 u 在图表的左上角, 它在右下角的像是 $u/[M]$ (先右后下), 也是 $(1 \otimes i_x^* u)/[M] = \langle i_x^* u, [M] \rangle$ (先下后右).

另一方面, 我们有四个拓扑空间对构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} (x \times M, \emptyset) & \longrightarrow & (x \times M, x \times M \setminus x \times x) \\ \downarrow i_x & & \downarrow j_x \\ (M \times M, \emptyset) & \longrightarrow & (M \times M, M \times M \setminus M), \end{array}$$

其中右下角的 M 是 $M \times M$ 中的对角线. 我们将 u 视为 $H^n(M \times M, M \times M \setminus M)$ 的元素, 则

$$\langle i_x^* u, [M] \rangle = \langle j_x^* u, [M] \rangle = 1,$$

其中第二个 $[M]$ 是 $H^n(M, M \setminus x)$ 的元素, 第一个等号是由于上面的交换图, 第二个等号是因为 $j_x^* u$ 本质上是 Thom 类在纤维上的限制. \square

引理 24.4.6. 设 $a \in H^\bullet(M)$ 是任一上同调类. 则在 $M \times M$ 的上同调环中,

$$(a \otimes 1) \cup u = (1 \otimes a) \cup u.$$

证明. 取对角线 $M \subset M \times M$ 的管状邻域 N , 并记 $i: N \hookrightarrow M \times M$ 为含入映射. 通过选取合适的 N , 我们可以保证向两个分量的投影

$$p_1|_N, p_2|_N: N \rightarrow M$$

是同伦的 (请读者验证). 这说明

$$i^*(a \otimes 1) = i^*(1 \otimes a).$$

通过交换图

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(M \times M) & \xrightarrow{i^*} & H^\bullet(N) \\ \downarrow \cup u & & \downarrow \cup u \\ H^{\bullet+n}(M \times M, M \times M \setminus M) & \xrightarrow[\text{切除}]{\cong} & H^{\bullet+n}(N, N \setminus M) \end{array}$$

我们就得到了要证的等式. \square



定理 24.4.3 的证明. 和上面一样, 记 $u \in H^n(M \times M)$ 为对角类. 我们将它写成

$$u = \sum_i b_i \otimes c_i$$

的形式 (这是因为 Künneth 公式中的 Tor 部分消失).

设 $a \in H^\bullet(M)$ 是任一上同调类. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} & ((a \otimes 1) \cup u) / [M] \\ &= (a \otimes 1) / [M] \cup u / [M] \\ &= a \cup 1 = a, \end{aligned}$$

而另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} & ((1 \otimes a) \cup u) / [M] \\ &= \sum_i ((1 \otimes a) \cup (b_i \otimes c_i)) / [M] \\ &= \sum_i (-1)^{|a||b_i|} ((1 \cup b_i) \otimes (a \cup c_i)) / [M] \\ &= \sum_i (-1)^{|a||b_i|} \langle a \cup c_i, [M] \rangle b_i. \end{aligned}$$

由引理, 上面两个式子是相等的. 我们取 $a = b_j$, 并比较式中 b_i 的系数, 得到

$$(-1)^{|b_i||b_j|} \langle b_j \cup c_i, [M] \rangle = \delta_{ij}.$$

因此, 取 $b_i^* = (-1)^{|b_i|} c_i$, 就能满足定理的要求. □

定理 24.4.1 的证明. Euler 类的构造和前述同构保证了

$$\begin{aligned} e(TM) &= \Delta^* u = \Delta^* \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} b_i \times b_i^* \right) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} b_i \cup b_i^* = \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} = \chi(M) \end{aligned}$$

u 是 M 的 Poincare 对偶使得我们只需计算 $u \cup u$: 首先交换 $M \times M$ 两个因子的地位, 我们有 $u = \sum b_i^* \times b_i$, 因为交换次序后微分形式相乘的次序不同。

$$\begin{aligned} u \cup u &= \sum_{i,j} (-1)^{|b_i|} (b_i \times b_i^*) \cup (b_j^* \times b_j) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{|b_i|+|b_i^*||b_j^*|} (b_i \cup b_j^*) \times (b_i^* \cup b_j) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|+|b_i^*|} (b_i \cup b_i^*) \times (b_i^* \cup b_i) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|+|b_i^*|+|b_i||b_i^*|} = \chi(M) \end{aligned}$$

□

24.5 应用

24.5.1 射影空间的 Whitney 浸入

回忆 Whitney 浸入定理, $n \geq 2$ 时每个都能浸入 (切映射单射) \mathbb{R}^{2n-1} 。我们现在说明这个线性界是最优的。

定理 24.5.1. 系数环是 \mathbb{K} -可定向的, 那么对于 $n \geq 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 时分别有

$$w(T\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{n+1}$$

$$c(T\mathbb{C}P^n) = (1+x)^{n+1}$$

$$p(T\mathbb{H}P^n) = (1+x)^{n+1}$$

这里 x 分别指 $H^1(\mathbb{R}P^n), H^2(\mathbb{C}P^n), H^4(\mathbb{H}P^n)$ 的生成元。

证明. 只证明 \mathbb{R} 的情况。考虑流形 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的切丛 $T = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{R}^{n+1}$, \mathbb{R}^\times 通过乘法作用在 T 上。那么:

$$T/\mathbb{R}^\times \cong T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R}$$

最后的直和项来自径向方向的切向量, 上述同构是作为 $\mathbb{R}P^n$ 上的向量丛。

另一方面 $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \times \mathbb{R})/\mathbb{R}^\times \cong \mathcal{O}(-1)$ 是实的自言丛, 因此:

$$T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} \cong \mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)}$$

计算全 Stiefel-Whitney 类, 就有:

$$w(T\mathbb{R}P^n) = w(\mathcal{O}(-1))^{n+1} = (1+x)^{n+1}$$

□

定理 24.5.2. $n = 2^k$, 那么 $\mathbb{R}P^n$ 能够浸入 $\mathbb{R}^N \iff N \geq 2n - 1$

证明. \implies 是 Whitney 浸入定理。 \impliedby 是因为如果浸入存在, 那么记浸入的法丛为 N , 那么:

$$w(N)w(T\mathbb{R}P^n) = w(\text{trivial}) = 1$$

因此

$$\begin{aligned} w(N) &= w(T\mathbb{R}P^n)^{-1} = (1+x)^{-(n+1)} \\ &= (1+x+x^n+x^{n+1})^{-1} = (1+x+x^n)^{-1} \\ &= 1 + (x+x^n) + (x+x^n)^2 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \end{aligned}$$

因此法丛的秩至少 $n - 1$, 从而 $N \geq 2n - 1$ 。

□

24.5.2 球面的近复结构

定义 24.5.3. $2n$ 维流形 M 上的近复结构是指一个切丛上的自同态 J (即 $T^*M \otimes TM$ 的截面), 使得 $J^2 = -I$ 成立。这实际上是指切丛有一个结构群 $GL(2n, \mathbb{R})$ 到 $GL(n, \mathbb{C})$ 的约化。

定理 24.5.4. 球面 S^n 有近复结构当且仅当 $n = 0, 2, 6$ 。

引理 24.5.5. $k \geq 1$ 时 S^{4k} 没有近复结构。

证明. 若有, 记 T 为对应的复向量丛, 使得对应的实向量丛是 $T_{\mathbb{R}} = TS^{4k}$ 。那么考虑实 Pontryagin 类: 注意到球面切丛直和上一个平凡线丛得到的仍然是平凡丛, 即其在 K 群中是零, 因此其示性类也一定是平凡的, 从而:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + (-1)^k p_k(T_{\mathbb{R}}) = 1 + c_{2k}(T_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \\ &= c(T_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \end{aligned}$$

这是因为球面的同调只在最高和最低次数中不消失。

$$\begin{aligned} &= c(T \oplus \bar{T}) = (1 + c_{2k}(T))(1 + c_{2k}(\bar{T})) = (1 + e(T))(1 + e(\bar{T})) \\ &= (1 + e(T))(1 + e(T)) = 1 + 2e(T) \end{aligned}$$

因此 $e(T) = 0$, 这和 Poincaré-Hopf 定理矛盾。 \square

引理 24.5.6.

$$ch : K(S^{2k}) \rightarrow H^{2*}(S^{2k}; \mathbb{Q})$$

的像都是整上同调类。

证明. 注意球面的 \tilde{K}^* 是 $\mathbb{Z}[\beta^{\pm 1}]$, 我们只需验证对于 β 得到的上同调类是整的。但是 K 理论的 Bott 元素 β 就是 $1 - L$, 其中 1 是平凡丛, L 是 S^2 上的自交线丛。它的 Chern 特征 $ch(1 - L) = -c_1(L)$, 因此是整上同调类。 \square

引理 24.5.7. $k \geq 4$ 时 S^{2k} 没有近复结构。

证明. 若有, 记 T 为对应的复向量丛, 使得对应的实向量丛 $T_{\mathbb{R}} = TS^{2k}$ 。那么 $c(T) = 1 + c_k(T) = 1 + 2x$: 最后一个等式是 Poincaré-Hopf 定理, x 是 $H^{2k}(S^{2k})$ 的生成元。

于是 T 的 Chern 特征是 $ch(T) = k + \frac{2}{(k-1)!}x$ 。由于球面向量丛的 Chern 特征都是整的, 于是 $k < 4$ 。这就说明了结果。 \square

引理 24.5.8. S^6 上存在近复结构。

证明. 考虑八元数 \mathbb{O} , $\text{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ 为虚八元数的集合, 取其中的单位球面 S^6 。每个 S^6 的切空间 $T_p S^6$ 通过将 p 平移到原点可以看做 $\text{Im}\mathbb{O}$ 的一个 6 维线性子空间。对于 $v \in T_p S^6$, 定义 $J_p(v) = pv$ 。

现在 $\overline{pv} = (-v)(-p) = -pv$, 因此 pv 也是 $\text{Im}\mathbb{O}$ 中的元素。并且

$$p(pv) = (pp)v = -(p\bar{p})v = -|p|^2 v = -v$$

这就说明了结果。 \square

24.5.3 $\mathbb{C}P^2$ 中光滑代数曲线的亏格

定理 24.5.9. $\mathbb{C}P^2$ 中的 n 次光滑代数曲线的亏格是

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

引理 24.5.10. $X \subseteq \mathbb{C}P^2$ 是光滑 n 次代数曲线, 那么法丛 N 同构于 $\mathcal{O}(n)|_X$ 。

证明. 由 Adjunction Formula, $N \cong [X]|_X$ 。但是 $[X] \cong \mathcal{O}(n)$, 因为它和 nH (n 倍超平面除子) 线性等价: 考虑除以 z_0^n 即可。□

定理 24.5.9 的证明.

$$T\mathbb{C}P^2|_X = TX \oplus \mathcal{O}(n)|_X$$

那么取全 Chern 类:

$$\begin{aligned} c(TX) &= \frac{c(T\mathbb{C}P^2|_X)}{c(\mathcal{O}(n)|_X)} = \frac{(1+x)^3}{1+nx} \\ &= (1+3x)(1-nx) = 1 + (3-n)x \end{aligned}$$

x 是 $H^2(\mathbb{C}P^2)$ 的生成元在 $H^2(X)$ 中的限制。现在 $\langle x, [X] \rangle = n$: 因为这是 X 和 x 的 Poincare 对偶 (一条直线) 的相交数。

现在由 Poincare-Hopf 定理: $\chi(X) = \langle e(TX), [X] \rangle = (3-n)n$, 但是 $\chi(X) = 2 - 2g$, 这就证明了结果。□

第二十五章 指标定理

25.1 超几何

定义 25.1.1 (超空间、超代数). 超空间是有限维 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次向量空间: $V = V^+ \oplus V^-$. 超代数是有限维 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次的代数 A . 对于齐次元素 $a, b \in A$, 其交换子定义为 $[a, b] = ab - (-1)^{|a| \cdot |b|} ba$, 可以将其延拓到整个 A 上. 如果对于所有齐次的 a, b 都有 $ab = (-1)^{|a| \cdot |b|} ba$, 那么称这个超代数是超交换的。

例子. 对于线性空间 V , $\wedge^* V$ 是超交换代数: 按照 k -形式的 k 奇偶性分次; 对于 $\dim V > 1$ 的超空间 V , $\text{End}(V)$ 只是不交换的超代数。

定义 25.1.2 (超迹). 对于超空间 V 上的自同态 $a \in \text{End}(V)$, 将其写为分块矩阵

$$a = \begin{pmatrix} a^{++} & a^{-+} \\ a^{+-} & a^{--} \end{pmatrix}$$

定义它的超迹为 $\text{tr}_s a = \text{tr} a^{++} - \text{tr} a^{--}$

可以验证 $\text{tr}_s [a, b] = 0$, 这里 $[\cdot, \cdot]$ 是 $\text{End}(V)$ 作为超代数的交换子。

定义 25.1.3 (超向量丛). 流形 M 上的超向量丛是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次向量丛 $E = E^+ \oplus E^-$ 。

定义 25.1.4 (超行列式丛). $E \rightarrow M$ 是超向量丛, 其行列式丛定义为

$$\det(E) = (\wedge^{n^+} E^+)^{\vee} \otimes (\wedge^{n^-} E^-)^{\vee}$$

其中 n^+, n^- 为 E^+, E^- 的秩。

定义 25.1.5 (微分算子). 光滑向量丛 E_1, E_2 之间的微分算子是指 $D: \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$, 使得在局部坐标下具有形式:

$$D(s^i e_i^{(1)}) = \sum_{\alpha, i, j} a_i^{j\alpha} (\partial_\alpha s^i) e_j^{(2)}$$

并且每个 a 都是 M 上光滑函数, 只有有限个非零。 $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}$ 分别是两个向量丛的局部标架。

使得 $a_i^{j\alpha}$ 非零的 $|\alpha|$ 的最大值称为 D 的次数。

我们约定如下记号, 对于超向量丛 $E \rightarrow M$:

$$\Omega^+(M, E) = \Omega^{2*}(M, E^+) \oplus \Omega^{2*+1}(M, E^-)$$

$$\Omega^-(M, E) = \Omega^{2*+1}(M, E^+) \oplus \Omega^{2*}(M, E^-)$$



定义 25.1.6 (超联络). 对于超向量丛 $E \rightarrow M$, E 上的一个超联络是一个算子 $\nabla : \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^*(M, E)$, 使得

1. ∇ 交换两个子空间 Ω^+, Ω^-
2. ∇ 是 1 阶微分算子
3. ∇ 满足 Leibniz 法则: 对于 $\alpha \in \Omega^*(M), \omega \in \Omega^*(M, E)$:

$$\nabla(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \nabla \omega$$

超联络由其在 $\Omega^0(M, E)$ 上的取值决定: 设其限制在 Ω^0 上有分解 $\nabla = \sum_k \nabla^{(k)}$, 其中每个 k 部分是映入 $\Omega^k(M, E)$ 的部分: 那么

1. ∇^1 是向量丛 E^+, E^- 上的两个普通联络
2. 每个 $\nabla^{(k)}$ 自己能够延展成为一个超联络

定义 25.1.7. 固定超联络 ∇ , 其曲率定义为算子 $\nabla^2 : \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^*(M, E)$, 那么和普通向量丛的情况一样, 它可以被一个曲率形式 $\Omega \in \Omega^{2*}(M, \text{End}(E))$ 的作用表出。

和普通的 Chern-Weil 理论一样, $\text{tr}_s \Omega^k$ 是闭形式, 从而决定了和联络无关的上同调类。可以类似的定义超 Chern 特征

定义 25.1.8. 超向量丛 E 的 Chern 特征定义为

$$\text{ch}(E) = [\text{tr}_s e^{\Omega/2\pi i}] \in H^{2*}(M; \mathbb{C})$$

并且 $\text{ch}(E^+) = \text{ch}(E^+) - \text{ch}(E^-)$ (超迹的定义)

于是超 Chern 联络也有加性和乘性。

25.2 热核的渐进展开

定义 25.2.1 (微分算子的符号). 对于两个光滑向量丛 E_1, E_2 以及 $D : \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$ 是 k 阶微分算子, 它的符号定义为:

$$\sigma_D : \text{Sym}^k(T^*M) \otimes E_1 \rightarrow E_2$$

$$e^\alpha \otimes e_i^{(1)} \mapsto a_i^{j\alpha} e_j^{(2)}$$

定义 25.2.2 (椭圆微分算子). 称微分算子 $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ 是椭圆微分算子。如果对于任何 $x \in M, 0 \neq v \in T_x^*M : \sigma_D(v, \dots, v) : E_x \rightarrow E_x$ 都是线性同构。

定义 25.2.3. M 是 Riemann 流形, $E \rightarrow M$ 是光滑向量丛, 微分算子 $H : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ 称为广义 Laplace 算子, 如果

1. H 是 2 阶算子

2. 对于任何 $x \in M, v, w \in T_x^*M$, $\sigma_H(v, w) : E_x \rightarrow E_x$ 都是和 $- \langle v, w \rangle$ 的数乘
于是等价地, 广义 Laplace 算子局部地表示为

$$H = -g^{ij}\partial_i\partial_j + (\text{lower order term})$$

g^{ij} 是 Riemann 度量的逆矩阵。

命题 25.2.4. 对于任何光滑向量丛 $E \rightarrow M$ 上的联络 ∇ , 其 Laplace-Beltrami 算子定义为:

$$\Delta s = -g^{ij}(\nabla_i\nabla_j s - \Gamma_{ij}^k\nabla_k s)$$

这是广义 Laplace 算子。

反过来, 任何 E 上的广义 Laplace 算子 H 都可以写为 $H = \Delta + f$, $f \in C^\infty(M)$, Δ 是某个联络 ∇ 的 Laplace-Beltrami 算子。

25.2.1 热核

首先回忆热方程: 我们需要求 $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$, 满足

$$\begin{cases} \partial_t u = -\Delta_x u \\ u|_{t=0} = f \end{cases}$$

那么 \mathbb{R}^n 中的热核是指 $k_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)}$, 满足:

$$\begin{cases} (\partial_t + \Delta_x)k_t(x, y) = 0 \\ k_t(x, y)|_{t=0} = \delta(x, y) \end{cases}$$

那么热方程就能够通过 $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x, y)f(y)dy$ 给出。

现在我们考虑广义 Laplace 算子的情况, 固定紧 Riemann 流形 M 和其上的光滑向量丛。

定义 25.2.5 (分布). \mathbb{R} 上的分布是指连续线性泛函 $\varphi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中左侧带有 C^∞ 拓扑 (即收敛等价于支撑集在一个公共紧集内, 并且对于每个 n , 它们的 n 阶导数在这个紧集中一致收敛)

现在在向量丛上, E 的分布截面定义为 $\Gamma_{\text{dist}}(E) = \Gamma(E^\vee)^\vee$, 这里 $\Gamma(E^\vee)$ 带有 C^∞ 拓扑, 那么在取 E 是平凡丛 \mathbb{R} , 流形是 \mathbb{R} 的时候这就回到了前文的情况。

定义 25.2.6 (算子的核). 对于两个光滑向量丛 $E_1, E_2 \rightarrow M$, 其上有连续线性映射 $K : \Gamma_{\text{dist}}(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$, 那么它的核是指界面

$$k \in \Gamma(M \times M, \text{Hom}(p_2^*E_1, p_1^*E_2))$$

p_1, p_2 是两个分量的投影, 满足对于任何 $s \in \Gamma_{\text{dist}}(E_1)$, 都有

$$(Ks)(x) = \int_M k(x, y)s(y)dy$$

Schwartz 核定理指出核总是存在的:

定理 25.2.7 (Schwartz 核定理). 在前述条件下, 有向量空间的同构

$$L(\Gamma_{dist}(E_1), \Gamma(E_2)) \cong \Gamma(M \times M, \text{Hom}(p_2^* E_1, p_1^* E_2))$$

$$K \mapsto k$$

这里 L 是指连续线性映射空间。

定义 25.2.8 (热核). $H: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ 是广义 Laplace 算子, 它的热核指一族截面

$$k_t \in \Gamma(M \times M, \text{Hom}(p_2^* E, p_1^* E))$$

使得它关于 t 存在一阶导数, 并且

$$\begin{cases} (\partial_t + H_x)k_t(x, y) = 0 \\ k_t(x, y)|_{t=0} = \delta(x, y) \end{cases}$$

这里收敛到 δ 分布自然是指考虑 k_t 对应的 K_t , 那么对于任何 $s \in \Gamma(E)$ 有一致收敛 $\lim_{t \rightarrow 0} K_t(s) = s$ 。

首先我们证明假定热核存在, 研究渐进展开:

定理 25.2.9. 每个广义 Laplace 算子都有热核。

25.2.2 渐进展开

固定 $y \in M$, 取法坐标系 $x = \exp_y X$, 那么记

$$q_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|X|^2/4t}$$

将它与 H 的热核 k_t 比较, 我们希望得到如下的展开

$$k_t = q_t \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t^i \Psi_i$$

其中 $\Psi_i \in \Gamma(M \times M, \text{Hom}(p_2^* E, p_1^* E))$ 。现在来计算 Ψ_i :

由命题 25.2.4, 广义 Laplace 算子 H 决定了一个联络 ∇ , 固定 E 的联络为这个 ∇ , 那么:

引理 25.2.10. $s_t \in \Gamma(E), t > 0$ 是一族截面, 关于 t 一阶可微。那么

$$(\partial_t + H)(q_t s_t) = q_t(\partial_t + t^{-1} \nabla_R + B)s_t$$

其中 $R = X^i e_i$ 是径向向量场, 微分算子 $B = \sqrt{g}^{1/2} \circ H \circ \sqrt{g}^{-1/2}$, \sqrt{g} 是 $\sqrt{\det(g_{ij})}$ 的缩写。

证明. 按照 Leibniz 法则展开左侧:

$$LHS = (\partial_t q_t) s_t + q_t (\partial_t s_t) + (\Delta q_t) s_t + q_t (H s_t) - 2 \langle \nabla q_t, \nabla s_t \rangle$$

然而由热核 q_t 的性质, 以及法坐标的协变导数和 Laplace 算子公式

$$-2 \nabla q_t = q_t (t^{-1} R + d \log \sqrt{g})$$

$$(\partial_t + \Delta) q_t = \sqrt{g}^{1/2} (\Delta \sqrt{g}^{-1/2}) q_t$$

因此只需证明 $B = H + \nabla_{d \log \sqrt{g}} + \sqrt{g}^{1/2} (\Delta \sqrt{g}^{-1/2})$: 这是直接计算得到的。□



定义 25.2.11 (形式解). 对于截面 $\Psi_i \in \Gamma(M \times M, \text{Hom}(p_2^*E, p_1^*E))$, 对于每个 $y \in M$ 都有

$$\Psi_0(y, y) = I \in \text{End}(E_y)$$

$$(\partial_t + t^{-1}\nabla_R + B) \sum t^i \Psi_i(-, y) = 0$$

那么形式幂级数

$$k_t(x, y) = q_t(x, y) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t^i \Psi_i(x, y)$$

称为热方程的形式解。特别地, 如果 k_t 是热核, 那么它一定是形式解。

定理 25.2.12. 存在唯一的形式解, 并且 Ψ_i 满足递归

$$\Psi_i(x, y) = - \int_0^1 s^{i-1} B_x \Psi_{i-1}(x_s, y) ds$$

这里 B_x 指 B 作用在 x 分量上, $x_s = \exp_u(sX)$ 。

证明. 形式解的条件等价于

$$\begin{cases} \nabla_R \Psi_0 = 0 \\ (\nabla_R + i\Psi_i) = -B_x \Psi_{i-1} \end{cases}$$

考虑 $\psi_i(s) = s^i \Psi_i(x_s, y)$, 那么 $\varphi_i(0) = 0$ 并且

$$\varphi'_i(s) = (is^{i-1} + s^i \nabla_{R/s}) \Psi_i(x_s, y) = -s^{i-1} B_x \Psi_{i-1}(x_s, y)$$

这就完成了证明。 □

因此

定理 25.2.13 (热核渐进展开). 在对角线 $M \subset M \times M$ 的邻域内, H 的热核 k_t 在 $t \rightarrow 0$ 有渐进展开:

$$k_t(x, y) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-d(x,y)^2/4t} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t^i \Psi_i(x, y)$$

25.2.3 存在性

我们来构造这样的热核。下面我们先取一个近似解

$$(K_t s)(x) = \int k_t^N(x, y) s(y) dy$$

其中 N 是某个取定的正整数, k_t^N 是

$$k_t^N(x, y) = \psi(d(x, y)) \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-d(x,y)^2/4t} \cdot \sum_{i=0}^N t^i \Psi_i(x, y)$$

我们发现构造的 K_t 是某种 $(\partial_t + H)K_t = 0$ 的近似解, 它满足 $(\partial_t + H)K_t = O(t^\alpha), t \rightarrow 0$, 我们希望进行一些调整: 这就是如下定义的动机。



将 k_t^N 简记为 k_t , 记 $R_t = (\partial_t + H)K_t$ 。定义一族 Q_t^i 如下:

$$Q_t^0 = K_t$$

然后有 $(\partial_t + H)Q_t^0 = R_t$, 再定义

$$Q_t^1 = \int_0^t K_{t-t_1} R_{t_1} dt_1$$

然后有 $(\partial_t + H)Q_t^1 = R_t + \int_0^t R_{t-t_1} R_{t_1} dt_1$, 再定义

$$Q_t^2 = \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} K_{t-t_2} R_{t_2-t_1} R_{t_1} dt_1 dt_2$$

然后有 $(\partial_t + H)Q_t^2 = R_t + \int_0^t R_{t-t_1} R_{t_1} dt_1 + \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t} R_{t-t_2} R_{t_2-t_1} R_{t_1} dt_1 dt_2$

注意到如果算子 P, Q 的核分别是 p, q , 那么算子 PQ 的核恰好是卷积 $p * q$:

$$(p * q)(x, y) = \int_M p(x, z) \circ q(z, y) dz$$

因此 Q_t^i 的核恰好是

$$q_t^i = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t} k_{t-t_i} * r_{t_i-t_{i-1}} * \dots * r_{t_1} dt_1 \dots dt_i$$

r_t 是算子 R_t 的核。通过一些估计, 我们给出了 $\sum_k (-1)^k q_t^k$ 的收敛性。

定理 25.2.14. $N > n/2 + 1$, 级数 $q_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_t^k$ 在 C^2 -范数下收敛, 并且给出了 H 的热核。

25.3 Dirac 算子

固定 M 是 n 维 Riemann 流形, $E \rightarrow M$ 是光滑向量丛。

定义 25.3.1 (向量丛的 Dirac 算子). E 上的 Dirac 算子是指一阶微分算子 $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, 使得 D^2 是广义 Laplace 算子。

D 局部上表达为 $D = \sum_{k=1}^n a^k \partial_k + b$ ($a^k, b \in \Gamma(\text{End}(E))$), 那么

$$D^2 = \frac{1}{2}(a^i a^j + a^j a^i) \partial_i \partial_j + (\text{lower order term})$$

因此 D 是 Dirac 算子当且仅当 $a^i a^j + a^j a^i = -2g^{ij}$, 这里右侧是指和 g^{ij} 的数乘对应的线性变换。这引发了如下定义:

定义 25.3.2 (Clifford 代数). V 是 n 维实线性空间, Q 是 V 上的二次型。那么 Clifford 代数定义为商代数:

$$Cl(V, Q) := \frac{T(V)}{v \cdot w + w \cdot v = -2Q(v, w)}$$

其中 $T(V) = \oplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$ 是张量代数。我们注意到这个定义仅和 Q 的合同型有关, 因此对于非退化的 Q , 假设有 p 个正特征值、 q 个负特征值, 记:

$$Cl_{p,q}(V) = Cl(V, Q)$$

特别地, 记 $Cl(V) = Cl_{n,0}(V)$ 。

作为直接推论, $Cl(V, Q)$ 的维数是 2^n , 有基 $\{e_I | I \subseteq [n]\}$ 。

命题 25.3.3. Clifford 代数是超代数, 这是由张量代数的 \mathbb{Z} -分次诱导出的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次给出的。

定义 25.3.4 (Clifford 模). Clifford 模是指 Clifford 代数 $Cl(V, Q)$ 在超空间 E 中的表示, 即有保持 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次的超代数同态:

$$Cl(V, Q) \rightarrow End(E)$$

例子. 超空间 $\wedge^* V$ 具有典范的 $Cl(V, Q)$ -模结构:

$$v \cdot \alpha = v \wedge \alpha - Q(v, -) \lrcorner \alpha$$

这里 \lrcorner 是缩并: 即对于 V 关于 Q 的正交基:

$$e_i \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \begin{cases} e_i \wedge e_{i_1} \cdots \wedge e_{i_k} & i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ -Q(e_i, e_{i_1}) e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} & i = i_1 \end{cases}$$

$\sigma: Cl(V, Q) \xrightarrow{\cdot 1} \wedge^* V$ 是超向量空间的同构, 称为符号映射。

25.3.1 旋量群、旋量空间

定义 25.3.5 (旋量 Lie 代数). $V = \mathbb{R}^n$, 定义 Lie 代数 $\mathfrak{spin}(V) = Cl(V)_2$: Clifford 代数中分次为 2 的部分, Lie 括号是 Clifford 代数中的交换子。即对于标准正交基 e_1, \dots, e_n : $\mathfrak{spin}(V) = \text{span}\{e_i e_j | i \neq j\}$, 满足反交换关系 $e_i e_j = -e_j e_i$ 。

$\mathfrak{spin}(V)$ 可以作用到 $V \subseteq Cl(V)$ 上: $a \cdot v = [a, v]$, 这给出了 Lie 代数同构 $\mathfrak{spin}(V) \cong \mathfrak{so}(V)$ 。

定义 25.3.6 (旋量群). V 的旋量群定义为 $Spin(V) = \exp(\mathfrak{spin}(V))$, 这里 \exp 是指在 $Cl(V)$ 中的幂级数。这是一个以 $\mathfrak{spin}(V)$ 为 Lie 代数的连通 Lie 群。

命题 25.3.7. $\dim V \geq 2$, $Spin(V)$ 是 $SO(V)$ 的二重覆盖。

证明. 考虑作用 $g \cdot v = gvg^{-1}$: 这个作用诱导了到 $SO(V)$ 的 Lie 代数同构, 于是是覆盖。由于 -1 的 $Spin(V)$ 作用平凡, 覆盖至少二重; 反过来 $SO(V)$ 在 $\dim V \geq 3$ 的时候基本群是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。直接检查 $\dim V = 2$ 的情况即可。 \square

定理 25.3.8 (旋量表示). V 是 n 维欧式空间。

1. n 是偶数, 则存在 $2^{n/2}$ 维复 Clifford 模 S , 使得 $Cl(V) \otimes \mathbb{C} \cong End(S)$ 。这个同构与两者在 S 上的作用相容, $\dim S^+ = \dim S^- = 2^{n/2-1}$ 。
2. 若 n 是奇数, 则存在一个 $2^{(n-1)/2}$ 维复 Clifford 模 S , 使得作为普通代数, 有 $Cl(V) \otimes \mathbb{C} \cong End(S) \oplus End(S)$ 。这个同构与两者在 S 上的作用相同。

此时称超空间 S 为旋量空间。



证明. 取 V 的标准正交基. n 是偶数, 令 $P = \text{span}(e_1 - ie_2, \dots, e_{n-1} - ie_n)$, $S = \wedge^* P$. 那么 $V \otimes \mathbb{C} = P \oplus \bar{P}$.

定义 $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ 在 S 上的作用如下: 对于 $v \in V \otimes \mathbb{C}$, $s \in S$, 定义

$$v \cdot s = \begin{cases} \sqrt{2}v \wedge s & v \in P \\ -\sqrt{2}Q(v, -) \lrcorner s & v \in \bar{P} \end{cases}$$

可以验证它是同构。

n 是奇数, 记 $W = \text{span}(e_1, \dots, e_{n-1})$, 那么有非 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次同构:

$$(Cl(W) \oplus Cl(W)) \otimes \mathbb{C} \cong Cl(V) \otimes \mathbb{C}$$

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_k}, 0) \mapsto \frac{1}{2}(e_{i_1} \cdots e_{i_k} + (-1)^{\sigma_i(n+1)/2} e_{j_1, \dots, j_{n-k}})$$

$$(0, e_{i_1} \cdots e_{i_k}) \mapsto \frac{1}{2}(e_{i_1} \cdots e_{i_k} - (-1)^{\sigma_i(n+1)/2} e_{j_1} \cdots e_{j_{n-k}})$$

诸 j 为 i 的补, σ 是 $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}$ 的奇偶性。 □

定义 25.3.9 (Clifford 丛). M 是流形, 其上的 Clifford 丛 $Cl(M) \rightarrow M$ 是点 $x \in M$ 处纤维为 $Cl(T_x^* M)$ 的丛. M 上的 Clifford 模是一个超向量丛 $E \rightarrow M$, 带有 Clifford 丛的作用。

定义 25.3.10 (向量丛的旋量结构). $E \rightarrow M$ 旋量结构实向量丛, E 的旋量结构是指一个 $Spin(n)$ -主丛 $Spin(E) \rightarrow M$, 使得它对应的 $SO(n)$ -主丛和 E 对应的 $SO(n)$ -主丛同构. 流形 M 的旋量结构指余切丛的旋量结构, 此时称它为旋量流形。

特别地, E 上存在旋量结构, 当且仅当第二 Stiefel-Whitney 类消失: 这是因为旋量结构是结构群由 SO 到 $Spin$ 的约化。

证明. 由 Čech 上同调, G -主丛总是被 $H^1(M, G)$ 描述. 因此观察长正合列:

$$0 \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, Spin(n)) \rightarrow H^1(M, SO(n)) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

中间的箭头即为结构群的约化。当然还需要一些工作确认它对应到 $H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上恰好是第二 Stiefel-Whitney 类, 这里就略去证明了。 □

定义 25.3.11 (旋量丛). M 是旋量流形, M 上的旋量丛 $S(M) \rightarrow M$ 是一个复向量丛: 其纤维是 M 的旋量结构给出的旋量空间: 这是因为 $Spin(n)$ -主丛的转移映射是到 $Spin(n)$ 的映射, 而 $Spin(n)$ 可以映到 $End(S)$, 从而就给出了旋量丛的转移映射. 这里的 S 是定理 25.3.8 中出现的。

定理 25.3.12. 对于偶数维旋量流形 M , 其上每个复 Clifford 模都具有形式 $W \otimes S(M)$, 其中 $W = \text{Hom}_{Cl(V)}(S, E)$ 。



25.3.2 Dirac 算子与 Clifford 超联络

定义 25.3.13 (超向量丛的 Dirac 算子). $E \rightarrow M$ 是光滑超向量丛, 其上的 Dirac 算子是向量丛上的 Dirac 算子, 并且交换 E^\pm 的截面。

Dirac 算子和 E 的 Clifford 模结构有着紧密的联系: 这也是 Clifford 模定义的动机:

命题 25.3.14. 在上述条件下, E 具有 Clifford 模结构; 反过来每个 Clifford 模上都可以构造出一个 Dirac 算子。

证明. 对于余切向量 df , 其作用是将之与 ∂_k 配对; 反过来也是如此。 \square

定义 25.3.15 (Clifford 超联络). 流形 M 上 Clifford 模 E 上的 Clifford 超联络是指超联络 ∇^E , 满足对于 $a \in \Gamma(Cl(M)), X \in \Gamma(TM), s \in \Gamma(E)$:

$$\nabla_X^E(a \cdot s) = (\nabla_X a) \cdot s + (-1)^{|a|} a \cdot \nabla_X^E s$$

这里 ∇ 是 Levi-Civita 联络。

命题 25.3.16. M 是偶数维旋量流形, 则 Levi-Civita 联络诱导了旋量丛 $S = S(M)$ 上的 Clifford 超联络 ∇^S 。

事实上, 这是万有的超联络:

定理 25.3.17. M 是偶数维旋量流形, $W \rightarrow M$ 是复超向量丛。那么有双射:

$$\{W \text{ 上超联络} \} \leftrightarrow \{W \otimes S \text{ 上 Clifford 超联络} \}$$

$$\nabla^W \leftrightarrow \nabla^W \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^S$$

下面, 我们构造 Clifford 超联络所对应的 Dirac 算子。

设 M 是偶数维旋量流形, $E \rightarrow M$ 是 Clifford 模, 带有 Clifford 超联络 ∇ 。则在局部坐标下, 这个联络作用在 E 的截面上时具有如下形式:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes \partial_i + \sum_{\alpha} dx^{\alpha} \otimes b_{\alpha},$$

其中 α 是 M 方向的多重指标 (我们不妨只考虑递增排列、无重复的多重指标), b_{α} 是 $End(E)$ 的截面, 其奇偶性与 $|\alpha|$ 相反。这里, 联络的一阶导数项是 $dx^i \otimes \partial_i$, 因为任何联络都满足这一点。

我们对应地定义 Dirac 算子

$$D_{\nabla} = \sum_{i=1}^n (dx^i \cdot) \circ \partial_i + \sum_{\alpha} (dx^{\alpha} \cdot) \circ b_{\alpha},$$

这里 \cdot 表示 Clifford 作用, 例如 dx^i 的作用就是我们之前的记号 a^i 。

这一定义可以写成坐标无关的形式:

定义 25.3.18. 设 M 是偶数维旋量流形, $E \rightarrow M$ 是 Clifford 模, 带有 Clifford 超联络 ∇ 。则 Dirac 算子 D_{∇} 定义为

$$D_{\nabla} : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{\bullet}(M, E) \simeq \Gamma(\wedge^{\bullet} T^*M \otimes E) \xrightarrow[\simeq]{\sigma^{-1}} \Gamma(Cl(M) \otimes E) \xrightarrow{\text{作用}} \Gamma(E),$$

其中 σ 是前文中外代数和 Cl 之间的中符号映射。



定理 25.3.19. 设 M 是偶数维旋量流形, $E \rightarrow M$ 是复 Clifford 模. 则上述对应关系是一一对应:

$$\{E \text{ 上的 Clifford 超联络}\} \leftrightarrow \{E \text{ 上的 Dirac 算子}\},$$

$$\nabla \leftrightarrow D\nabla.$$

这里, 我们当然要求 Dirac 算子是与 E 的 Clifford 模结构相容的.

证明. 我们已经给出了从左边集到右边集的映射. 我们还需要证明这个映射是双射.

我们回忆, 右边的集合是 $\Gamma(\text{End}^-(E))$ -齐性空间. 而 (定理 25.3.12) 说明 E 一定能写成 $E \simeq W \otimes S$ 的形式, 因此, 有超向量丛的同构

$$\text{End}(E) \simeq \text{End}(S) \otimes \text{End}(W) \simeq \text{Cl}(M) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E),$$

其中 $\text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)$ 表示 E 作为 Clifford 模的自同态, 不要求保持 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次. 从而, 我们有同构

$$\Gamma(\text{End}^-(E)) \simeq \Gamma^-(\text{Cl}(M) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)) \xrightarrow{\sigma} \Gamma^-(\wedge^\bullet T^*M \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)) \simeq \Omega^-(M, \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)).$$

如果这个映射将截面 s 映到形式 ω , 那么

$$D\nabla + s = D\nabla + \omega.$$

因此, 我们只需要验证, $\nabla + \omega$ 是 Clifford 超联络当且仅当

$$\omega \in \Omega^-(M, \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)).$$

我们将这一验证留给读者. □

25.4 指标定理

设 M 是紧 Riemann 流形, $E \rightarrow M$ 是带有 Riemann 或 Hermite 度量的超向量丛 (我们要求 $E^+ \perp E^-$), 并考虑 E 上的自伴 Dirac 算子 D . 也就是说

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad D^- = (D^+)^*,$$

其中 $D^\pm E^\pm \rightarrow E^\mp$. 例如 $d + d^*$ 和 $\bar{d} + \bar{d}^*$ 都是自伴随 Dirac 算子。

定义 25.4.1. 自伴随 Dirac 算子 D 的指标定义为

$$\begin{aligned} \text{ind}(D) &= \dim \ker D \\ &= \dim \ker D^+ - \dim \ker D^- \\ &= \dim \ker D^+ - \dim \text{coker } D^+. \end{aligned}$$

D 的指标是有限的, 因为

$$D^2 = D^+ D^- + D^- D^+$$

是广义 Laplace 算子, 它是二阶椭圆算子, 由如下结果:

事实 2. 算子 D^2 定义了 Hilbert 空间 $\Gamma_{L^2}(E)$ 上的一个无界算子。它将整个空间分成无限个特征子空间的 Hilbert 直和, 每个特征子空间都是有限维的, 且由光滑截面构成。

它的核空间是有限维的, 通过特征子空间分解可以定义

$$K_t = e^{-tD^2}.$$

它是一个迹类算子: 即它的迹是有限的。作为推论它是紧算子。

我们取 $\Gamma_{L^2}(E)$ 的标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 使得

$$D^2 e_i = \lambda_i e_i, \quad \text{从而} \quad e^{-tD^2} e_i = e^{-t\lambda_i} e_i.$$

则每个 e_i 都是光滑截面。算子 D^2 的热核是

$$k_t(x, y) = \sum_i e^{-t\lambda_i} e_i(x) \otimes e_i^*(y), \quad (25.4.1)$$

这里 e_i^* 是 E^\vee 的截面, 它等于 e_i 的对偶基乘以 $\text{vol}(M)^{-1}$ 从而它与 e_i 的配对的积分等于 1。

定理 25.4.2 (McKean–Singer). 设 k_t 是算子 D^2 的热核. 则对任意 $t > 0$, 都有

$$\text{ind}(D) = \text{tr} e^{-tD^2} = \int_M \text{tr} k_t(x, x) dx.$$

证明. 注意到 D^2 是偶算子. 记 $V_\lambda^\pm \subset V^\pm$ 是 D^2 的 λ -特征子空间, 则复合映射

$$V_\lambda^+ \xrightarrow{D^+} V_\lambda^- \xrightarrow{D^-} V_\lambda^+$$

是乘以 λ . 因此当 $\lambda \neq 0$ 时 $V_\lambda^+ \simeq V_\lambda^-$, 从而

$$\text{tr}(e^{-tD^2}|_{V_\lambda}) = e^{-t\lambda^2} \dim V_\lambda = 0.$$

这就说明

$$\text{tr} e^{-tD^2} = \text{tr}(e^{-tD^2}|_{\ker D}) = \dim \ker D = \text{ind}(D),$$

这就证明了第一个等号.

第二个等号是因为由热核的表达式:

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{-tD^2} &= \sum_i \pm e^{-t\lambda_i} \\ &= \sum_i \int_M e^{-t\lambda_i} \text{tr}(e_i(x) \otimes e_i^\vee(x)) dx \\ &= \int_M \text{tr} k_t(x, x) dx. \end{aligned}$$

□



也就是说 Dirac 算子的指标等于其热核的迹：我们将在表达式中令 $t \rightarrow 0$, 这样就可以用热核的渐进展开。

现在设 M 是偶数维紧旋量流形, $E \rightarrow M$ 是复 Clifford 模。定义 $W = \text{Hom}_{Cl(M)}(S, E)$, 从而

$$E \simeq S \otimes W.$$

设 D 是 E 上的 Dirac 算子, 它对应的 Clifford 超联络记为 ∇^E 。可以将 ∇^E 写成

$$\nabla^E = \nabla^S + \nabla^W$$

的形式, 其中 ∇^S, ∇^W 分别是 S 和 W 上的联络。则 ∇^E 的曲率是

$$\Omega^E = (\nabla^S + \nabla^W)^2 = \Omega^S + \Omega^W, \quad (25.4.2)$$

这是因为在 $S \otimes W$ 上, $\nabla^S \nabla^W + \nabla^W \nabla^S = [\nabla^S, \nabla^W] = 0$ 。

我们考虑算子 D^2 的热核 k_t 在对角线上的幂级数展开

$$k_t(x, x) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{i=0}^{\infty} t^i k_i(x),$$

其中 $k_i \in \Gamma(\text{End}(E))$ 。我们回忆上一节定义的同构

$$\Gamma(\text{End}(E)) \simeq \Gamma(\text{End}(S) \otimes \text{End}(W)) \simeq \Gamma(Cl(M) \otimes \text{End}_{Cl(M)}(E)) \xrightarrow[\simeq]{\sigma} \Gamma(\wedge^\bullet T^*M \otimes \text{End}_{Cl(M)}(E)) \simeq \Omega^\bullet(M, \text{End}_{Cl(M)}(E))$$

其中 σ 是符号映射。因此, 我们得到相应的微分形式

$$\sigma(k_i) \in \Omega^\bullet(M, \text{End}_{Cl(M)}(E)).$$

定理 25.4.3. 沿用上面的记号, 假设 ∇^W 是普通的联络。则微分形式 $\sigma(k_i)$ 的最高次数是 $2i$, 且其 $2i$ 次的部分与

$$\hat{A}(M) e^{-\Omega^W}$$

的 $2i$ 次部分相同, 其中 $\hat{A}(M)$ 称为 \hat{A} 类 (\hat{A} -genus), 定义为

$$\hat{A}(M) = \det^{1/2} \frac{\Omega/2}{\sinh \Omega/2},$$

这里 $\det^{1/2}(-)$ 的意义是形式幂级数 $\exp \text{tr}(2^{-1} \log(-))$ 。

Todo.

利用这个公式计算 $\text{ind}(D)$ 就能得到指标定理：由 (25.4.2), 我们有

$$\text{ind}(D) = \int_M \text{tr} k_t(x, x) dx \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{i \geq n/2} t^i \int_M \text{tr} k_i(x) dx,$$

注意 $i < n/2$ 时 $k_i(x)$ 不含 n -形式, 故积分为 0。在式中令 $t \rightarrow 0$ 得:

$$\text{ind}(D) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_M \text{tr} k_{n/2}(x) dx. \quad (25.4.3)$$

定理中的 $e^{-\Omega^W}$ 一项, 我们将它的迹定义为 Chern 特征

$$ch(W) = tre^{-\Omega^W}. \quad (25.4.4)$$

这一定义与前文中略有不同, 当时采用的是 $tre^{\Omega^W/2\pi i}$. 从现在开始, 我们采用新的定义. 这一修改不会影响陈特征的加性和乘性

将 (25.4.3) 与 (25.4.3) 结合起来就证明了指标定理.

定理 25.4.4 (Atiyah–Singer 指标定理). 设 M 是偶数维紧旋量流形, $E \simeq S \otimes W$ 是 M 上的复 Clifford 模, D 是 E 上的 Dirac 算子. 则:

$$ind(D) = \frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \int_M \hat{A}(M) ch(W).$$

证明. 只需解释系数的变化. 这是因为 $k_{n/2}$ 的迹是在 E 上取的, 但 $e^{-\Omega^W}$ 的迹, 即陈特征却是在 W 上取的. 这两种迹满足如下关系: 若 V 是偶数维欧氏空间, $a \in Cl(V) \otimes \mathbb{C} \simeq End(S)$, 那么

$$tr^S(a) = (-2i)^{n/2} T(\sigma(a)),$$

这里 T 是 积分, $n = \dim V$.

因此若 E 是 $Cl(V)$ -模, $k \in End(E)$: 那么

$$tr^E(k) = (-2i)^{n/2} tr^W(T\sigma(k)). \quad (25.4.5)$$

□

注记. 定理的条件可以放宽: 事实上 M 不必具有旋量结构, 只需可定向即可. 这是因为 M 局部上总是具有旋量结构, 而热核的迹的积分可以在局部上计算. 此时 W 也只能局部地定义, 但 $ch(W)$ 在局部上定义好之后, 就自动变成了整体的微分形式。

第二十六章 等变上同调与 Atiyah-Bott 局部化

26.1 等变上同调

定义 26.1.1 (等变上同调). 对于作用在 X 上的拓扑群 G , 其同伦余不动点 (同伦轨道) X_{hG} 定义为 $EG \times_G X = (EG \times X)/G$. X 的 (Borel) 等变上同调定义为

$$H_G^*(X) = H^*(X_{hG})$$

我们下面定义紧流形之间等变上同调的推出: 对于一般上同调这是通过 Poincare 对偶、同调推出再取 Poincare 对偶完成的。在等变语境下 Poincare 对偶的实现较为困难。

推出映射的定义有两个路径。一个是通过 G 主丛的余极限实现: 我们有光滑 G -主丛的正向系统 $\{E_\alpha \rightarrow B_\alpha\}$ 使得其余极限是 $EG \rightarrow BG$, 然后利用 $E_\alpha \times_G X$ 的 Poincare 对偶完成构造; 另一个则是通过等变上同调的 de Rham 模型。

de Rham 模型的目标是将等变上同调实现为某个等变 de Rham 链复形的上同调。首先从 Lie 群的 Chern-Weil 理论开始。从现在开始始终假定 G 是紧 Lie 群光滑作用地 X 上。

定义 26.1.2 (基本微分形式). 微分形式 $\alpha \in \Omega^*(P)$ 称为基本的, 如果 $\iota_v \alpha = 0, \forall v \in \mathfrak{g}$, 以及 $\mathcal{L}_v \omega = 0, \forall v \in \mathfrak{g}$, 这里 Lie 导数求导的向量场是 v 生成的水平向量场。因此第一个条件说明水平性, 第二个条件说明 G -等变性。

全体等变微分形式记为 $\Omega^*(P)_{bas}$ 。

定义 26.1.3. Lie 代数 \mathfrak{g} 的 Weyl 代数定义为

$$W^*(\mathfrak{g}) = Sym^* \mathfrak{g}^\vee \otimes \wedge^* \mathfrak{g}^\vee$$

其中第一项里 \mathfrak{g}^\vee 分次为 2, 第二项中分次为 1。

我们指出: $W^*(\mathfrak{g})$ 是 EG 上微分形式 $\Omega^*(EG)$ 的正确模拟。假设 X_1, \dots, X_n 是 \mathfrak{g} 的一组基, 其在 Weyl 代数中的对偶基分别对应为: $\Omega^i \otimes 1$ 和 $1 \otimes \omega^i$ 。

定义 26.1.4 (Weyl 模型). 在 $W^*(\mathfrak{g})$ 上定义外微分和缩并:

$$\iota_j \omega^i = \delta_j^i, d\omega^i = \Omega^i - \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$

$$\iota_j \Omega^i = 0, d\Omega^i = c_{jk}^i \Omega^j \wedge \omega^k$$

其中 c_{jk}^i 是 \mathfrak{g} 的结构常数。这样 $\Omega = d\omega + 1/2[\omega, \omega], d\Omega = [\Omega, \omega]$ 。



固定流形 X 以及光滑作用 $G \curvearrowright X$, X 的等变微分形式是指:

$$\Omega_G^*(X) = (\Omega^*(X) \otimes W^*(\mathfrak{g}))_{bas}$$

(即被 $\iota_i \otimes 1 + 1 \otimes \iota_i$, $\mathcal{L}_i \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{L}_i$ 零化, 其中 $W^*(\mathfrak{g})$ 上的 Lie 导数通过 Cartan 公式 $\mathcal{L}_i = \iota_i \otimes 1 + 1 \otimes \iota_i$ 得到)

链复形 $\Omega_G^*(X)$ 的上同调 $H_G^*(X)$ 称为 X 的等变 de Rham 上同调, 它和前文的等变上同调同构。

定理 26.1.5 (Mathai-Quillen 同构).

$$\Omega_G^*(M) \cong (Sym^* \mathfrak{g}^\vee \otimes \Omega^*(M))^G$$

再一次地, 右侧 \mathfrak{g}^\vee 的分次为 2 。

证明. 由基本微分形式的定义, 只需证明:

$$(\wedge^* \mathfrak{g}^\vee \otimes \Omega^*(M))_{horizontal} \cong \Omega^*(M)$$

定义左侧到右侧的映射 ε 为将所有 $\wedge^* \mathfrak{g}^\vee \ni \omega^i \mapsto 0$ 。

其逆映射恰好是指: 给定 M 上的形式, 通过补齐 $\wedge^{>0} \mathfrak{g}^\vee$ 的元素使之变为水平的。这是通过取 $\prod_i (1 - \omega^i \iota_i)$ 得到的, 因为:

$$\iota_i(1 - \omega^i \iota_i) = \iota_i - \iota_i \omega^i \cdot \iota_i = \iota_i - \iota_i = 0$$

□

注记. 在右侧的模型中: (等变) 外微分变为:

$$\varepsilon d \varepsilon^{-1} \alpha = \varepsilon d(\alpha - \omega^i \iota_i \alpha + \omega^i \iota_i \omega^j \iota_j \alpha - \dots)$$

$$\varepsilon(d\alpha - (d\omega^i) \iota_i \alpha + (\omega^i \dots))$$

$$= d\alpha - \Omega^i \iota_i \alpha$$

总结这一模型:

命题 26.1.6 (Cartan 模型). X 上的 n 次等变微分形式指一个映射: $\alpha: Sym^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{n-2*}(M)$, 使得它在 G 作用下不变: $\alpha(Ad_g X) = g \cdot \alpha(X)$ 。

例子. 如果 $X = \{*\}$, 那么由 Cartan 模型: 等变形式恰好是 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$: 即 G -不变多项式。

如果 $X = (S^1)^n$, 那么 Ad 平凡, 于是一个等变微分形式确实是一族 G -等变微分形式: 由 Cartan 模型

$$(Sym^* \mathfrak{g}^\vee \otimes \Omega^*(X))^G = \Omega^*(X)^G[t_1, \dots, t_m]$$

即 G -等变微分形式上的多项式环。

现在我们可以具体地定义等变上同调的推前:



定义 26.1.7. X, Y 是紧定向流形, 维数分别为 m, n , 给定映射 $f: X \rightarrow Y$, 我们定义 $f_*: H_G^*(X) \rightarrow H_G^{*+n-m}(Y)$ 。

这是通过将 $X \rightarrow Y$ 分解为 $X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ 完成的。

我们先来看第一步: 假定 f 是嵌入, 这是 Thom 同构的等变版本。

定理 26.1.8 (Thom). 存在 G -等变同构: $H_G^*(X) \rightarrow H_G^*(\nu_X)_c$ 。这里 ν_X 是 X 在嵌入流形中的等变管状邻域, 下标 c 指紧支上同调。同构由和 Thom 类 $\Phi \in H_G^{n-m}(\nu_X)_c$ 的乘积给出。

于是这就给出了:

$$H_G^*(X) \cong H_G^{*+n-m}(\nu_X)_c \xrightarrow{\text{inclusion of differential form}} H_G^{*+n-m}(Y)_c = H_G^{*+n-m}(Y)$$

我们再来看第二步, 使用 Cartan 模型: 假定 f 是纤维丛。取 $\alpha = P^i \otimes \alpha_i, P^i \in \text{Sym}^*(\mathfrak{g}^\vee), \alpha_i \in \Omega^*(X)$ 。那么顺着纤维积分给出了 $f_*: \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^{*+d}(Y)$ (事实上这就是普通流形的推前), 定义:

$$f_*\alpha = P^i \otimes f_*\alpha_i$$

这就给出了推前映射的完整结果。

例子. 对于嵌入 $f: X \rightarrow Y$, 我们有

$$f^*f_*1 = e(\nu_{X/Y}) \in H_G^*(X)$$

其中 $e(\nu_{X/Y})$ 是等变法丛的等变 Euler 类。

26.2 Atiyah-Bott 局部化

我们下面来研究等变上同调环。首先 $X \rightarrow *$ 的映射使得 $H_G^*(X)$ 成为 $H_G^* = H_G^*(*)$ 代数。

Slogan: $H_G^*(X)$ 的无挠 (关于 H_G^*) 信息仅被 G 在 X 上作用的不动点决定。

我们先来介绍将问题约化到极大环面的方式。

命题 26.2.1. $T \subseteq G$ 是极大环面, 取 Weyl 群 $W = N(T)/T$ 。那么

$$H_G^*(X) \cong H_T^*(X)^W$$

证明. 我们有 G/T 主丛: $G/T \rightarrow X_{hT} \rightarrow X_{hG}$ 证明通过计算上述纤维丛的 Serre 谱序列完成。□

然后是极大环面的情况:

命题 26.2.2. 对于紧流形 V , 如果存在 T -等变映射 $V \rightarrow T/K$, $K \leq T$ 是闭子群, 那么:

$$\text{Supp}(H_T^*(V)) \subseteq \mathfrak{t}_\mathbb{C}$$

这里 $H_T^* = \mathbb{C}^{\dim T}$ 通过 Cartan 模型等同至环面的 Lie 代数 \mathfrak{t} 。



证明. 考虑 $V \rightarrow T/K \rightarrow *$, 现在 $H_T^*(T/K) = H_K^*$. 因此 $H_T^*(V)$ 上的 H_T^* 模结构穿过 H_K^* , 于是这就说明了结果. \square

定理 26.2.3 (Atiyah-Bott 局部化). $T = (S^1)^m$ 光滑作用在 X 上. $i: F \rightarrow X$ 是 T -作用不动点的嵌入. 那么 i^*, i_* 的核都是 (H_T^*-) 挠模. 特别地, 它们的支撑集都在 $\cup_K \mathfrak{k}_\mathbb{C}$, 其中 K 遍历全体 (T 作用的) 真迷向子群.

证明. 将 X 按照迷向子群分开写成如果 T -轨道的并. T 的紧性保证我们可以取这些轨道的 T -等变管状邻域. 取 U 为 F 的邻域. $X - U$ 被有限个轨道的管状邻域覆盖.

现在由 Mayer-Vietoris 序列以及前一命题: $H_T^*(X - U)$ 的支撑落在 $\cup_K \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ 中. ($0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0 \implies \text{Supp}(M) \subseteq \text{Supp}(L) \cup \text{Supp}(N)$)

但是 U 能够 T -等变地收缩到 F , 于是 $H_T^*(X - F)$ 是挠模. 同样的证明对 $X - F$ 的 T 不变子空间成立, 于是也对这样的子空间的相对上同调成立.

现在 $H_T^*(X, F) \cong H_T^*(X - U, \partial(X - U))$ 也是挠模, 那么 i^* 所在的长正合列就说明了结果.

对于 i_* , 考虑 $H_T^*(F) \cong H_T^{*+d}(\nu_F, \nu_F - F) \cong H_T^{*+d}(X, X - F) \rightarrow H_T^{*+d}(X)$, 那么再一次地长正合列说明了结果. \square

推论 26.2.4 (Atiyah-Bott 积分公式). 在无视挠模的情况下 i^*, i_* 是同构. 现在对于 $\phi \in \text{Frac}(H_T^*(X))$:

$$\int_X \phi = \sum_P \frac{1}{e(\nu_P)} \int_P i_P^* \phi$$

自然地: \int_X 指推前到 $*$, P 是对不动点集 F 的连通分支求和.

证明. 回忆 $i^* i_* 1 = e(\nu_F)$, 于是在商去挠的情况下: $i^*, i_*/e(\nu_F)$ 互逆. 于是推前到点就立刻得到结果. \square

注记. 现在我们过渡到微分形式的情况: 对于 $\alpha \in H^*(X)$, 存在等变提升 $\tilde{\alpha} \in H_T^*(X)$ (如果是 Cartan 链复形, 那么直截了当地射入第二个分量就满足要求), 它使得 α 是 $\tilde{\alpha}$ 沿 $X \rightarrow X_{hT}$ 的拉回.

但是闭性在这里需要额外注意: 这样的等变提升并不总是存在. 可以通过 Cartan 模型直接验证: 上同调仅在偶数维不消失的流形满足等变提升总是存在. 还有一类情况: 如果 T 在底流形上的作用可以提升到向量丛上, 那么该丛的示性类总是有等变提升.

注意到等变提升的构造保证了对等变微分形式的积分和对微分形式的积分相同 (因为他们都是推前到 $*$), 那么我们就有:

$\alpha \in H^*(X)$ 是微分形式, 如果它存在等变提升 $\tilde{\alpha} \in H_T^*(X)$, 那么:

$$\int_X \alpha = \sum_P \frac{1}{e(\nu_P)} \int_P i_P^* \tilde{\alpha}$$

第二部分

稳定同伦论

第二十七章 起源：稳定现象

稳定同伦论起源于代数拓扑学家在对拓扑空间和同伦群的研究中注意到的一些惊异的现象，这些现象被称为稳定现象 (Stable Phenomenon)。其中最先被发掘的是有关同伦群和维悬之间关系的一个重要结论，它由 Freudenthal 于 1937 年给出：

定理 27.0.1 (Freudenthal 维悬定理). 假定 X 是 *nondegenerately based* 且 $(n-1)$ -连通的, $n \geq 1$ 。那么 Σ 在 $q < 2n-1$ 时是双射, $q = 2n-1$ 时是满射。

这里维悬同态 Σ 的定义为：

定义 27.0.2 (维悬同态). 对于基点空间 X , 定义 $\Sigma : \pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$ 为：

$$\Sigma f = f \wedge \text{id} : S^{q+1} \cong S^q \wedge S^1 \rightarrow X \wedge S^1 = \Sigma X$$

作为维悬定理的推论，可以观察到球面同伦群具有如下性质。

定理 27.0.3. $\forall n \geq 1, \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \Sigma : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$ 是同构。

对于性质相对良好的拓扑空间 X , 类似球面的情况可以看出 $\pi_{q+n}(\Sigma^n X)$ 随着 n 的增长最终会稳定：因为 $\Sigma^n X$ 的连通度在不断提升，这启发了如下定义：

定义 27.0.4 (稳定同伦群). 拓扑空间 X 的第 q 个稳定同伦群定义为 $\pi_q^s(X) = \varinjlim_n \pi_{q+n}(\Sigma^n X)$ 。

另一个值得注意的稳定现象是同调和上同调理论与维悬之间的关系。首先我们有普通的 Eilenberg-Steenrod 同调公理的约化同调版本：

定义 27.0.5 (广义约化同调理论公理：单空间-nondegenerately based). 一个约化同调理论是一组 nondegenerately based 空间的同伦范畴到 Abel 群的函子 $\tilde{E}_q, q \in \mathbb{N}$, 满足以下公理。

正合公理 对于余纤维化 $i : A \rightarrow X$, 序列

$$\tilde{E}_q(A) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow \tilde{E}_q(X/A)$$

是正合的。

维悬公理 对于每个 q , 存在自然同构

$$\Sigma : \tilde{E}_q(X) \cong \tilde{E}_{q+1}(\Sigma X)$$

(维悬是约化维悬)

加性公理 如果 X 是若干 nondegenerately based 空间 X_i 的一点并, 那么 $X_i \rightarrow X$ 诱导出了同构:

$$\bigoplus_i \tilde{E}_*(X_i) \rightarrow \tilde{E}_*(X)$$

弱等价公理 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是弱等价, 那么它诱导了同构

$$f_*: \tilde{E}_*(X) \rightarrow \tilde{E}_*(Y)$$

当然类似地有上同调版本。

真正引领人们进入稳定同伦论世界的是如下有关 Eilenberg-MacLane 空间的讨论。回忆 $K(\pi, n)$ 是满足只有 n 阶同伦群非平凡为 π 的 CW 复形 (或者 of CW Complex Homotopy Type) 它在同伦等价意义下唯一。由于存在同伦等价: $\tilde{\sigma}: K(\pi, n) \rightarrow \Omega K(\pi, n+1)$ (回忆 $[S^n, \Omega Y] \cong [S^{n+1}, Y]$, 以及 Milnor 的结果: CW 复形的环路空间也同伦于 CW 复形)。

自然它对应着一个伴随映射 $\sigma: \Sigma K(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n+1)$ 。

对于基点空间 X , 现在就有了:

$$\begin{aligned} \pi_{q+n}(X \wedge K(\pi, n)) &\xrightarrow{\Sigma} \pi_{q+n+1}(\Sigma(X \wedge K(\pi, n))) \\ &= \pi_{q+n+1}(X \wedge S^1 \wedge K(\pi, n)) = \pi_{q+n+1}(X \wedge \Sigma K(\pi, n)) \\ &\xrightarrow{(\text{id} \wedge \sigma)_*} \pi_{q+n+1}(X \wedge K(\pi, n+1)) \end{aligned}$$

通过验证 Eilenberg-Steenrod 公理, 并应用广义 (上) 同调理论的唯一性, 我们得到了:

命题 27.0.6.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X; \pi) &\cong \varinjlim_n \pi_{q+n}(X \wedge K(\pi, n)) \\ \tilde{H}^n(X; \pi) &\cong [X, K(\pi, n)] \end{aligned}$$

这些观察指出研究代数拓扑时也许考虑一系列拓扑空间 (并且这一列拓扑空间之间有着某种和维数相关的联系) 能够给出一些更深层的结果。事实上的确如此, 这些观察催生了序列谱 (Sequential Spectra) 的出现。

第二十八章 古典构造：序列谱

28.1 序列谱与广义（上）同调

定义 28.1.1 (Sequential Prespectrum). Sequential Prespectrum E 是一列基点空间 E_n , 和一系列结构映射:

$$\varepsilon_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$$

或

$$\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$$

(当然由纬悬环路伴随二者是等价的)

前文指出普通的上同调事实上是一个可表函子, 如下重要的结果和下文对 Spectrum 的讨论指出了 (在一些技术性条件下) 广义 (上) 同调理论事实上等同于 Spectrum 诱导的稳定同伦群/可表函子。

首先是如下关于可表函子的重要结果:

定理 28.1.2 (Brown 可表定理). $\mathbf{hTop}_{*, \text{con}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}_*$ 的函子 F 是可表的当且仅当: 它将余积映为积, 并且它将弱推出 (同伦推出) 映为弱拉回。

注记. 在考虑 CW 复形的时候, 上述第二条性质等价地变为:

(M-V) 对于任何 CW 三元组 $(X; A_1, A_2)$, $A_1 \cup A_2 = X$, 和任意元素 $x_1 \in F(A_1), x_2 \in F(A_2)$ 使得 $x_1|_{A_1 \cap A_2} = x_2|_{A_1 \cap A_2}$, 存在 $y \in F(X)$, $y|_{A_1} = x_1, y|_{A_2} = x_2$ 。

回忆 $\tilde{H}^n(X; \pi) \cong [X, K(\pi, n)]$ 。并且更一般地 Brown 可表定理指出对于任何广义上同调理论 K , 存在一组 CW 复形 E_n 和自然同构:

$$\tilde{K}^n(X) \cong [X, E_n]$$

现在考虑 (约化) 广义上同调理论 \tilde{K} 的纬悬同构:

$$\Sigma : \tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X)$$

回忆纬悬同构由如下给出:

$$\tilde{K}^{q+1}(\Sigma X) \cong \tilde{K}^{q+1}(CX/X) \xleftarrow{\partial} \tilde{K}^q(X)$$

那么如果 X 是连通的:

$$[X, E_n] \cong \tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, E_{n+1}] \cong [X, \Omega_0 E_{n+1}]$$

因此 $E_n, \Omega_0 E_{n+1}$ 之间必定存在弱同伦等价诱导出上述自然同构, 从而 $\{E_n\}$ 自然成为了 prespectrum。进一步如果不要求 X 的连通性, 可以将上述论证中的 Ω_0 换为 Ω , 因此 (观察如下定义) 对任何广义上同调理论, 我们都找到了一个与之关联的 Ω -prespectrum。

定义 28.1.3 (Ω -spectra). 称 prespectrum E 是 Ω -spectrum, 如果结构映射 $\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega E'_{n+1}$ 是弱同伦等价。

称 prespectrum E 是 Ω_0 -spectrum, 如果结构映射 $\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega_0 E'_{n+1}$ 是弱同伦等价。

注记. 任给一个 Prespectrum E , 它有谱化

$$(LE)_n = \varinjlim_k \Omega^k E_{n+k}$$

Ω -Spectrum 是极其重要的: 我们可以看到它比一般 Prespectrum 性质要更好一些, 但是全体 Ω -Spectrum 构成的范畴性质并不是很好: 因此引入 Prespectrum 可以看做一种妥协。尽管如此, 这个问题在以后会有更好的解决方案。

处理完广义上同调后再来考虑同调: 对于一个 prespectrum 可以定义同伦群:

定义 28.1.4 (稳定同伦群). $\pi_r(E) = \varinjlim \pi_{n+r}(E_n)$, 这里映射由 $\pi_{n+r}(E_n) \rightarrow \pi_{n+r+1}(\Sigma E_{n+1}) \xrightarrow{\varepsilon_n} \pi_{n+r+1}(E_{n+1})$ 诱导。

如果 E 是 Ω -spectrum (或 Ω_0 -), 那么

$$\pi_{n+r}(E_n) \rightarrow \pi_{n+r+1}(E_{n+1})$$

在 $n+r \geq 1$ 时是同构, 从而 $\pi_r(E) = \pi_{n+r}(E_n)$ 。这个定义的一个极其重要的动机是稳定同伦群事实上是一个广义同调理论, 利用后文的 Spanier-Whitehead 对偶可以得到: 在一定条件下反过来这也是正确的。实际上任何 Ω -prespectrum 也反过来诱导了一个广义同调和上同调理论。

现在对于 Ω -prespectrum E , 我们记对应的同调和上同调理论为 E_*, E^* 。由于常规同调理论和上同调理论通常用 H_*, H^* 表示, 那么遵循上文的约定将 Eilenberg-MacLane 谱 (系数为 \mathbb{Z}) 为 H , 对于一般的系数 G 则记为 HG 。

同样可以定义 prespectrum 的相对同伦群为正常空间的相对同伦的余极限, 首先考虑一些子对象:

定义 28.1.5 (subprespectrum). 称 A 是 prespectrum X 的 subprespectrum, 如果 $A_n \subseteq X_n$, 结构映射 $\xi_n : \Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$ 将 ΣA_n 映入 A_{n+1} , 那么 $\{A_n\}$ 也成为了 prespectrum。(这一事实当然也可以转化到伴随的 $\xi'_n : X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$ 上)

现在正常空间的同伦群长正合列作为 direct system 之间的长正合列 (注意交换性!) 诱导了 prespectrum 的稳定同伦群之间的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

28.2 Adams 的稳定同伦范畴

28.2.1 Adams 的构造

我们现在研究 Prespectrum 构成的范畴, Adams 的最为古典的构造仍然是简单易懂的, 因此在接下来的很长一段内容中都默认我们在 Adams 构造的稳定同伦范畴内讨论。

我们构造的这个范畴由 CW-Prespectrum 构成, 并且带有分次结构。这样对于一个 CW-Prespectrum X , 可以定义 E -上同调为:

$$E^0(X) = [X, E]_0$$

即全体态射。进一步:

$$E^r(X) = [X, E]_{-r}$$

即全体使得维数降低 r 的态射: 具体见后文 CW-prespectrum 范畴的构造。

同样同调将被定义为 $E_r(X) = \pi_r(E \wedge X) = [S, E \wedge X]_r$, 这里 S 是球谱。

一旦引入了这样的记号, prespectrum 的 smash product 变得必要起来了。因为我们依然希望上同调上存在某种乘积结构。这可以通过 $\mu: E \wedge F \rightarrow G$ 诱导出 $E^n(X) \otimes F^m(X) \rightarrow G^{n+m}(X)$ 实现。

上述现象都促使我们定义一个结构相当丰富的范畴, 这里我们仍然选择 CW 复形 (从模型范畴观点来看 “导出” 在这一步就已经体现出来了: 因为 CW 复形的弱等价就是同伦等价)

定义 28.2.1 (CW-prespectrum). 称 E 是 CW-prespectrum, 如果 E_n 都是带基点的 CW 复形并且 $\varepsilon_n: \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ 是 ΣE_n 到 E_{n+1} 某个子复形的同构。

定义 28.2.2 (CW-subprespectrum). 称 CW-prespectrum E 的 subprespectrum A 为 CW-subprespectrum, 如果 $A_n \subseteq E_n$ 是子复形。

定义 28.2.3 (cofinal subprespectrum). 称 $E' \subseteq E$ 是 cofinal, 如果对于任何 n 和有限子复形 $K \subseteq E_n$, 存在 m (可以和 n, K 有关) 使得 $\Sigma^m K$ 在如下映射下射入 E'_{m+n} 中。

$$\Sigma^m E_n \rightarrow \Sigma^{m-1} E_{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{m+n}$$

接下来将要定义 function, map 和 morphism, 简而言之 function 是和结构映射交换的映射族; map 是稳定的 function; morphism 则是 map 商掉同伦。

两个 CW-prespectrum 之间的 r 次 function f 定义为一族映射: $f_n: E_n \rightarrow F_{n-r}$ 使得以下图表严格交换 (这里严格一词是为了区分在同伦等价意义下交换)

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & E_{n+1} \\ \Sigma F_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_{n-r} & \xrightarrow{\varphi_{n-r}} & F_{n-r+1} \end{array}$$

当然取伴随后的形式是等价的。

注记. 对于 subprespectrum $E' \subseteq E$, 单射 $i: E' \rightarrow E$ 是良定义的, 并且限制映射相当于复合上 i 。

现在我们需要商去一些等价的 function:

定义 28.2.4 (map). 给定 CW-prespectrum E , prespectrum F , 现在考虑所有 cofinal subprespectrum $E' \subseteq E$, 以及 function $f' : E' \rightarrow F$.

称两个这样的 function: $f' : E' \rightarrow F, f'' : E'' \rightarrow F$ 是等价的, 如果存在一个 cofinal subprespectrum E''' 同时被 E', E'' 包含, 并且 f', f'' 到 E''' 的限制相同。可以验证这确实是等价关系。

现在称 $E \rightarrow F$ 的 map 为 function 的一个等价类。

注记. 这个定义的直觉是: 如果你有 E_n 的一个胞腔 c , 并不需要立刻定义出 c 上的 map, 而是可以等到 E_{m+n} 上定义 $\Sigma^m c$ 的 map, 即关心的是在纬悬下稳定的部分。

现在我们关心 map 的复合: 定义方式是在 map 中选出代表 function, 然后考虑 function 的复合即可。简单验证知这是良定义的。同样 map 的限制可以理解为和 inclusion map 的复合。Map 也具有粘结性质: U, V 上的 map 如果在 $U \cap V$ 上相同就可以粘结成为 $U \cup V$ 上的 map。

定义 28.2.5 (morphism). CW-prespectrum 范畴中的 morphism 定义为 map 的同伦类。这里同伦的定义是一个柱出发的映射 (如同普通的同伦一样)。我们来详细叙述它:

考虑 I^+ , 给定一个 prespectrum E , 定义柱谱 (Cylinder prespectrum) $Cyl(E)$ 为:

$$(Cyl(E))_n = I^+ \wedge E_n$$

结构映射为:

$$(I^+ \wedge E_n) \wedge S^1 \xrightarrow{1 \wedge \varepsilon_n} I^+ \wedge E_{n+1}$$

容易验证 $Cyl(-)$ 具有函子性: $\text{map } f : E \rightarrow F$ 诱导了 $Cyl(f) : Cyl(E) \rightarrow Cyl(F)$ 。同时存在显然的到柱谱两端的自然嵌入: $i_0, i_1 : E \rightarrow Cyl(E)$ 。

定义 28.2.6 (homotopy). 称两个 map $f_0, f_1 : E \rightarrow F$ 是同伦的, 如果存在 map $h : Cyl(E) \rightarrow F$ 使得: $f_0 = hi_0, f_1 = hi_1$ 。

定义 28.2.7. 给定 E 为 CW-prespectrum, F 为 prespectrum, 记 $[E, F]_r$ 为次数 r 的 map 的同伦类。

这样我们就定义出来 CW-prespectrum 构成的范畴, 其中态射集具有分次结构。

类似于普通同伦, 我们也可以同样地定义出相对同伦类 $[X, A; Y, B]$ 。

注记. 如同 **CGWH** 那样, 谱之间的态射 (morphism) 再一次可以通过赋予某种“紧开拓扑”完成 **Top-enriched**。具体来说:

赋予 $[X, Y]$ 的拓扑是使得任意 $\phi : K \rightarrow [X, Y]$ 保持连续的最细拓扑: 这里 $\phi(y) : X \rightarrow Y$ 是由 $\tilde{\phi} : X \wedge K \rightarrow Y$ (这里的 \wedge 是如同柱谱的定义一样的) 诱导的。

如此定义下乘积-指数伴随依然成立。

命题 28.2.8. 如果 K 是有限 CW 复形, E 是它的纬悬谱 ($E_n = \Sigma^n K$), 任给一个 prespectrum F , 有:

$$[E, F]_r = \varinjlim [\Sigma^{n+r} K, F_n]$$

特别地: $\pi_r(F) = [S, F]_r$ (S 是球谱)

证明. 这是容易直接验证的, 因为正向极限中的等价能够对应着 function 的等价关系, 具体验证见 [Ada95, Chapter 3, Proposition 2.8]。□

28.2.2 稳定胞腔, Whitehead 和 HEP 定理

本节的内容简而言之: CW-prespectrum 也能如同 CW 复形那样易于操作。这里我们操作的不再是胞腔, 而是某种稳定胞腔:

定义 28.2.9. 称两个胞腔 $c_\alpha \in E_n, c_\beta \in E_m$ 是等价的, $n \leq m$, 如果 c_α 能映入 c_β 。将这样的等价类称为稳定胞腔。

命题 28.2.10. $E' \subseteq E$ 是 cofinal CW-subprespectrum 当且仅当诱导的稳定胞腔之间的映射是双射。

CW 复形的有限性反映到 CW-prespectrum 上变为:

引理 28.2.11. E 是 CW-prespectrum, G 是一个非 cofinal 的 CW-subprespectrum, 那么存在一个 subprespectrum F 使得 $E \supseteq F \supseteq G$, 并且 F 和 G 只相差一个稳定胞腔。

如同 CW 复形一样, 再一次有 HEP 和 Whitehead 定理:

引理 28.2.12. 给定 CW-prespectrum pair (X, A) , 以及 prespectrum pair (Y, B) 使得 $\pi_*(Y, B) = 0$ 。假定有 $map f: X \rightarrow Y$ 和 $f|_A$ 到 $g: A \rightarrow B$ 的同伦 $h: Cyl(A) \rightarrow Y$, 那么这个同伦可以延拓到 $Cyl(X)$ 上称为 f 和 $\tilde{g}: X \rightarrow B$ 的同伦。

注记. 进一步, 嵌入 $B \rightarrow Y$ 可以换为更一般的映射, 只要它诱导了稳定同伦群的同构。

引理 28.2.13. 如果 prespectrum Y 满足 $\pi_*(Y) = 0$, (X, A) 是 CW-prespectrum pair, 那么 $map f: A \rightarrow Y$ 可以延拓到 X 上。

定理 28.2.14 (Whitehead Theorem For CW-prespectrum). $f: E \rightarrow F$ 是 prespectra 之间的 function, 并且 $f_*: \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$ 是同构, 那么对于任何 CW-prespectrum X :

$$f_*: [X, E]_* \rightarrow [X, F]_*$$

是双射。

推论 28.2.15 (Whitehead Theorem For CW-prespectrum). $f: E \rightarrow F$ 是 CW-prespectra 之间的 motphism, $f_*: \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$ 是同构, 那么 f 是同构态射。

例子. 对于 CW-prespectrum E, F : 如果 function $f: E \rightarrow F$ 是 degree 0 的, 并且 $f_n: E_n \rightarrow F_n$ 是同伦等价, 那么 f 在 CW-prespectrum 范畴中是同构。

同样我们还有相对版本的 Whitehead 定理。

定义 28.2.16 (Cone, Suspension). 对于 prespectrum X , $Cone(X)$ 满足每一个分量是 $I \wedge X_n$, 结构映射是显然的, 并且有显然的嵌入 function $i: X \rightarrow Cone(X)$ 。

同样也可以定义 prespectrum 的 Suspension, 记为 $Susp(X)$ 。



定理 28.2.17 (Relative Whitehead Theorem). $f : (E, A) \rightarrow (F, B)$ 是两个 *prespectra* 之间的 *function*, 诱导了相对稳定同伦群之间的同构, 那么对于任何 *CW-prespectrum* X

$$f_* : [Cone(X), X; E, A]_* \rightarrow [Cone(X), X; F, B]_*$$

是双射。

推论 28.2.18. 对于任何 *prespectrum* X, Y : $Susp : [X, Y]_* \rightarrow [Susp(X), Susp(Y)]_*$ 是双射。

证明. 只需要证明: $\pi_*(Cone(Y), Y) \rightarrow \pi_*(Susp(Y), *)$ 是同构 (这是很容易验证的, 参见 [Ada95, Chapter 3, Lemma 3.8])。

一旦如此, 那么

$$[X, Y]_* \simeq [Cone(X), X; Cone(Y), Y] \simeq [Cone(X), X; Susp(Y), *] \simeq [Susp(X), Susp(Y)]_*$$

其中第二个双射就是由 Whitehead 定理得到的。□

如同同伦群的群结构那样, 当 Hom-Set 的两个变量中出现了纬悬, 这个 Hom-Set 自然的就拥有了群结构; 同样如果出现了两次纬悬就拥有了 Abel 群结构。这一个推论的重要意义就是指出了稳定同伦范畴具有加性结构。

28.2.3 稳定同伦范畴的加性范畴结构

在 Adams 的语境下 *CW-prespectrum* 范畴和 Adams 稳定同伦范畴指代同一范畴。

命题 28.2.19. 如同 π_1 那样, $[Susp(X), Z]$ 自动成为了群。同样地还有 $[Susp^2(X), Z]$ 成为了 Abel 群。由于 $[X, Y] \simeq [Susp^2(X), Susp^2(Y)]$, 那么 $[X, Y]$ 可以将 $[Susp^2(X), Susp^2(Y)]$ 上的 Abel 群结构拉回, 从而 $[X, Y]$ 成为了 Abel 群, 并且态射的复合是双线性的。

命题 28.2.20. *CW-prespectrum* 范畴成为了加性范畴。

证明. 零对象为 $E_n = *, \forall n$ 。诸 *prespectra* X_α 的余积为 $X_n = \vee_\alpha (X_\alpha)_n$ 给出的, 结构态射显然。并且满足泛性质:

$$[\bigvee_\alpha X_\alpha, Y] \cong \prod_\alpha [X_\alpha, Y]$$

有限双积的存在性见下述讨论: □

如同 CW 复形中那样给定 *CW-spectra* 之间的 $\text{map } f : X \rightarrow Y$, 这里依然有 $\text{cofiber } Y \cup_f CX$ 。(注意需要拉回到 function 层面进行考虑), 再一次地有:

命题 28.2.21 (Cofiber Sequence).

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{i^*} [Y \cup_f CX, Z] \xleftarrow{j^*} [Susp(X), Z] \leftarrow \dots$$

是正合列。

命题 28.2.22 (Fiber-Cofiber Sequence).

$$[W, X] \xrightarrow{f_*} [W, Y] \xrightarrow{i_*} [W, Y \cup_f CX]$$

是正合列。



证明. 由于 $if \simeq 0$, 那么 $i_*f_* = 0$. 现在如果 $g : W \rightarrow Y$ 满足 $ig \simeq 0$, 那么构造图表

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Y \cup_f CX & \xrightarrow{j} & \text{Susp}(X) \xrightarrow{-\text{Susp}(f)} \text{Susp}(Y) \\ & & \uparrow g & & \uparrow h & & \uparrow k \\ W & \xrightarrow{\text{id}} & W & \xrightarrow{i} & CW & \xrightarrow{j} & \text{Susp}(W) \xrightarrow{-1} \text{Susp}(W) \end{array}$$

这里 $ig \simeq 0$ 诱导了 h . 那么由 $[X, Y]_* \cong [\text{Susp}(X), \text{Susp}(Y)]$, $k = \text{Susp}(l)$, $\exists l \in [W, X]$. 于是在图表中即有 $\text{Susp}(fl) \simeq \text{Susp}(g)$. 再一次利用同构就得到了 $fl \simeq g$. \square

更进一步地通过对上一结果应用 Yoneda 引理还有:

推论 28.2.23. 对于 $f : X \rightarrow Y$ 是 *Spectra* 之间的态射, 那么存在同构 $\phi : \text{hofib}(f) \cong \Omega \text{hocol}(f)$, 使得交换图

$$\begin{array}{ccccc} \Omega Y & \longrightarrow & \text{hofib}(f) & \longrightarrow & X \\ = \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \simeq \\ \Omega Y & \longrightarrow & \Omega \text{hocol}(f) & \longrightarrow & \Omega \Sigma X \end{array}$$

成立。

注意这和拓扑空间不一样了, 它说明 Cofiber 在这里实际上展现了 Fiber 的性质, 这个结果直接导致了双积的存在。我们将会看到从某种程度上来说这才是稳定现象的本质。

命题 28.2.24. *CW-prespectrum* 范畴中有限余积是积。

证明. 由于 $X \rightarrow X \vee Y \rightarrow Y$ 是 cofiber: $(X \vee Y) \cup CX \simeq Y$. 那么 $[W, X] \rightarrow [W, X \vee Y] \rightarrow [W, Y]$ 是正合的: 但是它显然还是分裂的 (Y 当然可以提升进 $X \vee Y$), 于是:

$$[W, X \vee Y] \cong [W, X] \oplus [W, Y]$$

这是积的泛性质, 从而 $X \vee Y$ 是 X, Y 的范畴积. \square

综上: *CW-prespectrum* 范畴确实是加性范畴。

28.2.4 稳定同伦范畴的三角范畴结构

定义 28.2.25 (三角范畴). 一个三角范畴是指一个加性范畴 D , 配备了一个加性自同构函子 $\Sigma : D \rightarrow D$ (记 $X[n] = \Sigma^n X$), 且配备了一些好三角 (distinguished triangle), 满足如下条件。

这里一个三角 (X, Y, Z, u, v, w) 形如 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

我们要求好三角满足:

TR1.1 对每个对象 X , $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ 是好三角。

TR1.2 对每个态射 $u : X \rightarrow Y$, 存在一个好三角 $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ (Z 称为 cone 或 cofiber)

TR1.3 每个同构于好三角的三角仍然是好三角

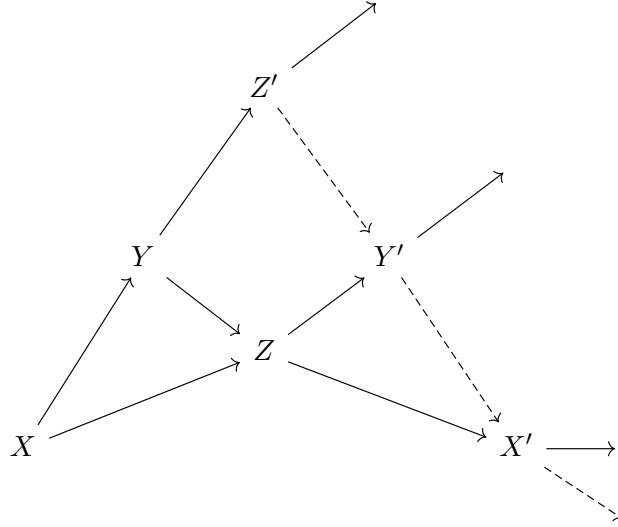
TR2. 好三角的旋转仍然是好三角: $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是好三角, 那么 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$, $Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$. 也是好三角。



TR3. 给定两个好三角的前两项之间（使得态射交换）的态射，那么可以将第三项处补全使得两个好三角交换：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \exists h & & \downarrow f[1] \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

TR4. 给定如下三个好三角，那么存在使得全图交换的态射，使得虚线部分也成为好三角。



(**TR4.** 的含义事实上是 $(Z/X)/(Y/X) \cong Z/Y$)

命题 28.2.26. 对于 $CW\text{-prespectrum}$ 构成的范畴：纬悬 Σ 函子作为 *shift functor*，以及形如

$$A \xrightarrow{f} B \rightarrow B \cup_f CA \rightarrow \text{Susp}(A)$$

取为好三角使得 $CW\text{-prespectrum}$ 范畴成为了三角范畴。

28.2.5 稳定同伦范畴的幺半范畴结构

可以构造如下 smash product 在 $CW\text{-prespectrum}$ 中的推广：

定理 28.2.27. $-\wedge-$ 是一个 $CW\text{-prespectrum}$ 到 $CW\text{-prespectrum}$ 的分次双函子，并且使得稳定同伦范畴成为 *symmetric monoidal* 范畴（交换子，结合子，左单位子，右单位子都是自然同构，并且两次 *Braiding* 是恒等），其中单位是球谱 S 。

分次双函子的意义是： $f \in [X, X']_r, g \in [Y, Y']_s \implies f \wedge g \in [X \wedge Y, X' \wedge Y']_{r+s}$ ，以及：

$$(f \wedge g)(h \wedge k) = (-1)^{bc}(fh) \wedge (gk)$$

这里 f, h, g, k 的次分别为 a, b, c, d 。

详细构造见 [Ada95, Chapter 3, Section 4]。

进一步，我们构造的 smash product 和三角结构相容很好：

命题 28.2.28. 在自然同构意义下，*smash product* 对 *wedge sum* 是分配的。*Smash product* 还保持 *cofibering*，更进一步它保持所有余极限。



推论 28.2.29. 稳定同伦范畴具有 *tensor-triangulated Category* 结构。

在构造稳定同伦范畴时, smash product 的选择总是一个支离破碎的话题: 不同模型的选择都不尽相同, 这个问题直到 90 年代才有了初步的解决方案。

28.2.6 Spanier-Whitehead 对偶

首先回忆广义版本的 Alexander 对偶: $\widetilde{H}^r(X) \cong \check{H}_{n-r-1}(S^n - X)$, 其中 $X \subseteq S^n$ 是非空真紧子集, 记 $CX = S^n - X$ 。

接下来我们将要指出尽管 CX 的同伦型可能和嵌入有关, X 的稳定同伦型却直接决定了 CX 的稳定同伦型。这事实上和 Braided Monoidal 范畴中的 dual object 有关。

定义 28.2.30. Monoidal 范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ 中对象 A 有右对偶 A^\vee , 如果有:

$$\text{ev}_A : A^\vee \otimes A \rightarrow 1$$

$$\text{coev}_A : 1 \rightarrow A \otimes A^\vee$$

, 使得:

$$\begin{array}{ccc} A^\vee \otimes (A \otimes A^\vee) & \xleftarrow{\text{id}_{A^\vee} \otimes \text{coev}_A} & A^\vee \otimes 1 \\ \cong \downarrow \alpha_{A^\vee, A, A^\vee}^{-1} & & \cong \downarrow l_{A^\vee}^{-1} \circ r_{A^\vee} \\ (A^\vee \otimes A) \otimes A^\vee & \xrightarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{A^\vee}} & 1 \otimes A^\vee \\ & & \\ (A \otimes A^\vee) \otimes A & \xleftarrow{\text{coev}_A \otimes \text{id}_A} & 1 \otimes A \\ \cong \downarrow \alpha_{A, A^\vee, A} & & \cong \downarrow r_A^{-1} \circ l_A \\ A \otimes (A^\vee \otimes A) & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}_A} & A \otimes 1 \end{array}$$

同样地我们可以定义左对偶, 特别地在 Symmetric Monoidal 范畴中两者等价。

命题 28.2.31. 在 Symmetric Monoidal 范畴中, 以下等价:

1. A^\vee 是 A 的对偶 (这里左右对偶是等价的)
2. 以下映射是同构:

$$\text{Hom}(X, Y \otimes A^\vee) \rightarrow \text{Hom}(X \otimes A, Y \otimes A^\vee \otimes A) \rightarrow \text{Hom}(X \otimes A, Y)$$

定义 28.2.32 (有限谱). 有限谱是指有限 CW 复形的纬悬谱。

我们现在考虑稳定同伦范畴中的 dualizable 对象 A , 那么:

$$[A, -] \cong [S, - \wedge A^\vee]$$

, 后者是 A^\vee 诱导的同调理论, 从而保持滤余极限。因此 $[A, -]$ 也保持滤余极限。现在由 Adams 的稳定同伦范畴中的谱 (这里只考虑谱而非 Prespectrum) 对象的构造, 所有的谱都是若干有

限谱的滤余极限 (设 $A = \varinjlim A_\alpha$), 那么 $[A, A] = \varinjlim [A, A_\alpha]$, 因此 $\text{id}_A \in [A, A]$ 一定可以分解为:

$$A \xrightarrow{\exists} A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A$$

从而 A 一定是一个有限谱的 retract。

然而我们进一步还有 $H_*(-, \mathbb{Z})$ 保持 Monoidal 结构, 因此对于 dualizable 对象 X , $H_*(X, \mathbb{Z})$ 也是 \mathbf{Ab} 中的 dualizable object。熟知 \mathbf{RMod} 的 dualizable 对象是有限生成投射模, $\mathbf{Ch}(\mathbf{RMod})$ 的 dualizable 对象是有限生成投射模构成的有界链复形, 这就说明对于 dualizable 谱 A , $H_*(A, \mathbb{Z})$ 只有有限项非平凡, 并且都是有限生成 \mathbb{Z} 模。

现在归纳地构造 Y_j , 使得 $Y_j \rightarrow X$ 诱导了 $H_m(-, \mathbb{Z})$ 的同构 ($\forall m \leq j$), 在有限步后就得到了一个 $Y \rightarrow X$ 使得其在 $H_*(-, \mathbb{Z})$ 是同构, 并且 Y 是有限谱。然而 X 是连合的, 因此 Hurewicz 保证这是一个等价, 从而这就说明了可对偶的谱恰好是有限谱。

现在我们记谱 X 的对偶为 X^* 。

引理 28.2.33. 如果 X 是有限谱, 那么 X^* 同构于某个有限谱。

证明. 第 28.3 节 □

定理 28.2.34 (Spanier-Whitehead 对偶). 对于紧空间 X , X 唯一决定了 CX 的稳定同伦型。(并且也具有和 Alexander 对偶一样的形式: 事实上如果 $X, S^n - X$ 都同伦于某些有限 CW 复形, 那么 $X^* \cong \Sigma^{-(n-1)}(S^n - X)$: 这直接导出了 Alexander 对偶)

证明. 对于 $X \subseteq S^n$, 后者嵌入成为 S^{n+1} 的赤道, 并将 ΣX 按照两端为极点的方式嵌入。(这里 Σ 是非约化纬悬)

那么 $S^{n+1} - \Sigma X$ 和 $S^n - X$ 是同伦等价的。因此如果 $X \subseteq S^n, Y \subseteq S^m$ 以及同伦等价 $\Sigma^p X \rightarrow \Sigma^q Y$, 可以将它们嵌入到 S^{n+p}, S^{m+q} 当中并不改变一切问题。

因此假定 $X' \subseteq S^{n'}, Y' \subseteq S^{m'}$ 以及同伦等价 $f: X' \rightarrow Y'$ 。

现在注意

$$S^{m'+n'+1} - X = \Sigma^{m'+1}(S^{n'} - X)$$

$$S^{m'+n'+1} - Y = \Sigma^{n'+1}(S^{m'} - Y)$$

取 M 是 f' 的映射柱, 就有:

$$S^{m'+n'+1} - X \xleftarrow{f} S^{m'+n'+1} - M \xrightarrow{g} S^{m'+n'+1} - Y$$

同时:

$$X \longrightarrow M \longleftarrow Y$$

诱导了上同调群的同构, 再由 Alexander 对偶的自然性, f, g 诱导了同调群的同构。现在不断取纬悬使得所有空间都是单连通的, 那么 f, g 是稳定同伦等价。 □

更一般地, 我们还有如下性质:

定理 28.2.35 (Atiyah 对偶). 给定有限维光滑流形 M 以及一个嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $Th(NX)$ 是这个嵌入的法丛的 Thom 谱, 那么 $Th(NX)$ 是 M_+ (无交并上一基点) 的纬悬谱的对偶。

28.3 同调和上同调

定义 28.3.1. 给定 prespectrum E , 定义 prespectrum X 的 E -同调/上同调如下:

$$E_n(X) = [S, E \wedge X]_n; E^n(X) = [X, E]_{-n}$$

命题 28.3.2. E_*, E^* 满足正合公理, 余纤维正合公理 (余纤维三项序列被映为正合列)。以及广义的维数公理:

$$E_n(S) = E^{-n}(S) = \pi_n(E)$$

对任何 Prespectrum E , E_* 都成为广义同调理论; 对于任何 Ω -Prespectrum E , E_* 都成为广义上同调理论。

注记. 每个广义同调/上同调理论都可以如此定义: 这是 Brown 可表定理的推论 (回忆第一节), 同调的情况由 S-对偶给出。

注记. 对于 CW 复形 L , 定义 L 的 E -同调/上同调为它的维悬谱的同调/上同调: 这几乎回归到了广义同调/上同调理论 (几乎是因为还有加性公理没有验证)

命题 28.3.3.

$$E_n(X) \cong X_n(E)$$

考虑 smash product 的 symmetric 性质即可。

推论 28.3.4. $(H\pi)_n(HG) \cong (HG)_n(H\pi)$ 。

命题 28.3.5. 对于有限谱 X : $E_n(X^*) \cong E^{-n}(X)$ 。

证明. $[S, E \wedge X^*]_n \cong [X, E]_{-n}$ (??), 于是广义同调/上同调在 S-对偶下表现良好。 \square

引理 28.2.33. 给定有限谱, $[S, X^*] \cong [X, S]_n$, 右侧在 n 充分小时为 0, 但是 $H_n(X^*) = H^{-n}(X)$, 从而 $H_n(X^*)$ 充分大的时候消失, 因此 X^* 只能同构于某个有限谱。 \square

28.3.1 例子

回忆 Moore Space, 这里我们可以类似的定义出 Moore Prespectrum。再一次取 Abel 群 G 的自由消解 F/R 。选取 $\bigvee_{\alpha \in A} S, \bigvee_{\beta \in B} S$ 使得它们分别对应着 R, F 的生成元。那么

$$M = \left(\bigvee_{\beta \in B} \right) \bigcup_f C \left(\bigvee_{\alpha \in A} S \right)$$

称为 G 的 Moore Prespectrum。

它满足: $\pi_r(M) = 0$ ($r < 0$); $\pi_0(M) = H_0(M) = G$; $H_r(M) = 0$ ($r > 0$)。

对于任何 Prespectrum E , 定义 G 系数诱导的 Prespectrum 为 $EG = E \wedge M$ 。

例子. G -Moore Prespectrum 可以对应为 SG : 因为 $S \wedge M = M$ 。



命题 28.3.6 (Universal Coefficient). 存在正合列:

$$0 \rightarrow \pi_n(E) \otimes G \rightarrow (EG)_n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\pi_{n-1}(E)) \rightarrow 0$$

更一般地:

$$0 \rightarrow E_n(X) \otimes G \rightarrow (EG)_n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$$

以及在 X 是有限谱或 G 有限生成时可以利用前述结果将同调转化为上同调:

$$0 \rightarrow E^n(X) \otimes G \rightarrow (EG)^n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E^{n+1}(X), G) \rightarrow 0$$

证明. 考虑 $\bigvee_{\alpha} S \rightarrow \bigvee_{\beta} S \rightarrow M$ 这个 cofiber 给出的新 cofiber 序列:

$$E \wedge (\bigvee_{\alpha} S) \wedge X \rightarrow E \wedge (\bigvee_{\beta} S) \wedge X \rightarrow E \wedge M \wedge X$$

即:

$$(\bigvee_{\alpha} E) \wedge X \rightarrow (\bigvee_{\beta} E) \wedge X \rightarrow E \wedge M \wedge X$$

现在考虑 π_n 作用上得到的长正合列就得到了结果。 \square

例子. 对于 Eilenberg-MacLane prespectrum H (of type \mathbb{Z}), HG 确实是指 $K(G, -)$ 诱导的 prespectrum。这是因为考虑万有系数: 注意 \mathbb{Z} 的平坦性即证。

现在总结一下:

1. Eilenberg-MacLane Prespectrum HG , 对应着 G 系数同调/上同调。
2. 分次 Eilenberg-MacLane Prespectrum $H(G_*) = \bigvee_n H(G_n, n)$: 那么 $H(G_*)_r(X) = \bigoplus_n H_{r-n}(X; G_n)$; $H(G_*) \oplus_n H^{r+n}(X; G_n)$ 。
3. 球谱 S , 对应着稳定同伦和稳定余同伦。
4. KO, KU , 对应着实 (复) 向量丛 K 理论导出的上同调理论
5. MO, MU, MSp , Thom 谱, 其稳定同伦群对应着配边环 (复配边环 etc.)

28.3.2 广义同调/上同调的性质

三元组相对同调长正合列和 M-V 序列依然存在。前者是对 $(X, Y), (Y, Z), (X, Z)$ 的长正合列使用 braid lemma; 后者参见 [Ada95]。

28.3.3 广义 (上) 同调的计算: Atiyah-Hirzebruch 谱序列

定理 28.3.7. 对于每个 CW -prespectrum F 以及有限 CW 复形 X , 存在谱序列:

$$H_p(X; \pi_q(F)) \xrightarrow{p} F_{p+q}(X)$$

$$H^p(X; \pi_q(F)) \xrightarrow{p} F^{p+q}(X)$$

其中左侧是谱序列的第二页。

证明. 首先考虑 X 的按照维数给出的子复形滤过:

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$$

对于偶对 (X_p, X_{p-1}) : 存在正合三角

$$\begin{array}{ccc}
 F_*(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & F_*(X_p) \\
 & \searrow \partial \quad \swarrow j_* & \\
 & F_*(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

现在对 p 求直和:

$$\begin{array}{ccc}
 \oplus_p F_*(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & \oplus_p F_*(X_p) \\
 & \searrow \partial \quad \swarrow j_* & \\
 & \oplus_p F_*(X_p, X_{p-1}) &
 \end{array}$$

(这里 p 的超界指标给出的 $F_*(X_p)$ 一律理解为 0)

由于 $\oplus_p F_*(X_{p-1}) = \oplus_p F_*(X_p)$, 那么这给出了一个谱序列正合三角, 进而给出了一个谱序列。

我们现在来计算这个谱序列的第一页和第二页以及收敛页。

显然地, 第一页是 $F_{p+q}(X_p, X_{p-1})$: 即

$$\begin{aligned}
 E_{p,q}^1 &= F_{p+q}(X^p, X^{p-1}) = \tilde{F}_{p+q}(X^p/X^{p-1}) \\
 &= \tilde{F}_{p+q}(\bigvee_{\alpha} S^p) = \oplus_{\alpha} \pi_q(F) = C_p(X; \pi_q(F))
 \end{aligned}$$

最后一项是 X 的 $\pi_q(F)$ 系数胞腔链群。

现在只需要证明第一页上的微分映射 $d_1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$ 和胞腔链群的边缘映射 $\partial : C_p(X; \pi_q(F)) \rightarrow C_{p-1}(X; \pi_q(F))$ 是相同的: 如果这的确成立, 那么 $E_{p,q}^2 \cong H_p(X; \pi_q(F))$ 。

下面来说明这一点: 对于一个 $e \in C_p(X; \pi_q(F))$, $d_1 e = j_* \partial e$ 。

无妨 e 是一个生成元: 这样系数 $\pi_q(F)$ 不是重要的。即 e 代表的是一个胞腔。那么 e 在 $E_{p,q}^1$ 的同构像 $\tilde{F}_{p+q}(X^p/X^{p-1})$ 对应的是 X^p/X^{p-1} 中 e 代表的胞腔同调类, 那么取 ∂ 后再取嵌入 j_* 确实对应着取边界。

下面讨论收敛性: 这是由 CW 复形 X 的有限滤过保证的。

因此这就说明了结果。 □

推论 28.3.8. 取 $F = H_{sing}$ (即退化为正常同调/上同调理论), X 为 Serre 纤维化 $F \rightarrow X \rightarrow B$ 的全空间。那么 B 的 n -骨架给出了一个子复形滤过, 这诱导了全空间 X 上的滤过。因此同样的说明能够给出 Leray-Serre 谱序列:

$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(F)) \implies H^{p+q}(E; R)$$

Atiyah-Hirzebruch 谱序列对无限 CW 复形 X 也有推广, 但这需要更多有关谱序列收敛的讨论。

其中需要的是一个和普通上同调平行的结果:



命题 28.3.9 (余极限上同调: 相对 + 谱版本). 对于诱导了广义上同调理论的 *prespectrum* E 和任意 *Prespectrum* X , 有正合列

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 E^{q-1}(X_n, A_n) \rightarrow E^q(X, A) \rightarrow \varprojlim^0 E^q(X_n, A_n) \rightarrow 0$$

那么现在考虑无限 CW 复形

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

如果 Mittag-Leffler 条件对 $\cdots \rightarrow H^p(X_{n+1}) \rightarrow H^p(X_n) \rightarrow \cdots$ 成立, 那么 A-H 谱序列收敛。

利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列, 可以给出唯一性定理的一个更简单的证明:

推论 28.3.10 (Eilenberg-Steenrod 唯一性定理). 广义同调和上同调理论由维数公理给出的信息唯一决定。即如果广义约化同调/上同调 M 作用在 S^0 上满足 0 维是 G , 其他维是 0, 那么有自然同构 $M \cong HG$, 此时:

$$M_*(X) \cong H_*(X; G)$$

证明. 由 Atiyah-Hirzebruch 谱序列, 第二页

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(X; G) & t = 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

那么谱序列在第二页就收敛了, 从而

$$M_n(X) \cong E_{n,0}^\infty \cong H_n(X; G)$$

上同调情况同理。 □

28.3.4 (上) 同调的乘积结构

定义 28.3.11 (上同调 external product).

$$E^p(X) \otimes F^q(Y) \rightarrow (E \wedge F)^{p+q}(X \wedge Y)$$

如果 $f \in E^p(X) = [X, E]_{-p}, g \in F^q(Y) = [Y, F]_{-q}$, 那么定义 external product 为: $f \wedge g \in [X \wedge Y, E \wedge F]_{-p-q} = (E \wedge F)^{p+q}(X \wedge Y)$ 。

将上同调 external product 记为 $\bar{\wedge}$ 。

定义 28.3.12 (同调 external product).

$$E_p(X) \otimes F_q(Y) \rightarrow (E \wedge F)_{p+q}(X \wedge Y)$$

如果 $f \in E_p(X) = [S, E \wedge X]_p, g \in F_q(Y) = [S, F \wedge Y]_q$, 那么定义 external product 为:

$$S \xrightarrow{f \wedge g} E \wedge X \wedge F \wedge Y \xrightarrow{1 \wedge c \wedge 1} E \wedge F \wedge X \wedge Y$$

复合映射满足要求, 记为: $f \triangle g \in (E \wedge F)_{p+q}(X \wedge Y)$ 。



定义 28.3.13 (Slant product 1).

$$E^p(X \wedge Y) \otimes F_q(Y) \rightarrow (E \wedge F)^{p-q}(X)$$

如果 $f \in E^p(X \wedge Y) : X \wedge Y \rightarrow E, g \in F_q(Y) : S \rightarrow F \wedge Y$ 。那么 slant product 定义为:

$$X \xrightarrow{1 \wedge g} X \wedge F \wedge T \xrightarrow{1 \wedge c} X \wedge Y \wedge F \xrightarrow{f \wedge 1} E \wedge F$$

记为 f/g 。

定义 28.3.14 (Slant product 2).

$$E^p(X) \otimes F_q(X \wedge Y) \rightarrow (E \wedge F)_{-p+q}(Y)$$

如果 $f \in E^p(X) : X \rightarrow E, g \in F_q(X \wedge Y) : S \rightarrow F \wedge X \wedge Y$ 。那么 slant product 定义为:

$$S \xrightarrow{g} F \wedge X \wedge Y \xrightarrow{c \wedge 1} X \wedge F \wedge Y \xrightarrow{f \wedge 1 \wedge 1} E \wedge F \wedge Y$$

记为 $f \backslash g$ 。

自然地这给出了 CW 复形的情况以及相对同调的情况。

接下来总假定 $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$:

命题 28.3.15. (i) 如果 $u \in E^*(X'), v \in F^*(Y')$, 那么

$$(u \bar{\wedge} v)(f \wedge g)^* = (-1)^{|f||v|} u f^* \bar{\wedge} v g^*$$

等价地:

$$(f \wedge g)^*(u \bar{\wedge} v) = (-1)^{|g||u|} (f^* u) \bar{\wedge} (g^* v).$$

(ii) 如果 $u \in E_*(X), v \in F_*(Y)$, 那么

$$(f \wedge g)_*(u \triangle v) = (-1)^{|g||u|} (f_* u) \triangle (g_* v).$$

(iii) 如果 $u \in E^*(X' \wedge Y'), v \in F_*(Y)$, 那么

$$(u(f \wedge g)^*)/v = (-1)^{|f|(|g|+|v|)} (u/g_* v) f^*$$

等价地:

$$((f \wedge g)^* u)/v = (-1)^{|g||u|} f^*(u/g_* v).$$

(iv) 如果 $u \in E^*(X'), v \in F_*(X \wedge Y)$, 那么

$$u \backslash (f \wedge v)_* v = (-1)^{|g|(|u|+|f|)} g_*((u f^*) \backslash v)$$

等价地

$$u \backslash (f \wedge g)_* v = (-1)^{|g||u|+|g||f|+|f||u|} g_*((f^* u) \backslash v).$$



(v) 对于 E 和 F 上的态射, 有如下自然性: 给定 $e: E \rightarrow E', f: F \rightarrow F'$, 那么

$$(e \wedge f)_*(u \frown v) = (-1)^{|f||u|}(e_*u) \frown (f_*v),$$

其中空格处可以填上四个乘积的任何一个。

命题 28.3.16. 所有乘积都是双线性的。

交换性:

命题 28.3.17. (i) 如果 $u \in E^p(X), v \in F^q(Y)$, 那么

$$v \bar{\wedge} u = (-1)^{pq} c_* c^*(u \bar{\wedge} v).$$

(ii) 如果 $u \in E_p(X), v \in F_q(Y)$, 那么

$$v \triangle u = (-1)^{pq} (c \wedge c)_*(u \triangle v).$$

结合性:

定理 28.3.18. (i) 如果 $x \in E^p(X), y \in F^q(Y), z \in G^r(Z)$, 那么:

$$(x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} z = x \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} z) \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q+r}(X \wedge Y \wedge Z).$$

(ii) 如果 $x \in E^p(X), u \in F^q(Y \wedge Z), z \in G_r(Z)$, 那么:

$$x \bar{\wedge} (u/z) = (x \bar{\wedge} u)/z \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q-r}(X \wedge Y).$$

(iii) 如果 $v \in E^p(X \wedge Z), y \in F^q(Y), u \in G_r(Y \wedge Z)$, 那么:

$$v/(y \setminus u) = [(1 \wedge c)^*(v \bar{\wedge} y)]/u \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q-r}(X).$$

(iv) 如果 $t \in E^p(X \wedge Y \wedge Z), z \in F_q(Z), y \in G_r(Y)$, 那么:

$$(t/z)/y = t/(c_*(z \triangle y)) \in (E \wedge F \wedge G)^{p-q-r}(X).$$

(v) 如果 $y \in E^p(Y), x \in F^q(X), t \in G_r(X \wedge Y \wedge Z)$, 那么:

$$y \setminus (x \setminus t) = (c^*(y \bar{\wedge} x)) \setminus t \in (E \wedge F \wedge G)_{-p-q+r}(Z).$$

(vi) 如果 $w \in E^p(X \wedge Y), y \in F_q(Y), v \in G_r(X \wedge Z)$, 那么:

$$(w/y) \setminus v = w \setminus [(c \wedge 1)_*(y \triangle v)] \in (E \wedge F \wedge G)_{-p+q+r}(Z).$$

(vii) 如果 $x \in E^p(X), w \in F_q(X \wedge Y), z \in G_r(Z)$, 那么:

$$(x \setminus w) \triangle z = x \setminus (x \triangle z) \in (E \wedge F \wedge G)_{-p+q+r}(Y \wedge Z).$$

(viii) 如果 $x \in E_p(X), y \in F_q(Y), z \in G_r(Z)$, 那么:

$$(x \triangle y) \triangle z = x \triangle (y \triangle z) \in (E \wedge F \wedge G)_{p+q+r}(X \wedge Y \wedge Z).$$

现在我们考虑 Internal product: 将 external product/slant product 和对角函子 Δ 复合即可 (回忆杯积和卡积)。上述讨论保证了 internal product 具有这样的良好性质。

注记. 这样定义出的 internal product 仍然会使得谱具有 smash product 的结构。为什么它是普通上同调上结构的类比呢? 这是因为 Eilenbe-MacLane 谱自身具有某种乘积结构, 使得 $E \wedge E \approx E$: 这就是接下来要定义的环境谱。



28.3.5 谱的 Poincare 对偶

回忆流形上的 Poincare 对偶：对于某个环 R ，如果 M 是 R -可定向的，那么对于任何 R -模 π ， π 系数的同调和上同调之间存在着对偶关系。我们通过所谓环谱和模谱将这件事予以推广。

定义 28.3.19 (环谱, 模谱). 环谱是 CW-prespectrum 范畴中的环对象：即 (E, μ, η) 使得 $\mu : E \wedge E \rightarrow E, \eta : S \rightarrow E$ 是次数为零的 map (即同伦映射需要区分)，并且在 CW-prespectrum 范畴中有交换图：

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow 1 \wedge \mu & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S \wedge E & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ E & \xrightarrow{1} & E \\ \uparrow & & \uparrow \mu \\ E \wedge S & \xrightarrow{1 \wedge \eta} & E \wedge E \end{array}$$

模谱同样是模对象：称 F 是环谱 E 上的模，如果它有零次 map $\nu : E \wedge F \rightarrow F$ ，满足交换图：

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge F & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge F \\ \downarrow 1 \wedge \nu & & \downarrow \nu \\ E \wedge F & \xrightarrow{\nu} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S \wedge F & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow \cong & & \downarrow \nu \\ F & \xrightarrow{1} & F \end{array}$$

称环谱 E 是交换的，如果乘积映射 μ 在交换子 c 作用下不变。

定义 28.3.20. 对于 (可带边, 可非紧) 流形 M 的紧子空间偶对 K, L ：取开集偶对 (U, V) 使得 $U \supseteq K, V \supseteq L$ ：构成了 directed set。

那么定义

$$\check{E}^*(K, L) = \varinjlim_{(U, V)} E^*(U, V)$$

命题 28.3.21.

$$\check{E}^*(M) \cong E^*(M), \check{E}^*(x) \cong E^*(x)$$

$$\check{E}^*(M, \partial M) \cong E^*(M, \partial M)$$

对于紧集 $U, V \subseteq M$ ：

$$\check{E}^*(U \cup V, V) \cong \check{E}^*(U, U \cup V)$$

$\{K_\alpha\}, \{L_\alpha\}$ 是一列下降紧集, K, L 是交, 那么：

$$\varinjlim_{\alpha} \check{E}^*(K_\alpha, L_\alpha) \cong \check{E}^*(K, L)$$

现在考虑环谱的定向问题：

给定环谱 F , $F_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) = \tilde{F}^*(S^n)$ 是一个生成元的 $\pi_*(F)$ -模。

定义 28.3.22. 称 $\varphi \in F^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ 是生成元, 如果 $\{\varphi\}$ 构成一个 $\pi_*(F)$ -基。注意这里 ϕ 并不一定是 $F^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ 中的元素。

命题 28.3.23. 对于任何环谱 F 上的模谱 G :

$$G_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow \pi_*(G) : y \mapsto \langle \varphi, y \rangle$$

是同构。

定义 28.3.24. 对于纤维丛 $E \rightarrow B$, E^0 是零截面的补, E_x 是 x 处的纤维。称 $\omega \in F^*(E, E^0)$ 是 E 的定向: 如果 $\forall x \in B$, ω 在 $F^*(E_x, E_x^0)$ 中的像是生成元。

对于一般的拓扑流形我们需要一些光滑向量丛 (尤其是切丛) 的替代物: 将 E 替换为 $M \times M$, E^0 替换为 $M \times M - \Delta$, p 替换为第一个分量上的投影, 那么这样也可以给出一个拓扑流形切丛的定向: 即 $\omega \in F^*(M \times M, M \times M - \Delta)$ 满足在 $F^*(x \times M, x \times M - x \times x)$ 是生成元。

定理 28.3.25. 在这样的约定下, 流形的 Poincare 对偶和相对 Poincare 对偶可以推广到谱的版本。

28.4 Steenrod 代数

我们首先指出 Hurewicz 同态的另一种构造:

命题 28.4.1. Hurewicz 同态是 $S \rightarrow H$ 的谱态射诱导的。

注记. 尽管如此, Prespectrum 的信息严格多于同调: 这是 Spectral Phantom Map 导致的。

回忆 Yoneda 引理, 不同上同调之间的“自然”函子变换是由上同调本身诱导的: 具体来说

定义 28.4.2 (上同调运算). 给定上同调理论 \tilde{E}, \tilde{F} (约化), 一个 (q, n) - 上同调运算是一个自然变换 $E^q(-), F^{q+n}(-)$ 。一个 n 次稳定上同调运算是一系列 (q, n) 运算, 并满足在维悬同态过渡下交换。

定理 28.4.3. $\tilde{H}^q(-; \pi) \rightarrow \tilde{H}^{q+n}(-; \rho)$ 的全体上同调运算和 $\tilde{H}^{q+n}(K(\pi, q); \rho)$ 自然同构。

证明. Yoneda 引理。 □

在一般的谱的 Prespectrum 的情况当然也有类似的情况: 对于每个 $E^*(E)$ 的元素, 存在一个对应的自然变换 $E^*(-) \rightarrow E^*(-)$: 这里函子是作用在 prespectra 上的, 自然变换由如下给出:

给定 $f: X \rightarrow E, g: E \rightarrow E$, 将之变为 $gf: X \rightarrow E$ 。注意这里 g 的次数对应着上同调运算的次数。并且同样这样的自然变换和 $E^*(E)$ 中的元素一一对应, 很明显这里是上文稳定上同调运算的推广。

$E^*(E)$ 是群, 其上的计算对应着 $[X, E]$ 中的加法运算; 然而 $E^*(E)$ 还能进一步还是一个环: 乘法对应着运算的复合。

现在我们考虑 $E = H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的情况。

定义 28.4.4 (Steenrod 代数). $A^* = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 称为 mod p Steenrod 代数: 它同时是全体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 系数普通上同调的全体稳定上同调运算构成的代数。

28.4.1 构造

首先给出的是公理化的 Steenrod 运算定义:

定义 28.4.5 ($\mathcal{A}(2)$). 存在稳定上同调运算

$$Sq^i : H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

满足:

- i) $Sq^0 = \text{id}$
- ii) $\deg x = n$ 时 $Sq^n x = x \cup x$
- iii) $i > \deg x$ 时 $Sq^i x = 0$
- iv) Cartan 公式

$$Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^k Sq^i x \cdot Sq^{k-i} y$$

它们能够推出以下两个性质:

命题 28.4.6. Sq^1 是 Bockstein 运算: 系数 $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ 诱导的边缘同态 $H^q(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 。

Adem Relation:

$$Sq^i Sq^j = \sum_{0 \leq k \leq [i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k$$

注记. 系数短正合列诱导的同调群长正合列可以用层上同调理解, 也可以利用胞腔复形的正合列诱导长正合列给出。

同样有 $\text{mod } p$ 的情况:

定义 28.4.7 ($\mathcal{A}(p)$). 令 β 是 Bockstein 运算: 系数 $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$ 诱导的边缘同态 $H^q(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 。

存在稳定上同调运算

$$P^i : H^q(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

满足:

- i) $P^0 = \text{id}$
- ii) 如果 $\deg x = 2k$, 那么 $P^k x = x^p$ 。
- iii) 如果 $2k > \deg x$, 那么 $P^k x = 0$ 。
- iv) Cartan 公式

$$P^k(xy) = \sum_{i=0}^k P^i x \cdot P^{k-i} y$$

它们能够推出以下性质

命题 28.4.8. *Adem Relation:*

如果 $a < pb$, 那么

$$P^a P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} P^{a+b-t} P^t$$

如果 $a \leq b$, 那么

$$P^a \beta P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} \beta P^{a+b-t} P^t + \sum_{t=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} P^{a+b-t} \beta P^t$$

注意 Sq^{2k} 正是一般的 P^k 在 $p=2$ 时的情况, 下面来构造这样的 P^i 。

命题 28.4.9. 作为 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 代数, *Reduced Power* 和 *Bockstein Operator* 生成了 *Steenrod* 代数 $\mathcal{A}(p)$ 。

我们指出 $A^* = \mathcal{A}(p) = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 的代数结构是很丰富的。考虑对偶 $A_* = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, 环谱的结构给出了 $\mu: H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wedge H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 从而诱导了

$$A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$$

因此这给出了 A^* 上的余乘结构, 首先来看 $\text{mod } 2$ 的情况: 它作用到 Sq^k 上为 $\sum Sq^i \otimes Sq^{k-i}$ 。

这说明了:

定理 28.4.10. $\mathcal{A}(2)$ 是 *Hopf* 代数, 乘法是正常乘法, 余乘法由上文给出。

在介绍 Adams 谱序列时我们将会对此有进一步的论述。

28.4.2 计算实例, Steenrod 代数

$\text{mod } 2$ 计算, **Hopf Invariant**

引理 28.4.11. Sq^i 是可约的, 如果 i 不是 2 的幂。

证明. Adams Relation. □

推论 28.4.12. 作为代数, Sq^{2^k} 生成了 $\mathcal{A}(2)$ 。

定理 28.4.13. 如果 X 满足 $x^2 \neq 0, x \in H^q(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 那么 $\exists i, 0 < 2^i \leq q$, 使得 $Sq^{2^i} x \neq 0$ 。

证明. $0 \neq x^2 = Sq^q x = \Sigma(\text{some } Sq^{2^j})x, 2^j \leq q$. 那么结论自明. □

命题 28.4.14. 如果 $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是截断多项式代数, 生成元 x 满足 $\deg x = q$, 并且 $x^2 \neq 0$, 那么 $q = 2^k$ 。

证明. 由于 $H^{q+2^i}(X) = 0, 0 < 2^i < q$. 因此对于这样的 $i, Sq^{2^i} x = 0$. 然而存在 $k, 0 < 2k \leq q$ 使得 $Sq^{2^k} x \neq 0$. 因此只能有 $q = 2^k$. □

定理 28.4.15. 对于紧定向连通 $2n$ -流形 M , $H^q(M) = 0, 1 \leq q < n, H^n(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 那么 n 是 2 的幂。



证明.

$$H^{2n-q}(M) = H_q(M) \xrightarrow{\text{Universal Coefficient}} H^q(M) = 0, 1 \leq q < n$$

于是取 u 为 $H^n(M)$ 的生成元, 它满足了上一命题的条件, 这就说明了结果。□

定义 28.4.16 (Hopf Invariant). 对于 $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$, 它的同伦余纤维 $Cf = D^{2n} \cup_{S^{2n-1}} S^n$ 。 Cf 的上同调满足:

$$H^k(Cf, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n, 2n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(观察胞腔链群即可)

现在取 α_n, β_{2n} 分别为 $n, 2n$ 次上同调的生成元, 那么 $\alpha_n \cup \alpha_n = HI(f) \cdot \beta_{2n}$ 。

$HI(f)$ 在相差符号的意义下唯一决定, 称为 Hopf invariant。进一步如果系数是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的时候符号没有影响。此时它就变成了 Steenrod Square:

$$[HI(f)] \cdot (-) : \mathbb{F}_2 \cong H^n(Cf; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n}(Cf; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$$

定理 28.4.17. 如果 $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ Hopf Invariant 是 1, 那么 $[f] \in \pi_{n-1}^s$ 不平凡, 即 $\Sigma^k f : S^{2n+k-1} \rightarrow S^{n+k}$ 不是零伦的。

证明. 如果 $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$, 那么 $Sq^n : H^n(Cf; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(Cf; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 不是平凡的。由于 Sq 是稳定上同调运算, 从而如果 $\Sigma^k f$ 是零伦的, 观察 S^{n+k} 和 $\Sigma^k Cf$ 之间的 retract 就得到了矛盾。□

定理 28.4.18. 如果 $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ 的 Hopf Invariant 是奇数, 那么 n 是 2 的幂。

证明. 取系数变换诱导的上同调群之间的映射: $\eta : H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 。那么:

$$(\eta(\alpha_n))^2 = \eta\beta$$

由于 $h(f) \equiv 1 \pmod{2}$, 由命题 28.4.14, n 是 2 的幂。□

定理 28.4.19 (Hopf). 如果 n 是偶数, 对于任何偶数 k , 都存在 $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ 使得其 Hopf Invariant 是 k 。

证明. 假定 S_1, S_2, S 是三个 $(n-1)$ - 球面, 称 $f : S_1 \times S_2 \rightarrow S$ 有双次 (α, β) , 如果将 f 限制到两个分量上分别有次数 α, β , 注意这和基点选取无关。

现在取 E_1, E_2 使得 $S_i = \partial E_i, i = 1, 2$, 那么 $\partial(E_1 \times E_2) = (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2)$ 是 $(2n-1)$ - 球面并且 $(E_1 \times S_2) \cap (S_1 \times E_2) = S_1 \times S_2$ 。

取 $S' = \Sigma S = E_+ \cup E_-$ (Non Reduced Suspension), 其中 E_+, E_- 都是 n - 胞腔。

现在任何 $f : S_1 \times S_2 \rightarrow S$ 能够延拓成为

$$C(f) : (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2) \rightarrow E_+ \cup E_- = S'$$

满足 $C(f)(E_1 \times S_2) \subseteq E_+, C(f)(S_1 \times E_2) \subseteq E_-$, 这样 $C(f)$ 给出了 $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ 。

• $C(f)$ 诱导的 $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ 的 Hopf Invariant 为 $\alpha\beta$: 这是通过直接计算证明的。



- 如果 n 是偶数, 存在 $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ 具有双次 $(2, -1)$ 。

这是由如下给出的: $f(x, y) = y - (2 \sum_{i=1}^n x_i y_i) x$, 它确实具有双次 $(2, -1)$ 。

现在任给 $f_1 : S^{n_1-1} \rightarrow S^{n_1-1}$, 次数 λ , $f_2 : S^{n_2-1} \rightarrow S^{n_2-1}$, 次数 μ , 那么 $g = f \circ (f_1 \times f_2)$ 具有双次 $(2\lambda, -\mu)$, 因此这就给出了 Hopf Invariant 为 $-2\lambda\mu$ 。□

注记. 这个结果证明中的第一部分构造称为 Whitehead Product。具体来说如下: $[-, -]_{Wh} : \pi_{n_1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_{n_2}(X) \rightarrow \pi_{n_1+n_2-1}(X)$ for all $n_i \in \mathbb{N}; n_i \geq 1$, 给定两个映射同伦类

$$[S^{n_i} \xrightarrow{\phi_i} X] \in \pi_{n_i}(X)$$

定义其 Whitehead Product 为下述推出图表的的第一行的复合。

$$\begin{array}{ccccc} S^{n_1+n_2-1} & \xrightarrow{f_{n_1, n_2}} & S^{n_1} \vee S^{n_2} & \xrightarrow{(\phi_1, \phi_2)} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ D^{n_1+n_2} & \xrightarrow{\quad} & S^{n_1} \times S^{n_2} & & \end{array} \quad (po)$$

注记. 如果要是存在有限维 \mathbb{R} -可除代数, $n > 1$ 。那么此时有乘积映射 $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 以及一个双边单位。

现在令 S^{n-1} 是经过这个双边单位的以原点为圆心的球面, 那么有:

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{m} \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{pr} S^{n-1}$$

由于它包含着单位, 这是一个双次为 $(1, 1)$ 的映射, 从而我们得到了一个 Hopf Invariant One 映射。这个结果揭露了几个 Hopf Invariant One 相关的问题之间的联系, 它们列举如下。

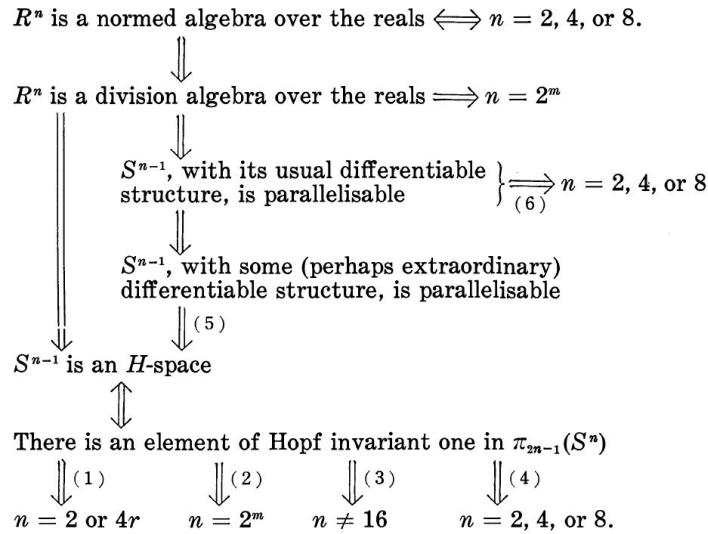


图 28.1: Hopf Invariant One Proof Flow

28.4.3 Hopf Invariant One Problem

Hopf Invariant One Problem 最终被证明是在 K 理论下由简单计算直接导出 (尽管这个计算是富有技巧性的)。首先我们用 K 理论重述 Hopf Invariant One 的定义。

对于 $f: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n}$, 我们考虑 (约化) K 理论 \tilde{K}^* (这里使用复 K 理论, 即 KU 代表的上同调理论)。有如下结果:

定理 28.4.20. 1. KU 是 2-周期的。(Bott 周期律)

2. 作为 Abel 群, $\tilde{K}^0(S^{2n}) = \mathbb{Z}, \tilde{K}^0(S^{2n+1}) = 0$ 。

3. 作为环, $\tilde{K}^0(S^0) \cong \mathbb{Z}$; 对于 $n > 0$, $\tilde{K}^0(S^n)$ 上的乘法是平凡的 (任何两个元素的积是零)。

现在有长正合列:

$$\tilde{K}^{-1}(S^n) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \tilde{K}^0(Cf) \rightarrow \tilde{K}^0(S^n) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{2n-1}) = 0$$

由于 $\tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) = \tilde{K}^0(S^{2n}) = \mathbb{Z}$, 假设 1 在 $\tilde{K}^0(Cf)$ 中的像是 α 。如果 $\beta \in \tilde{K}^0(Cf)$ 的像是 $\tilde{K}^0(S^n)$ 的生成元, 那么 β^2 的像是 0 (因为 $\tilde{K}^0(S^n)$ 的乘法平凡), 从而 $\beta^2 = h\alpha, \exists h \in \mathbb{Z}$ 。容易验证这个 h 是良定义的, 我们定义它为 f 的 Hopf Invariant $HI(f)$: 利用 K 理论到上同调的变换容易验证这和前文定义的 Hopf Invariant 相同。

我们定义 Adams 运算:

定义 28.4.21 (Adams 运算). 定义 $\psi^k: K^0(X) \rightarrow K^0(X): E \mapsto s_k(\wedge^1(E), \wedge^2(E), \dots, \wedge^n(E))$, 其中 s_k 是满足 $s_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = x_1^k + \dots + x_n^k$ 的多项式。

它满足如下性质:

1. ψ^k 在 $\tilde{K}^0(S^{2n})$ 上的作用是乘以 k^n
2. $\psi^k \psi^l = \psi^l \psi^k$
3. 对于素数 p , $\psi^p(\alpha) \equiv \alpha^p \pmod{p}$ 。

现在我们来考虑 Hopf Invariant One Problem, 如果 n 是奇数, 那么 $\tilde{K}^0(S^n) = 0$, 从而 β 的像是 0, 于是 $\beta = m\alpha, \exists m \in \mathbb{Z}$, 于是 $\beta^2 = m^2\alpha^2 = 0$, 从而 Hopf Invariant 是零。

如果 n 是偶数, 假定 $n = 2m$ 。我们保持前文中 α, β 的定义, 那么

$$\psi^k(\alpha) = k^{2m}\alpha$$

$$\psi^k(\beta) = k^m\beta + \mu_k\alpha, \exists \mu_k$$

于是

$$\psi^l\psi^k(\beta) = \psi^l(k^m\beta + \mu_k\alpha) = k^m l^m + (k^m \mu_l + l^{2m} \mu_k)\alpha$$

于是由 $\psi^l\psi^k = \psi^k\psi^l$, 那么就有

$$(k^{2m} - k^m)\mu_l = (l^{2m} - l^m)\mu_k$$

现在取 $k = 3, l = 2$, 由前文性质

$$\mu_2\alpha \equiv \psi^2(\beta) \equiv \beta^2 = h\alpha = \alpha \pmod{2}$$

因此 μ_2 是奇数, 从而 $2^m | 3^m - 1$ 。

由初等数论结果只有 $m = 1, 2, 4$, 经验证这确实满足要求。



28.5 Adams 谱序列

注记. 到此为止, 我们需要对前文定义的 CW-Prespectrum 范畴进行一个小小的评注. 这个范畴 (态射是同伦类) 是一个得到稳定同伦范畴的方式, 但是在各式各样的参考资料中可能会出现对 Prespectrum/Spectrum 的定义的轻微修改, 并且类似地定义出一个同伦范畴. 就结果来看, 最终得到的同伦范畴都是一样的, 它被称为稳定同伦范畴, 记为 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$. 因此接下来我们不会再使用 CW-Prespectrum 的叙述, 而是统一使用 $\mathbf{Spectra}, \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, 因为它们是为合适的记号. 同时 CW-prespectrum 的名称将被 Spectrum 代替.

这里有一个小小的记号问题: \mathbf{Ho} 作为取同伦范畴天然地需要一个模型结构 (见第 28.7 节), 但是我们实际上还没有引入这样的概念. 然而回忆 Adams 构造中对 CW-Prespectrum 的同伦的定义: Adams 的精巧构造实际上绕过了 Bifibrant 对象的困难.

Adams 的构造和后来的序列谱赋予模型范畴后取同伦的构造是等价的这件事实际上是有些惊奇的: 因为前者对象多于后者 (后者对象只有 Ω -谱), 但是前者态射少于后者 (Adams 构造中态射需要经过稳定化: Function 和 Map 的区别), Adams 的这一开山式的工作实在是令人印象深刻.

28.5.1 E-Adams 滤过

定义 28.5.1 (滤谱的诱导谱序列). 给定一个 spectrum 的滤过

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y_3 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{f_0} & Y \\ & & \downarrow^{g_3} & & \downarrow^{g_2} & & \downarrow^{g_1} & & \downarrow^{g_0} \\ & & A_3 & & A_2 & & A_1 & & A_0 \end{array}$$

以及另外一个 Spectrum $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$.

那么这诱导了一个正合偶:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{i} & \mathcal{D} \\ k \swarrow & & \downarrow j \\ & & \mathcal{E} \end{array} \quad := \quad \begin{array}{ccc} \oplus_{s,t} D^{s,t}(X, Y) & \xrightarrow{[X, f]} & \oplus_{s,t} D^{s,t}(X, Y) \\ [X, h] \swarrow & & \downarrow [X, g] \\ & & \oplus_{s,t} E^{s,t}(X, Y) \end{array} \quad := \quad \begin{array}{ccc} \oplus_{s,t} [X, Y_s]_{t-s} & \xrightarrow{[X, f]} & \oplus_{s,t} [X, Y_s]_{t-s} \\ [X, h] \swarrow & & \downarrow [X, g] \\ & & [X, A_s]_{t-s} \end{array}$$

进而诱导了一个谱序列。

注记. 值得注意的是, 这是一个相当一般的构造. 许多熟悉的谱序列可以通过在这里选取适当的滤过得到: 利用 Atiyah-Hizebruch 谱序列可以通过对谱取 Postnikov filtration 得到. (这和我们证明 A-H 谱序列时考虑另外一个变量 X 的骨架的思路不同)



定义 28.5.2 (E-Adams 谱序列). 给定交换环谱 (E, μ, e) , 谱 X, Y . 考虑谱的滤过

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_3 \xrightarrow{g_3} E \wedge Y_3 = A_3 \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_2 \xrightarrow{g_2} E \wedge Y_2 = A_2, \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_1 \xrightarrow{g_1} E \wedge Y_1 = A_1 \\
 f_0 \downarrow \\
 Y = Y_0 \xrightarrow{g_0} E \wedge Y_0 = A_0
 \end{array}$$

这里每个 $Y_{n+1} \rightarrow Y_n \rightarrow A_n$ 都是 fiber sequence, 并且

$$g_n : Y_n \cong S \wedge Y_n \xrightarrow{e \wedge \text{id}} E \wedge Y_n$$

这就诱导了一个谱序列, 其第一页是

$$E_1^{s,t}(X, Y) := [X, A_s]_{t-s}$$

$$d_1 = [X, g \circ h]$$

定义 28.5.3. 给定交换环谱 (E, μ, e) , 定义 \bar{E} 为单位 $e : S \rightarrow E$ 的 homotopy fiber。即:

$$\bar{E} \rightarrow S \xrightarrow{e} E \rightarrow \Sigma \bar{E}$$

引理 28.5.4. 在这样的记号下, E-Adams 滤过可以等价地写为

$$Y_p \cong \bar{E}^p \wedge Y$$

$$A_p \cong E \wedge \bar{E}^p \wedge Y$$

这里 \bar{E}^p 指 \bar{E} smash product n 次。

因此 E-Adams 谱序列的第一页可以等价地写为 $E_1^{s,t}(X, Y) \cong [X, E \wedge \bar{E}^s \wedge Y]_{t-s}$

证明. 我们归纳地证明: $p = 0$ 时结果显然。假定对某个 p 结果成立, 由命题 28.2.28, $(-) \wedge \bar{E}^p \wedge Y$ 保持 cofiber 序列, 那么将其运用在

$$\bar{E} \rightarrow S \rightarrow E$$

上就得到了

$$\bar{E}^{p+1} \wedge Y \rightarrow \bar{E}^p \wedge Y \xrightarrow{g_p} E \wedge \bar{E}^p \wedge Y$$

也是一个 cofiber 序列。因此这就给出了结果。 \square

28.5.2 第一页

本段的内容旨在说明在一定条件下, 谱序列第一页有着 E -同调的简单表述, 并且能够给出一个简单的第二页的刻画。



平坦交换环谱

命题 28.5.5. 对于交换环谱 (E, μ, e) , 它的稳定同伦群 $\pi_*(E)$ 自然地具有 \mathbb{Z} -分次环结构。

更进一步地, 对于任何谱 $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, 广义同调

$$E_*(X) = \pi_*(E \wedge X)$$

自然地具有左分次 $\pi_*(E)$ -模结构; 广义同调

$$X_*(E) = \pi_*(X \wedge E)$$

自然地具有右分次 $\pi_*(E)$ -模结构。

证明. $\pi_*(E) \cong [\Sigma^* S, E]_0$, 那么给定两个

$$\alpha_i : \Sigma^{n_i} S \rightarrow E$$

有

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha_1 \wedge \alpha_2} E \wedge E \xrightarrow{\mu} E$$

这就给出了分次环结构。

同样 $E_*(X)$ 的左 $\pi_*(E)$ -模结构由如下给出, 给定 $\alpha : \Sigma^{n_1} S \rightarrow E, \nu : \Sigma^{n_2} S \rightarrow E \wedge X$, 有

$$\alpha \cdot \nu : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha \wedge \nu} E \wedge E \wedge X \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} E \wedge X$$

另一侧同理。 □

定义 28.5.6. 称交换环谱 (E, μ, e) 是平坦的, 如果它诱导的 $E_*(E)$ 作为右 $\pi_*(E) - \text{mod}$ 是平坦模。(将会证明如果考虑左模是平坦模得到的结果是等价的)

命题 28.5.7. 给定交换环谱 (E, μ, e) , $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, 那么存在分次 *Abel* 群同态

$$E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X) \rightarrow [S, E \wedge E \wedge X]_* = \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

这个映射将

$$\alpha_1 : \Sigma^{n_1} S \rightarrow E \wedge E, \alpha_2 : \Sigma^{n_2} S \rightarrow E \wedge X$$

映为

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha_1 \wedge \alpha_2} E \wedge E \wedge E \wedge X \xrightarrow{\text{id}_E \wedge \mu \wedge \text{id}_X} E \wedge E \wedge X$$

如果 $E_*(E)$ 是平坦 $\pi_*(E)$ -模, 那么这个同态变成了同构。

证明. 群同态容易验证是良定义的。现在假定 E 是平坦交换环谱:

如果 $X = \Sigma^n S$, 那么:

$$E_*(X) = E_*(\Sigma^n X) \cong \pi_{*-n}(E)$$

$$\pi_*(E \wedge E \wedge X) = \pi_*(E \wedge E \wedge \Sigma^n S) = E_{*-n}(E)$$

然而 $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_{*-n}(E) \cong E_{*-n}(E)$, 因此此时对于任何 E 都有同构成立。



现在对于一个一般的有限 CW-prespectrum X ，我们有胞腔粘结的 cofiber 序列：

$$\Sigma^{n_k-1} S \longrightarrow X_k \longrightarrow X_{k+1} \longrightarrow \Sigma^{n_k} S \longrightarrow \Sigma X_k$$

那么在函子 $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(-) \rightarrow \pi_*([S, E \wedge E \wedge (-)])$ 的作用下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(\Sigma^{n_k-1} S) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X_k) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X_{k+1}) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(\Sigma^{n_k} S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [S, E \wedge E \wedge \Sigma^{n_k-1} S]_{\bullet} & \longrightarrow & [S, E \wedge E \wedge X_k]_{\bullet} & \longrightarrow & [S, E \wedge E \wedge X_{k+1}]_{\bullet} & \longrightarrow & [S, E \wedge E \wedge \Sigma^{n_k} S]_{\bullet} \end{array}$$

第二行是长正合列，因为 $E \wedge E \wedge (-)$ 保持长正合列。同样由于 $E_*(-)$ 将 cofiber 映为长正合列， $E_*(E)$ 的平坦性保证第一行也是长正合列。那么利用 5 引理进行归纳就得到了结果。

现在对于一个任意的 CW-prespectrum X ：由于每个 CW-prespectrum 都是有限 CW-Subprespectra 的滤过极限；smash product \wedge 对每个分量都保持余极限； $\pi_*(-)$ 和余极限交换； $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} (-)$ 对余极限分配。上述这四条说明了结果对一般的 X 也成立。 \square

E-Steenrod 代数

我们将对前文研究的 $H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的 Steenrod 代数进行推广：考虑更为一般的交换环谱 E 的情况。

定义 28.5.8. 给定交换环谱 (E, μ, e) ，称其对偶 E-Steenrod 代数是如下分次 Abel 群偶对 $(E_*(E), \pi_*(E))$ ，以及配备的如下结构：

1. 分次交换环结构

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(E)$$

(由 E 的交换环谱结构诱导)

2. 分次交换环结构

$$E_*(E) \otimes E_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

(由 $E \wedge E$ 的交换环谱结构诱导)

3. 分次交换环同态

$$\Psi : E_*(E) \rightarrow E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(E)$$

(由 $\pi_*(-)$ 作用在 $E \wedge E \cong E \wedge S \wedge E \xrightarrow{\text{id} \wedge e \wedge \text{id}} E \wedge E \wedge E$ 诱导：命题 28.5.7)

4. 分次交换环同态

$$\eta_L : \pi_*(E) \rightarrow E_*(E); \eta_R : \pi_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

(由 $\pi_*(-)$ 作用在 $E \cong E \wedge S \xrightarrow{\text{id} \wedge e} E \wedge E$ 和 $E \cong S \wedge E \xrightarrow{e \wedge \text{id}} E \wedge E$ 诱导)

5. 分次交换环同态

$$\varepsilon : E_*(E) \rightarrow \pi_*(E)$$

(由 $\pi_*(-)$ 作用在 $\mu : E \wedge E \rightarrow E$ 诱导)



6. 分次交换环同态

$$c : E_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

(由 $\pi_*(-)$ 作用在 Braiding $\tau_{E,E} : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$ 诱导)

注记. 命题 28.5.5 中的左右 $\pi_*(E) - mod$ 结构正是 η_L, η_R 分别诱导出来的。

命题 28.5.9. 对于交换环谱 (E, μ, e) , $E_*(E)$ 具有自然的左和右 $\pi_*(E)$ - 模结构。现在由于 E 的交换性, 右 $\pi_*(E)$ - 模结构也可以视为左模结构, 那么 braiding

$$E_*(E) \cong \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\pi_*(\tau_{E,E})} \pi_*(E \wedge E) \cong E_*(E)$$

给出了两个左模结构的同构。

对偶 E-Steenrod 代数结构可以抽象为如下概念。

定义 28.5.10 (分次交换 Hopf 代数胚). 分次交换 Hopf 代数胚是 \mathbb{Z} - 分次交换环的反范畴 $\mathbf{gCRing}^{\text{op}}$ 中的 internal groupoid。

具体来说, 范畴 A 的 Internal Category 包含的数据有对象对象 $C_0 \in A$ 和态射对象 $C_1 \in A$; 以及源态射和汇态射 $s, t : C_1 \rightarrow C_0$, 恒等元指定态射 $e : C_0 \rightarrow C_1$, 复合态射 $C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$ 使得以下图表 (当然是普通范畴里的条件转化成图表形式) 成立:

1. 恒等态射的起终点是自身。

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow s \\ & & C_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow t \\ & & C_0 \end{array}$$

2. 复合态射的起终点被正确给出。

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{c} & C_1 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow s \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{c} & C_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{t} & C_0 \end{array}$$

3. 态射复合的结合律

4. 态射复合的单位律

$$\begin{array}{ccccc} C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{e \times_{C_0} 1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xleftarrow{1 \times_{C_0} e} & C_1 \times_{C_0} C_0 \\ p_2 \searrow & & \downarrow c & \swarrow p_1 & \\ & & C_1 & & \end{array}$$

进一步 Internal Groupoid 还要求存在一个态射对象上的“取逆”态射 $i : C_1 \rightarrow C_1$ 满足:

1. 正确的起终点:

$$t = (C_1 \xrightarrow{i} C_1 \xrightarrow{s} C_0), \quad s = (C_1 \xrightarrow{i} C_1 \xrightarrow{t} C_0).$$



2. 取逆得到的态射是左逆:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{\text{diag}} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{Id \times i} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ \downarrow s & & & & \downarrow c \\ C_0 & & \xrightarrow{e} & & C_1 \end{array}$$

3. 取逆得到的态射是右逆:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{\text{diag}} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{i \times Id} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ \downarrow t & & & & \downarrow c \\ C_0 & & \xrightarrow{e} & & C_1 \end{array}$$

注记. 这是一个离 Hopf 代数的普通定义相去甚远的定义, 我们来解释一下它为什么和正常的 Hopf 代数定义类似。

首先 $\mathbf{gCRing}^{\text{op}}$ 的对象记为 $\text{Spec}(R)$ 以指示它是反范畴中的对象。那么考虑 Internal Category 的定义, 它形如:

$$\begin{array}{c} \text{Spec}(\Gamma) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(\Gamma) \\ \downarrow \circ \\ \text{Spec}(\Gamma) \\ \begin{array}{c} s \downarrow \uparrow t \\ \text{Spec}(A) \end{array} \end{array},$$

其中第一项的纤维积是 s, t 的拉回。并且将 Internal Category 中的取逆态射记为 $\text{inv} : \text{Spec}(\Gamma) \rightarrow \text{Spec}(\Gamma)$ 。

现在退回到 \mathbf{gCRing} , 熟知 Spec 的纤维积对应着环的张量积: 因此 Internal Category 图表变为了

$$\begin{array}{c} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ \uparrow \Psi \\ \Gamma \\ \begin{array}{c} \eta_L \downarrow \uparrow \epsilon \uparrow \eta_R \\ A \end{array} \end{array},$$

以及 $c : \Gamma \rightarrow \Gamma$ 是取逆态射所对应的。

并且这些态射满足前文 Internal Groupoid 定义中要求的那些条件的对偶。将这些条件翻译回来, 我们就得到了等价定义。

定义 28.5.11 (交换 Hopf 代数胚). 交换 Hopf 代数胚由如下数据给出。

1. 两个交换环 A, Γ 。

2. 环同态:

(a) 左/右单位 $\eta_L, \eta_R : A \rightarrow \Gamma$

(b) 余乘 $\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma$



(c) 余单位 $\varepsilon : \Gamma \rightarrow A$

(d) 共轭 $c : \Gamma \rightarrow \Gamma$

满足

1. 余单位律

(a) 恒等态射的起终点是自身

$$\varepsilon \circ \eta_L = \varepsilon \circ \eta_R = \text{id}_A$$

(b) 态射复合的单位律

$$(\text{id}_\Gamma \otimes_A \varepsilon) \circ \Psi = (\varepsilon \otimes_A \text{id}_\Gamma) \circ \Psi = \text{id}_\Gamma$$

(c) 复合态射的起终点被正确给出

$$\text{i. } \Psi \circ \eta_R = (\text{id} \otimes_A \eta_R) \circ \eta_R$$

$$\text{ii. } \Psi \circ \eta_L = (\eta_L \otimes_A \text{id}) \circ \eta_L$$

2. 余结合律 $(\text{id}_\Gamma \otimes_A \Psi) \circ \Psi = (\Psi \otimes_A \text{id}_\Gamma) \circ \Psi$

3. 逆

(a) $c \circ c = \text{id}_\Gamma$

(b) 正确的起终点

$$c \circ \eta_L = \eta_R; c \circ \eta_R = \eta_L$$

(c) 取逆得到了左逆和右逆

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes A \otimes \Gamma & \rightrightarrows & \Gamma \otimes \Gamma \xrightarrow{\text{coeq}} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ (-) \cdot c(-) \downarrow & & \swarrow \alpha \\ & & \Gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes A \otimes \Gamma & \rightrightarrows & \Gamma \otimes \Gamma \xrightarrow{\text{coeq}} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ c(-) \cdot (-) \downarrow & & \swarrow \beta \\ & & \Gamma \end{array}$$

α, β 是余等化子泛性质给出的，其中平行态射是给出张量积的。它们满足

$$\alpha \circ \Psi = \eta_L \circ \varepsilon; \beta \circ \Psi = \eta_R \circ \varepsilon$$

命题 28.5.12. 对于平坦交换环谱 E ，它的对偶 E -Steenrod 代数 $(E_*(E), \pi_*(E))$ ，以及定义给出的结构态射 $(\eta_L, \eta_R, \varepsilon, c, \Psi)$ 使得它构成了分次交换 Hopf 代数胚。



E-Steenrod 代数上的余模

定义 28.5.13 (E-Steenrod 代数上的余模). (E, μ, e) 是交换环谱, 对于任何一个谱 $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, 称 $E_*(X)$ 的对偶 E-Steenrod 代数上的余模结构是

1. 自然的 $\pi_*(E)$ -模结构。

2. $\pi_*(E)$ -模同态

$$\Psi_{E_*(X)} : E_*(X) \rightarrow E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X)$$

(由 $\pi_*(-)$ 作用在 $E \wedge X \cong E \wedge S \wedge X \xrightarrow{\text{id} \wedge e \wedge \text{id}} E \wedge E \wedge X$ 诱导)

更一般地, 对任何分次 Hopf 交换代数胚, 都有类似的余模定义

定义 28.5.14 (分次 Hopf 交换代数胚上的余模). 给定 A 上的分次 Hopf 交换代数胚 Γ , 那么其上的左余模是

1. 一个 \mathbb{Z} -分次 A -模 N

2. 余作用: 分次 A -模同态 $\Psi_N : N \rightarrow \Gamma \otimes_A N$ (Γ 上的右 A -模结构由右单位 η_R 给出)

满足

1. 余单位律: $(\varepsilon \otimes_A \text{id}_N) \circ \Psi_N = \text{id}_N$

2. 余作用: $(\Psi \otimes_A \text{id}_N) \circ \Psi_N = (\text{id}_\Gamma \otimes_A \Psi_N) \circ \Psi_N$

分次余模之间的同态是指一个分次 A -模同态并且满足和余模作用交换。

记 Γ 上全体左余模的范畴为 $\Gamma\mathbf{CoMod}$, 其态射集简记为 $\text{Hom}_\Gamma(-, -) := \text{Hom}_{\Gamma\mathbf{CoMod}}(-, -)$, 很明显它天然地具有 Abel 群结构。

如果进一步将同态的要求放宽到不一定是分次 A -模同态, 而是允许次数平移, 那么这给出了一个 \mathbb{Z} -分次的态射群, 记为 $\text{Hom}_\Gamma^*(-, -)$ 。

例子. 给定交换 Hopf 代数胚 (Γ, A) , 那么 A 自然地成为一个左 Γ -余模: $\eta_R : A \rightarrow \Gamma \cong \Gamma \otimes_A A$ 。

命题 28.5.15. 如果 (E, μ, e) 是平坦交换环谱, 那么定义 28.5.13 中的定义使得 $E_*(X)$ 成为 $E_*(E)$ 上的余模。

和模范畴上完全一样地, 仍然有自由-遗忘伴随

命题 28.5.16. 给定 A 上交换 Hopf 代数胚 Γ , 存在伴随对

$$A\text{-mod} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Forget}} \\ \perp \\ \xrightarrow{\text{Co-Free}} \end{array} \Gamma\mathbf{CoMod}$$

进一步 A -模 C 给出的余自由 Γ -余模是 $\Gamma \otimes_A C$, 余作用由 Γ 的余乘给出。

注记 (左右余模等价). 给定 A 上的交换 Hopf 代数胚 Γ , 那么左余模 N 自然地在以下作用下变为右余模:

$$N \rightarrow \Gamma \otimes_A N \cong N \otimes_A \Gamma \xrightarrow{\text{id} \otimes A^c} N \otimes_A \Gamma$$

对于右余模也有同样的论述。



定义 28.5.17 (余模的余张量积). 给定 A 上交换 Hopf 代数胚 Γ , 右 Γ -余模 N_1 和左 Γ -余模 N_2 . 那么它们的余张量积定义为:

$$N_1 \square_{\Gamma} N_2 := \ker \left(N_1 \otimes_A N_2 \xrightarrow{\Psi_{N_1} \otimes_A id - id \otimes_A \Psi_{N_2}} N_1 \otimes_A \Gamma \otimes_A N_2 \right).$$

如果 N_1, N_2 都是左 (右) Γ -余模, 那么将 N_2 (N_1) 通过上一注记视为右 (左) 余模。

命题 28.5.18. 对于两个左 Γ -余模, 存在自然同构 $N_1 \square N_2 \cong N_2 \square N_1$ 。

为了计算谱序列的第一页, 如下观察是至关重要的:

引理 28.5.19. 给定 A 上的交换 Hopf 代数胚 Γ 以及两个 Γ -余模 N_1, N_2 。如果 N_1 作为 A -模是投射的, 那么:

1. 态射

$$\mathrm{Hom}_A(N_1, A) \xrightarrow{f \mapsto (id \otimes_A f) \circ \Psi_{N_1}} \mathrm{Hom}_A(N_1, \Gamma \otimes_A A) \cong \mathrm{Hom}_A(N_1, \Gamma) \cong \mathrm{Hom}_A(N_1, A) \otimes_A \Gamma$$

给出了 $\mathrm{Hom}_A(N_1, A)$ 上的右 Γ -余模结构。

2. (Cotensor-Dual) 给定左 Γ -余模 N_1, N_2 , 赋予 $\mathrm{Hom}_A(N_1, A)$ 上述右余模结构, 那么

$$\mathrm{Hom}_A(N_1, A) \square_{\Gamma} N_2 \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma}(N_1, N_2)$$

特别地, $N_1 = A$ 时有

$$A \square_{\Gamma} N_2 \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma}(A, N_2)$$

余模的万有系数定理

首先我们将指出谱之间的态射 $f: X \rightarrow Y$ 在 $E_*(-)$ 上诱导的不仅仅是分次 Abel 群, 而是更进一步诱导了余模同态。回忆 E-Steenrod 代数 $(E_*(E), \pi_*(E))$ 作为分次交换 Hopf 代数胚以及其上的余模 $E_*(X)$ 。

引理 28.5.20. 给定 $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, 交换环谱 E 。那么 $[X, Y]_*$ 到同调之间的态射之间的映射由同调函子 $\pi_*(E \wedge -)$ 诱导, 即:

$$\pi_*(E \wedge -) : [X, Y]_* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab\mathbb{Z}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

可以分解为

$$[X, Y]_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)-comod}^*(E_*(X), E_*(Y)) \xrightarrow{forget} \mathrm{Hom}_{Ab\mathbb{Z}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

即这样诱导出来的同态事实上都是 $E_*(E)$ -余模同态。

证明. 来验证它确实是余模同态, 即需要验证下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} E_{\bullet}(X) & \xrightarrow{f_*} & E_{\bullet}(Y) \\ \Psi_{E_{\bullet}(X)} \downarrow & & \downarrow \Psi_{E_{\bullet}(Y)} \\ E_{\bullet}(E) \otimes_{\pi_{\bullet}(E)} E_{\bullet}(X) & \xrightarrow{id \otimes \pi_{\bullet}(E) f_*} & E_{\bullet}(E) \otimes_{\pi_{\bullet}(E)} E_{\bullet}(Y) \end{array}.$$



但是它事实上是下列交换图表在 $\pi_*(-)$ 下的像, 因此得证。

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge X & \xrightarrow{id \wedge f} & E \wedge Y \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 E \wedge \mathbb{S} \wedge X & & E \wedge \mathbb{S} \wedge Y \\
 id \wedge e \wedge id \downarrow & & \downarrow id \wedge e \wedge id \\
 E \wedge E \wedge X & \xrightarrow{id \wedge id \wedge f} & E \wedge E \wedge Y
 \end{array}$$

□

回忆谱序列第一页形如 $[X, E \wedge \bar{E}^s \wedge Y]_{t-s}$ 。我们开始着手处理这样的项:

命题 28.5.21. 对于交换环谱 (E, μ, e) , $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$, $E_*(X)$ 作为 $\pi_*(E)$ 模是投射模, 那么分次 *Abel* 群同态:

$$\begin{aligned}
 \phi_{UC} : [X, E \wedge Y]_* &\rightarrow \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) \\
 (f : x \rightarrow E \wedge Y) &\mapsto \pi_*(E \wedge X \xrightarrow{id \wedge f} E \wedge E \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge id} E \wedge Y)
 \end{aligned}$$

是同构。

证明. 考虑 $EMod = EMod(\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra}), \wedge, \mathbb{S})$ 是 E 上的模谱范畴, 那么 ϕ_{UC} 可以分解为

$$[X, E \wedge Y]_* \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{EMod}^*(E \wedge X, E \wedge Y) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

其中第一个同构来源于模范畴中的自由遗忘伴随 (和前文讨论过的余自由是类似的), 第二个箭头则是作用上 π_* 然后遗忘称为 $\pi_*(E)$ -模同态。

现在只需说明第二个态射是同构, 这由如下引理说明:

□

引理 28.5.22. 对于交换环谱 E , 其上的模谱 N_1, N_2 满足 $\pi_*(N_1)$ 是投射 $\pi_*(E)$ 模, 那么:

$$\text{Hom}_{EMod}^*(N_1, N_2) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(\pi_*(N_1), \pi_*(N_2))$$

是同构。

证明. 如果 $\pi_*(N_1)$ 是自由 $\pi_*(E)$ 模: 那么存在一组自由基 $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i \in I}$, 使得

$$\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E \longrightarrow N_1$$

那么这个同构由如下交换图保证

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{EMod}^\bullet(\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E, N_2) & \xrightarrow{\pi_*} & \text{Hom}_{\pi_\bullet(E)}^\bullet(\pi_\bullet(\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E), \pi_\bullet(N_2)) \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 \prod_{i \in I} [\Sigma^{|x_i|} \mathbb{S}, N_2]_\bullet & \xrightarrow{\simeq} & \prod_{i \in I} \pi_{\bullet+|x_i|}(N_2)
 \end{array}$$

现在对于一般的投射模, 由于它是自由模的直和因子, 这说明存在

$$\pi_*(N_1) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{q} \pi_*(N_1)$$

同样由于 F 是自由模, 可以找到一个 E -模谱 G 使得 $\pi_*(G) = F$, 并且存在一个 $p : G \rightarrow N_1$ 使得 $\pi_*(p) = q$, 于是过渡到自由模的情况即可。

□



现在我们将前文所有内容整合，得到计算 Adams 谱序列第一页的关键命题

命题 28.5.23. E 是交换环谱, $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 满足: E 是平坦的并且 $E_*(X)$ 是投射 $\pi_*(E)$ 模。那么引理 28.5.20 中的态射

$$[X, E \wedge Y]_* \xrightarrow{\pi_*(E \wedge -)} \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(Y))$$

是同构，其中第二个同构由命题 28.5.7 给出。

证明. 有交换图

$$\begin{array}{ccc} [X, E \wedge Y]_* & \xrightarrow{\pi_*(E \wedge -)} & \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(Y)) \\ \phi_{UC} \searrow & & \swarrow \epsilon \otimes \mathrm{id}(-) \\ & \mathrm{Hom}_{\pi_*(E)-\mathrm{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) & \end{array},$$

上侧箭头是本命题中的态射，左侧箭头是命题 28.5.21 中的 ϕ_{UC} ，右侧箭头是由张量积上余单位得到的（回忆命题 28.5.16）

右侧箭头由命题 28.5.7 是同构，左侧箭头由命题 28.5.21 是同构，这就说明了结果。 \square

于是我们能够计算第一页了：

定理 28.5.24 (Adams 谱序列的第一页). E 是交换环谱, $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 满足: E 是平坦的并且 $E_*(X)$ 是投射 $\pi_*(E)$ 模。那么 E -Adams 谱序列的第一页同构于：

$$E_1^{s,t}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^t(E_*(X), E_{*-s}(A_s)), d_1 = \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}(E_*(X), E_*(g \circ h))$$

这给出了谱序列第一页上的微分态射：

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_*(A_0)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_{*-1}(A_1)) \rightarrow \cdots$$

证明. 由上一命题：

$$\begin{aligned} E_1^{s,t}(X, Y) &= [X, E \wedge Y_s]_{t-s} \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^{t-s}(E_*(X), E_*(E \wedge Y_s)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^t(E_*(X), E_{*-s}(A_s)) \end{aligned}$$

(回忆 $A_s = E \wedge Y_s$) \square

28.5.3 稳定同伦群的特殊情况

对于第一页，我们考虑一些特殊的情况： $X = S$ ，那么此时谱序列的第一页是 $E_1^{st}(S, Y) = \pi_{t-s}(E \wedge \bar{E}^s \wedge Y)$ 。

我们首先计算 $Y \wedge E \wedge \bar{E}$ 的同伦群：有 Cofiber 序列

$$Y \wedge E \wedge \bar{E} \rightarrow Y \wedge E \wedge S \rightarrow Y \wedge E \wedge E$$

注意这个序列有右提升（乘法给出 $E \wedge E \rightarrow E = E \wedge S$ ），因此 $\pi_*(Y \wedge E \wedge \bar{E})$ 是 $\pi_{*+1}(Y \wedge E \wedge S) \rightarrow \pi_{*+1}(Y \wedge E \wedge E)$ 。



现在由于 E 是平坦的:

$$\pi_*(Y \wedge E \wedge E) = E_*(Y) \otimes_{\pi_*(E)} E_*E$$

$$\pi_*(Y \wedge E) = E_*(Y)$$

因此归纳地考虑 X 就有谱序列第一页 E_1 形如 $E_*(Y) \otimes [E_*E/\pi_*(E)]^n$, 于是这事实上是代数上的 cobar resolution, 从而暗示了第二页具有 Ext 的形式, 接下来我们下面来考虑一般的情况。

28.5.4 第二页

定理 28.5.25 (Adams 谱序列的第二页). E 是交换环谱, $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 满足: E 是平坦的并且 $E_*(X)$ 是投射 $\pi_*(E)$ 模。那么 E -Adams 谱序列的第二页同构于:

$$E_2^{s,t}(X, Y) \cong \text{Ext}_{E_*(E)-\mathbf{comod}}^{s,t}(E_*(X), E_*(Y))$$

注记. 这里 Ext 函子的定义源于 $E_*(E)$ -余模范畴是一个内射对象足够的 Abel 范畴, 记为 $\mathcal{A} = E_*(E) - \mathbf{comod}$ 。因此可以定义 Hom 复形函子

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}^*(X, -) : K^+(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathbf{Ab})$$

的右导出函子

$$R\text{Hom}^*(X, -) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathbf{Ab})$$

从而可以定义 Ext 函子

$$\text{Ext}^i(X, Y) \cong H^i R\text{Hom}^*(X, Y), X \in D(\mathcal{A}), Y \in D^+(\mathcal{A})$$

这里的 Ext 函子正是一般足够内射/投射对象的 Abel 范畴中的 Ext 的导出版本叙述。

证明. 由第一页的描述, $E_2^{s,t}(X, Y)$ 是

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_*(A_0)) \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_{*-1}(A_1)) \rightarrow \cdots$$

的上同调。因此欲完成论述只需说明:

1. $\mathcal{A} = E_*(E) - \mathbf{comod}$ 是 Abel 范畴并且内射对象足够;
2. $(E_1^{*,t}(X, Y), d_1)$ 构成的链复形是某个 $\text{Hom}_{E_*(E)-\mathbf{comod}}(E_*(X), -)$ -acyclic 消解的像。

导出函子的性质保证了 acyclic 消解能够计算出正确的导出函子值。 \square

下面我们来完成上面需要说明的两点。

引理 28.5.26 (第一页给出了消解). 给定 E -Adams 谱序列, 那么有短正合列

$$0 \rightarrow E_*(Y_p) \xrightarrow{E_*(g_p)} E_*(A_p) \xrightarrow{E_*(h_p)} E_{*-1}(Y_{p+1}) \rightarrow 0$$

从而有上部为长正合列的图表 (直接验证):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow E_*(Y) & \xrightarrow{E_*(g_0)} & E_*(A_0) & \xrightarrow{\partial} & E_{*-1}(A_1) & \xrightarrow{\partial} & E_{*-2}(A_2) \rightarrow \cdots \\ & & \searrow E_*(h_0) & & \nearrow E_*(g_1) & \searrow E_*(h_1) & \nearrow E_*(g_2) \\ & & & & E_{*-1}(Y_1) & & E_{*-2}(Y_2) \end{array}$$



证明. 考虑 Y_p 的定义:

$$Y_p \xrightarrow{g_p} E \wedge Y_p \xrightarrow{h_p} \Sigma Y_{p+1}$$

$E \wedge -$ 作用上后仍然是余纤维化序列

$$E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge g_p} E \wedge E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge h_p} E \wedge \Sigma Y_{p+1}$$

现在作用上 $\pi_*(-)$ 后得到长正合列:

$$\cdots \longrightarrow E_\bullet(Y_{p+1}) \xrightarrow{E_\bullet(f_p)} E_\bullet(Y_p) \xrightarrow{E_\bullet(g_p)} E_\bullet(A_p) \xrightarrow{E_\bullet(h_p)} E_{\bullet-1}(Y_{p+1}) \xrightarrow{E_{\bullet-1}(f_p)} E_{\bullet-1}(Y_p) \xrightarrow{E_{\bullet-1}(g_p)} E_{\bullet-1}(A_p) \longrightarrow \cdots$$

这是一个分裂长正合列: 因为考虑 E 的乘积 $\mu: E \wedge g_p$ 有左逆

$$\text{id}: E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge g_p} E \wedge E \wedge Y_p \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} E \wedge Y_p$$

从而长正合列分裂为短正合列, 这就证明了结果. \square

引理 28.5.27 (平坦交换环谱诱导 Abel 范畴). 交换 Hopf 代数胚 (Γ, A) 如果满足 Γ 作为右 A 模 (η_R 诱导) 是平坦模, 那么 $\Gamma\mathbf{CoMod}$ 是 Abel 范畴. 现在由于 $E_*(E)$ 的 $\pi_*(E)$ 模结构就是 η_R 诱导的, 因此平坦交换环谱满足这一条件.

证明. 这总是加性范畴, 现在如果 Γ 在 A 上平坦, 我们来说明核与余核存在.

给定余模之间的态射 $f: (N_1, \Psi_{N_1}) \rightarrow (N_2, \Psi_{N_2})$. 即有 A -模交换图

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 \\ \downarrow \Psi_{N_1} & & \downarrow \Psi_{N_2} \\ \Gamma \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_\Gamma \otimes_A f} & \Gamma \otimes_A N_2 \end{array}$$

那么考虑 f 在 A -mod 中的核, 以及其在张量积下的像:

$$\begin{array}{ccccc} \ker(f) & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 \\ \exists \downarrow & & \downarrow \Psi_{N_1} & & \downarrow \Psi_{N_2} \\ \Gamma \otimes_A \ker(f) & \longrightarrow & \Gamma \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_\Gamma \otimes_A f} & \Gamma \otimes_A N_2 \end{array}$$

由平坦的假设, $\Gamma \otimes_A \ker f \cong \ker(\text{id}_\Gamma \otimes_A f)$, 从而核的泛性质说明了左侧箭头的存在性, 以及它的确是 $\Gamma\mathbf{CoMod}$ 中的核. 余核同理.

然而上述构造直接说明了 $\text{coker } \ker \rightarrow \ker \text{coker}$ 是同构: 因为考虑对应的 A -模即可. \square

引理 28.5.28 (内射对象足够). 假定 (Γ, A) 是交换 Hopf 代数胚, Γ 作为右 A 模 (η_R 诱导) 是平坦模, 那么

1. 每个内射 A 模诱导的余自由 Γ -余模都是 $\Gamma\mathbf{CoMod}$ 中的内射对象;
2. (承认 AC) $\Gamma\mathbf{CoMod}$ 中内射对象足够.

证明. 在承认 AC 的情况下, $A\mathbf{Mod}$ 中内射对象足够. 现在由于存在伴随对

$$A\mathbf{-mod} \xleftarrow[\text{Co-Free}]{\text{Forget}} \Gamma\mathbf{CoMod}$$

注意到由余自由函子的构造 (命题 28.5.16), 函子 Co-Free 是正合函子. 因此 I 是内射模 $\implies \Gamma \otimes_A I$ 是余模范畴中的内射对象. 对于任何 $N \in \Gamma\mathbf{CoMod}$, 考虑单态射 $i: \text{forget}(N) \hookrightarrow I$, 那么伴随像 $\tilde{i}: N \hookrightarrow \Gamma \otimes_A I$ 也是单态射. 这就说明了结果. \square



引理 28.5.29 (消解是 acyclic 的). 假定 (Γ, A) 是交换 Hopf 代数胚, Γ 作为右 A 模 (η_R 诱导) 是平坦模. 现在给定 Γ -余模 $N \in \Gamma\mathbf{CoMod}$, 使得其作为 A 模是投射的: 那么每个余自由模都是 $F = \mathrm{Hom}_{\Gamma\mathbf{CoMod}}(N, -)$ -acyclic 的.

证明. 考虑 $\Gamma \otimes_A K, K \in A\text{-mod}$, 我们需要证明它是 acyclic 的. 取 K 的内射消解 I^\bullet , 那么上一引理说明 $\Gamma \otimes_A I^\bullet$ 是内射消解. 从而

$$H_{*\geq 1}(\mathrm{Hom}_\Gamma(N, \Gamma \otimes_A I^\bullet)) \cong H_{*\geq 1}(\mathrm{Hom}_A(N, I^*)) \cong 0$$

其中第一个同构是余自由-遗忘伴随, 第二个同构是因为 N 是投射 A 模. \square

现在我们完成了第二页的证明。

28.5.5 收敛性

谱的局部化和幂零完备化

• 谱的 Bousfield 局部化

定义 28.5.30. 给定谱 E :

1. 谱 X 是 E -acyclic 的, 如果 $E \wedge X \simeq 0$;
2. 态射 $f: X \rightarrow Y$ 是 E -等价, 如果 $E \wedge f$ 是稳定同伦范畴中的同构, 从而 $E_*(f)$ 是 E -同调的同构。
3. 谱 X 是 E -局部的, 如果以下等价条件成立:
 - (a) 对于任何 E -等价 $f, [f, X]_*$ 都是同构;
 - (b) 对于任何 E -acyclic 谱 $Y, Y \rightarrow X$ 的态射都是零态射。

证明. 我们来说明等价性: A 是 E -acyclic 的等价于始对象出发的态射 $0 \rightarrow A$ 是 E -等价. 因此 $1 \implies 2$ 是显然的: 取 $f: 0 \rightarrow Y$, 我们将问题转化为了 $[0, X]$, 而它当然是零态射。

现在对于 $2 \implies 1$, 给定 E -等价 $f: A \rightarrow B$, 考虑其同伦余纤维 $B \rightarrow B/A$. 那么有 cofiber sequence:

$$E \wedge A \xrightarrow{E \wedge f} E \wedge B \longrightarrow E \wedge (B/A) \longrightarrow E \wedge \Sigma A.$$

第一个态射由条件是同构, 那么考虑交换图 (三角范畴保证了第三个态射的存在):

$$\begin{array}{ccccccc} E \wedge A & \xrightarrow{E \wedge f} & E \wedge B & \longrightarrow & E \wedge B/A & \longrightarrow & E \wedge \Sigma A \\ \downarrow id & & \downarrow (E \wedge f)^{-1} & & \downarrow & & \downarrow id \\ E \wedge A & \xrightarrow{id} & E \wedge A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E \wedge \Sigma A \end{array}$$

于是 $E \wedge B/A \simeq 0$, 即 B/A 是 E -acyclic 的。

现在有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{id} & A & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \Sigma A \\ \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow f & & \downarrow id \\ \Sigma^{-1}B/A & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & B/A \longrightarrow \Sigma A \end{array}$$



从而 $[-, X]$ 作用后得到行正合图表

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow^{id} & & \uparrow^{[f, X]_{\bullet}} & & \uparrow \\ [B/A, X]_{\bullet+1} & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [B, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [B/A, X]_{\bullet} \end{array}$$

第一、四列是同构 ($[B/A, X] = 0$: 因为假定 2 以及 B/A 是 E -acyclic 的), 那么五引理说明了第三列是同构, 从而说明了结果。 \square

定义 28.5.31 (Bousfield 局部化). 给定谱 E, X , X 的 E -Bousfield 局部化是

1. 一个 E -局部谱 $L_E X$
2. 一个 E -等价 $X \rightarrow L_E X$

Bousfield 的上述构造源于如下观察:

给定 **Spectra** 的全子范畴 \mathcal{C} , 使得 \mathcal{C} 中的对象在平移和同伦余极限下封闭, 并满足: 存在一个小子范畴 $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ 使得 \mathcal{C}_0 在同伦余极限下生成了 \mathcal{C} .

因此 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbf{Spectra}$ 保持同伦余极限, 因此伴随函子定理指出存在同伦范畴意义下的右伴随 $G: \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

定义 28.5.32. 对于任何谱 X , 有余单位映射 $v: G(X) \rightarrow X$ (注意它只是在同伦意义下唯一), 定义 $L(X)$ 为 v 的余纤维化:

$$G(X) \rightarrow X \rightarrow L(X)$$

那么对于任何 $Y \in \mathcal{C}$, $[Y, G(X)]_* \rightarrow [Y, X]$ 都是同构 (回忆伴随函子), 于是进一步地: $[Y, L(X)] = 0$ (考虑 $[Y, -]$ 诱导的正合列)

称 X 是 \mathcal{C} -局部的, 如果 $\forall Y \in \mathcal{C}, Y \rightarrow X$ 都一定是零伦的. 将 \mathcal{C} -局部谱构成的全子范畴记为 \mathcal{C}^\perp . 于是容易验证 \mathcal{C}^\perp 在同伦极限和平移下封闭.

现在对于任何 X , $L(X)$ 都是 \mathcal{C} -局部的. 对于任何 \mathcal{C} -局部谱 Z , $[G(X), Z] = 0$, 于是作用到 cofiber 上就有 $[L(X), Z] \cong [X, Z]$, 从而 L 可以视作 $\mathcal{C}^\perp \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 的左伴随.

例子 (Bousfield). 容易验证取 \mathcal{C}_E 为全体 E -acyclic 谱满足上述条件, 因此我们再一次得到了 *Bousfield 局部化*.

• 谱的幂零完备化

定义 28.5.33 (幂零完备化). 给定交换环谱 (E, μ, e) , 以及任意一个谱 $Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$. 再一次地记 \bar{E} 为单位 $e: S \rightarrow E$ 的同伦纤维, 这样正如之前讨论过的 (引理 28.5.4), Y 的 E -Adams 滤过形如:

$$\cdots \rightarrow \bar{E}^2 \wedge Y \rightarrow \bar{E} \wedge Y \rightarrow Y$$

再记 $\bar{E}_{s-1} := \text{hocolim}(\bar{E}^s \xrightarrow{i^s} S)$ ($i: \bar{E} \rightarrow S$ 是刚刚定义的同伦纤维), 特别地 $\bar{E}_{-1} \simeq 0$. 因此:

$$\bar{E}_n \wedge Y \simeq \text{hocolim}(\bar{E}^{n+1} \wedge Y \rightarrow Y)$$



现在由八面体公理:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{E}^{s+1} & \xrightarrow{i} & \overline{E}^s & \longrightarrow & E \wedge \overline{E}^s & \longrightarrow & \Sigma \overline{E}^{s+1} \\
 = \downarrow & & \downarrow i^s & & \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{E}^{s+1} & \longrightarrow & \mathbb{S} & \longrightarrow & \overline{E}_s & \longrightarrow & \Sigma \overline{E}^{s+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow p_{s-1} & & \\
 & & \overline{E}_{s-1} & \xrightarrow{=} & \overline{E}_{s-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Sigma \overline{E}^s & \longrightarrow & \Sigma E \wedge \overline{E}^s & &
 \end{array}$$

我们给出了 $p_{s-1}: \overline{E}_s \rightarrow \overline{E}_{s-1}$, 进一步就有:

$$\dots \xrightarrow{p_2 \wedge \text{id}} E_2 \wedge Y \xrightarrow{p_1 \wedge \text{id}} \overline{E}_1 \wedge Y$$

定义 Y 的 E -幂零完备化 Y_E^\wedge 为同伦极限 $\varprojlim_n \overline{E}_n \wedge Y$ 。

幂零完备化 X_E^\wedge 总是 E -局部的, 首先幂零完备化的构造知 X_E^\wedge 仅和 $L_E X$ 有关, 并且 E -等价 f 并不会使得 $[f, X_E^\wedge]$ 变化, 这就说明了 E -局部。因此由 Bousfield 完备化这给出了一个 $L_E X \rightarrow X_E^\wedge$ 。在一些局部化条件较好的情况我们事实上有上述态射在 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 中是同构。

定义 28.5.34 (Core). 给定交换环 R , 它的 core cR 是如下图表的等化子:

$$cR \rightarrow R \rightrightarrows R \times_{\mathbb{Z}} R$$

其中上部箭头是

$$R \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{e \otimes \text{id}} R \times_{\mathbb{Z}} R$$

下部箭头是

$$R \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id} \otimes e} R \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

因此实际上 $cR := \{r \in R \mid 1 \otimes r = r \otimes 1 \in R \otimes_{\mathbb{Z}} R\}$

如果 $cR \cong R$, 那么称它为 Solid 环。

注记. 我们来考虑它的几何意义: 首先 $\mathbf{CRing}^{\text{op}} \cong \mathbf{AffSch}$, 于是再一次地使用 Spec 表示反范畴的对象。现在 $\text{Spec}(R \otimes R) \cong \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R)$, 因此有 internal Cech groupoid

$$\begin{array}{c}
 \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \\
 \downarrow \\
 \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \\
 \begin{array}{c} s \downarrow \uparrow t \\ \text{Spec}(R) \end{array}
 \end{array}$$

命题 28.5.35. $ccR \cong cR$

命题 28.5.36 (Solid Ring 分类). *Solid Ring* 分类如下:

1. $\mathbb{Z}[J^{-1}]$: 整数环在某个素数集 J 处的局部化



2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \geq 2$)

3. $\mathbb{Z}[J^{-1}] \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 使得 $n \geq 2$, 并且 n 的每个素因子都包含在素数集 J 中

4. $c(\mathbb{Z}[J^{-1}] \times \prod_{p \in K} \mathbb{Z}/p^{e(p)})$, $K \subseteq J$, 满足 J, K 都是无限素数集, 并且 $e(p)$ 是自然数。

定义 28.5.37 (连合). 称一个谱 E 是连合的, 如果 $\pi_{* < 0}(E) = 0$ 。

命题 28.5.38. 给定连合交换环谱 E , 使得 $\pi_0(E)$ 的 core 是素数集的局部化 $\mathbb{Z}[J^{-1}]$ 或 $\text{mod } n$ 证书换 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 那么 Bousfield 局部化和幂零完备化是等价的: 即前文诱导的是 $L_E X \cong X_E^\wedge$ 。

收敛定理

注意到 E-Adams 谱序列的有界性说明谱序列一定收敛, 于是我们有谱序列 E 的第无穷页。

定义 28.5.39. 现在对于交换环谱 E , 谱 X, Y , 以及它对应的 E-Adams 谱序列 $\{E_r^{st}, d_r\}$, 以及 Y 的幂零完备化 Y_E^\wedge , 那么有滤过

$$\cdots \hookrightarrow F^2[X, Y_E^\wedge]_* \hookrightarrow F^1[X, Y_E^\wedge]_* = [X, Y_E^\wedge]$$

其中

$$F^s[X, Y_E^\wedge]_* := \ker([X, Y_E^\wedge]_* \xrightarrow{[X, Y_E^\wedge \rightarrow \bar{E}_{s-1} \wedge Y]} [X, \bar{E}_{s-1} \wedge Y])$$

其中 $Y_E^\wedge \rightarrow \bar{E}_{s-1} \wedge Y$ 是幂零完备化定义中自然出现的态射 (定义 28.5.33)。

定义 28.5.40. 记号同前, 称 E-Adams 谱序列完全收敛到幂零完备化 $[X, Y_E^\wedge]_*$, 如果下列是同构:

1. $[X, Y_E^\wedge]_* \rightarrow \varprojlim_s [X, Y_E^\wedge]_* / F^s[X, Y_E^\wedge]_*$
2. $F^s[X, Y_E^\wedge]_{t-s} / F^{s+1}[X, Y_E^\wedge]_{t-s} \rightarrow E_\infty^{st}(X, Y)$

这里第二个态射是由 E_∞ 页的定义和滤过 F 的定义得到的。

E-Adams 谱序列的收敛是由 $\pi_0(E)$ 的 core 控制的, 由 Solid Ring 分类, 它们是已知的。

定理 28.5.41 (收敛定理 1). E, X, Y 同上, 如果以下条件成立:

1. $c\pi_0(E) \cong \mathbb{Z}[J^{-1}]$
2. X 是有限个胞腔的 CW 谱

那么 E-Adams 谱序列完全收敛到局部化 $[X, Y_E^\wedge]_* = \mathbb{Z}[J^{-1}] \otimes [X, Y]$ 。

定理 28.5.42 (收敛定理 2). E, X, Y 同上, 如果以下条件成立:

1. $c\pi_0(E) \cong \mathbb{F}_p$
2. Y 是连合谱 (回忆连合指负次数稳定同伦群是零)
3. X 是有限个胞腔的 CW 谱
4. $[X, Y]_*$ 的每个分次都是有限生成群

那么 E-Adams 谱序列完全收敛到 p -adic 完备化 $[X, Y_E^\wedge]_* \cong \varprojlim [X, Y]_* / p^n [X, Y]_*$

28.5.6 例子

例子. 如下谱是平坦交换环谱:

1. 球谱 S
2. Eilenberg-MacLane 谱 $H\mathbb{F}_p$
3. Thom 谱 MO, MU, MSp
4. 拓扑 K -理论谱 KO, KU

前两者是容易直接验证的。

例子. 如下谱不是平坦交换环谱

1. Eilenberg-MacLane 谱 $H\mathbb{Z}$
2. Thom 谱 MSU

例子 (Adams 谱序列). 1. 取 $X = S, E = H\mathbb{F}_p$, Adams 谱序列变成了

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p^*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Longrightarrow \pi_*(S) \otimes \mathbb{Z}_p^\wedge$$

其中 \mathcal{A}_p^* 是余 Steenrod 代数。

2. 取 $X = S, E = MU$, Adams 谱序列变成了

$$\mathrm{Ext}_{MU_*(MU)}(MU_*, MU_*) \Longrightarrow \pi_*(S)$$

(Adams-Novikov 谱序列)

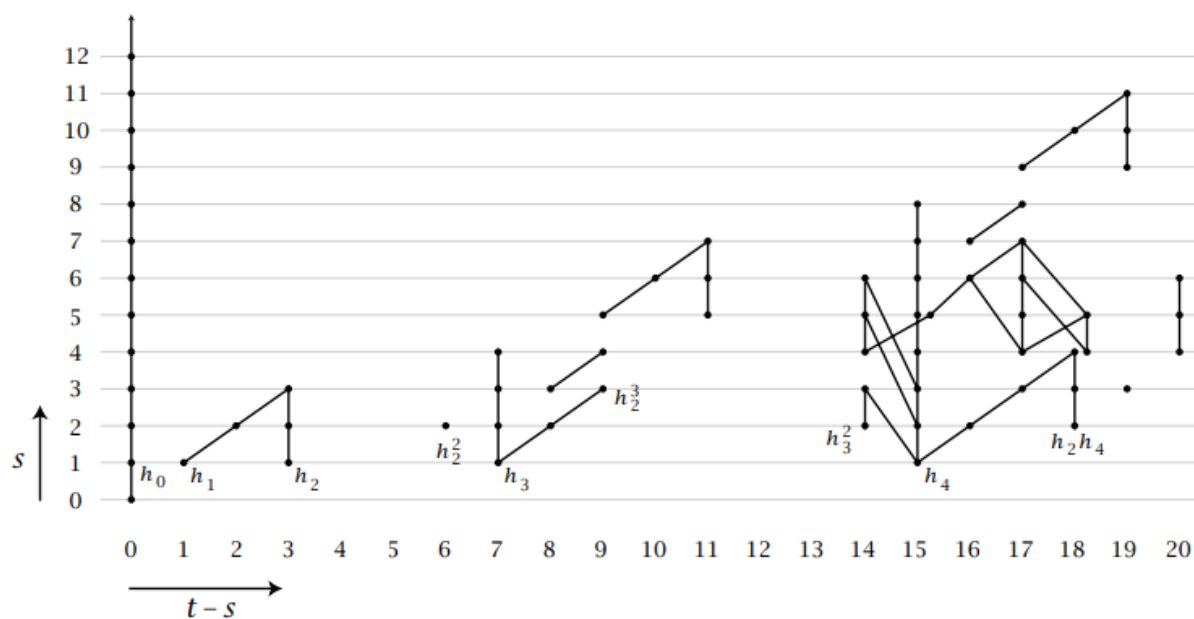
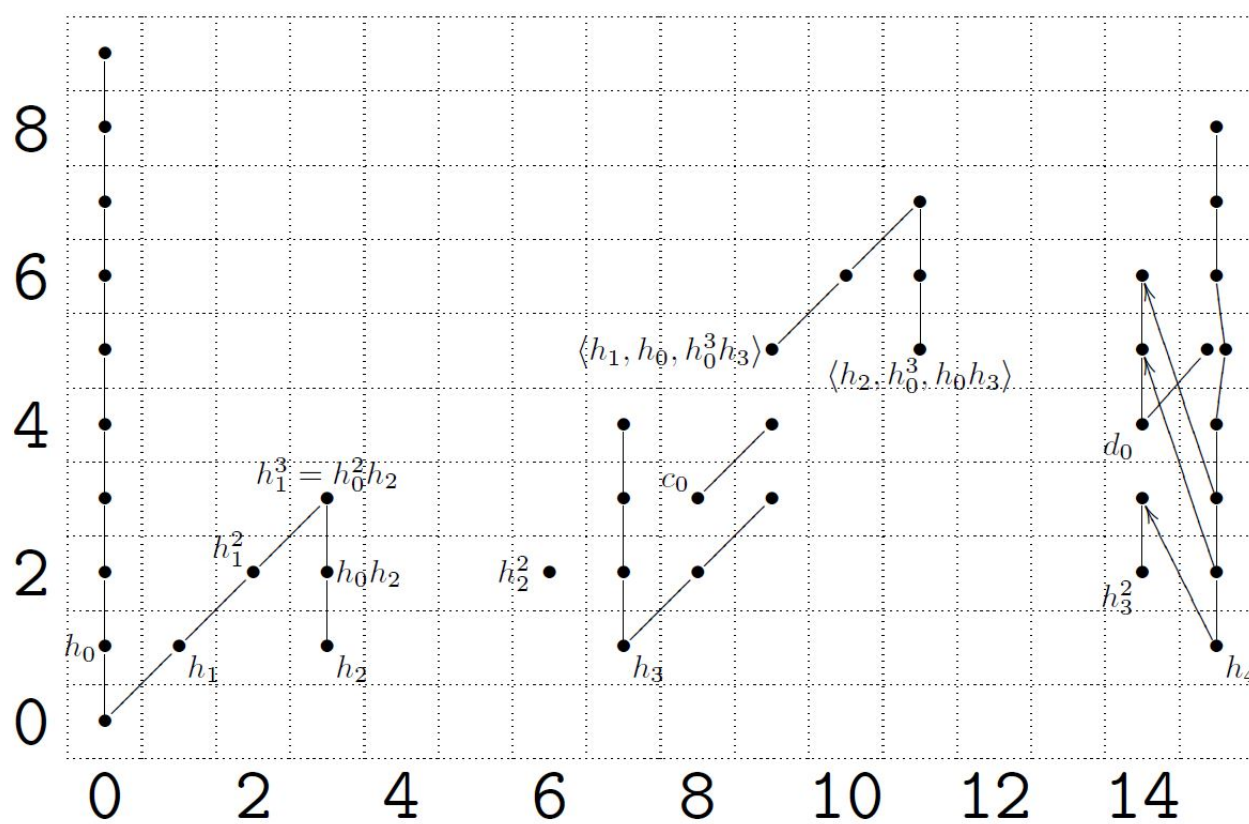
利用对 \mathbb{F}_2 的余 Steenrod 代数的计算, 我们得到了如下的图表, 于是我们对稳定同伦群的 2- 部分 $\pi_k(S) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$ 有了基本的了解。

28.6 对古典构造的评注

这一章节中我们迅速地介绍了最为原始的稳定同伦论的进展: 它们主要集中在对 CW-prespectrum 以及相关的研究上。但是在介绍这部分内容的经典教材 [Ada95] 中很容易注意到许多构造都是相当具有技术性的: 一个重要的例子就是对 smash product 的构造, 在相关章节中我们已经指出恰当选取构造是统一研究谱的一个障碍。

稳定同伦论的上述古典内容脱胎于 20 世纪中期的前沿代数拓扑内容, 并且反过来促进了这些内容的发展。在历史上稳定同伦论的第一个重要的应用正是 Adams 谱序列, 这是 Adams 在研究 Hopf Invariant One Problem 时引入的。尽管当时的代数拓扑学家们对稳定现象的认知还不是非常深刻, 但是 Adams 的这一工作被证明是划时代意义的。

与此同时一些和稳定同伦论共同发展的研究内容是 K -理论和配边理论: 前者引入了广义同调和上同调理论, 后者则是 Thom 将配边问题转化为对 Thom 谱的研究。

图 28.2: E_2 页图 28.3: E_∞ 页



以上是较早的稳定同伦论的大致内容以及一些在代数拓扑（乃至几何）上的应用。早期代数拓扑学家们尽管凭借着出色的直觉和对繁杂技术细节的不懈验证为稳定同伦论打下了基石，但是构造出的稳定同伦范畴仍然不尽如人意。

在讨论稳定同伦范畴时我们一般希望构造出的这个范畴满足如下性质：同样记谱范畴为 **Spectra**，以及稳定同伦范畴 **Ho(Spectra)**。

我们还需要 **Top*** 和 **Spectra** 之间的关系，因此谱范畴还应该配备有：

$$\Omega^\infty : \mathbf{Spectra} \rightarrow \mathbf{Top}^*$$

将每个 Spectrum E 映为 $\varinjlim \Omega^n E_n$

$$\Sigma^\infty : \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Spectra}$$

将每个拓扑空间 X 映为纬悬谱 $\Sigma^\infty X$

纬悬谱的 Ω 化: $QX = \varinjlim \Omega^n \Sigma^n X$ 。

Smash Product: \wedge

我们希望 **Spectra** 满足：

1. \wedge 使得 **Spectra** 是 symmetric monoidal 范畴
2. \wedge 的单位是球谱
3. Σ^∞ 是 Ω^∞ 的左伴随
4. 以下两个自然变换存在其一：

$$\varphi : (\Omega^\infty D) \wedge (\Omega^\infty E) \rightarrow \Omega^\infty (D \wedge E) \quad D, E \in \mathbf{Spectra}$$

$$\gamma : \Sigma^\infty (X \wedge Y) \rightarrow (\Sigma^\infty X) \wedge (\Sigma^\infty Y), \quad X, Y \in \mathbf{Top}^*$$

并且它们和 **Spectra**, **Top*** 中的单位子，交换子，结合子都是交换的。

5. 存在自然的弱等价

$$\theta : \Omega^\infty \Sigma^\infty \rightarrow QX, \quad X \in \mathbf{Top}^*$$

使得有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & \Omega^\infty \Sigma^\infty X \\ & \searrow \iota & \downarrow \theta \\ & & QX \end{array}$$

这里 ι 是自然的嵌入， η 是伴随对的单位。

我们需要确立一个意识： Ω -spectrum 相比 Prespectrum 是更为本质的，但是我们退而求其次考虑 Prespectrum 的原因是因为 Ω -spectrum 构成的范畴并不是完备的。

然而数学并不总是幸运的，[Lew91] 指出不存在任何构造满足上述要求。这说明我们在研究稳定同伦范畴时，对取同伦之前是什么没有一个良好乃至典范的选择。Adams 选择了 CW-Prespectrum，Boardman 则选择了另外的构造。这是因为早期的稳定同伦论研究者并没有挖掘

到稳定现象的根本，大家只是在跟随着几个传统代数拓扑的现象以及对 K-理论研究中自然浮出水面的现象在这门分支中开疆拓土。这并不是在说早期工作是没有意义的，事实上正是这些富有技术性的、并且展现了研究者的高超直觉的早期工作让大家意识到了这一切的背后是有深层内容存在的。

正如 J.P. May 的著名文章 [May98] 中提及的那样，理想主义色彩的野兔对现有的繁杂理论不满意，他希望找到一个推广到极致的精美理论；更为实用主义的乌龟则是希望在已有的稳定范畴上加以限制使得它最后得到一个满足足够好性质的数学对象。

从稳定同伦论这门学科的发展来看，我们最终看到野兔占据了上风：模型范畴、无穷范畴等诸多抽象分支在这之后蓬勃发展。我们在下一部分将会看到模型范畴这一个例子，在下一章则会看到对前述“稳定同伦范畴取同伦之前应该是什么”这个问题的一个野兔式的回答。

28.7 支线：模型范畴

至此我们停止对 Adams 构造的范畴的讨论，前文关于默认采用 Adams 构造的约定从本章开始取消，同样也暂时取消 $\mathbf{Spectra}$ 和 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 的定义。

模型范畴源于对同伦论的抽象化，简而言之我们通过在一个一般的范畴中指定一些特殊的态射（满足一些基本的性质），进而构建出一套同伦理论。接下来我们叙述模型范畴的定义，从定义很容易看出它和原有的代数拓扑中的同伦论之间的联系。

定义 28.7.1 (模型范畴，弱等价范畴). 一个模型范畴是一个范畴 \mathcal{C} 以及三类态射：

1. 弱等价： $W_{\mathcal{C}}$
2. 纤维化： $Fib_{\mathcal{C}}$
3. 余纤维化： $Cof_{\mathcal{C}}$

满足每一类态射在复合下封闭。

如果一个态射是弱等价且是纤维化，那么称它为 acyclic 纤维化，同理有 acyclic 余纤维化。我们还要求如下条件：

1. \mathcal{C} 有所有（小）极限和余极限，特别地有始对象和终对象
2. 所有同构都是弱等价
3. 弱等价满足 2-out-of-3 性质：即如果 f, g, gf 中的两个是弱等价，那么第三个也是
4. $(Cof_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}}, Fib_{\mathcal{C}})$ 和 $(Cof_{\mathcal{C}}, Fib_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}})$ 都是弱分解系统。

特别地，如果去除所有有关纤维化和余纤维化的定义，去除要求 1,3：那么仅称这个范畴为弱等价范畴。

定义 28.7.2 (弱分解系统). E, M 是 \mathcal{C} 的态射集的子集，称 (E, M) 是弱分解系统，如果以下成立：

1. E 恰好是对每个 M 中态射都具有左提升性质的全体态射



2. M 恰好是对每个 E 中态射都具有右提升性质的全体态射

3. 每个 C 中的态射 f 可以被分解为 $f = m \circ e, e \in E, m \in M$

注记. 给定弱等价和纤维化后, 余纤维化也被唯一确定了, 反之同理。

定义 28.7.3. 给定模型范畴 C , 一个对象 $X \in C$ 被称为

1. fibrant: 如果到终对象的态射是纤维化
2. cofibrant: 如果始对象到它的态射是余纤维化
3. bifibrant: 如果是 cofibrant 且 fibrant 的。

特别地, 如果一个函子将任何一个对象 X 变换到与之弱等价的 cofibrant 对象 QX , 即由模型范畴公理有分解

$$\emptyset \rightarrow QX \rightarrow X$$

那么称 Q 为 cofibrant replacement functor。

对偶地定义 fibrant replacement functor。

一般来说 bifibrant 的对象是我们真正要关心的对象, 但是这样的对象构成的全子范畴一般在范畴论角度而言并不具有很良好的性质, 正如之前 Spectrum 到 Prespectrum 一样, 这里模型范畴的构造思路也是某种妥协。

现在我们阐释如何从这三类态射得到一套同伦论:

定义 28.7.4. 给定模型范畴 C , 对象 $X \in C$ 。

1. X 的一个路径空间对象 $Path(X)$ 是 $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ 的 Acyclic Cofibration-Fibration 分解:

$$X \xrightarrow[\in W]{i} Path(X) \xrightarrow[\in Fib]{(p_0, p_1)} X \times X$$

2. X 的一个柱对象是 $\nabla_X : X \amalg X \rightarrow X$ 的 Cofibration-Acyclic Fibration 分解:

$$X \amalg X \xrightarrow[\in Cof]{(i_0, i_1)} Cyl(X) \xrightarrow[\in W]{p}$$

定义 28.7.5. 给定两个平行态射 $f, g : X \rightarrow Y$:

1. 左同伦 $\eta : f \Rightarrow_L g$ 是一个态射 $\eta : Cyl(X) \rightarrow Y$, 满足

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Cyl(X) & \longleftarrow & X \\ & f \searrow & \downarrow \eta & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array} .$$

2. 右同伦 $\eta : f \Rightarrow_R g$ 是一个态射 $\eta : X \rightarrow Path(Y)$ 满足

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \eta & \searrow g & \\ Y & \longleftarrow & Path(Y) & \longrightarrow & Y \end{array} .$$



注意到柱对象和路径空间对象都不是唯一的，但是在 X, Y 条件较好的情况下这没有影响：

命题 28.7.6 ([Hov99, Proposition 1.2.5]).

1. 如果 X 是 *cofibrant* 的，那么左同伦 $f \Rightarrow_L g$ 说明对于任何路径空间对象都有右同伦。
2. 如果 Y 是 *fibrant* 的，那么右同伦 $f \Rightarrow_R g$ 说明对于任何柱对象都有左同伦。
3. 如果 X 是 *cofibrant* 的， Y 是 *fibrant* 的，那么反复应用前两点即知同伦和柱对象以及路径空间对象的选取无关。

现在我们可以考虑同伦范畴了：

定义 28.7.7. 给定模型范畴 \mathcal{C} ，定义同伦范畴 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 为：

1. 对象为 \mathcal{C} 中的 *bifibrant* 对象
2. 态射为 \mathcal{C} 中态射的同伦类，上一命题说明 *bifibrant* 对象之间的态射集上左同伦和右同伦诱导的等价关系是相同的，并且和柱对象以及路径空间对象的选取无关。

可以验证这是良定义的，并且利用模型范畴的定义我们得到模型范畴的 Whitehead 定理：

引理 28.7.8 (Whitehead 定理). *Bifibrant* 对象之间弱等价等价于同伦等价。

因此利用这一结果容易验证

命题 28.7.9. 有范畴等价

$$\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}[W^{-1}]$$

后者是对弱等价做范畴的局部化。

这样我们就完成了抽象同伦论的搭建。为了方便理解，我们给出两个拓扑空间上的模型结构：

命题 28.7.10 (Quillen:[Hov99, Theorem 2.4.19]). f 是：

1. 弱等价：如果是弱同伦等价
2. 纤维化：如果是 *Serre* 纤维化
3. 余纤维化：如果它对每个 *acyclic* 纤维化都具有左提升性质

这使得 **Top** 构成了一个模型范畴。*Cofibration* 是 *Retract of Relative Cell Complex*，所有对象都是 *Fibrant* 的，*Cofibrant* 对象是 *Retract of Cell Complex* (态射 $f: X \rightarrow Y$ 是 *Relative Cell Complex* 如果 Y 是由 X 粘结胞腔得到的，并且 f 是自然的嵌入，*Retract* 指箭头范畴中的 *Retract*，即如下图表中的 $g: A \rightarrow B$)

$$\begin{array}{ccccccc} id_A: & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\ & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g. \\ id_B: & B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

命题 28.7.11 (Mixed). f 是:

1. 弱等价: 如果是弱同伦等价
2. 纤维化: 如果是 Hurewicz 纤维化
3. 余纤维化: 如果它对每个 acyclic 纤维化都具有左提升性质

这使得 **Top** 构成了一个模型范畴, *Cofibrant* 对象是具有 *CW* 复形同伦型的空间。

事实上 Mixed Model Structure 正是经典同伦论中使用的模型结构。

现在这两个例子已经为我们提供了一定的直觉了, 我们来考虑 Sequential Prespectrum 上的模型结构。实际上我们现在开始考虑的是一种更一般、更不那么具有技术性的稳定同伦范畴的构造, 我们在第 28.5 节开头的评注中曾经提及过它。

我们仍然考虑序列谱:

定义 28.7.12 (序列谱). **Spectra** 是指拓扑空间构成的 Prespectrum (一系列空间和一系列结构映射) 作为对象构成的范畴, 态射是 Adams 构造中定义的保持分次的 function: 即和结构映射交换的一族拓扑空间之间的映射。这里保持分次意指不允许这族映射对指标产生平移: 即只能形如 $\{f_n : X_n \rightarrow Y_n\}$ 。

我们现在为 **Spectra** 赋予两个模型结构:

定义 28.7.13 (Strict Model Structure). **Spectra** 中的一个态射 $f : X \rightarrow Y$ 是

1. strict 弱等价: 如果每个分量 $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ 都是 **Top_{Quillen}** 中的弱等价
2. strict 纤维化: 如果每个分量都是 **Top_{Quillen}** 中的纤维化
3. strict 余纤维化: 如果它对每个 acyclic 纤维化都具有左提升性质

回忆我们实际上对 Ω -谱感兴趣, 自然我们希望 Bifibrant 对象恰好是它们, 但是我们发现距离这个目标 Strict Model Structure 中的弱等价还是太少了: 模型范畴的重要结果 Bousfield Localization 指出为了达成我们这里的目标, 应当对弱等价做的更改是: 将逐分量弱等价修改为稳定弱等价 (即诱导了稳定同伦群的同构), 同时保持 strict 余纤维化不变。

定义 28.7.14 (Stable Model Structure). **Spectra** 中的一个态射 $f : X \rightarrow Y$ 是

1. stable 弱等价: 如果它诱导稳定同伦群的同构
2. stable 纤维化: 如果它对每个 acyclic strict 余纤维化都具有右提升性质
3. stable 余纤维化: 如果它是 strict 余纤维化



28.7.1 导出

尽管我们已经建立了模型范畴上的同伦论，但是需要考虑的是模型范畴和同伦范畴的关系：这个想法的自然来源很明显是同调代数中的导出范畴。

定义 28.7.15. 给定模型范畴 \mathcal{C} ，弱等价范畴 \mathcal{D} ，以及函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 。记 $\mathcal{C}_c, \mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{cf}$ 分别为 cofibrant 对象，fibrant 对象和 bifibrant 张成的全子范畴。

1. 如果 F 保持弱等价，则 F 诱导了函子

$$\mathbf{Ho}(F) : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$$

称为全导出函子

2. 如果 $F|_{\mathcal{C}_c}$ 保持弱等价，那么在相差自然同构意义下有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_c & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbb{L}F} & \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) \end{array}$$

其中 Q 是某个 cofibrant replacement functor， $\mathbb{L}F$ 称为 F 的左导出函子，满足

$$\mathbb{L}F(X) \cong F(QX)$$

3. 对偶地定义右导出函子 $\mathbb{R}F$

例子. 上链复形范畴的投射模型结构中 *cofibrant replacement* 就是投射消解，于是这就回到了同调代数中的导出函子。

拓扑空间范畴的 *Mixed Model Structure* 中 *cofibrant replacement* 就是 *CW* 逼近，于是左导出就变成了过渡到 *CW* 复形。

定义 28.7.16 (Quillen 伴随). 对于模型范畴 \mathcal{C}, \mathcal{D} ，一对伴随函子

$$(F \dashv G) : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$$

称为 Quillen 伴随，如果 F 保持余纤维化和 acyclic 余纤维化。注意提升性质说明 F 保持余纤维化 $\iff G$ 保持平凡余纤维化， F 保持平凡余纤维化 $\iff G$ 保持纤维化。

命题 28.7.17 ([Hov99, Lemma 1.1.12]). 模型范畴 \mathcal{C}, \mathcal{D} 之间的 Quillen 伴随函子 $(F \dashv G)$ 的导出函子 $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$ 都存在，并且它们是同伦范畴之间的伴随

$$(\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G) : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$$

定义 28.7.18 (Quillen 等价). 一对 Quillen 伴随是 Quillen 等价，如果它们诱导的 $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$ 是范畴等价。

命题 28.7.19. 对于赋予稳定模型结构的谱范畴 $\mathbf{Spectra}_{Stab}$, 伴随函子

$$(\Sigma \dashv \Omega) : \mathbf{Spectra} \rightleftarrows \mathbf{Spectra}$$

是 *Quillen* 等价, 其导出函子同构于平移函子

$$\mathbb{L}\Sigma \cong [1], \mathbb{R}\Omega \cong [-1]$$

这是一件很自然的事情: 毕竟 Σ 在稳定同伦群下的表现和 $[1]$ 无异: 同时这也部分指出了为什么谱范畴上“正确”的同伦论应当是将弱等价选取为稳定弱等价。

对于序列谱构造, 我们研究的稳定同伦范畴正是 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$: 它最终被证明是与 Adams 的构造处的稳定同伦范畴等价的。

28.8 传统理论的终点

20 世纪中后期, 稳定同伦论学家们费尽心思地寻找好的稳定同伦范畴, 他们做了许多尝试, 得到的不完美的构造包括

1. Adams 的构造: CW-Prespectrum
2. 序列谱: Sequential Spectrum
3. 对称谱: Symmetric Spectrum
4. 正交谱: Orthogonal Spectrum
5. Coordinate-free Spectrum

正如 [Lew91] 指出的, 这些努力注定没有完美的结局。人们逐渐意识到这件事情的本质是因为谱对象本身就难以在 $1-$ 范畴中处理, 因为一大难点就是这些构造都能得到正确的同伦范畴, 却不能够很好地回答在同伦之前是什么: 这实际上是高阶结构的某种隐约体现。

在这些工作中比较接近成功的是 [Elm97], 他们引入了 $S-$ 模并将整个谱范畴视为某种同伦意义上的代数理论: 这实际上已经很接近正确答案了。

尽管早在 1968-1972 年, Michael Boardman, Rainer Vogt and Peter May 就已经引入了 operad 的概念, 人们一开始并没有完全注意到其背后的深刻内容, 自 [Elm97] 以后人们才逐渐意识到高阶结构的重要性。随着近年来高阶范畴论的蓬勃发展, 稳定同伦范畴被发现是在 $\infty-$ 范畴中的一个自然出现的对象。

第二十九章 现代构造：稳定无穷范畴

29.1 无穷范畴的模型

我们首先简要地介绍高阶范畴的大致思路。高阶范畴给出的内容是在普通的态射（1-态射）之间有高阶的态射（2-态射），这种高阶信息可以被视作某种同伦，而取同伦范畴正是抹去了这一部分信息，这也是我们说用 1-范畴勉强处理谱这种高阶对象是困难的一个小证据。

下面我们来介绍无穷范畴的模型：首先值得注意的是单纯集天然就是描述普通范畴的一个模型：对象是 0-单形，态射是 1-单形，态射的复合通过 2-单形见证，等等等等。在这个观点下高阶范畴很自然地可以采用单纯集作为它的模型。

29.1.1 单纯集

我们将要在单纯集中引入模型结构，但是这件事情需要几何实现：即给定单形在某个范畴中的像，那么我们自然应该知道一个单纯复形在这个范畴中的像是什么：在拓扑空间上这就是把标准单形按照正确的方式粘合，对一般的范畴这实际上是一个一个相当广义的范畴论结果。

命题 29.1.1 (脉-几何实现伴随). 给定函子 $F : M \rightarrow T$ ，它沿 Yoneda 嵌入 $\mathbf{y} : M \rightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set})$ 的左 Kan 扩张是如下函子的左伴随：

$$\begin{aligned}
 T &\longrightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\
 x &\mapsto \text{Hom}_T(F-, X)
 \end{aligned}$$

即：

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\mathbf{y}} & \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\
 & \searrow F & \downarrow \text{Lan}_{\mathbf{y}} F \quad \uparrow X \mapsto \text{Hom}_T(F-, X) \\
 & & T
 \end{array}$$

定义 29.1.2 (单形范畴). 定义单纯范畴 Δ 如下：

其对象为所有形如 $[n] = \{0, \dots, n\}$ 的集合， $n \geq 0$

态射集 $\text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ 为所有集合 $[m]$ 到 $[n]$ 的保序映射构成。

Δ 中有面映射和退化映射，并且任何 Δ 中的态射都是若干面映射和退化映射的复合。

定义 29.1.3 (单纯集范畴). 定义单纯集范畴 $\mathbf{sSet} = \text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$ ，即 Δ 上的预层。

现在我们取 $M = \Delta$ 为单形范畴， $\text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$ 即为单纯集范畴 \mathbf{sSet} 。取 T 为拓扑空间范畴 \mathbf{Top} ， F 为将 Δ 的元素 n 映为标准单形 Δ^n ，单形范畴中的面映射和退化映射对应到标准单形的面映射和退化映射。那么我们就得到：



定理 29.1.4. 存在如下伴随对：

$$\mathbf{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow[\text{Sing}(-)]{\perp} \end{array} \mathbf{Top}$$

其中 $\text{Sing}(-)$ 为 *Singular simplicial complex* 函子， $|-|$ 则为几何实现。

利用几何实现，我们给出单纯集上的模型结构：

定义 29.1.5 (Horn). $0 \leq i \leq n$ ，单纯集 $\Delta_i[n]$ 定义为在 $\partial\Delta[n]$ 去掉第 i 个顶点所对的面得到的单纯集，称为单形 $\Delta[n]$ 的第 i 个尖角 (Horn)。

定理 29.1.6 ([Bal21, Proposition 6.1.3]). \mathbf{sSet} 上具有模型结构，称为 *Kan-Quillen* 模型结构：态射是

1. 弱等价：如果它对应着拓扑空间中几何实现的弱同伦等价
2. 余纤维化：如果它是单态射
3. 纤维化：如果它对所有 $\Delta_i[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ 具有右提升性质， $0 \leq i \leq n, n > 0$ 。
4. *acyclic* 纤维化：如果它对所有 $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ 具有右提升性质， $n \geq 0$ 。

所有对象都是 *cofibrant* 的。

如下结果说明单纯集实际上正确地描述了拓扑空间的同伦论：

定理 29.1.7 ([Bal21, Theorem 6.1.9]). 伴随函子

$$|-| \dashv \text{Sing} : \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$$

是 *Quillen* 等价。

定义 29.1.8 (Kan 复形). Kan 复形是 *Fibrant* 的单纯集。即它对尖角 $\Delta_i[n] \hookrightarrow \Delta[n], 0 \leq i \leq n, n > 0$ 满足右提升性质：直观上这是说每个尖角都能被填满。

注记. 回忆最开始的讨论：作为高阶范畴的模型，Kan 复形实际上展示的含义是高阶态射都被某个更高阶的态射见证了它的可逆性。特别地：拓扑空间在 Sing 下的像都是 Kan 复形，那么 $\text{Sing}|-|$ 是一个 *Fibrant Replacement Functor*。

这件事已经很好地解释了拓扑空间和 Kan 复形之间的紧密联系了。

然而在经典代数拓扑中，拓扑空间的“低阶”同伦信息恰好被基本群胚 Π_1 描述，那么这里自然我们可以将 Kan 复形视作 ∞ -群胚。

定义 29.1.9 (∞ -群胚). ∞ -群胚定义为一个 Kan 复形（它被称为 $(\infty, 0)$ -范畴：第二个指标的意义是高于 0 阶的态射都在相差更高阶态射的意义下可逆）

我们当然并不是总会处理所有阶态射都可逆的范畴，毕竟不是所有东西都有群胚的性质。但是我们希望处理的是和普通的范畴（或许现在叫它 1-范畴更好）差不多的对象：这里重要的观察是将上述论断翻译成单纯集后，它恰好是“内尖角”的提升性质：这里内尖角指 $\Delta_i[n], (0 < i < n)$ ，例如 $\Delta_1[2]$ 的可提升实际上就是 1-态射可复合。这催生了如下定义

定义 29.1.10 ($(\infty, 1)$ -范畴). $(\infty, 1)$ -范畴是指对内尖角 $\Delta_i[n] \hookrightarrow \Delta[n], (0 < i < n)$ 满足提升性质的单纯集，也可称它为拟范畴。



29.1.2 拟范畴

我们现在来看拟范畴是如何记录高阶信息的。

定义 29.1.11. 记拟范畴为 C

1. C_n 指 n 维单形
2. $x \in C_0$ 为 0 维单形, 称为 C 的对象
3. $f \in C_1$ 为 1 维单形, $d_0 f = x, d_1 f = y$, 称为 x 到 y 的态射
4. x 的恒同态射是指退化 1 维单形 $x \rightarrow x$, 记为 1_x
5. 如果存在 2 维单形 σ , 使得 $d_0 \sigma = g, d_2 \sigma = f, d_1 \sigma = h$, 那么称 h 为 g 和 f 的复合 (这个复合被 σ 见证)
6. $A \subset C_0$ 为对象的子集: 它张成的蛮子范畴指 C 的最大的单纯子集, 满足其包含的 0 维单形均为 A 中元素
7. 设 $f, g: x \rightarrow y$ 为 C 中态射: 称它们同伦, 如果以下等价条件成立:
 - (a) 存在 $1_x, f, g$ 拼成的 2 维单形
 - (b) 存在 $1_x, g, f$ 拼成的 2 维单形
 - (c) 存在 $f, g, 1_y$ 拼成的 2 维单形
 - (d) 存在 $g, f, 1_y$ 拼成的 2 维单形
 - (e) 存在 $1_x, 1_y, f, g$ 拼成的方块 ($\Delta[1] \times \Delta[1]$)
 - (f) 存在 $1_x, 1_y, g, f$ 拼成的方块

这些条件等价恰好是因为内尖角填充性质: 这里我们看到了 $(\infty, 1)$ 范畴实际上是某种可以“忽略”高阶结构的范畴。

作为推论: 态射的同伦是等价关系, 被态射复合保持, 并且态射的复合在同伦意义下是唯一的。

定义 29.1.12. 拟范畴 C 的同伦范畴是普通范畴 $\mathbf{Ho}(C)$, 满足对象是 C 中对象, 态射是 C 中态射的同伦类。

定义 29.1.13. C 为拟范畴, x, y 为 C 中对象:

1. 单纯集 $\mathrm{Hom}_C^>(x, y)$ 定义为

$$\mathrm{Hom}_C^>(x, y)_n = \{\sigma \in C_{n+1} | \sigma|_{\Delta\{0, \dots, n\}} = x, \sigma(n+1) = y\}$$

2. 单纯集 $\mathrm{Hom}_C^<(x, y)$ 定义为

$$\mathrm{Hom}_C^<(x, y)_n = \{\sigma \in C_{n+1} | \sigma(0) = x, \sigma|_{\Delta\{1, \dots, n+1\}} = y\}$$

3. 单纯集 $\text{Hom}_C^\square(x, y)$ 定义为

$$\text{Hom}_C^\square(x, y)_n = \{\sigma : \Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow C \mid \sigma|_{\Delta[n] \times \{0\}} = x, \sigma|_{\Delta[n] \times \{1\}} = y\}$$

定理 29.1.14. 上述定义的三种单纯集都是 Kan 复形，并且相互同伦等价（回忆单纯集的同伦等价是相对 \mathbf{sSet} 上的 Kan-Quillen 模型结构谈论的）

29.1.3 \mathbf{sSet} — 充实范畴

我们上述定义出的 $(\infty, 1)$ - 范畴是基于拟范畴模型的，注意到 $(\infty, 1)$ 相当于高于 1 阶的态射结构都是简单的（均可逆），因此一个自然的猜测是将一个普通范畴充实于 \mathbf{sSet} 能否得到类似的结论。如果这的确可行，那么这相比拟范畴模型无疑是一个更好的用来研究 $(\infty, 1)$ - 模型：一个简单的例子就是定义态射空间时不会有任何的选择上的困难。

现在我们考虑 \mathbf{sSet} — 充实范畴：态射空间的 0 维单形称为 1-态射，态射空间的 1 维单形称为 2-态射，称它为 1-态射之间的同伦。

例子.

1. \mathbf{sSet} 自身是 \mathbf{sSet} — 充实的：态射空间的 n 维单形对应于 $X \times \Delta[n]$ 到 Y 的单纯映射
2. \mathbf{Top} 是 \mathbf{sSet} — 充实的：态射空间赋予紧开拓扑后再取奇异单纯集：这相当于 $X \times \Delta^n \rightarrow Y$ 。

定义 29.1.15. \mathbf{sSet} — 充实范畴的 π_0 - 范畴是指先将态射空间的 \mathbf{sSet} 对象转化为 CW 复形的同伦范畴中的对象，再取 π_0 变为 \mathbf{Set} ：即考虑对应态射空间单纯集的几何实现的道路连通分支。

这样保持对象，将态射空间替换为道路连通分支得到的普通范畴称为 \mathbf{sSet} — 充实范畴 C 的 π_0 - 范畴 $\pi_0 C$ 。

我们来考虑拟范畴和 \mathbf{sSet} — 充实范畴之间的转换：这实际上依然是某种脉-几何实现伴随：我们需要定义一对伴随函子

$$(\mathcal{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$$

这只需要给出 $\Delta \rightarrow \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ 即可：直觉上 $\Delta[n]$ 应该对应着 $0 \rightarrow 1 \rightarrow \cdots \rightarrow n$ （回忆我们是如何使用 \mathbf{sSet} 作为范畴的模型的）。但是这里态射的复合是严格的，我们需要的是态射复合被高维态射见证的构造，那么这就是如下

定义 29.1.16. 对于 $n \geq 0$ ，定义 $C^n \in \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ ：它有对象 $0, 1, \dots, n$ ，态射空间

$$C^n(i, j) = \text{Nerve}(P_{ij})$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \emptyset & i > j \\ \text{Poset} : \{X \mid \{i, j\} \subseteq X \subseteq \{i, i+1, \dots, j\}\} & i \leq j \end{cases}$$

这里偏序集天然的是一个范畴，于是可以取脉得到单纯集。

实际上态射空间 $C^n(i, j)$ 就是沿着递增箭头从 i 走到 j 的方式，它同构于 $\Delta[1]^{j-i-1}$ 。



定义 29.1.17. 这样我们就给出了一对伴随函子

$$(\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$$

左伴随 \mathfrak{C} 限制到 Δ 上是上文定义的 \mathcal{C}^n , 右伴随 \mathfrak{N} 称为同伦脉函子。

直接验证知:

命题 29.1.18. \mathcal{C} 是 Kan 复形充实范畴, 那么 $\mathfrak{N}\mathcal{C}$ 是拟范畴。

之前我们提及过拟范畴中的三种态射空间之间是相互同伦等价的: 实际上将它过渡到 \mathbf{sSet} -充实范畴下这一性质仍然不变:

定理 29.1.19. 1. 给定拟范畴 \mathcal{C} , 那么有单纯集的弱等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \simeq \mathfrak{C}\mathcal{C}(x, y)$$

其中左侧 Hom 可以是任何一个前文定义的拟范畴的态射空间

2. 给定 Kan 复形充实范畴 \mathcal{C} , 那么有 Kan 复形的弱等价 (进而是同伦等价)

$$\mathcal{C}(x, y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{N}\mathcal{C}}(x, y)$$

其中右侧 Hom 可以是任何一个前文定义的拟范畴的态射空间

我们现在说明: 在恰当模型结构下, 伴随对 $\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}$ 是 Quillen 伴随。由于这里被关注的是 \mathbf{sSet} 中的拟范畴/ $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ 中的 Kan 复形充实范畴, 我们自然应当选取模型结构使得 Bifibrant 对象正是它们: 这是我们在这里抛弃 Kan-Quillen 模型结构的原因。

定义 29.1.20.

1. 一个 \mathbf{sSet} 中的态射是弱范畴等价, 如果对于任何拟范畴 X , 诱导的 \mathbf{sSet} -充实的态射空间 $\mathrm{Hom}(B, X) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, X)$ 之间的态射诱导的是将 \mathbf{sSet} 视为 1-范畴 (即抹去所有高阶信息) 之间的对象同构类的双射
2. 一个 $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ 中的态射 (即一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, \mathcal{C}, \mathcal{D} 是 \mathbf{sSet} -充实) 是 Dwyer-Kan 等价, 如果
 - (a) 对于任何 \mathcal{C} 中对象 x, y , F 诱导的 $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$ 是 \mathbf{sSet}_{Kan} 的弱等价
 - (b) 诱导了 $\pi_0 \mathcal{C} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}$ 的范畴等价
3. 一个 $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ 中的态射是 Dwyer-Kan 纤维化, 如果
 - (a) 对于任何 \mathcal{C} 中对象 x, y , F 诱导的 $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$ 是 \mathbf{sSet}_{Kan} 中的纤维化
 - (b) 对于任何 $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$, 以及 \mathcal{D} 中的同伦等价 $e : Fx \rightarrow d$, 存在 $c' \in \mathcal{C}$, 同伦等价 $p : c \rightarrow c'$ 使得 $Fp = e$ 。

定理 29.1.21 ([Bal21, Proposition 6.2.4, Proposition 11.1.4, Proposition 11.1.16]).

\mathbf{sSet} 具有 Joyal 模型结构: 态射是



1. 弱等价：如果是弱范畴等价
2. 纤维化：如果对所有 *acyclic* 余纤维化有右提升性质
3. 余纤维化：如果是单射

其 *Fibrant* 对象恰好为拟范畴 $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ 具有 *Bergner* 模型结构：态射是

1. 弱等价：如果它是 *Dwyer-Kan* 等价
2. 纤维化：如果它是 *Dwyer-Kan* 纤维化
3. 余纤维化：如果它对所有 *acyclic* 纤维化有左提升性质

其 *Fibrant* 对象恰好为 *Kan* 复形充实范畴

在这些模型结构下，

$$(\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet}_{\mathbf{Joyal}} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}^{\mathbf{Bergner}}$$

是 *Quillen* 等价。

推论 29.1.22 (拟范畴-Kan 复形充实范畴转换). 函子

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{R\mathfrak{C}} & \\ \mathbf{QCat}_{\mathbf{Joyal}} & & \mathbf{Cat}_{\mathbf{Kan}}^{\mathbf{Bergner}} \\ & \xleftarrow{\mathfrak{N}} & \end{array}$$

在相差弱等价的意义下互逆：这是由于 *Quillen* 等价中 $\mathbb{L}FRG$ 给出的函子和 1 自然同构，从同伦范畴退回到模型范畴层面上它给出的是同伦等价，于是再考虑导出函子的构造这就自然说明了推论。

29.1.4 模型范畴的局部化

我们指出模型范畴对弱等价做局部化也能得到 ∞ -范畴，进一步将无穷结构遗忘得到的则是同伦范畴：我们将这一观点严格叙述。

定义 29.1.23. \mathcal{C} 为拟范畴， W 为一些 1-单形的集合，那么 \mathcal{C} 对 W 的局部化为一个拟范畴 \mathcal{C}_W ，满足局部化泛性质（即如果 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 将 W 映到可逆边，则存在唯一的箭头 $\mathcal{C}_W \rightarrow \mathcal{D}$ ）

这里唯一是指拟范畴的范畴等价 $\mathbf{Func}(\mathcal{C}_W, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{Func}_{W \mapsto \text{inv}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ，其中右侧是所有将 W 可逆化的函子张成的满子范畴。

命题 29.1.24 ([Lur09, Proposition 3.1.3.7]). 局部化总是存在的。

29.2 极限

无穷范畴中的同伦等价可以理解为 1-范畴中的同构，因此自然值得期待的是无穷范畴中的（余）极限有类似 **Top** 中的同伦（余）极限的行为。我们将对上述提到的两个模型都各自定义极限：当然它们实际上是等价的，只是有计算简便程度上的区别。



拟范畴中的（余）极限

定义 29.2.1. 拟范畴 \mathcal{C} 中的对象 $x \in \mathcal{C}$ 称为始对象，如果 $\forall y \in \mathcal{C}$ ，态射空间 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 是可缩的，这里 Hom 可以是任何一个拟范畴的态射空间（回忆它们是同伦等价的）

命题 29.2.2. 拟范畴中 \mathcal{C} 的所有始对象张成的满子范畴如果非空，则一定是一个可缩 Kan 复形。

这是始对象唯一性的”无穷“版本。

定义 29.2.3. 设 \mathcal{C} 是拟范畴， K 是单纯集， $f: K \rightarrow \mathcal{C}$ 是 \mathcal{C} 中的图表，那么 f 的余极限就是仰范畴 $\mathcal{C}_{K/}$ 的始对象。于是余极限如果存在，那么一定张成可缩 Kan 复形。

极限同理。

Kan 复形充实范畴的（余）极限

前文定义的（余）极限是模仿普通范畴中的始（终）对象得到的，另一个思路是模仿普通范畴中 Hom-set 的泛性质：即 x 是图表 I 的余极限等价于 $\text{Hom}(x, y) \cong \varprojlim_{i \in I} \text{Hom}(i, y)$ 。为了采取这样的定义我们需要先定义单纯集的（余）极限。

定义 29.2.4. K 是 Kan 复形充实范畴，那么单纯充实函子范畴 $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$ 有两种模型结构：

1. 投射模型结构：弱等价和纤维化逐点定义，即一个自然变换 $\eta: F \Rightarrow G$ 是弱等价/纤维化如果对每个 K 中对象 X ， $\eta_X: FX \rightarrow GX$ 都是 $\mathbf{sSet}_{\text{Quillen}}$ 中的弱等价/纤维化
2. 内射模型结构：弱等价和余纤维化逐点定义

由定义，常值函子

$$c: \mathbf{sSet} \rightarrow \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$$

关于投射模型结构是右 Quillen 的，关于内射模型结构是左 Quillen 的。于是余极限函子（这里是普通范畴）关于投射模型结构是左 Quillen 的，极限函子关于内射模型结构是右 Quillen 的。

定义 29.2.5 (单纯集的同伦（余）极限). 设 K 是充实于 Kan 复形的范畴。

1. 同伦余极限函子

$$\text{hocolim}: \mathbf{Ho}(\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{sSet})$$

定义为左 Quillen 函子 $\text{colim}: \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet}) \rightarrow \mathbf{sSet}$ 的左导出，其中 $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$ 带有的是投射模型结构

2. 同伦余极限函子

$$\text{holim}: \mathbf{Ho}(\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{sSet})$$

定义为右 Quillen 函子 $\text{lim}: \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet}) \rightarrow \mathbf{sSet}$ 的右导出，其中 $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$ 带有的是内射模型结构



注记. 这个定义让我们看到了模型范畴的威力：我们想找的是同伦（余）极限，而给范畴附加上“正确”的同伦论（即和原有的同伦论等价）可以让我们利用导出直接给出正确的结果。前文的模型等价告诉我们转换到 Kan 复形充实范畴上是可行的，这里我们利用模型结构直接给出了同伦（余）极限

定义 29.2.6 (Kan 复形充实范畴的同伦（余）极限). \mathcal{C}, K 是 Kan 复形充实范畴，给定 (Kan 复形充实) 函子 $f: K \rightarrow \mathcal{C}$ 。

定义 K^\triangleright 是在 K 中添加一个终对象 $\{\infty\}$:

$$\mathrm{Hom}_{K^\triangleright}(x, \infty) = \{*\}, \mathrm{Hom}_{K^\triangleright}(\infty, x) = \emptyset, (x \in K)$$

同理定义 K^\triangleleft 。

1. f 的同伦余极限是指函子 $\bar{f}: K^\triangleright \rightarrow \mathcal{C}$ ，使得 $\bar{f}|_K = f$ ，并且对任何 $y \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{f}(\infty), y) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f(k), y)$$

是弱同伦等价。

2. f 的同伦极限是指函子 $\bar{f}: K^\triangleleft \rightarrow \mathcal{C}$ ，使得 $\bar{f}|_K = f$ ，并且对任何 $y \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))$$

是弱同伦等价。

注记. 这里需要解释一下

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))$$

是如何诱导的。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{holim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k)) \\ & \nearrow & \parallel \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) & \xrightarrow{\exists!} & \lim R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k)) & \xrightarrow{R_{\mathrm{sSet}}} & R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))] \end{array}$$

R_{sSet} 是 sSet 中的 Fibrant Replacement Functor：特别地这里 \mathcal{C} 是 Kan 复形充实范畴，因此 R 可以直接取为恒等，竖直等号是导出函子的定义。

两种模型种定义的（余）极限是一样的

定理 29.2.7. \mathcal{C}, K 是 Kan 复形充实范畴， $f: K \rightarrow \mathcal{C}$ ，那么拟范畴间的函子 $\mathfrak{N}f: \mathfrak{N}K \rightarrow \mathfrak{N}\mathcal{C}$ 有（余）极限 $\iff f$ 有（余）极限，并且两者给出的（余）极限是一致的。

因此我们可以利用这个结果将（余）极限的计算转化为单纯集层面上的计算，这是非常有用的。



29.3 稳定无穷范畴

我们现在考虑同伦推出（拉回）图表（即 $\Lambda_0[2]/\Lambda_2[2]$ ），在代数拓扑中有 $X \rightarrow *, X \rightarrow *$ 的推出是纤维 ΣX ； $* \rightarrow X, * \rightarrow X$ 的拉回是 ΩX ：这已经隐隐展现出稳定现象的实质了。

定义 29.3.1. ∞ -范畴（本节中 ∞ -范畴均指采取拟范畴为模型的 $(\infty, 1)$ -范畴）称为带点的，如果它有零对象 0 （即同时是始对象和终对象）

对于带点 ∞ -范畴 \mathcal{C} ，其中的三角指图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

余纤维序列指同时是推出的三角， Z 为 $X \rightarrow Y$ 的同伦余纤维；纤维序列指同时是拉回的三角， X 为 $Y \rightarrow Z$ 的同伦纤维。

稳定 ∞ -范畴是指带点 ∞ -范畴满足：每个态射都有同伦余纤维和同伦纤维，并且三角是余纤维 \iff 它是纤维。

定义函子 $\Sigma, \Omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 为 $\Sigma X = 0 \sqcup_X 0, \Omega X = 0 \times_X 0$

记 $X[n] = \Sigma^n X, X[-n] = \Omega^n X, n \in \mathbb{N}$

稳定 ∞ -范畴之间的函子是正合的，如果它保持零对象，余纤维序列和纤维序列。

注记. 现在我们看到了 cofiber 是 fiber 这个在古典构造里已经得知的结果在高观点下是本质重要的。

命题 29.3.2. Σ, Ω 是一对伴随函子：因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma X, Y) \simeq \{*\} \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \{*\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega Y)$$

注记. 拟范畴中伴随函子的定义为：在 $\mathrm{Func}_{\mathbf{sSet}}(\mathfrak{C}(C^{op} \times D), \mathbf{sSet})_{proj}$ 中： $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}D}(F-, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}C}(-, G-)$ 是弱等价。

进一步，在稳定范畴中 Σ, Ω 是互逆的。

命题 29.3.3 ([Lur17, Proposition 1.1.3.4, Proposition 1.4.2.27]). 带点 ∞ -范畴 \mathcal{C} 的以下性质等价：

1. \mathcal{C} 稳定
2. \mathcal{C} 有推出，并且 Σ 是等价
3. \mathcal{C} 有拉回，并且 Ω 是等价
4. \mathcal{C} 有推出和拉回，并且推出图表 \iff 拉回图表

现在我们考虑稳定 ∞ -范畴的同伦范畴，首先就是一个熟悉的结果：

定理 29.3.4. 稳定 ∞ -范畴的同伦范畴 $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 具有典范的三角范畴结构。



证明. 1. $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 有有限余积: 只需考虑 \mathcal{C} 的余积 (同伦余极限): $X[-1] \xrightarrow{0} Y$ 的同伦余纤维 Z 即满足要求:

$$\begin{aligned} Z &\simeq \operatorname{cofib}(X[-1] \xrightarrow{0} Y) \\ &\simeq \operatorname{cofib}(X[-1] \rightarrow 0) \sqcup \operatorname{cofib}(0 \rightarrow Y) \simeq X \sqcup Y \end{aligned}$$

2. $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 是加性的:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X[1], Y) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y) \times_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y) \\ &\simeq \Omega \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \end{aligned}$$

于是 $\pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \pi_2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X[-2], Y)$, 自然就有 Abel 群结构。

3. 好三角: $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ 中形如 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ 的序列为好三角, 如果它同构于一个可以提升为 \mathcal{C} 中如下图表的三角:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

注意 W 一定同构于 $X[1]$, 因为外层长方形也是推出-拉回方块

4. TR1: 显然

5. TR2:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \\ & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ & & 0 & \longrightarrow & V \end{array}$$

注意需要对正合三角做转置: 它恰好对应着态射取负号。

6. TR3: 余纤维是函子性的

7. TR4: 直接验证

□

现在将我们的理论应用到序列谱上: 回忆 **Spectra** 的稳定模型结构。它作为普通范畴当然是拟范畴, 对稳定模型结构的弱等价做局部化则得到一个拟范畴, 记为 \mathbf{Sp} , 容易发现 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ (作为模型范畴的同伦范畴) 就是 $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$ (作为拟范畴的同伦范畴), 这真正回答了稳定同伦范畴取同伦之前应当是什么这个问题: 答案是无穷范畴 \mathbf{Sp} 。



29.3.1 稳定化

我们要指出稳定化是一个在 ∞ -范畴中相当一般的构造：这个构造的来源依然是前面介绍的古典构造。我们可以将 Ω -谱理解成同调理论（Brown 可表），但是我们还可以更进一步，将它理解为一个函子

$$F : \mathbf{Top}_*^{\text{finCW}} \rightarrow \mathbf{Top}_*$$

它将 S^n 映为 E_n ，因此 F 将推出图表 ($S^{n+1} = 0 \sqcup_{S^n} 0$) 映为拉回图表 ($E_n = 0 \times_{E_{n+1}} 0$)。

然而推出方块映为拉回方块这个性质实际上就是某种切除性质/M-V 长正合列，我们自然可以考虑所有满足这个性质的函子 F ，它和 Ω -谱之间是对应的。因此谱可以视作某种取值在拓扑空间上的同调理论。

我们使用这个思路来定义一般的 ∞ -范畴中的谱对象：

定义 29.3.5. \mathcal{C}, \mathcal{D} 是 ∞ -范畴

1. 如果 \mathcal{C} 具有推出，称函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为切除函子，如果它将推出方块映到拉回方块
2. 如果 \mathcal{C} 具有零对象，称函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 为约化函子，如果它保持零对象。

记约化函子，约化切除函子（张成的全子）范畴为

$$\mathbf{Func}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathbf{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

定义 29.3.6. 空间范畴 $\mathcal{S} = \mathfrak{N}(\text{Kan})$ ：即全体 Kan 复形构成的范畴作为 Kan 复形充实范畴对应的 ∞ -范畴，其名称来源是 Quillen 等价 $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$ 。

有限空间范畴 \mathcal{S}^{fin} 定义为全体使得几何实现是有限 CW 复形的对象张成的全子范畴。

$$\mathcal{S}_*^{\text{fin}} := (\mathcal{S}^{\text{fin}})_{\{*\}}/$$

定义 29.3.7. 给定 ∞ -范畴， \mathcal{C} 中谱对象的范畴定义为

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) := \mathbf{Exc}_*(\mathcal{S}_*^{\text{fin}}, \mathcal{C})$$

函子 $\Omega^\infty : \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ 为谱对象在 S^0 处的值。

于是我们的稳定同伦范畴实际上就是 $\mathbf{Sp}(\mathcal{S}_*)$ ：这里遵循开头使用的解释，给定一个切除函子 $F \in \mathbf{Exc}_*(\mathcal{S}_*^{\text{fin}}, \mathcal{S}_*)$ ，我们将它对应到同调理论：

$$\tilde{F}_*(X) = \pi_*(F(X))$$

$$\tilde{F}_{-*}(X) = \pi_0(F(\Sigma X))$$

定理 29.3.8. 如果 \mathcal{C} 具有有限极限，那么 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$ 是稳定 ∞ -范畴。并且有一对伴随函子

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat}_\infty^{\text{stable}} & \xrightarrow{i} & \mathbf{Cat}_\infty^{\text{fin.lim.}} \\ & \xleftarrow{Sp} & \end{array}$$

这里左侧是稳定 ∞ -范畴和正合函子构成的子范畴，右侧是具有有限极限 ∞ -范畴和左正合函子（保持有限极限）构成的范畴， i 是含入。



29.3.2 对现代构造的评注

到此为止，我们完美地解答了谱范畴的本质是什么。现在距离古典同伦论学家眼里的理想理论只差 smash product 的构造了。[Lur17, Section 4.8.2] 指出利用左正合函子范畴上的张量积结构（函子复合），我们可以自然地给出谱范畴 \mathbf{Sp} 上的 smash product 结构，它满足一切需要的好性质（和三角结构相容的 symmetric monoidal structure etc.），我们利用现代的手段正确地给出了稳定同伦论的舞台。

站在 ∞ -范畴的高度上我们可以用代数的手段进行研究，这里举一个例子以展示其威力。首先回忆交换代数中的忠实平坦下降：

定义 29.3.9. 给定一个环同态 $R \rightarrow A$ ：

1. 其上的一个下降数据 (N, ϕ) 是指 A -模 N 以及 $A \otimes A$ -模同构： $\phi : N \otimes_R A \rightarrow A \otimes_R N$ ，使得：

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_R A \otimes_R A & \xrightarrow{\phi_{02}} & A \otimes_R A \otimes_R N \\ & \searrow \phi_{01} \quad \nearrow \phi_{12} & \\ & A \otimes_R N \otimes_R A & \end{array}$$

交换，这里 ϕ_{ij} 是指将 i, j 位的 A, N 交换用 ϕ 来描述，即： $\phi_{01} = \phi \otimes \text{id}_A$, etc.

2. 下降数据间的态射 $(N, \phi) \rightarrow (N', \phi')$ 是指一个 A -模同态 $\psi : N \rightarrow N'$ 使得它和 ϕ 交换。

很容易察觉到我们这里的定义实际上就是某种对单纯对象（实际上是余单纯对象）在 $\dim = 2$ 处的截断。我们来将这个想法严格说明：

定义 29.3.10. 给定 $R \rightarrow A$ ，有余单纯 R -代数

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \otimes_R A \quad \dots$$

其中对于余单纯态射 $\phi : [n] \rightarrow [m]$ ，对应的态射是

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \prod_{\varphi(i)=0} a_i \otimes \prod_{\varphi(i)=1} a_i \otimes \dots \otimes \prod_{\varphi(i)=m} a_i$$

记为 $(A/R)_*$ 。

一个 R -模 M 诱导了一个余单纯 $(A/R)_*$ -模： $(A/R)_* \otimes_R M$ 。

现在给定一个下降数据 (N, ϕ) ，我们都能构造一个余单纯 $(A/R)_*$ -模 N ：

$$N \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R N \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \otimes_R N \quad \dots$$

诸余单纯态射和前文定义是类似的，省略严格定义，仅列举如下即可理解其定义

$$\begin{array}{llllll} \delta_0^1 : & N & \rightarrow & A \otimes N & n & \mapsto 1 \otimes n \\ \delta_1^1 : & N & \rightarrow & A \otimes N & n & \mapsto \sum \alpha_i \otimes x_i \\ \sigma_0^0 : & A \otimes N & \rightarrow & N & a_0 \otimes n & \mapsto a_0 n \\ \delta_0^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes n \\ \delta_1^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto a_0 \otimes 1 \otimes n \\ \delta_2^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto \sum a_0 \otimes \alpha_i \otimes x_i \\ \sigma_0^1 : & A \otimes A \otimes N & \rightarrow & A \otimes N & a_0 \otimes a_1 \otimes n & \mapsto a_0 a_1 \otimes n \\ \sigma_1^1 : & A \otimes A \otimes N & \rightarrow & A \otimes N & a_0 \otimes a_1 \otimes n & \mapsto a_0 \otimes a_1 n \end{array}$$



对于每个 R -模 M , 我们有一个自然的下降数据 $(M \otimes_R A, can)$: 因此能够得到一个余单纯 $(A/R)_*$ -模, 而 R -模 M 自身也可直接得到一个余单纯 $(A/R)_*$ -模: 两者是同构的。

现在是下降理论的主定理:

定义 29.3.11. 称一个下降数据是有效的, 如果它同构于某个 R -模 M 诱导的自然下降数据 $(M \otimes_R A, can)$ 。

定理 29.3.12 (忠实平坦下降). 如果 $R \rightarrow A$ 是忠实平坦的, 那么任何下降数据都是有效的。并且 $M \mapsto (A \otimes_R M, can)$ 给出了 $R\text{-Mod}$ 和下降数据范畴之间的范畴等价。

注记. 我们在这里引入余单纯对象是因为我们最终看到在无穷范畴里描述下降数据 (等化子条件/cocycle condition) 的正确版本正是 totalization。这是很有道理的, 因为考虑 1 阶的情况这就是层的等化子条件, 于是这就回到了传统的层的下降 (前文的情况是 Affine Scheme 上的)。

下面来看 Adams 谱序列, 首先回忆对收敛项 X_E^\wedge 的描述:

定义 29.3.13. E_∞ -环是指 \mathbf{Sp} 中的交换幺半对象; 这里的交换是指无穷意义下的交换 (E_∞ -operad)。我们省略具体细节, 只需理解它是交换环谱在 ∞ -情况下的正确类比。

命题 29.3.14. 给定 E_∞ -环谱 E , X_E^\wedge 实际上是同伦极限 $Tot(E^* \wedge X) \simeq holim (E^n \wedge X)$ 。

我们大致描述为什么 Adams 谱序列是 descent 理论的应用: 我们考虑自然的映射 $Spec(E) \rightarrow Spec(\mathbb{S})$ (这很像 Scheme over \mathbb{Z})。仿照几何中的下降理论 (例如前文列举的例子是仿射概形 $Spec(A) \rightarrow Spec(R)$), 我们给出的是 $Spec(E)$ 上的“层”, 以及附加的下降数据; 期待获得的是 $Spec(\mathbb{S})$ 上的“层”, 使得它是拉回函子的逆。这里将 \mathbb{S} -模 X 视为 $Spec(\mathbb{S})$ 的拟凝聚层, 由于下降在这里只能给出 E -local 的信息, 我们实际上考虑的是 X_E^\wedge 。因此 Adams 谱序列实际上就是描述了 $Spec(E)$ 上的拟凝聚层 (谱序列的前两页) 到 $Spec(\mathbb{S})$ 上的拟凝聚层 (X_E^\wedge) 的计算。

具体来说有如下谱序列 [Lur17, Proposition 1.2.2.14]: 给定图表

$$\cdots X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots$$

记 $F_n = hofib(X_n \rightarrow X_{n+1})$, 有:

$$E_1^{p,q} = \pi_{p+q} F_{p-1} \Rightarrow \pi_{p+q} (\varprojlim X_\bullet)$$

(这是滤复形构造谱序列的类比)

现在给定余单纯对象 $Y: \Delta \rightarrow \mathbf{Sp}$, 就有

$$Tot Y \rightarrow \cdots \rightarrow Tot(cosk_2 Y) \rightarrow Tot(cosk_1 Y) \rightarrow Tot(cosk_0 Y) \rightarrow 0.$$

我们取 Y 为 $E^{\wedge_S^{*+1}} \wedge_S X: \Delta \rightarrow \mathbf{Sp}$, 于是谱序列第一页实际上就是计算 Ext 的 cobar resolution: 这就回到了 Adams 谱序列。

如果我们考虑一般的下降理论, 我们也有忠实平坦下降:

定理 29.3.15 (Lurie). 给定 E_∞ -环之间的态射 $R \rightarrow R'$, 我们仍然有 cobar construction

$$R' \rightrightarrows R' \otimes_R R' \rightrightarrows \cdots$$

∞ -范畴的下降数据是指 \mathbf{Cat}_∞ 中的 *totalization*:

$$Tot(Mod(R') \rightrightarrows Mod(R' \otimes_R R') \rightrightarrows \cdots)$$

$R \rightarrow R'$ 称为忠实平坦的, 如果

1. $\pi_0(R) \rightarrow \pi_0(R')$ 作为普通的交换环是忠实平坦的
2. $\pi_*(R) \otimes_{\pi_0(R)} \pi_0(R') \rightarrow \pi_*(R')$ 是同构。

那么有范畴等价:

$$Mod(R) \simeq Tot(Mod(R') \rightrightarrows Mod(R' \otimes_R R') \rightrightarrows \cdots)$$

第三部分

色展同伦论

第三十章 Bousfield 局部化

概要

介绍了一些对特殊的谱做局部化的性质，它们是代数中的局部化的直接类比，主要参考资料为 Bousfield 的原论文 [Bou79]。

30.1 定义和性质

在讨论 Adams 谱序列的过程中我们已经引进了 Bousfield 局部化以及幂零完备化的概念，现在我们进一步讨论这一操作。

首先我们回忆 Bousfield 局部化相关的定义，为此如同拓扑空间一样引入 mapping space 的概念：

定义 30.1.1 (Mapping space between spectrum). 定义 $map(X, Y) = \text{colim } map(X_n, Y_n)$ ，这里 $map(X_n, Y_n)$ 视作 Kan 复形，于是等价地是将拓扑空间之间的映射集赋予紧开拓扑后过渡成为 Kan 复形。

定义 30.1.2 (E-等价/acyclic/局部). 给定谱 E ：

1. $f: X \rightarrow Y$ 是 E -等价，如果诱导的 $E \otimes f: E \otimes X \rightarrow E \otimes Y$ 是等价。
2. X 是 E -acyclic 的，如果 $0 \rightarrow X$ 是 E -等价： $E \otimes X = 0$
3. X 是 E -局部的，如果对于任何 E -等价 f ， $[f, X]_*$ 都是同构；等价地 $map(Z, X) \rightarrow map(Y, X)$ 是等价。
4. X 是 E -局部的还等价于对任何 E -acyclic 谱 Y ， $Y \rightarrow X$ 的态射都是零态射；这等价于 $map(Y, X) \simeq 0$ 。

Bousfield 局部化是指：

命题 30.1.3. X 为一个谱，那么存在一个 E -局部谱 $L_E X$ 和 E -等价 $l: X \rightarrow L_E X$ 。特别地，嵌入函子 $Sp_E \subseteq Sp$ (Sp_E 指 E -局部谱) 有左伴随 $L_E: Sp \rightarrow Sp_E$ ，称为 E -局部化函子。

从模型范畴的角度来看，Bousfield 局部化是通过固定稳定同伦范畴（携带 Stable Model Structure）的余纤维化，将弱等价扩大为全体 E -等价诱导出来的函子。当然这依赖于一些模型范畴结果：

定理 30.1.4. 左 *Proper* 且 *Combinatorial* 的模型范畴总是有 (左) *Bousfield Localization*。

下面我们给出一些重要的性质:

命题 30.1.5 (E_* -Whitehead 定理). $X \rightarrow Y$ 是 E_* -局部谱之间的 E_* -等价, 那么它是弱等价。

命题 30.1.6. X 是环谱 E 上的模谱, 那么 X 是 E -局部的。

证明. 如果 A 是 E -acyclic 的, $f: A \rightarrow X$, 那么就有

$$A = \mathbb{S} \otimes A \xrightarrow{i \otimes 1} E \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} E \otimes X \xrightarrow{\mu} X$$

由 $E \otimes A = 0$ 即得结果。 □

定理 30.1.7. E -局部谱构成的对象集合在平移, 乘积, *Retract* 和 *Cofiber* 下封闭。更进一步: L_E 保持平移, *Wedge* 和同伦余纤维。

30.2 素数处的局部化

30.2.1 单个素数的局部化

定义 30.2.1. $\mathbb{S}[1/p] = \text{colim}(\mathbb{S} \xrightarrow{p} \mathbb{S} \xrightarrow{p} \cdots)$

于是 $\pi_*(\mathbb{S}[1/p] \otimes X) = \text{colim}(\pi_* X \xrightarrow{p} \cdots) = (\pi_* X)[1/p]$ 。现在由谱的 Whitehead 定理, $\mathbb{S}[1/p] \otimes X \simeq 0 \iff (\pi_* X)[1/p] = 0$, 于是:

命题 30.2.2. X 是 $\mathbb{S}[1/p]$ -acyclic 的 $\iff \pi_*(X)$ 的每个元素都是某个 p^n 挠元。

命题 30.2.3. X 是 $\mathbb{S}[1/p]$ -局部的 $\iff X$ 的乘 p 映射 $p: X \rightarrow X$ 可逆地作用在 $\pi_* X$ 上。

证明. 这是因为

$$\text{map}(Y, X) \cong \lim(\text{map}(Y, X) \xrightarrow{p} \cdots) \cong \text{map}(Y \otimes \mathbb{S}[1/p], X)$$

如果 Y 是 $\mathbb{S}[1/p]$ -acyclic 的, 那么 $Y \otimes \mathbb{S}[1/p] \simeq 0$, 从而 $\text{map}(Y, X) \simeq 0$, 这就说明了结果。 □

作为上文推论: 我们可以指出对 $\mathbb{S}[1/p]$ 的 Bousfield 局部化实际上是:

定理 30.2.4. $L_{\mathbb{S}[1/p]} X \cong \mathbb{S}[1/p] \otimes X =: X[1/p]$

证明. $X \rightarrow \mathbb{S}[1/p] \otimes X$ 是等价: 因为 $\mathbb{S}[1/p] \otimes X \rightarrow \mathbb{S}[1/p] \otimes \mathbb{S}[1/p] \otimes X$, 然而

$$\mathbb{S}[1/p] \otimes \mathbb{S}[1/p] = \text{colim}(\mathbb{S}[1/p] \xrightarrow{p} \cdots) \cong \mathbb{S}[1/p]$$

这就说明了这是 $\mathbb{S}[1/p]$ -等价。

$\mathbb{S}[1/p] \otimes X$ 是局部的: 应用前一命题。 □

30.2.2 多个素数的局部化

定义 30.2.5. 对于素数集 $S = \{p_1, \dots\}$, 定义

$$\mathbb{S}[S^{-1}] = \text{colim}(\mathbb{S} \xrightarrow{p_1} \mathbb{S} \xrightarrow{p_1 p_2} \mathbb{S} \xrightarrow{p_1 p_2 p_3} \dots)$$

我们依然有:

定理 30.2.6. X 是 $\mathbb{S}[S^{-1}]$ -局部的, 如果每个 p 都可逆地作用在 X 上, 即 X 对每个 $p \in S$ 都是 $\mathbb{S}[1/p]$ 可逆的。进一步, Bousfield 局部化为

$$L_{\mathbb{S}[S^{-1}]}X \cong \mathbb{S}[S^{-1}] \otimes X =: X[S^{-1}]$$

特别地, 如同交换代数中那样, 我们记 $X_{(p)} = L_{\mathbb{S}[S^{-1}]}X$, 其中 S 为 $P - \{p\}$, P 为全体素数。

记号 30.2.7. 称谱是 p -acyclic/局部的, 如果它是 $\mathbb{S}_{(p)}$ -acyclic/局部的。

30.2.3 有理化

在前一情况中取 S 为全体素数, 定义为有理化: $L_{\mathbb{S}}[P^{-1}] =: X_{\mathbb{Q}}$ 。计算 $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$ 的同伦群, 容易知其为:

命题 30.2.8.

$$\pi_* \mathbb{S}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是由 Whitehead 定理 $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}} \cong H\mathbb{Q}$ 。

命题 30.2.9. 如果 X 是有理谱 (每阶同伦群都是 \mathbb{Q} -线性空间), 那么存在等价:

$$X \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n H \pi_n X$$

证明. 对 $\pi_n(X)$ 取出一组 \mathbb{Q} -基 $(e_i^{(n)})$, 那么有:

$$\bigoplus \Sigma^n \mathbb{S} \xrightarrow{e_i^{(n)}} X$$

于是它穿过左侧的有理化, 从而给出了

$$i_n : H \pi_n(X) \cong \bigoplus \Sigma^n H\mathbb{Q} \rightarrow X$$

因此 $\bigoplus_n i_n$ 诱导了同伦群的同构, 从而是等价。 □

推论 30.2.10 (Chern 特征的分类性). $KU^0(X)_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus H^{2n}(X; \mathbb{Q})$

证明. $KU^0(X)_{\mathbb{Q}} = \pi_0 \text{map}(\Sigma^{\infty} X_+, KU)_{\mathbb{Q}}$ 然后利用 $KU^{\mathbb{Q}} = \bigoplus \sigma^{2n} H\mathbb{Q}$ 就得到了结果。 □



30.3 对 Moore 谱的局部化、对素数的完备化

现在我们研究对 Moore 谱的局部化。

定义 30.3.1 (Type of acyclicity). 两个 Abel 群 G_1, G_2 具有相同的 type of acyclicity, 如果对每个素数 p , G_1 是 p 可除的 $\iff G_2$ 是; 它在 G_1 中是挠 \iff 在 G_2 中是。

命题 30.3.2. G_1, G_2 具有相同的 type of acyclicity \iff 对应的 Moore 谱 SG_1, SG_2 给出了弱等价的局部化函子。

证明. 这是 Universal Coefficient 的直接推论: 由命题 28.3.6, 可以直接验证 SG_1, SG_2 的 acyclic 对象完全由 type of acyclicity 决定。 \square

因此为了研究 Moore 谱的局部化, 我们只需考虑局部化 $G = \mathbb{Z}_{(J)}$ (J 是素数的集合) 和 $G = \bigoplus_{p \in J} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。首先我们来看第一种情况:

命题 30.3.3. 如果 $G = \mathbb{Z}_{(J)}$, 那么 $L_{SG}X \simeq SG \otimes X$, 并且 $\pi_* L_{SG}X \cong G \otimes \pi_* X$ 。一个谱是 SG -局部的 $\iff \pi_* X$ 是对于每个 $p \notin J$, $\pi_*(X)$ 都是 p 可除的。

证明. 由于 SG 是环谱, 那么 $SG \otimes X$ 是 SG 上模谱, 于是是 SG -局部的。那么: $X \cong S \otimes X \xrightarrow{e \otimes 1} SG \otimes X$ 给出了 SG -等价: 这是由 SG 是环谱直接决定的 ($SG \otimes S \rightarrow SG \otimes SG \rightarrow SG$)。 \square

下面研究 $\bigoplus_{p \in J} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的情况。

定义 30.3.4. 定义 \mathbb{S}/p^∞ 为 $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}[p^{-1}]$ 的 cofiber (这源于 $\mathbb{Z}/p^\infty = \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$)。另一方面它还是

$$\text{colim}(S\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \cdots)$$

命题 30.3.5. $G = \bigoplus_{p \in J} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 那么 $L_{SG}(X) \simeq \prod_{p \in J} \text{map}(\Sigma^{-1}\mathbb{S}/p^\infty, E)$

证明. 首先我们考虑一个素数的情况: 即对 $S\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 做局部化, 此时只需考虑 $E \rightarrow \text{map}(\Sigma^{-1}\mathbb{S}/p^\infty, E)$: 它的 fiber 是 $\text{map}(\mathbb{S}[1/p], E)$, 因此是 \mathbb{S}/p -acyclic 的, 这就说明了结果。 \square

定理 30.3.6 (Arithmetic Fracture Square). 存在自然的同伦拉回方块:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & L_{\mathbb{S}/p}E \\ g \downarrow & & \downarrow \\ E[1/p] & \longrightarrow & (L_{\mathbb{S}/p}E)[1/p] \end{array}$$

证明. 取出同伦拉回 P , 那么就有 $E \rightarrow P$, 取出它的 Fiber: F 。现在我们考虑局部化 $L_{\mathbb{S}/p}$: 它保持拉回推出方块和 Fiber-Cofiber, 于是 F 的 \mathbb{S}/p 局部化就是原方块做局部化得到的 Fiber: 直接计算发现它是平凡的: 因此 F 是 \mathbb{S}/p -acyclic 的, 从而 p 可逆地作用在 F 上, 于是 $F = F[1/p]$ 。

然而 $F[1/p]$ 是如下方块的左上角到同伦拉回的纤维 (Total Fiber)

$$\begin{array}{ccc} E[1/p] & \longrightarrow & (L_{\mathbb{S}/p}E)[1/p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ E[1/p] & \longrightarrow & (L_{\mathbb{S}/p}E)[1/p] \end{array}$$

于是这是零, 因此 $F = 0$, 从而完成了证明。 \square

定理 30.3.7 (Arithmetic Fracture Square).

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & \prod_p L_{\mathbb{S}/p} X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & (\prod_p L_{\mathbb{S}/p} X)_{\mathbb{Q}}
 \end{array}$$

第三十一章 形式群律、BP 和 LEFT

概要

介绍了形式群律和复定向环谱的关系，以及它的 p -局部化版本，同时还给出了其中出现的代数结构 (MU_*, BP_*) 的基本性质，主要参考资料为 [Rav86]。

31.1 形式群律、Lazard 环和 MU

定义 31.1.1 (形式群律). 给定交换幺环 R , R 上的形式群律是指一个形式幂级数 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ 满足

1. $F(x, 0) = F(0, x) = x$
2. $F(x, y) = F(y, x)$
3. $F(x, F(y, z)) = F(F(y, z), x)$

定义 31.1.2 (形式群律的同态). 形式群律 F, G 之间的同态是指一个 $f(x) \in R[[x]]$, 使得 f 常数项为 0, 并且 $f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$. 称它是同构, 如果它可逆: 等价地 $f'(0)$ 在 R 中是单位; 称它是严格同构, 如果 $f'(0) = 1$.

定理 31.1.3 (万有形式群律). 存在一个环 (称为 Lazard 环) L 以及其中的一个形式群律 $F(x, y)$, 使得对于任何环 R 中的形式群律 G , 都存在唯一的 $\theta: L \rightarrow R$, 使得 $G = \theta(F)$. 即 $R \mapsto \{\text{formal group laws over } R\}$ 是被 L 可表的。

证明. 取 $L = \mathbb{Z}[a_{ij}]/I$, I 是商去使得形式群律的要求满足的理解: 例如 $a_{1,0} - 1, a_{0,1} - 1, \text{etc.}$ (这里 a_{ij} 是未定元), 那么 $\sum a_{ij}x^i y^j$ 满足要求。□

对 Lazard 环我们有如下确切形式的描述:

定理 31.1.4 (Lazard). $L = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, 其中 $|x_i| = 2i, i > 0$ 。

现在我们回到复配边的情况:

定义 31.1.5 (复定向). 对于一个环谱 E , 一个复定向是指 $x_E \in E^2(\mathbb{C}P^\infty)$, 使得它的限制:

$$E^2(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow E^2(\mathbb{C}P^1) = E^2(S^2) \cong \pi_0(E)$$

是 1。



引理 31.1.6. 对于复定向的环谱 E :

1. $E^*(\mathbb{C}P^\infty) = E_*[[x_E]]$
2. $E^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = E_*[[x_E \otimes 1, 1 \otimes x_E]]$
3. 由于线丛的分类空间 $BU(1)$ 正是 $\mathbb{C}P^\infty$, 那么线丛的张量积诱导了一个映射 $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, 那么取

$$F_E(x, y) \in E_*[[x, y]]$$

为

$$t^* : E^*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow E^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$$

中 x_E 的像, 那么直接验证知 F_E 是 E_* 中的形式群律。

这里 E_* 指 $\pi_*(E) = E^*(pt.) = E_*(pt.)$

证明. 前两个命题是由 Atiyah-Hirzebruch 谱序列直接计算得到的。□

现在我们知道一个复定向 x_E 给出了 E_* 上的形式群律 F_E , 于是就存在一个环同态 $\theta_E : L \rightarrow E_*$ 表出这个形式群律。我们的主定理是连接“代数”的形式群律和“拓扑”的复配边:

定理 31.1.7 (Quillen). θ_{MU} 是同构。

这说明就谱的意义而言, MU 是所有形式群律的万有者。

我们再来考虑 $MU_*(MU)$: 计算可知它是 $\pi_*(MU)$ 上的自由模, 于是 MU 是平坦环谱, 从而 $(\pi_*(MU), MU_*(MU))$ 给出了 Hopf 代数胚。正如同 MU 对应着 Lazard 环一样, 我们有这个 Hopf 代数胚到一个纯代数结构的同构, 我们现在研究它。

定义 31.1.8. 函子 FGL 将 R 映为 R 上全体形式群律构成的集合; SI 将 R 映为全体如下三元对构成的集合: $(F, f, G), F, G \in FGL(R), f : F \rightarrow G$ 是严格同态。

命题 31.1.9.

$$FGL(-) = \text{Hom}_{CRing}(L, -), SI(-) = \text{Hom}_{CRing}(LB, -)$$

其中 $LB = L \otimes \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$, 其中 $|b_i| = 2i$ 。

证明. 第一部分已证; 对于第二部分, 因为 (F, f, G) 被 F, f 完全决定: 前者给出了 L 的部分; 后者: $f(x) = x + \sum f_i x^{i+1}$ 由 $\theta : LB \rightarrow R : \theta(b_i) = f_i$ 决定, 这就说明了结果。□

我们现在注意到 $(FGL(R), SI(R))$ 有着天然的 Hopf 代数胚结构: 因为它是一个天然的 Internal 群胚: SI 是 Internal Morphism 对象, FGL 则是 Internal Object 对象。取起点和终点以及复合运算都是 SI 的结构 (F, f, G) 直接给出的。因此 (L, LB) 具有 Hopf 代数胚的结构。

然而我们发现 $MU_*(MU)$ 具有和 LB 一样的代数结构: 这是如下结果说明的。

引理 31.1.10. E 是复定向环谱, $E_*(MU) = E_*[b_1^E, b_2^E, \dots]$, 同样有分次 $|b_i^E| = 2i$ 。

定理 31.1.11 (Novikov, Landweber). $\theta_{MU} : L \rightarrow MU_*$ 可以自然地延展到 $LB \rightarrow MU_*(MU)$ 上: $b_i \mapsto b_i^{MU}$, 那么这给出了 Hopf 代数胚之间的同构

$$\theta_{MU} : (L, LB) \rightarrow (MU_*, MU_*MU)$$

31.2 Brown-Peterson 谱

我们下面考虑 p -局部化的情况:

定义 31.2.1. 给定 R 上的一个形式群律 F , 假设 x, y 是 R 代数 A 中的元素, 那么定义 $x +_F y = F(x, y)$ (如果 $F(x, y) \in A$).

特别地, 对于 K -代数 R 上的形式群律, K 是 \mathbb{Q} 的子环, 那么对于每个 $r \in K$, 都存在一个形式幂级数 $[r]_F(x)$ 使得:

1. r 是非负整数时 $[r]_F(x) = x +_F \cdots +_F x$
2. $[r_1 + r_2]_F(x) = F([r_1]_F(x), [r_2]_F(x))$
3. $[r_1 r_2]_F(x) = [r_1]_F([r_2]_F(x))$

证明. 对于第二个命题, 我们简单概述证明: 首先存在形式逆 $i(x)$, 即 $F(x, i(x)) = 0$; 其次 $[r]_F(x) \equiv rx \pmod{x^2}$, 于是如果 $d \in \mathbb{Z}$ 在 K 中可逆, 那么定义 $[d^{-1}]_F(x) = [d]_F^{-1}(x)$ 即可. \square

现在对于在环 R 中可逆的一个自然数 $q = q \cdot 1$, 取

$$f_q(x) = [1/q]_F(\sum_{i=1, \dots, q}^F \zeta^i x)$$

定义 31.2.2. $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上代数 R 上的形式群律 F 称为 p -typical 的, 如果 \forall 素数 $q \neq p$, $f_q(x) = 0$.

我们有:

定理 31.2.3 (Cartier). 每个 $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上的形式群律都典范地和一个 p -typical 形式群律严格同构。

于是我们同样给出一个万有的 p -typical 形式群律。

定理 31.2.4. 取 $V = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots], |v_n| = 2(p^n - 1)$. 那么存在 V 上的万有 p -typical 形式群律, 即: 对于任何 $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 R 上的形式群律, 存在唯一的环同态 $\theta: V \rightarrow R$ 使得它是万有形式群律的像。

更进一步, 万有 p -typical 形式群律由某个 $L \rightarrow V$ 表出, 但是由于 V 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数, 这可以提升为 $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow V$. 此时这个映射是满的, 并且 V 是 $L \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 的直和因子。

同样如同 L 和 LB 给出形式群律和严格同态构成的群胚一样, 我们自然也希望对于 V 也有这样的构造: 首先我们要确认 (F, f, G) 应该选取如何:

引理 31.2.5. 对于 $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 R 上的 p -typical 形式群律 F , $f(x)$ 是 $F \rightarrow G$ 的一个形式群律之间的同构: 那么 G 是 p -typical 的, 如果

$$f^{-1}(x) = \sum_{i \geq 0}^F t_i x^{p^i}$$

其中 $t_i \in R, t_0$ 是 R 中的单位。

于是我们立刻可以看出 $VT = V \otimes \mathbb{Z}_{(p)}[t_1, t_2, \dots]$ 表示的是 p -typical 形式群律之间的严格同构, 因此 (V, VT) 是一个 Hopf 代数胚。



定义 31.2.6 (Brown and Peterson, Quillen). 对任何素数 p , 存在唯一的环谱 BP , 使得它是 $MU_{(p)}$ 的 retract (即 $\text{id} : BP \rightarrow BP$ 可以分解为 $BP \rightarrow MU_{(p)} \rightarrow BP$) 使得 $g : MU_{(p)} \rightarrow BP$ 是保持乘法的, 并且

1. $\pi_*(BP) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[g_*(m_{p^k-1}) | k > 0]$, 并且对于 $n \neq p^k - 1$, $g_*(m_n) = 0$
2. $H_*(BP; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = P_*$
3. $\pi_*(BP) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \dots]$, 其中 $v_n \in \pi_{2(p^n-1)}$ 并且 $\pi_*(g)\theta_{MU_{(p)}}$ 穿过 $L \times \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow V$, 进一步给出 V 到 $\pi_*(BP)$ 的同构。

并且再一次地, 我们有:

定理 31.2.7 (Quillen, Adams). $Hopf$ 代数胚 $(\pi_*(BP), BP_*BP)$ 和 (V, VT) 同构。

我们再研究 BP_* 的结构:

定理 31.2.8 (Morava, Landweber). 取 $I_n = (p, v_1, \dots, v_{n-1}) \subset BP_*$, 那么:

1. I_n 是 BP_*BP 余模
2. 对于 $n > 0$,

$$\text{Ext}_{BP_*BP}^0(BP_*, BP_*/I_n) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[v_n]$$

并且

$$\text{Ext}_{BP_*BP}^0(BP_*, BP_*) = \mathbb{Z}_{(p)}$$

3.

$$0 \rightarrow \Sigma^{2(p^n-1)} BP_* I_n \xrightarrow{v_n} BP_*/I_n \rightarrow BP_*/I_{n+1} \rightarrow 0$$

是 BP_*BP 余模的短正合列

4. I_n 是唯一的同时是 BP_*BP 余模的 BP_* 中的素理想。

定理 31.2.9 (Landweber filtration theorem, 1973). 对于任何 BP_*BP 余模 M , 只要它作为 BP_* 模是有限展示的, 那么它就有一列余模的滤过

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

使得每个 $M_{i+1}/M_i \cong BP_*/I_{n_i}$ 。

31.3 Landweber 正合函子定理

定义 31.3.1 (谱定向). 给定环谱, X 上的 n 维向量丛的 E -定向是指一个 E -Thom 类: 即

$$u \in E^n(Th(V))$$

使得拉回在每条纤维的一点紧化 S^n 上都有:

$$i^*u = \varepsilon \cdot \gamma_n$$

这里 i 是指嵌入 $S^n \hookrightarrow Th(V)$, 满足:



1. $\varepsilon \in E^0(S^0)$ 是 E^* 中的单位
2. $\gamma_n \in E^n(S^n)$ 是 E^* 的乘法单位元在维悬同构下的像。

引理 31.3.2. 万有线丛的 Thom 空间和底空间弱同伦等价 (按照零截面嵌入), 即

$$BU(1) \xrightarrow{\simeq} MU(1)$$

证明. 我们选取 $\mathbb{C}P^\infty$ 作为一个具体的模型, 它在弱同伦等价意义下唯一。

$$S^1\text{-bundle over } BU(1) \simeq U(1)\text{-bundle over } BU(1) \simeq *$$

现在

$$\begin{aligned} BU(1) &\simeq \text{Disk bundle over } BU(1) \\ &\simeq \text{Disk bundle over } BU(1)/* \\ &\simeq \text{Disk bundle over } BU(1)/S^1\text{-bundle over } U(1) \\ &Th(BU(1)) \end{aligned}$$

从而这就说明了结果。 □

定理 31.3.3. 以下等价:

1. E 是复定向环谱
2. 每个复向量丛都是 E -定向的。

证明. $2 \implies 1$. 考虑 $BU(1)$ 上的万有线丛 γ_1 上的 E -定向, 那么这就给出了 $E^2(Th(\gamma_1))$ 的一个满足要求的元素, 但是 $Th(\gamma_1) \simeq BU(1) \simeq \mathbb{C}P^\infty$, 这就直接给出了 E 的复定向。

$1 \implies 2$. 考虑分裂原理即可。 □

仿照普通的 Thom 同构一样, 我们有

推论 31.3.4 (Thom 同构). 对于 E -定向 n 维向量丛 $V \rightarrow X$, 有同构:

$$E_{*+n}(Th(V)) \xrightarrow{\sim} E_*(X)$$

作为推论, 立刻得到:

推论 31.3.5.

$$E_{*+2n}(MU(n)) \longrightarrow \sim E_*(BU(n))$$

但是 $MU = \text{hocolim } \Sigma^{\infty-2n} MU(n)$, $BU = \text{colim } BU(n)$, 就有:

$$E_*(MU) \cong E_*(BU)$$

对于上同调同理。

我们现在指出万有复定向的存在性:



定理 31.3.6 (万有复定向). 存在如下集合之间的双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(MU, E) \cong \{\text{complex orientations on } E\}$$

证明. 定义

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(MU, E) &\longrightarrow \{\text{complex orientations on } E\} \\ (f : MU \rightarrow E) &\longmapsto f_*(x^{MU}) \end{aligned}$$

这里 x^{MU} 是 MU 上自然携带的复定向。

定义

$$\begin{aligned} \Phi : \{\text{complex orientations on } E\} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing}}(MU, E) \\ x^E &\longmapsto \Phi(x^E) \end{aligned}$$

由前文结果, $E^*(MU(n)) = E[[c_n]]$ (后者正是计算 $BU(n)$ 上同调得到的)

于是注意一个上同调类实际上是 $MU(n) \rightarrow E_{2n}$, 因此我们取 $c_n : MU(n) \rightarrow E_{2n}$, 将这样的一组 c_n 拼起来得到了一个映射 $\Phi(x^E) : MU \rightarrow E$: 一些验证确实能够说明它满足要求。 \square

我们现在知道了任何复定向 (等价地: $MU \rightarrow R$) 决定了一个形式群律 (等价地: $MU_* \rightarrow R_*$) 自然的问题是在何时我们可以反过来完成这一些过程。给定一个形式群律 (等价地, 一个环态射 $MU_* \rightarrow R_*$), 我们考虑

$$X \mapsto MU_* X \otimes_{MU_*} R_*$$

如果它确实是一个同调理论, 那么我们就造出了一个满足要求的环谱, 其同伦群就是 R_* , 并且复定向诱导的形式群律就是 $MU_* \rightarrow R_*$ 。

Landweber 正合函子定理给出的正是这个结果: 当然我们给出的是 p -typical 的情况, 对于 MU 也有类似结果成立:

定理 31.3.7 (Landweber 正合函子定理). 对于一个 BP_* 模 R_* : 函子

$$X \mapsto BP_* X \otimes_{BP_*} R_*$$

是同调理论 \iff 对每个 $n, (p, v_1, \dots, v_n)$ 是一个 R_* 的正则序列, 即每个 v_n 在 $R_*/(p, v_1, \dots, v_{n-1})$ 上的作用都是单射。

证明. 回忆短正合列

$$0 \rightarrow \Sigma^{2(p^n-1)} BP_*/I_n \xrightarrow{v_n} BP_*/I_n \rightarrow BP_*/I_{n+1} \rightarrow 0$$

那么题目中个给出的序列是正则序列 $\iff R_* \otimes -$ 保持上述序列正合 $\iff \mathrm{Tor}^{BP_*}(BP_*/I_n, R_*) = 0$. 于是由 Landweber Filtration 定理, 这成立当且仅当对于任何有限展示 (作为 BP_* -模) 的 $BP_* BP$ -余模 M , 都有 $\mathrm{Tor}^{BP_*}(M, R_*) = 0$. 于是这就说明 $R_* \otimes -$ 在有限展示 $BP_* BP$ -余模范畴上是正合的。但是 $BP_* X$ 是有限展示的, 如果 X 是有限 CW 复形, 那么这就说明了切除公理对有限 CW 复形成立, 从而说明了对所有谱的情况。

反过来, 只需要说明任何有限展示 $BP_* BP$ -余模可以成为某个 $BP_* X$, X 是有限 CW 复形。

Todo. \square



定理 31.3.8 (Landweber 正合函子定理). 对于一个 MU_* 模 R_* : 函子

$$X \mapsto MU_* X \otimes_{MU_*} R_*$$

是同调理论 \iff 对任何 p, n , 记 v_n 为 $[p]_F(x)$ 的 x^{p^n} 系数, 都有: (p, v_1, \dots, v_n) 是 R_* 的正则序列, 记每个 v_n 在 $R_*/(p, v_1, \dots, v_{n-1})$ 上的作用都是单射。

例子. BP 事实上可以由 $LEFT$ 给出, 这能够解释为何 MU_* 版本的正合函子定理中的 v_n 和 BP_* 中的事实上是相容的。

取定 $R = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$, 使得它是 $(MU_*)_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}[t_1, t_2, \dots]$ 商去 $\{t_i\}_{i \neq p^k-1}$, v_i 是 t_{p^k-1} 的像。那么这是平坦的, 因此我们得到了一个同调理论

$$X \mapsto MU_*(X) \otimes_{MU_*} R$$

它代表的就是已经提及过的 *Brown-Peterson* 谱。

例子. $H\mathbb{Z}$ 配备上加法形式群律不是 *Landweber* 正合的。

例子. $H\mathbb{Q}$ 配备上加法形式群律是 *Landweber* 正合的。

例子. 考虑复 K -理论谱 KU , $KU_* = \mathbb{Z}[\beta^{\pm 1}]$, 配备有标准的形式群律 $F = x + y + \beta xy$ 。此时运用 MU 版本的 $LEFT$:

$$[p]_F(x) = \beta^{-1}((\beta x + 1)^p - 1), \text{ 于是 } v_0 = p, v_1 = \beta^{p-1}, v_2 = 0, \dots$$

现在注意到 $v_1 = \beta^{p-1}$ 作用到 $KU_*/(p) = \mathbb{F}_p[\beta^{\pm 1}]$ 上是单射; $v_2 = 0$ 作用到 $KU_*/(p, v_1) = 0$ 上也是单射, 因此 KU_* (配备上标准形式群律) 后是 *Landweber* 正合的。

更进一步这样造出的谱就是 KU , 即 KU 可以从 KU_* 通过 $LEFT$ 重建:

定理 31.3.9 (Conner-Floyd).

$$KU_*(X) = MU_*(X) \otimes_{MU_*} KU_*$$

证明. 由 Hurewicz 定理和 Yoneda 引理, 我们只需给出一个 $MU_*(-) \otimes_{MU_*} KU_* \Rightarrow KU_*(-)$ 的自然变换, 使得它在同伦群上诱导的是同构。

这个变换是通过如下方式给出的:

$$MU_*(-) \otimes_{MU_*} KU_* \xrightarrow[\text{complex orientation}]{MU \rightarrow KU} KU_*(-) \otimes_{MU_*} KU_* \xrightarrow{KU_*\text{-mod}} KU_*(-)$$

它确实满足要求, 这就证明了结果。 □

第三十二章 色展同伦论中的基本对象

32.1 Adams-Novikov 谱序列、色展谱序列

色展同伦论的一个原初目的是通过研究 MU (和 BP ——它承担着研究对 p 局部化的角色) 来获取球面稳定同伦群 (或其 p -部分) 的信息: 这是如下 Adams 谱序列的特例。

定理 32.1.1 (Adams-Novikov 谱序列). 对任何谱 X , 我们都有以

$$E_2 = \text{Ext}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*(X))$$

为第二页的自然的谱序列。更进一步, 如果 X 是连合的并且是 p -局部的, 那么谱序列收敛到 $\pi_*(X)$ 的如下滤过: $f: S^n \rightarrow X$ 在滤链中高度 $\geq s$, 如果它可以被分解为 s 个映射, 使得每个映射 $f_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ 在复合上 $X_{i+1} \rightarrow X_{i+1} \otimes BP$ 后平凡。

这是对经典 Adams 谱序列直接考虑 $H\mathbb{F}_p$ 的改进: 它的好处是 BP_*BP 相比 Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$ 具有更好的结构: 一个观察是

命题 32.1.2 (Sparseness). BP_*X 如果仅在 $q = 2(p-1)$ 次数的倍数上非零 (例如 $X = S^0, BP$), 那么 Adams-Novikov 谱序列满足 $E_r^{s,t} = 0$ 对所有 r, s 成立, 除了 $q|t$ 的情况。

作为推论, 微分映射 d_r 仅在 $r \equiv 1 \pmod q$ 时非平凡, 并且 $E_{mq+2}^{*,*} = E_{mq+q+1}^{*,*}$

我们已然指出 Adams-Novikov 谱序列的 E_2 页对计算谱序列是极度重要的。下面我们通过对 Hopf 代数胚 (BP_*, BP_*BP) 的结构的研究来计算 $\text{Ext}_{BP_*BP}(BP_*BP_*X)$ 。

取 $BP_*/(p^\infty)$ 为 $BP_*/(p^n)$ 的余极限; 类似地, 定义:

$$M_n^s = v_{n+s}^{-1} BP_*/(p, \dots, v_{n-1}, v_n^\infty, \dots, v_{n+s-1}^\infty)$$

$$N_n^s = BP_*(p, \dots, v_{n-1}, v_n^\infty, \dots, v_{n+s-1}^\infty)$$

于是我们有 BP_*/I_n 的消解

$$0 \rightarrow BP_*/I_n \rightarrow M_n^0 \rightarrow M_n^1 \rightarrow \dots$$

现在定义函子 $E^{s,t}(-) := E_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, -)$, 那么标准的同调代数内容立刻给出:

定义 32.1.3 (色展谱序列). 存在如下两个谱序列:

$$E_{st}^1 = \text{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, v_n^{-1} BP_*/(p^\infty, v_1^\infty, \dots, v_{n-1}^\infty)) \implies \text{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*)$$

$$E_{st}^1 = \text{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(M_n^m) \implies \text{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*/I_n)$$

32.2 Morava E -理论和 Morava 稳定化子群 S_n

这一章中我们暂时回避叠 (Stack) 的语言, 仅使用初等语言给出定义, 对于定义的几何直观我们也保留到下一章。

首先我们现在讨论的是 p -typical 形式群律, 特别地考虑特征 p 域 k , 其上 p -typical 形式群律的严格同构类被高度完全分类。

32.2.1 Morava 稳定化子群 S_n

定义 32.2.1 (高度). 对于一个形式群律 F , 考虑 $[p]_F(x)$ 。如果 x 不是加性形式群律, 那么 $[p]_F$ 非零, 并且存在唯一的 n 使得 $[p]_F(x) = g(x^{p^n}), g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ 。

等价地有如下刻画:

命题 32.2.2 (Araki). 如果 $f: V \rightarrow k$ 给出了高度为 n 的形式群律 F , 那么 $\ker f = I_n = (p, v_1, \dots, v_{n-1})$ 。

定义 32.2.3 (Honda 形式群律). 现在考虑 $k = \mathbb{F}_{p^n}$ 的情况, 高度 n 的 Honda 形式群律 H_n 是指被如下同态 $V \rightarrow \mathbb{F}_{p^n}$ 分类的形式群律:

$$v_i \mapsto \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

H_n 也是唯一的使得 $[p]_F(x) = x^{p^n}$ 的形式群律。

定义 32.2.4. Morava 稳定化子群 S_n 是

$$S_n = \text{Aut}(H_n) = \{\text{Isomorphisms (general) of } H_n\}$$

它是一个 pro-有限群, 其中拓扑是由 $\mathbb{F}_{p^n}[[x]]$ 给出的。

Morava 大稳定化子群 G_n 由 $G_n = \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \ltimes S_n$ 给出。

我们来给出对 S_n, G_n 的更进一步的刻画, 注意 S_n 落在 $\text{End}(H_n)$ 中, 其中有如下元素:

1. 对于任何 p 进整数 $\sum_{i \geq 0} a_i p^i$, 它在 H^n 上有作用:

$$x \mapsto \sum [a_i p^i]_{H_n}(x)$$

2. Frobenius 元 S :

$$x \mapsto x^p$$

3. \mathbb{F}_{p^n} 的生成元: $p^n - 1$ 次本原单位根 ω

$$x \mapsto \omega x$$

它们满足如下关系:

1. $S^n = p$: 因为 $x^{p^n} = [p]_{H_n}(x)$



2. $S\omega = \omega^\sigma S$, 其中 ω^σ 是 ω 在 $Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ 的 Frobenius 自同构 σ 的作用下的像。

事实上 $End(H_n)$ 恰好由上述信息描述:

定义 32.2.5 (Witt 向量). $\mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})$ 是指一个以 \mathbb{F}_{p^n} 为剩余域的完备局部环 B , 满足如下泛性质:
对于任何完备局部环 B 和如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n}) & \xrightarrow{\exists!} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_{p^n} & \longrightarrow & B/\mathfrak{m} \end{array}$$

都存在唯一的提升 $\mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})$ 。

$\mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})$ 的构造是 $\mathbb{Z}_p[x]/(q(x))$, 其中 q 是 $X^{p^n}-1$ 的一个不可约因子在 \mathbb{Z}_p 中的提升。

注意前述对 $End(H_n)$ 的描述, \mathbb{Z}_p 和 ω 恰好都可以按照前述要求嵌入 $\mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})$: 作为 \mathbb{Z}_p 和作为 $X^{p^n}-1$ 的一个根。于是这最终能够说明:

定理 32.2.6 (Dieudonne, Tate).

$$End(H_n) = \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n}) \langle S \rangle / (S^n = p, Sw = w^\sigma S, \forall w \in \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n}))$$

32.2.2 Morava E-理论

下面定义 Morava E-理论: 首先取 $E_n = \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})[[u_1, \dots, u_{n-1}]]\langle u, u^{-1} \rangle$, 其中 $|u_i| = 0, |u| = -2$ 。

我们下面来解释为何如此定义 E_n , 它的动机是形变理论:

定义 32.2.7. 定义完备局部环到群胚范畴的函子 $\text{Def}_{\mathbb{F}_{p^n}, H_n}$ 如下:

给定完备局部环 B , $\text{Def}_{\mathbb{F}_{p^n}, H_n}(B)$ 的对象是全体 (G, i) 的偶对, 其中 G 是 B 上的形式群律, $i: \mathbb{F}_{p^n} \rightarrow B/\mathfrak{m}$, 使得 $i_* H_n = \pi_* G$, $\pi: B \rightarrow B/\mathfrak{m}$ 。

$\text{Def}_{\mathbb{F}_{p^n}, H_n}$ 中 $(G_1, i_1), (G_2, i_2)$ 存在态射, 当且仅当 $i_1 = i_2$, 此时态射是形式群律之间的同构 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 使得 $\pi_* f = \text{id}$, 这样的 f 称为 \star -同构。

注意这个定义可以拓展到任何特征 p 完美域 k 和其上的高度为 n 的形式群律 Γ , 记对应的形变函子为 $\text{Def}_{k, \Gamma}$ 。那么:

定理 32.2.8 (Lubin-Tate). 由定义 $\text{Def}_{k, \Gamma}(B)$ 可以分成若干个 $\text{Def}_{k, \Gamma}(B)_i$ 的无交并, 其中 i 是一个固定的域扩张 $i: k \rightarrow B/\mathfrak{m}$ 。那么:

1.

$$\pi_0(\text{Def}_{k, \Gamma}(B)_i) \cong_{\text{Set}} \mathfrak{m}^{\times(n-1)}$$

2.

$$\pi_1(\text{Def}_{k, \Gamma}(B)_i) \cong \{e\}$$

更进一步: $\pi_0(\text{Def}_{k, \Gamma}(-))$ 被 $\mathbb{W}(k)[[u_1, \dots, u_{n-1}]]$ 可表。



因此 E_n 实际上分类了形变形式群律，但是这还没有解释 $[u, u^{-1}]$ 出现的原因：它使得 E_n 变成周期 2 的谱。所以 E_n 是 2-周期版本的万有形变形式群律谱：有关 2-周期化的技巧下一节介绍 Morava K 理论时还会出现，在那里将会有更细节的讨论。

现在对于 $(E_n)_* = \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^n})[[u_1, \dots, u_{n-1}]] [u, u^{-1}]$ ，其中 $|u_i| = 0, |u| = -2$ 。

$$BP_* \rightarrow (E_n)_*$$

$$v_i \mapsto \begin{cases} u_i u^{1-p^n} & 0 < i < n \\ u^{1-p^n} & i = n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给出了坐落于 0 次部分上的 p -typical 形式群律。下面直接验证 LEFT 就给出了 E_n 的定义，我们的构造保证了谱是 2-周期的。

32.3 Johnson-Wilson E -理论、Morava K -理论及其 2-周期版本 k

定义 32.3.1. 取 $E(n)_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n^{\pm 1}]$ ，有环同态

$$BP_* \rightarrow E(n)_* : v_i \mapsto \begin{cases} v_i & i \leq n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

通过验证 LEFT，这给出了环谱 $E(n)$ ，使得其上携带的形式群律高度不超过 n 。

我们希望造出一个高度恰好为 n 的环谱：直观想法是取 $K(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ ，但是这样的选取是不能够满足 LEFT 的。我们在此先给出 $K(n)$ 的公理化定义：

命题 32.3.2. 对每个素数 $p, n \in \mathbb{N}$ ， $K(n)$ 是在等价下唯一的结合（同伦意义下）环谱，使得它是：

1. 复定向的
2. 复定向诱导的形式群律高度为 n
3. 同伦群是 $K(n)_* \cong \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$

我们给出一个具体的构造：对于每个 k ，记 $M(k)$ 为 $\Sigma^{2k} MU_{(p)} \xrightarrow{\times t_k} MU_{(p)}$ 的 Cofiber。

引理 32.3.3. 每个 $M(k)$ 都具有同伦环谱的结构。

证明. 固定 $M(k)$ 的单位为 $u : MU_{(p)} \rightarrow M(k)$ 。那么 $M(k) \otimes_{MU_{(p)}} M(k)$ 实际上是如下图表的全同伦余纤维

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{4k} MU_{(p)} & \longrightarrow & \Sigma^{2k} MU_{(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{2k} MU_{(p)} & \longrightarrow & MU_{(p)} \end{array}$$

另一方面，我们取 K 是如下的 cofiber: $(\Sigma^{2k} M(k))^2 \rightarrow M(k)$ ，于是存在一个显然的 $\alpha: K \rightarrow M(k)$ 。

下面 $MU_{(p)}$ 线性的乘法结构等价于将 u 分解为 $K \rightarrow M(k) \otimes_{MU_{(p)}} M(k) \rightarrow M(k)$ (作为 $MU_{(p)}$ -模)。我们来说明如下分解存在：由泛性质，只需说明 $\ker \beta \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} M(k)$ 是零伦的，然而 $\ker \beta \simeq \Sigma^{4k+1} M(k)$ 。因此其阻碍并不存在，这就完成了证明。 \square

命题 32.3.4. 记 $K(n) = MU_{(p)}[v_n^{-1}] \otimes_{MU_{(p)}} \bigotimes_{k \neq p^n-1} M(k)$ ，那么这是满足要求的 Morava K -理论：它有着自然的环谱映射 $MU_{(p)} \rightarrow K(n)$ ，给出了复定向和高度恰好为 n 的形式群律，同伦群也确实满足要求。

注记. $M(k)$ 实质上是商去了对应的 t_k ，因此 $K(n)$ 恰好是商去了所有非 t_{p^n-1} 的元素，仅仅保留了 v_n ，再将其可逆。

如同 Morava E -理论中进行的操作，我们也可以对 Morava K 理论做类似的操作。取

$$(K_n)_* = \mathbb{F}_{p^n}[u^{\pm 1}], |u| = -2$$

那么有环同态: $K(n)_* \rightarrow (K_n)_*: v_n \mapsto u^{1-p^n}$ ，那么这给出了环的平坦扩张：

$$K_n(-) = K(n)(-) \otimes_{K(n)_*} (K_n)_*$$

并且 $K(n)_* \rightarrow (K_n)_*$ 给出了一个形式群律 F_{K_n} ，通过平移次数：即考虑 $u^{-1}F_{K_n}(ux, uy)$ ，这给出了坐落于 0 次部分上的形式群律，并且谱 K_n 是 2-周期的。



第三十三章 ALec13, Change-of-Rings, Chromatic-Filtration

33.1 形式群: Lurie

定义 33.1.1. 取 $G = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$, 其 R -点是形式幂级数 $g(t) = t + b_1 t^2 + b_2 t^3 + \dots \in R[[t]]$, 其在复合下成为群概形。现在沃恩有 $\mathrm{Spec} \pi_*(MU \otimes MU) \simeq G \times \mathrm{Spec} L$ (Quillen 定理), 因此 $MU \rightarrow MU \otimes MU \leftarrow MU$ 诱导了一对 $G \times \mathrm{Spec} L \rightarrow \mathrm{Spec} L$ 。具体来说: 给定 $f(x, y) \in R[[x, y]]$ 和 $g(t) = t + b_1 t^2 + \dots$, 前述的这两个映射分别给出了如下两个 R 上的形式群律: f 自身和在严格同构 $g(t)$ 下的变换: $gf(g^{-1}(x), g^{-1}(y))$ 。

更进一步地, $\pi_* MU^{\otimes(*+1)} = G^* \times \mathrm{Spec} L$ 的函数环, 于是余单纯谱 $MU^{\otimes(*+1)}$ 实际上给出了单纯概形 $\mathrm{Spec} \pi_*(MU^{\otimes(*+1)})$, 它记录了 G 在 $\mathrm{Spec} L$ 上的作用。

定义 33.1.2. \mathcal{M}_{FG}^s 被定义为商叠 $\mathrm{Spec} L/G$, 称为形式群和严格同构的模叠, 它能够被证明是 fpqc 叠。

现在对于一个一般的谱 X , $\pi_*(X \otimes MU^{\otimes(n+1)})$ 是 $\pi_* MU^{\otimes n+1}$ 上的模, 因此这是仿射概形 $\mathrm{Spec} L \times G^n$ 上的拟凝聚层。这一系列拟凝聚层在基变换下是相容的, 因此这说明了:

Slogan: X 是谱, 则 $\pi_* X$ 可以被视为 \mathcal{M}_{FG}^s 上的拟凝聚层, 记为 \mathcal{F}_X 。特别地, G 在 $\mathrm{Spec} L$ 上的作用可以自然地延展到这个拟凝聚层上。现在我们的 Adams 谱序列第二页有了一个几何的直观:

$$\mathrm{Ext}_{MU_* MU}^b(MU_*, MU_*(X)) = H^b(\mathcal{M}_{FG}^s, \mathcal{F}_X) = H^b(G; MU_*(X))$$

除了形式群律之间的严格同构, 我们注意到实际上我们还有乘法群概形 \mathbb{G}_m 能够作用在形式群律上, 作用如下:

$$(\lambda \in R^\times, f(x, y) \mapsto \lambda f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y))$$

于是我们把 \mathbb{G}_m 和前文的严格同构的 G 共同放入一个更大的群概形 G^+ 中: 它满足

$$G^+(R) = \{g \in R[[x]] | g(t) = b_0 t + b_1 t^2 + \dots, b_0 \in R^\times\}$$

于是 G^+ 自然是 G 和 \mathbb{G}_m 的半直积。

现在对于一个一般的谱, $MU_*(X)$ 是分次 L -模, G 上的作用和 $MU_*(X)$ 的分次相容, 因此 $MU_{\mathrm{even}}(X) = \bigoplus_n MU_{2n}(X)$ 可以被视为 $\mathrm{Spec} L/G^+$ 上的拟凝聚层。

定义 33.1.3. 商叠 $\mathcal{M}_{FG} = \mathrm{Spec} L/G^+$ 成为形式群的模叠



我们有如下理解 \mathcal{M}_{FG} 的方式。首先对于形式群律 $f \in R[[x, y]]$, 我们有一个函子 $\mathcal{G}_f : \text{Alg}_R \rightarrow \text{Ab} : A \mapsto \{a \in A | a \text{ nil.}\}$, 其群结构由 $(a, b) \mapsto f(a, b)$ 给出。这样的形式群律称为可坐标化的: 它被形式群律给出了一个全局坐标。然而它不满足下降性质, 因此我们考虑如下定义:

定义 33.1.4 (形式群). 一个 R 上的形式群是指一个满足如下条件的函子 $\mathcal{G} : \text{Alg}_R \rightarrow \text{Ab}$:

1. \mathcal{G} 是 Zariski 层。即如果 A 是交换 R -代数, 使得 $x, y \in A, x + y = 1$, 那么 $\mathcal{G}(A)$ 可以由 $\mathcal{G}(A[1/x]), \mathcal{G}(A[1/y])$ 以及 $\mathcal{G}(A[1/(xy)])$ 的拉回给出 (Zariski 下降)
2. Zariski 局部下, \mathcal{G} 是可坐标化的: 即存在 $r_1, \dots, r_n \in R, r_1 + \dots + r_n = 1$, 使得 $\text{Alg}_{R[1/r_i]} \rightarrow \text{Alg}_R \rightarrow \text{Ab}$ 是某个可坐标化的形式群 \mathcal{G}_f 。

那么 \mathcal{M}_{FG} 将每个交换环 R 送至 R 上的形式群以及同构给出的态射。

我们现在自然希望理解前文定义出的两个叠之间的差别, 首先我们有自然的态射 $\mathcal{M}_{FG}^s = \text{Spec} L/G \rightarrow \text{Spec} L/G^+ = \mathcal{M}_{FG}$ 。

定义 33.1.5. 对于形式群 \mathcal{G} , 定义其 Lie 代数是如下 Abel 群 $\mathfrak{g} = \ker(\mathcal{G}(R[t]/(t^2)) \rightarrow \mathcal{G}(R))$ 。

注记. 对于每个 $\lambda \in R$, 我们有 $R[t]/(t^2)$ 到自身的映射, 因此给出 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 即携带有 R -作用。现在由下一命题, \mathfrak{g} 局部上就是 R , 因此这说明 \mathfrak{g} 实际上是一个可逆 R -模 ($\text{Spec} R$ 上的线丛)

命题 33.1.6. 1. R 上的形式群 \mathcal{G} 是可坐标化的 \iff 其 Lie 代数 $\mathfrak{g} \simeq R$

2. \mathcal{M}_{FG}^s 恰好包含了如下信息 (\mathcal{G}, α) : 可坐标化的形式群 \mathcal{G} 以及其 Lie 代数的平凡化 $\alpha : \mathfrak{g} \simeq R$

证明. 如果 \mathcal{G} 是可坐标化的, 那么 $\mathfrak{g} \simeq tR[t]/(t^2) \simeq R$ (形式群律在低于 2 阶的表现表现为 $x + y$)。反过来对于固定好的同构映射 $\alpha : \mathfrak{g} \simeq R$, 在局部上我们有 \mathcal{G} 是可平凡化的。在局部化后我们总有 $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_f$ 是某个 f 诱导的, 通过 \mathbb{G}_m 的作用调整 f 我们可以使得它和平凡化 $\alpha : \mathfrak{g} \simeq R$ 相符。现在问题只在于粘结, 即阻碍发生在 $H_{Zar}^1(\text{Spec} R, G)$ 。

然而 G 是加性群 $(A \in \text{Alg}_R) \mapsto (A, +)$ 的扩张, 因此其在仿射概形上的上同调平凡。

第二个结果是因为形式群律 f, f' 之间的同构如果由 $g(t) = b_0 t + \dots$, 那么其在 Lie 代数 \mathfrak{g} 的作用恰好是乘以 b_0 。□

于是 $(R, \mathcal{G}) \mapsto \mathfrak{g}^{-1}$ 诱导了 \mathcal{M}_{FG} 上的线丛 ω 。而 \mathcal{M}_{FG}^s 恰好是 ω 的全空间减去零截面。于是我们最终得到如下几何化命题:

命题 33.1.7. 对于任何谱 X , $MU_{\text{even}}(X)$ 是一个 Lazard 环 L 上的模, 并有群概形作用 G^+ 。它决定了 $\mathcal{M}_{FG} = \text{Spec} L/G^+$ 上的层 $\mathcal{F}^{\text{even}}$ 。那么:

$$E_2^{2a,b} = H^b(\mathcal{M}_{FG}; \mathcal{F}^{\text{even}} \otimes \omega^a)$$

$$E_2^{2a+1,b} = H^b(\mathcal{M}_{FG}, \mathcal{F}^{\text{odd}} \otimes \omega^a)$$



33.2

我们下面引入 \mathcal{M}_{FG} 上的一个滤过，这是与前文介绍过的形式群律的高度息息相关的。

首先我们先说明在零特征域上， \mathcal{M}_{FG} 表现得异常简单。这是因为如下直接的引理：

命题 33.2.1. R 是零特征环，那么每个形式群律 $f \in R[[x, y]]$ 都存在唯一的 $g(t) = t + b_1 t^2 + \dots$ 使得 $f(x, y) = g(g^{-1}(x) + g^{-1}(y))$ 。

于是：

推论 33.2.2.

$$\mathcal{M}_{FG}^s \times \text{Spec} \mathbb{Q} = \text{Spec} \mathbb{Q}$$

$$\mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Q} = B\mathbb{G}_m$$

下面我们来看 p -部分。我们考虑 p -局部环 ($\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数) 上的形式群： $\mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ 的结构。回忆我们定义过的 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数上形式群律的高度。我们现在将这件事推广到形式群上：我们注意形式群律的高度仅和 f 的同构类有关，并且是局部性质：即 f 高度 $\geq n \iff$ 在开覆盖 $R[1/a_i]$ 下高度都 $\geq n$ 。因此我们可以讨论形式群 $\mathcal{F} : \text{Alg}_R \rightarrow \text{Ab}$ 的高度，从而我们给出 $\mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ 上的滤过：

定义 33.2.3. 记 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n}$ 为 $\mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ 的闭子叠：由高度 $\geq n$ ，态射为同构组成。于是回忆之前的形式群律内容，我们在每个高度上都有万有形式群律，因此：

$$\mathcal{M}_{FG}^{\geq n} = \text{Spec}(V/(v_0, \dots, v_{n-1}))/G^+$$

(回忆 Morava-Landweber 定理，这是在 G^+ 作用下不变的)

现在我们有局部闭子叠

$$\mathcal{M}_{FG}^n = \mathcal{M}_{FG}^{\geq n} - \mathcal{M}_{FG}^{\geq n+1} = (\text{Spec} V[v_n^{-1}]/(v_0, \dots, v_{n-1}))/G^+$$

例子. $\mathcal{M}_{FG}^0 = \mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Q}$ $\mathcal{M}_{FG}^{\geq 1} = \mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{F}_p$

33.3 Phantom map

我们主要证明如下结果：

定理 33.3.1. E Landweber-exact, E' 满足 $\pi_k E' = 0, \forall k$ 奇数。那么每个 phantom map (诱导 $E(X) \rightarrow E'(X)$ 的零映射, $\forall X$) 都是零伦的。

33.4 再读 Landweber 正合定理

定义 33.4.1. \mathcal{M}_{FG} 上的拟凝聚层指对每个 R -点 $\eta \in \mathcal{M}_{FG}(R)$ 指定一个 R -模 $M(\eta)$ ，使得对于任何 $R \rightarrow R'$ 将 η 推至 η' ， $M(\eta') \simeq M(\eta) \otimes_R R'$ 。拟凝聚层构成了 Abel 范畴，记为 $QCoh(\mathcal{M}_{FG})$ 。

称拟凝聚层 M 平坦，如果对每个 R -点 η ， $M(\eta)$ 在 R 上平坦，类似地定义忠实平坦。



注记. 我们注意 (忠实) 平坦性完全是 Zariski 局部条件, 因此我们只需等价地处理 η 代表可坐化形式群律的情况就能够确认一个拟凝聚层是 (忠实) 平坦的。

于是我们可以再次通过局部检查来验证:

推论 33.4.2. M 是分次 L -模, 如果它还是 \mathcal{M}_{FG} 上的平坦拟凝聚层, 那么 $X \mapsto MU_*(X) \otimes_L M$, 那么它是一个同调理论, 被某个谱表出。

于是我们再一次地有形式群版本的 Landweber 正合定理:

定理 33.4.3. M 是 Lazard 环上的模, 那么它是 M 在 \mathcal{M}_{FG} 上平坦当且仅当 $p, v_1, \dots \in L$ 是正则序列。

下面我们来研究产生自 Landweber 正合定理的环谱。对于 R 上的形式群律, 我们引入如下 Landweber 型构造的 2-周期版本。

定义 33.4.4. \mathcal{L} 是可逆 R -模, 一个 \mathcal{L} -扭形式群律是指形式群律 $f(x, y) = \sum_{i,j \in \mathcal{L}^{\otimes(i+j-1)}} a_{ij} x^i y^j$ 使得

每个 f 给出了一个函子 $Spf R[[\mathcal{L}]] = Spf(\prod \mathcal{L}^{\otimes n}) : A \mapsto \text{Hom}(\mathcal{L}, \text{Nil}(A))$ 。如下映射的核 $(Spf R[[\mathcal{L}]]) (R[t]/(t^2)) \rightarrow (Spf R[[\mathcal{L}]]) (R)$ 恰好是那些 $\mathcal{L} \rightarrow tR/t^2R$ 的 R -线性映射, 因此是 R -模 \mathcal{L}^{-1} 。然而另一方面这实际上是形式群律诱导的形式群的 Lie 代数。于是 f 是 \mathcal{L} -扭形式群律说明 $\mathfrak{g}_{\mathcal{G}_f} \simeq \mathcal{L}^{-1}$ 。反过来我们有:

引理 33.4.5. \mathcal{G} 是 R 上的形式群, Lie 代数为 \mathfrak{g} 。那么存在一个 \mathfrak{g}^{-1} -扭形式群律 f , 以及 $\mathcal{G}_f, \mathcal{G}$ 提升 $\eta_f : \mathfrak{g}_{\mathcal{G}_f} \simeq \mathfrak{g}$ 。

证明. **Todo.**

□

注记. f 是 \mathcal{L} -扭形式群律, 如下等价:

1. \mathcal{G}_f 被平坦映射 $q : \text{Spec} R \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$ 分类。
2. 分次 L -模 $\oplus \mathcal{L}^{\otimes n}$ 是 Landweber-exact 的。

这是因为后者等价于 $\oplus \mathcal{L}^{\otimes n}$ 在 \mathcal{M}_{FG} 上平坦, 等价于 $\mathcal{L}^{\otimes 0} \simeq R$ 在 \mathcal{M}_{FG} 上平坦。反过来平凡: 因为 $\oplus \mathcal{L}^{\otimes n}$ 在 R 上平坦。

例子. $R = L$, $\mathcal{L} = R$ 时, $\oplus \mathcal{L}^{\otimes n} = L[\beta^{\pm 1}]$, 于是 Landweber 正合给出了:

$$(E_L)_*(X) = MU_*(X) \otimes_L L[\beta^{\pm 1}] = MU_*(X)[\beta^{\pm 1}]$$

这是 MU 的 2-周期版本, 称为 MP , 它是 $BU \times \mathbb{Z}$ 上万有丛的 Thom 谱。特别地: $MP_0(X) = MU_{\text{even}}(X)$ 。

一般地, 给定 \mathcal{L} -扭形式群律 f , 取 $\mathcal{L} = R$, 如果它满足前述评注给出的平坦性条件: 那么我们可以类似地给出一个 2-周期的谱 $(E_R)_*(X) = MU_*(X) \otimes_L R[\beta^{\pm 1}]$, 其中 $L \rightarrow R$ 是形式群律的分类映射。

现在来说明这个 2-周期谱的环结构, 这需要如下结果:



命题 33.4.6. 如果我们有平坦映射 $q: \text{Spec} R \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$; $q': \text{Spec} R' \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$, 那么 $E_R \otimes E_{R'} \simeq E_B$, 其中 $\text{Spec} B$ 在如下拉回图表中:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} B & \longrightarrow & \text{Spec} R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec} R' & \longrightarrow & \mathcal{M}_{FG} \end{array}$$

明显 $\text{Spec} B$ 在 \mathcal{M}_{FG} 上平坦, 那么我们能够产出 E_B 。由于局部性的原因, 我们假定 q, q' 给出了可坐标化的形式群律, 被 $L \rightarrow R, L \rightarrow R'$ 分类。那么:

$$B \simeq R \otimes_L MP_0 MP \otimes_L R'$$

此时 $(E_R \otimes E_{R'})_0(X)$ 直接计算得到也是 $R \otimes_K (MP \otimes MP)_0 X \otimes LR'$ 因此这就给出了结果。

推论 33.4.7. E_R 是环谱。

证明. 我们有 $E_R \otimes E_R \simeq E_B \rightarrow E_R$ 。其中 $\text{Spec} R \rightarrow \text{Spec} B$ 是由拉回图表的对角线映射给出。□

注记. 由构造, 如果 \mathcal{G} 的 Lie 代数是 \mathfrak{g} , 那么 $\pi_n E_R = \begin{cases} \mathfrak{g}^k & n = -2k \\ 0 & n = -2k + 1 \end{cases}$

我们提炼出这个结果:

定义 33.4.8. 称环谱 E 是偶周期的, 如果:

1. 奇数阶同伦群 $\pi_{2k+1} E$ 消失
2. $\pi_2 E \otimes_{\pi_0 E} \pi_{-2} E \rightarrow \pi_0 E$ 是同构 (从而 $\pi_2 E$ 是可逆模 \mathcal{L} 并且 $\pi_{2n} E \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$)

定理 33.4.9. \mathcal{C} 是如下偶对构成的范畴: (R, η) , 其中 R 是环, $\eta: \text{Spec} R \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$ 是平坦映射 (从而给出 Landweber 正合形式群)。那么 $R \rightarrow E_R$ 给出了一个到环谱的全忠实映射, 其本质像是所有偶周期且 $\pi_0 E \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$ 平坦的环谱。

证明. 我们只需说明: 如果 E 是偶周期环谱, 它给出了 $q: \text{Spec} R \rightarrow \mathcal{M}_{FG}$, 它产生了一个环谱 E_R 。我们需要将 E 和 E_R 等同。首先选定 E 的复定向, 那么万有复定向说明存在环谱映射 $MU \rightarrow E$, 它决定了一个 $\phi: L \rightarrow \pi_* E$ 。现在 $(E_R)_*(X) = MU_*(X) \otimes_L (\pi_* E)$ (由于偶数周期, $\beta^{\pm 1}$ 无效)

于是我们就有同调理论之间的换映射 $(E_R)_*(X) \rightarrow E_*(X)$ 。现在由于 E 偶周期, E_R Landweber-exact, 那么前文 phantom map 的结果说明在同伦等价意义下, 我们找到了唯一的 $E_R \rightarrow E$ 。于是这就给出了满足要求的结果。□

33.5 \mathcal{M}_{FG}^n

我们现在研究 \mathcal{M}_{FG}^n 上的结构。取 $\overline{\mathbb{F}_p}$, 那么回忆 Honda 形式群律 H_n , 以及 \mathbb{F}_p 上的 p-typical 形式群律严格同构类仅和高度有关, 以及 $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上的形式群律总和某个 p-typical 形式群律严格同构。我们说明 \overline{F}_p 上高度为 n 的形式群律在严格同构意义下唯一。



现在考虑 $\text{Spec} \bar{F}_p \rightarrow \mathcal{M}_{FG}^n$, 这是忠实平坦的, 因为我们有对于任何 R 上的高度 n 形式群律 ($\text{Spec} R \rightarrow \mathcal{M}_{FG}^n$), 有沿着 $\text{Spec} \bar{F}_p \rightarrow \mathcal{M}_{FG}^n$ 的拉回。那么 R' 是 $R \otimes \bar{F}_p$ 的有限平展扩张的正向极限, 于是是忠实平坦的。

现在我们看 $\text{Spec} \bar{F}_p$ 沿着 $\text{Spec} \bar{F}_p \rightarrow \mathcal{M}_{FG}^n$ 的拉回, 那么 B 是 \bar{F}_p 的有限平展扩张的正向极限。但是 \bar{F}_p 的有限平展扩张 (由于代数闭) 只能是 \bar{F}_p 的有限直积, 因此 $\text{Spec} B$ 可以理解为有限集的逆向极限, 记为 \mathbb{G} 。准确地说, \mathbb{G} 中的一个点是 $B \rightarrow \mathbb{F}_p$ 代数闭包 (记为 k) 的同构类。于是这等价于 $\eta, \eta' : \mathbb{F}_p \rightarrow k$ 以及一个 $\eta(f), \eta'(f)$ 在 k 上的同构。

我们假定 $k = \bar{F}_p, \eta' = \text{id}$, 那么 $\eta \in \text{Gal}(\bar{F}_p/\mathbb{F}_p)$, 第二个信息则是 $f \rightarrow \eta(f)$ 的同构。因此: \mathbb{G} 是如下自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{F}_p, f)$: 由 $\mathbb{F}_p, f \in \text{FGL}(\mathbb{F}_p)$ 组成。那么它位于如下正合列中:

$$0 \rightarrow \text{Aut}(f) \rightarrow \text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p, f) \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}_p) \rightarrow 0$$

那么我们从另一个角度重新得到了 Morava 大稳定化子群 \mathbb{G} 。

命题 33.5.1. $\mathcal{M}_{FG}^n = (\text{Spec} \bar{F}_p) / \text{Aut}(\bar{F}_p, f)$, 其中作用是通过过渡到 Galois 群实现的。

33.6 \mathcal{M}_{FG}^n 如何嵌入 \mathcal{M}_{FG} ? Lubin-Tate 理论

我们将定义 Morava E -理论时引入的形式群律函子推广如下:

定义 33.6.1. 固定 p 特征域 k , k 的无穷小加厚是一个交换环 A , 满射 $\phi : A \rightarrow k$, 使得 $\mathfrak{m}_A = \ker \phi$ 满足:

1. $\mathfrak{m}_A^a = 0, a \gg 0$
2. $\mathfrak{m}_A^a / \mathfrak{m}_A^{a+1}$ 是有限维 k -线性空间。

即 A 是剩余域位 k 的局部 Artin 环。

k 上的形式群律到 A 的形变是指 A 上形式群律 f_A , 使得其在 ϕ 的像是 f 。称两个形变是同构的, 如果它们相差一个可逆的形式幂级数 $g(t) \in A[[t]]$, 且 $g(t) \equiv t \pmod{\mathfrak{m}_A}$ 。记同构类为 $\text{Def}(A)$ 。

注记. 我们现在事实上可以证明前文 Lubin-Tate 主结果中 $\pi_1(\text{Def}) = \{e\}$ 的部分。因为如果 f_A 如果是 f 在 A 上的形变, 我们需要证明其自同构是平凡的。我们归纳地说明 $g(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{m}_A^a}$, 其中 g 是联结它们的自同构。

$a = 1$ 是条件自动给出的, 假设 \mathfrak{m}_A^a 的情况成立。取 A' 为分类 f_A 自同构的环 $A[b_0^{\pm 1}, b_1, \dots]$ 的商, 那么 g 由分类映射 $\psi : A' \rightarrow A$ 给出。同时 id 被分类映射 $\psi_0 : A' \rightarrow A$ 给出。

如果 $\psi : \psi' : A' \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}_A^a$ 相同, 那么商掉 \mathfrak{m}_A^{a+1} , 其差是一个映射 $d : A' \rightarrow V = \mathfrak{m}_A^a / \mathfrak{m}_A^{a+1}$ 。于是上述映射穿过:

$$A' \rightarrow A' \otimes_A k \rightarrow V$$

然而 $A' \otimes_A k$ 是分类高度 n 的形式群律的自同构的环, 从而在 k 上平坦, 因此 $d' = 0$, 于是归纳步骤完成。

以及 Lubin-Tate 主定理的重述:



定理 33.6.2. $R = \mathbb{W}(k)[[v_1, \dots, v_{n-1}]]$ 上的形式群律 \bar{f} 是 k 上的形式群律 f ($\phi_0: L_{(p)} \rightarrow k: v_i \rightarrow \delta_{in}$, 即推广的 Honda 形式群律) 的万有形变, 即 $\text{Hom}_{/k}(R, A) \rightarrow \text{Def}(A)$ 被 \bar{f} 给出了双射。

基于此我们定义 $E(n)$ 是使得 $\mathbb{W}(k)[[v_1, \dots, v_{n-1}]][\beta^{\pm 1}]$, 其上携带万有形变形式群律 (的 2-周期化), 这就给出了 Morava E_n 。

注记. 考虑 L_{E_n} , 那么 $L_{E_n}X = 0$ 如果它是 E_n -acyclic 的, 即 $E_{n*}(X) \simeq MP_*(X) \otimes_L R$ 消失。然而它消失说明的是其同伦群层 $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_{\Sigma X}$ 都支撑在 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n+1}$ 中。因此 L_{E_n} 可以被理解为到开子叠 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n}$ 的局部化。

33.7 L_{E_n} 和 $L_{K(n)}$

我们重申上一章最后的注记中指出的: E_n -acyclic 的代数几何意义。它等价于其同伦群层 $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_{\Sigma X}$ 支撑在 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n+1}$ 中。我们来研究对 $E_n, K(n)$ 的局部化。

定理 33.7.1. E 是 p -局部复定向环谱。如果 $\text{Spec} \pi_* E \rightarrow \mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ 是 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n}$ 的平坦覆盖, 那么 E 和 E_n 是 Bousfield 等价的。

定理 33.7.2. 对每个谱 $X, E_*(X)$ 消失 $\iff, \forall k, \mathcal{F}_{\Sigma^k X(p)}$ 支撑在 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n+1}$ 中。

定理 33.7.3. E_n 和 $E_{n-1} \times K(n)$ 是 Bousfield 等价的。特别地, $E(0) \simeq H\mathbb{Q}[\beta^{\pm 1}]$, 它和 $H\mathbb{Q}$ Bousfield 等价。

为了证明这个事实, 我们来选择一个和 E_n Bousfield 等价的谱进行过渡:

证明. 对于 $m \leq n$, 定义

$$Z(m) = MU_{(p)}[v_n^{-1}] \otimes_{MU_{(p)}} \bigotimes_{k \neq p^{m'} - 1, m \leq m' \leq n} M(k)$$

特别地, $Z(n) \simeq K(n)$, 但是 $\pi_* Z(m) = \mathbb{Z}_p[v_1, \dots, v_{n-1}, v_n^{\pm 1}] / (v_0, \dots, v_{m-1})$, $Z(0) \simeq E(n)$, 它确实给出了平坦覆盖, 于是 $Z(0)$ 和 E_n Bousfield 等价。□

注记. $\langle E_n \rangle = \langle E(n) \rangle$

下面来证 E_n 和 $E_{n-1} \times K(n)$ Bousfield 等价。

证明. 如果 X 是 E_n -acyclic 的, 那么注意 $\mathcal{M}_{FG}^{\geq n+1} \subseteq \mathcal{M}_{FG}^{\geq n}$, 它自动 E_{n-1} -acyclic。现在由于 $Z(0)$ 和 E_n 是 Bousfield 等价的, 那么 $X \otimes Z(0) \simeq 0$ 。然而 $X \otimes K(n) \simeq X \otimes Z(n)$ 是通过继续 smashing $M(p^k - 1)$ 得到的, 于是 $X \otimes K(n) \simeq 0$, 从而 X 是 $K(n)$ -acyclic 的。

现在反过来如果 X 是 $K(n)$ -acyclic 且 E_{n-1} -acyclic 的。我们现在只需说明 X 是 $Z(0)$ -acyclic 的。于是由归纳, 只需证明 X 是 $Z(i+1)$ -acyclic 的 $\implies X$ 是 $Z(i)$ -acyclic 的。归纳奠基源于 $i = n$ 时 $Z(i) = K(n)$ 。

现在由构造有余纤维列 $\Sigma^{2(p^i-1)} Z(i) \xrightarrow{v_i} Z(i) \rightarrow Z(i+1)$ 。于是 smashing X 后就有 $Z(i) \otimes X$ 上的 v_i 作用是可逆的。因此 $Z(i) \otimes X \simeq Z(i)[v_i^{-1}] \otimes X$ 。

然而 $Z(i)$ 是 $Z(0)$ 和 $M(p^j - 1), 0 \leq j < i$ 的张量积, 我们只需说明 X 是 $Z(0)[v_i^{-1}]$ 。再一次利用定理 33.7.1, $Z(0)[v_i^{-1}]$ 和 $E(i)$ Bousfield 等价。于是这就说明了结果。□

回忆 E_n 局部化本质上是到 $\mathcal{M}_{FG}^{\leq n}$ 的局部化, 我们自然有如下猜测:

定理 33.7.4 (Smash Product Theorem). L_{E_n} 是 *smashing* 的。

我们先承认这个事实。

定理 33.7.5 (Fracture Square). 对于谱 X , 我们有如下拉回图

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & L_{K(n)}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{E_{n-1}}X & \longrightarrow & L_{E_{n-1}}L_{L(n)}X \end{array}$$

于是拉回诱导了映射 $\alpha: X \rightarrow X'$ 。那么 α 是给出了 E_n 局部化。

证明. 由于 E_n 的 Bousfield Class 和 $E_{n-1} \times K(n)$ 相同, 我们只需对上述图表取 $L_{E_{n-1}}$ 和 $L_{K(n)}$ 。首先 E_{n-1} 局部化给出的是

$$\begin{array}{ccc} L_{E_{n-1}}X' & \longrightarrow & L_{E_{n-1}}L_{K(n)}X \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ L_{E_{n-1}}X & \longrightarrow & L_{E_{n-1}}L_{K(n)}X \end{array}$$

于是自动地, 我们就有 $L_{E_{n-1}}X \simeq L_{E_{n-1}}X'$ 。

而 $K(n)$ 局部化给出的则是

$$\begin{array}{ccc} L_{K(n)}X' & \longrightarrow & L_{K(n)}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{K(n)}L_{E_{n-1}}X & \longrightarrow & L_{K(n)}L_{E_{n-1}}L_{K(n)}X \end{array}$$

因此我们只需说明如下结果: 对于任何谱 X , $L_{E_{n-1}}X$ 都是 $K(n)$ -acyclic 的。这是因为 $L_{E_{n-1}}$ 是 *smashing* 的, 于是我们只需说明 $E_{n-1} \otimes K(n) \simeq 0$ 。

这是因为如下引理。 □

引理 33.7.6. 环谱 H 上携带高度为 n 的形式群律, 那么 $E_{n-1} \otimes H \simeq 0$ 。

证明. 我们考虑 E_{n-1} 上的标准形式群律和 H 上的形式群律通过自然映射送到 $E_{n-1} \otimes H$ 后得到的形式群律的高度。

首先 H 给出的 $E_{n-1} \otimes H$ 上形式群律高度不低于 n (映射不降低高度)。其次注意 E_{n-1} 上的形式群律对应的分类映射 $BP_* \rightarrow E_{n-1*}$ 将 $v_i \mapsto 0, i > n$ 映为 0, 于是其高度不超 $n-1$ 。

然而两个分类映射给出了 $MU_* \otimes MU_* \rightarrow E_{n-1*} \otimes H_*$, 而这分类了严格同构。于是我们就有了高度 $\geq n$ 和高度 $\leq n-1$ 的形式群律之间的同构, 矛盾! 于是只能有 $E_{n-1*} \otimes H \simeq 0$ 。 □

33.8 $K(n)$ 和幂零定理

33.8.1 $K(n)$ 的公理化定义

定义 33.8.1. R 是偶数分次交换环, 称 R 是分次域, 如果每个非零齐次元都是可逆的。这等价于 $R = k$ 或 $k[\beta^{\pm 1}]$, $|\beta|$ 是正偶数。



定义 33.8.2. 称环谱 E 是域, 如果 π_*E 是分次域。

注记. E -模 M 自由: 即形如 $\bigoplus \Sigma^{k_\alpha} E$ 。因为 π_*M 是 π_*E -模, 但是此时 π_*M 有一组齐次的基 (对 $k, k[\beta^{\pm 1}]$ 两个情况分开讨论: 后者的情况是因为假定 $|\beta| = d, \bigoplus_{0 \leq i < d} M_i$ 上的 k 基给出了自由的 $k[\beta^{\pm 1}]$ 基), 一个这样的基 $\alpha \in \pi_*M$ 诱导的 $\alpha: S \rightarrow M$ 穿过 $\Sigma^{k_\alpha} E$ 。于是这给出了

$$\bigoplus \Sigma^{k_\alpha} E \rightarrow M$$

但是它诱导了同伦群上的同构, 从而是同伦等价。

注记 (Kunneth 公式). 对于环谱 E 是域, 我们有 Kunneth 公式:

$$\begin{aligned} E_*(X \otimes Y) &= \pi_*(E \otimes X \otimes Y) = \pi_*(\bigoplus \Sigma^{k_\alpha} E \otimes Y) \\ &= \bigoplus E_{*-k_\alpha}(Y) \simeq E_*X \otimes_{E_*} E_*Y \end{aligned}$$

引理 33.8.3. $f: X \rightarrow Y$ 是谱的映射, 假设 X, Y 是 $K(n)$ 模, 这样 π_*X, π_*Y 都是 $\pi_*K(n) \simeq \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 上的模。那么 $f_*: \pi_*X \rightarrow \pi_*Y$ 是 $\mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 线性的。

证明. 将 f 做如下分解: $X \rightarrow K(n) \otimes X \rightarrow K(n) \otimes Y \rightarrow Y$ 。中间两个谱的 $K(n)$ -模结构都是通过作用到 $K(n)$ 因子上给出的。这三个映射除了第一个映射, 都是 $K(n)$ -模同态。因此我们只需考虑 $Y = K(n) \otimes X$ 的情况, 其中 Y 上的 $K(n)$ 模结构由在左侧 $K(n)$ 因子上的作用给出。

由于 $K(n)$ 是域, 那么 X 是自由的。于是我们不妨把问题约化到 $X = K(n)$, 从而只需证明 $f, g: K(n) \rightarrow K(n) \otimes K(n)$ 诱导了相同的同伦群映射。我们来看这对应的两个形式群律 \tilde{f}, \tilde{g} 的 p -级数 $[p]f, [p]g$ 。但是 $K(n)$ 上的形式群律仅相差严格同构 (因为对应的 $MU \rightarrow K(n)$ 诱导了 $MU \otimes MU \rightarrow K(n) \otimes K(n)$), 从而 p -级数的首项没有改变, 于是 $f_*v_n = g_*v_n$ 。□

命题 33.8.4. X 是 $K(n)$ 模, Y 是 X 的收缩, 那么 Y 有 $K(n)$ 模结构。

证明. 考虑 $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} Y$ 。取 $f = i \circ r$, 前一引理说明 f_* 是一个 $\mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 模同态。从而 f_* 的像是 π_*X 的分次 $\mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 子模。它是自由的, 设有一组基 $\eta_\alpha \in \pi_{k_\alpha} X$ 。从而这给出了一个映射 $\alpha: \bigoplus \Sigma^{k_\alpha} K(n) \rightarrow X$ 。于是 $r \circ \alpha$ 诱导了同伦群的同构, 从而给出了 $Y \simeq \bigoplus \Sigma^{k_\alpha} K(n)$ 。□

命题 33.8.5. 谱 E 是域, 并且 $E \otimes K(n) \neq 0$, 那么 E 有 $K(n)$ 模结构。

证明. $E \otimes K(n)$ 非零, 从而 $E \rightarrow E \otimes K(n)$ 非零。然而 E 是域, 于是 $E \otimes K(n)$ 作为 E 模自然自由, 从而 E 是 $E \otimes K(n)$ 的直和项, 那么前一命题就说明 E 有 $K(n)$ -模结构。□

然而我们还有:

命题 33.8.6. E 是复定向环谱, 其形式群律高度恰好为 n , 如果 $E \neq 0$ 则 $E \otimes K(n) \neq 0$ 。

证明. 由于 $E \otimes E_{n-1} \simeq 0$ (因为它们分别携带了 $\leq n-1$ 和 n 高度的形式群律, 引理 33.7.6), 如果 $E \otimes K(n) \simeq 0$, 那么由于 $E_{n-1} \times K(n)$ 是 Bousfield 等价的, $E \otimes E_n \simeq 0$ 。

但是 $\pi_*(E \otimes E_n)$. **Todo.** □

我们现在终于能够证明 $K(n)$ 的公理化定义:



定理 33.8.7. 如果 E 是复定向环谱, 其形式群律恰好为 n , 同伦群由 $\pi_* E \simeq \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 给出。那么 $E \simeq K(n)$ 。

证明. 如果 $E \neq 0$, 上一命题说明 $E \otimes K(n) \neq 0$, 于是再前一命题说明 E 是 $K(n)$ 模。但这一定是自由模, 观察同伦群立刻说明秩只能为 1, 从而 $E \simeq K(n)$ 。□

33.8.2 幂零定理

我们下面触及到的是色展同伦论中的本质内容:

命题 33.8.8. 现在 $\{E^\alpha\}$ 是一族环谱, 如下等价:

1. R 是 p -局部环谱, $x \in \pi_m R$ 满足: $\forall \alpha, m$, 其在 $E_m^\alpha(R)$ 中的像是 0 $\implies x$ 是 $\pi_* R$ 中幂零元
2. R 是 p -局部环谱, $x \in \pi_0 R$ 满足: $\forall \alpha$, 其在 $E_0^\alpha(R)$ 中的像是 0 $\implies x$ 是 $\pi_0 R$ 中幂零元
3. X 是任何 p -局部谱, $\forall \alpha, x \in \pi_0 X$ 如果在 Hurewicz 映射 $\pi_0 X \rightarrow E_0^\alpha(X)$ 下的像平凡 $\implies n \gg 0, x^{\otimes n} \in \pi_0 X^{\otimes n}$ 是零
4. X 是任何 p -局部谱, F 是有限谱, $f: F \rightarrow X$ 满足复合映射 $F \rightarrow X \rightarrow X \otimes E_0^\alpha$ 零伦 $\implies n \gg 0, f^{\otimes n}: F^{\otimes n} \rightarrow X^{\otimes n}$ 是零

满足这样的条件的 $\{E^\alpha\}$ 称为探测幂零。

证明. 1 \implies 2. 显然; 2 \implies 3 因为将 R 取为 $\bigoplus_{n \geq 0} X^{\otimes n}$ 即可; 3 \implies 4 成立因为将 X 替换为 $\text{map}(F, X)$ 即可。

4 \implies 1: 假定 $x \in \pi_m R$ 使得其像在所有 $E_n^\alpha(R)$ 中消失。假设 $x: S^m \rightarrow R$, 那么在 $x^n \in \pi_* R$ 是如下的复合:

$$S^{mn} \xrightarrow{x^{\otimes n}} R^{\otimes n} \rightarrow R$$

现在由 4 的条件, 考虑 $S^m \rightarrow R \rightarrow R \otimes E_0^\alpha$ 是零伦的, 于是 $x^{\otimes n}$ 在 $n \gg 0$ 时零伦, 从而说明了 x 幂零。□

我们的主定理是

定理 33.8.9 (幂零定理, Devinatz-Hopkins-Smith). 对于环谱 R , $\pi_* R \rightarrow MU_* R$ 的核恰好是全体幂零元, 特别地, MU 检测幂零。

推论 33.8.10. $\forall n > 0, \pi_n S$ 是幂零的。

证明. Serre 定理保证 $n > 0, x \in \pi_n S$ 是挠元, 但是 Lazard 环 L 无挠, 于是其像只能是 0。□

我们给出如下推论:

定理 33.8.11. $\{K(n)\}_{0 \leq n \leq \infty}$ 探测幂零。这里 $K(\infty) = H\mathbb{F}_p$ 。

我们证明它满足条件 3. 取

$$T = \text{colim}(S \xrightarrow{x} X \xrightarrow{x} X^{\otimes 2} \rightarrow \dots)$$



引理 33.8.12. $x \in \pi_0 X, E$ 是环谱。以下等价:

1. T 是 E -acyclic 的
2. $n \gg 0$ 时 $x^{\otimes n}$ 在 $E_0(X^{\otimes n})$ 中的像消失

证明. $1 \implies 2$. 此时 $S \rightarrow T \rightarrow E \otimes T$ 是零伦的, 因为 $E \otimes T \simeq 0$. 于是由余极限构造 (回忆 smash 和任意余极限交换), 就有 $S \rightarrow X^{\otimes n} \rightarrow X^{\otimes n} \otimes E$ 是零伦的, $n \gg 0$.

$2 \implies 1$. 反过来由 cofinality, $T \otimes E$ 可以直接实现成 $E \rightarrow X^{\otimes n} \otimes E \rightarrow X^{\otimes 2n} \otimes E \rightarrow \dots$, 那么这直接就说明了结果. \square

下面我们来证明 $\{K(n)\}$ 探测幂零。

证明. 对于 p -局部谱 $X, x \in \pi_0 X$ 满足其在 $K(n)_0(X)$ 中的像是 0. 我们希望证明 $x^{\otimes n}$ 消失。幂零定理说明 $\pi_* X^{(R)} \rightarrow MU_*(X^{(R)})$ 的核是幂零元。其中 $X^{(R)} = \bigoplus_{n \geq 0} X^{\otimes n}$, 于是我们只需说明 x 在 $MU_0(X)$ 中的像是幂零的, 前一引理说明这等价于 $MU_* T \simeq 0$.

然而 MU -acyclic 可以由 BP -acyclic 推出。(Todo.: $BP_* \rightarrow \mathcal{M}_{FG} \times \text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)}$ 忠实平坦) 现在取

$$P(n) = \bigotimes_{k \neq p^m - 1} M(k) \otimes_{MU_{(p)}} \bigotimes_{m < n} M(p^m - 1)$$

那么 $P(0) \simeq BP$. 现在 $P(\infty) \simeq \text{colim } P(n) \simeq H\mathbb{F}_p$, 由假设, $P(\infty)_0 X \simeq \text{colim } P(n)_0(X)$ 中 x 的像是 0, 从而对于某个 $n < \infty$, $P(n)_* X$ 中 x 的像消失, 于是 $P(n)_* T \simeq 0$.

下面我们对 n 向下归纳。假定 $P(m+1)_* T \simeq 0$, 考虑余纤维序列 $\sum^{2(p^m-1)} P(m) \xrightarrow{v_m} P(m) \rightarrow P(m+1)$, 这说明 v_m 可逆地作用, 从而 $P(m)_* T \simeq P(m)[v_m^{-1}]_* T$. 然而 $P(m)[v_m^{-1}]$ 是 $MU_{(p)}[v_m^{-1}]$ 模, 从而只需说明 T 是 $MU_{(p)}[v_m^{-1}]$ -acyclic.

回忆条件说明 T 都是 $K(m)$ -acyclic 的, 然而 $\mathbb{F}_p[v_m^{\pm 1}] \rightarrow MU_{(p)}[v_m^{-1}]$ 给出了环同态, 从而说明了结果. \square

推论 33.8.13. E 是非零 p -局部环谱, 那么 $\exists n, 0 \leq n \leq \infty, E \otimes K(n) \not\simeq 0$.

证明. 若否, $K(n)_* E \simeq 0, \forall n$, 则 $\pi_0 E$ 的元素都幂零。观察 $1 \in \pi_0 E$ 是幂零元, 于是只能 $E \simeq 0$. \square

将这个结果和前一节的命题结合就说明: E 是环谱并且 $\pi_* E$ 是分次域, 那么 E 是 $K(n)$ -模。

33.9 厚子范畴定理

定义 33.9.1. \mathcal{T} 是有限 p -局部谱 (作为 CW 谱被有限胞腔生成) 范畴的全子范畴。称 \mathcal{T} 是厚子范畴, 如果它包含 0, 在纤维和余纤维下封闭, 并且对 retract 封闭。

注记. $X \in \mathcal{T}, Y$ 是有限 p -局部谱, 则 $X \otimes Y \in \mathcal{T}$. 这是因为将 Y 写成胞腔给出的余纤维列, 注意 \mathcal{T} 在余纤维下封闭。特别地, 如果 \mathcal{T} 包含 $S_{(p)}$, 那么前述论证说明 \mathcal{T} 就是全体有限 p -局部谱。

对于厚子范畴 \mathcal{T}, \mathcal{C} 是其在余极限下生成的范畴, 那么 $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{C}$ 给出了如下范畴的对应: 厚子范畴 \leftrightarrow 在解维悬下封闭并且被 p -局部有限谱在余极限下生成的 p -局部谱范畴的子范畴。



引理 33.9.2. X 是有限 p -局部谱, $K(n)_*(X) \simeq 0, n > 0$, 则 $K(n-1)_*(X) \simeq 0$ 。

证明. 记 $R = MU_{(p)}[v_n^{-1}] \otimes_{MU_{(p)}} \bigotimes_{k \neq p^n-1, p^{n-1}-1} M(k)$ 。 $\pi_* R \simeq \mathbb{F}_p[v_{n-1}, v_n^{\pm 1}]$, 特别地 $\pi_0 R = \mathbb{F}_p[v_{n-1}^a v_n^{-b}] = \mathbb{F}_p[t]$, 其中 (a, b) 是 $a(p^{n-1}-1) - b(p^n-1) = 0$ 的本原解, 并且 $R_k(X)$ 总是 $\pi_0 R$ 上的有限生成模。

现在由余纤维列 $\sum^{2(p^{n-1}-1)} R \xrightarrow{v_{n-1}} R \rightarrow K(n)$ 。由于 $K(n)_* X \simeq 0$, v_{n-1} 的作用可逆, 于是进一步 t 作用可逆。于是在 $R_k(X)$ 上 $t \in \pi_0 R$ 作用总是可逆的, 从而由 PID 上有限生成模结构定理, $R_k(X)$ 是挠模。

现在选取一个多项式 $f(t)$ 使得其将每个 $R_k(X), 0 \leq k < 2(p^n-1)$ 零化。由于周期谱的上同调理论也是周期的 ($A[m] \otimes B \simeq (A \otimes B)[m]: -[m] \simeq - \otimes \mathbb{S}^m$), 这实际上零化了所有 $R_k(X)$ 。

现在假定 $t|f(t)$, 对充分大 k , $f(t)v_n^k$ 是 v_{n-1}, v_n 的多项式, 它来自 MU , 从而我们可以对 R 关于 $f(t)$ 做局部化得到环谱 $R[f(t)^{-1}]$, 于是 $R[f(t)^{-1}]_* X \simeq R_* X[f(t)^{-1}] \simeq 0$ 。

由构造, $R[f(t)^{-1}]$ 有复定向并且形式群律高度恰为 $n-1$: $t|f(t)$, 从而 v_{n-1} 在 $\pi_* R[f(t)^{-1}]$ 中可逆。于是再一次由类似引理 33.7.6 的论证, $R[f(t)^{-1}] \otimes K(m) \simeq 0, m \neq n-1$ 。

由于 $R[f(t)^{-1}] \neq 0, R[f(t)^{-1}] \otimes K(n-1) \neq 0$, 然而 $K(n-1)$ 模都自由, 从而它包含 $K(n-1)$ 作为自己的 retract。由于 $X \otimes R[f(t)^{-1}] \simeq 0$, 于是 $X \otimes R \simeq 0$ \square

因此我们可以给出定义:

定义 33.9.3. 称 p -局部有限谱 X 是 type n 的, 如果 $K(n)_*(X) \neq 0, K(n-1)_* X \simeq 0$ (于是 $K(m)_* X \simeq 0, \forall m < n$)。特别地, 称 X type 0, 如果 $H_*(X; \mathbb{Q}) \simeq 0$ 。

由上一节最后的结果, 每个非零有限 p -局部谱 X 都是某个 type n 的, 称零谱为 type ∞ 的。

注记. type n 谱的对偶也是 type n 。 **Todo.**

定义 33.9.4. 取 $\mathcal{C}_{\geq n}$ 为全体 type $\geq n$ 的有限 p -局部谱构成的全子范畴。容易直接验证 $\mathcal{C}_{\geq n}$ 是厚子范畴。

我们来证明如下重要结果:

定理 33.9.5 (厚子范畴定理). \mathcal{T} 是 p -局部有限谱的厚子范畴, 那么 $\exists n, 0 \leq n \leq \infty$ 使得 $\mathcal{T} = \mathcal{C}_{\geq n}$ 。

证明. 给定 \mathcal{T} , 如果 \mathcal{T} 只包含零谱, 那么 $n = \infty$ 满足要求。否则取所有非零谱 $X \in \mathcal{T}$ 中 type 最小者, 设为 n 。自然 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}_{\geq n}$ 。对于反向包含, 我们来证明: 如果一个厚子范畴 \mathcal{T} 包含一个 type n 谱 X , Y type $\geq n$, 那么 $Y \in \mathcal{T}$ 。

取 DX 为 X 的 p -局部 Spanier-Whitehead 对偶。那么 $\text{id}: X \rightarrow X$ 由 $e: S_{(p)} \rightarrow X \otimes DX$ 给出。现在 X 是 type n 的, 那么注意

$$K(m)_*(S_{(p)}) \rightarrow K(m)_*(X \otimes DX), m > n$$

不是零映射, 第一项恰好是 $K(m)_*$, 所以第二项是 $K(m)$ -模并且这个映射是 $K(m)_*$ -模同态, 从而一定是单射。

现在取 $F = \text{fib}(S_{(p)} \rightarrow X \otimes DX)$, 那么 $K(m)_*F \rightarrow K(m)_*(S_{(p)})$ 是零映射, $m > n$ 。

现在再考虑 $g: F \xrightarrow{f} S_{(p)} \rightarrow Y \otimes DY$ 。那么 g 诱导了 $K(m)_*F \rightarrow K(m)_*(Y \otimes DY)$ 的零映射 ($m > n$ 时 f 给出零映射, $m < n$ 时 $K(m)_*(Y \otimes DY) = K(m)_*Y \otimes_{\mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]} K(m)_*DY = 0$)。于是由幂零定理, 存在一个幂次 k 使得:

$$F^{\otimes k} \rightarrow (Y \otimes DY)^{\otimes k}$$

零伦。现在作用上 $Y \otimes DY$ 的乘法, 这给出零映射 $F^{\otimes k} \rightarrow Y \otimes DY$, 其中对应的 $\text{Hom}(F^{\otimes k} \otimes Y, Y)$ 的元素为

$$F^{\otimes k} \otimes Y \xrightarrow{f} F^{\otimes k-1} \otimes Y \rightarrow \cdots \rightarrow Y$$

于是这说明 Y 是 $Y/(F^{\otimes k} \otimes Y)$ 的 retract。

因此我们现在来说明 $Y/(F^{\otimes k} \otimes Y) \in \mathcal{T}$ 。注意 $(F^{\otimes a} \otimes Y)/(F^{\otimes a+1} \otimes Y)$ 给出了一个滤过, 但是每个滤过都形如:

$$F^{\otimes a} \otimes Y \otimes (S_{(p)}/F) \simeq F^{\otimes a} \otimes Y \otimes DX \otimes X$$

注意 DX 是 p -局部有限谱, 那么本节开头就说明了它是 \mathcal{T} 中的对象, 这就证明了结果。 \square

33.10 周期定理

定义 33.10.1. X 是 p -局部有限谱, $n \geq 1$, v_n -自映射是指 $f: \Sigma^k X \rightarrow X$ 满足:

1. f 诱导 $K(n)_*X \rightarrow K(n)_*X$ 的同构 (作为 $K(n)_*$ 模: 回忆 $K(n)$ 模谱之间的态射总是诱导 $K(n)_*$ 模同态)。
2. $m \neq n$, $K(m)_*X \rightarrow K(m)_*X$ 是幂零的。

我们来证明如下结果:

定理 33.10.2 (周期定理). X 是 p -局部有限谱, $\text{type} \geq n$ 。那么 X 上存在 v_n -自映射。

我们来证明这个结果。首先我们将 v_n -自映射转换为 $R = X \otimes DX$ 的情景。此时 $\Sigma^k X \rightarrow X$ 等价于 $\pi_k R$ 中的元素。它是 v_n -自映射等价于 $\pi_k R$ 的元素在 $K(m)_*R$ 中的像是幂零的, 如果 $m \neq n$; 是可逆的, 如果 $m = n$, 这样的元素称为 v_n -元素。

引理 33.10.3. R 是有限 p -局部环谱, $x \in \pi_k R$ 是 v_n -元素。那么 x 的某个幂次满足其在 $K(m)_*R$ 中的像是 v_n^a , $m = n$; $0, m \neq n$ 。

证明. 观察 Atiyah-Hirzebruch 谱序列知 $K(m)_*R \simeq H_*(R; \mathbb{F}_p)[v_m^{\pm 1}]$, $m \gg 0$: 注意到 R 有限, 于是间距 m 充分大时谱序列退化。

现在 $x \in \pi_k R$ 是 v_n -元素, 于是对某个 $m \gg n$ 其在 $K(m)_*R$ 的像是幂零的, 从而其在 $H_*(R; \mathbb{F}_p)$ 的像是幂零的。通过某个适当的幂次, 可以假定 x 的某个幂次在 $H_*(R; \mathbb{F}_p)$ 中是 0 , 于是在 $K(m)_*R$ 中的像是 0 , $m \gg 0$ 。

于是只有有限个 $m \neq n$ 使得 x 的幂次在 $K(m)_*R$ 中的像非 0 。于是再一次取适当的幂次, 就有 x 的某个幂次在 $K(m)_*R$ 中的像都是 0 , $m \neq n$ 。



现在来看 $K(n)_*R$, 它是 $\pi_*K(n) \simeq \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 上的有限生成模。于是 $(K(n)_*R)/(v_n - 1)$ 也是有限生成的。现在 $x \in K(n)_*R/(v_n - 1)$ 中的像是单位。于是 x 的幂次也是如此。因此它的某个幂次变为 $1 \in K(n)_*R/(v_n - 1) \simeq \bigoplus_{0 \leq i < 2(p^n - 1)} K(n)_i R$ 。而这就说明这个 x 的幂次满足要求。 \square

引理 33.10.4. R 是有限 p -局部环谱, $x \in \pi_k R$ 是 v_n -元素。那么 x 的某个幂次满足其在 $\pi_* R$ 中的像是中心元素。

证明. 不失一般性我们假定 x 满足前一引理的性质。现在取 $A = R \otimes DR$, 那么左 (右) 乘 x 诱导了的 $\Sigma^k R \rightarrow R$ 的映射分别对应到 $a, b \in \pi_k A$ 。那么 a, b 及哦啊缓。

现在由于 A 的 $\text{type} > 0$ (否则 v_n -元素不可能存在), 于是 $\pi_* A$ 是挠的, 从而 $a - b$ 也是如此。我们来证明 $a - b$ 是幂零的: 这只需说明 $a - b$ 在每个 $K(m)_* A$ 中消失, 因此这相当于要求 $K(m)_* R$ 上左乘和右乘 x 相同。由 x 的假设, 对于 $m \neq n$ 这当然一样; 对于 $m = n$, 这相当于说明 v_n^j 的左乘和右乘相同。然而此时 $K(n)_* R$ 自动是 $MU_{(p)}$ -模并且 v_n 来自 $MU_{(p)}$ 。

现在对于 $\pi_* A$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数, a, b 交换并且 $a - b$ 是挠元且幂零。那么:

$$a^{p^k} = (b + (a - b))^{p^k} = b^{p^k} + \sum \binom{p^k}{i} b^{p^k - i} (a - b)^i$$

取 $(a - b)^{p^a} = 0$, 那么上式右端是

$$y^{p^k} + \sum_{0 < i < p^a} \frac{p^k}{i} \binom{p^k - 1}{i - 1} y^{p^k - i} (x - y)^i$$

现在每个 p^k/i 都被 p^{k-a} 整除, 因此对于 $k \gg 0$ 能够零化 $x - y$ 。

于是我们说明了对于充分大的 $j \gg 0, a^{p^j} = b^{p^j}$, 那么取 x^{p^j} 就满足要求。 \square

引理 33.10.5. R 是有限 p -局部谱, $x, y \in \pi_* R$ 是两个 v_n -元素, 那么存在 $a, b > 0$ 使得 $x^a = y^b$ 。

证明. 将 x, y 替换为合适的幂次, 可以假定 $x, y \mapsto 0 \in K(m)_* R, m \neq n; x, y \mapsto v_n^j \in K(n)_* R$ 。进一步取合适的幂次使得它们在 $\pi_* R$ 中交换。现在 R 是 $\text{type } n$ 的, 于是 $\pi_* R$ 是挠的, 从而 $x - y$ 是挠元。前述构造说明 $x - y$ 在每个 $K(m)_* R$ 中都是 0, 从而它幂零。那么仿照上一引理最后一部分的说理, 我们有 $x^{p^j} = y^{p^j}, j \gg 0$ 。 \square

注记. 作为推论: p -局部有限谱 X 上的两个 v_n -自映射 f, g 满足 $\exists a, b > 0, f^a = g^b$ 。

我们有上一引理的相对版本:

引理 33.10.6. X, Y 上有各自的 v_n -自映射 $f: \Sigma^a X \rightarrow X, g: \Sigma^b Y \rightarrow Y$ 。 $h: X \rightarrow Y$ 是任何映射, 那么 f, g 的某个幂次满足同伦交换性:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{ak} X & \longrightarrow & \Sigma^{bl} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中 $ak = bl$ 。



证明. 视 h 为 $e: S \rightarrow DX \otimes Y$, 那么上述图表的交换性由 $(Df \otimes \text{id}_X) \circ e \simeq (\text{id}_{DX} \otimes g) \circ e$ 给出。然而 $Df \otimes \text{id}_X, \text{id}_{DX} \otimes g$ 都是 $DX \otimes Y$ 上的 v_n -自映射, 那么前一推论说明了结果。 \square

命题 33.10.7. \mathcal{T} 是全体有 v_n -自映射 p -局部有限谱, 那么 \mathcal{T} 是厚子范畴。

证明. $0 \in \mathcal{T}$, \mathcal{T} 自动在平移下封闭。下面我们说明 \mathcal{T} 在余纤维下封闭: 给定 $h: X \rightarrow Y$, f, g 是 X, Y 上的 v_n -自映射。那么选取一个幂使得我们有同伦交换图表

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{ak} X & \longrightarrow & \Sigma^{bl} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

那么将这个图表延展到余纤维上 $x: \Sigma^k(Y/X) \rightarrow Y/X$, 通过检查 $K(n)_*$ 作用: 5 引理说明 $K(n)_*x$ 是同构; 对于 $m \neq n$, 长正合列给出了

$$\begin{array}{ccccc} K(m)_{*-k} Y & \longrightarrow & K(m)_{*-k}(Y/X) & \longrightarrow & K(m)_{*-k-1} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(m)_* Y & \longrightarrow & K(m)_*(Y/X) & \longrightarrow & K(m)_{*-1} X \end{array}$$

两侧映射都是零映射。那么考虑 x^2 (自然嵌进一个 3×3 图表中), 追图立刻说明 x^2 是 0。

然后是 \mathcal{T} 在收缩下封闭 (见注记)。假定 $X \oplus Y$ 上有 v_n -自映射, 那么投影到 X 上即可。 \square

注记. 稳定 ∞ -范畴中的收缩都是直和项。

因此我们最终证明了周期定理。

33.11 望远镜局部化

定义 33.11.1. 对于有限 p -局部谱 X , 若其 $\text{type} \geq n$, 定义

$$L_n^t(X) \simeq X[f^{-1}] = \text{colim}(X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} \cdots)$$

其中 f 是 X 上的 v_n -自映射。由 v_n -自映射在幂次意义下的唯一性, 这个定义与 f 的选取无关。

命题 33.11.2. L_n^t 是对 $\mathcal{C}_{\geq n+1}$ 的 Bousfield 局部化。这里对范畴的 Bousfield 局部化是指 $X \rightarrow L_n^t X$ 的纤维是 $\mathcal{C}_{\geq n+1}$ 的对象的滤余极限; 并且 $X[f^{-1}]$ 是 $\mathcal{C}_{\geq n+1}$ -局部的, 即任何 $Y \in \mathcal{C}_{\geq n+1}$ 到 $X[f^{-1}]$ 的态射是零伦的。

证明. 取 $u: X \rightarrow X[f^{-1}]$ 的余纤维: 观察余极限图表知它是 $0 \rightarrow \Sigma^{-k} X/X \rightarrow \Sigma^{-2k} X/X \rightarrow \cdots$, 其中商是由 f^k 给出的。现在每个 $\Sigma^{-nk} X/X$ 都是 $\text{type} \geq n+1$ 的: 观察长正合列知其 $K(n)_*$ 消失。

对于任何 $\text{type} > n$ 的有限谱 Y , 欲证每个 $e: Y \rightarrow X[f^{-1}]$ 零伦, 只需说明 $DY \otimes X[f^{-1}]$ 零伦。然而注意到 $\text{id}_{DY} \otimes f$ 在 $K(m)_*$ 中诱导的是零映射, $m \neq n$; 对于 $m = n$ 则利用 Kunneth 公式以及 Y 是 $\text{type} > n$ 的, 那么 DY 也是如此, 从而说明 $K(n)_*(DY \otimes X) \simeq 0$ 。



现在幂零定理说明 f 的某个幂次是零。然而

$$DY \otimes X[f^{-1}] \simeq \operatorname{colim}(DY \otimes X \rightarrow DY \otimes \Sigma^{-k}X \rightarrow \dots)$$

这就说明了它是 0. □

下面我们给出 L_n^t 在整个谱范畴中的推广。

命题 33.11.3. 对于 p -局部有限 $\text{type } n$ 谱 X , f 是 X 上的 v_n -自映射, 记 $Tel(X) = X[f^{-1}]$ 。那么 $\langle Tel(X) \rangle$ 所决定的 Bousfield 等价类与 X 的选取无关, 记为 $\langle Tel(n) \rangle$ 。

证明. 固定一个 $\text{type } n$ 谱 T , 以及其对 v_n -自映射的局部化 $T(n)$ 。

$$I = \{M | M[v_n^{-1}] \otimes E = 0, \forall E \text{ } T(n)\text{-acyclic}\} \subseteq \mathcal{C}_{\geq n}$$

那么直接检验知这是一个厚子范畴, 自然 $T \in I$, 于是 $I = \mathcal{C}_{\geq n}$ 。对每个 $\text{type } n$ 谱 T 使用上述论证就说明了结果。 □

我们现在说明对 $\bigoplus_{0 \leq i \leq n} Tel(i)$ 做 Bousfield 局部化是 L_n^t 的正确推广。

定理 33.11.4. 对于 p -局部有限谱 Y , 若其 $\text{type} \geq n$, 那么 $L_n^t(Y) \simeq L_{\bigoplus_{0 \leq i \leq n} Tel(i)} Y$ 。

证明. 记 $Tel(i) = X_i[v_i^{-1}]$, X_i $\text{type } i$, $i \leq n$. 那么我们有纤维列

$$\operatorname{colim} \Sigma^{-1} v_n^a Y / Y \rightarrow Y \rightarrow Y[v_n^{-1}]$$

只需验证 $\Sigma^{-1} v_n^a Y / Y$ 是 $Tel(i)$ -acyclic 的, 并且 $Y[v_n^{-1}]$ 是 $Tel(i)$ -局部的。

先证明 acyclic:

$$\begin{aligned} X_i[v_i^{-1}] \otimes \operatorname{colim} \Sigma^{-1} v_n^a Y / Y &= \operatorname{colim} (X_i[v_i^{-1}] \otimes v_n^a Y / Y)[-1] \\ &= (\operatorname{colim}_{a,b} v_i^a X \otimes v_n^b Y / Y)[-1] = 0 \end{aligned}$$

最后一个等号是因为 Y $\text{type} \geq n$ 。

再证明 local, 取子范畴

$$I = \{Y | \forall M \text{ } Tel(i)\text{-acyclic, fn, p-loc.}, \operatorname{map}(M, Y[v_n^{-1}]) = 0\} \subseteq \mathcal{C}_{\geq n}$$

自然这也是厚子范畴, 并且 $DX_i \in I$, 于是它是 $\mathcal{C}_{\geq n}$, 从而完成了证明。 □



参考文献

- [Ada95] J.Frank Adams. *Stable Homotopy and Generalized Homology*. University Of Chicago Press, 1995 (cit. on pp. [171](#), [172](#), [174](#), [178](#), [207](#)).
- [Bal21] Scott Balchin. *A Handbook of Model Categories*. Springer International Publishing, 2021. ISBN: 9783030750350. DOI: [10.1007/978-3-030-75035-0](#) (cit. on pp. [217](#), [220](#)).
- [Bou79] A.K. Bousfield. “The localization of spectra with respect to homology”. In: *Topology* 18.4 (1979), pp. 257–281. ISSN: 0040-9383. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(79\)90018-1](#) (cit. on p. [231](#)).
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer New York, 1982. ISBN: 9781475739510. DOI: [10.1007/978-1-4757-3951-0](#) (cit. on p. [133](#)).
- [Elm97] Anthony D Elmendorf. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*. 47. American Mathematical Soc., 1997 (cit. on p. [215](#)).
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press Cambridge University Press, 2001 (cit. on pp. [2](#), [67](#), [119](#)).
- [Hov99] Mark Hovey. “Model Categories”. In: *Mathematical Surveys and Monographs* 63 (1999) (cit. on pp. [212](#), [214](#)).
- [KPo12] J.P.May & K.Ponto. *More Concise Algebraic Topology*. The University of Chicago Press, 2012 (cit. on p. [43](#)).
- [Lew91] L.Gaunce Lewis. “Is there a convenient category of spectra?” In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 73.3 (1991), pp. 233–246. ISSN: 0022-4049. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-40](#) (cit. on pp. [209](#), [215](#)).
- [Lur09] Jacob Lurie. “Higher Topos Theory”. In: *Annals of Mathematics Studies* 170 (2009). eprint: [math/0608040](#) (cit. on p. [221](#)).
- [Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. Preprint. 2017 (cit. on pp. [224](#), [227](#), [228](#)).
- [May98] J. Peter May. *The hare and the tortoise*. 1998 (cit. on p. [210](#)).
- [May99] J. Peter May. *A concise course in Algebraic Topology*. The University of Chicago Press, 1999 (cit. on pp. [2](#), [36](#), [38](#), [48](#), [83](#)).
- [Rav86] Douglas C. Ravenel. “Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres”. In: 1986 (cit. on p. [236](#)).