Introduction to Commutative Algebra - Part2.

Note. 4.E13，5.E22（答案有误），5.E24

作为模有限生成：有限。

作为代数有限生成：有限型。

4. 准素分解

4.0 引言

对一个理想做准素分解得到$\mathfrak{a}=\cap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$。今后的结论将指出如果这样的分解是极小的，它对应到代数簇上正是对簇进行不可约分支分解。

4.1 准素理想

定义（准素理想）称一个理想$\mathfrak{q}$是准素理想，如果$\mathfrak{q}\neq A$且$xy\in\mathfrak{q}\implies x\in\mathfrak{q}\vee y^n\in\mathfrak{q}$对某些$n>0$成立。
从而：$\mathfrak{q}$准素$\iff A/\mathfrak{q}\neq 0$且每个零因子都是幂零元。

性质（准素理想的性质）
素理想准素；准素理想的局限准素（$A/\mathfrak{q}^c$同构与$B/\mathfrak{q}$的子环）

4.1（$\mathfrak{p}-$准素）$\mathfrak{q}$是准素理想，那么$r(\mathfrak{q})$是最小的包含$\mathfrak{q}$的素理想，记为$\mathfrak{p}$，则称$\mathfrak{q}$是$\mathfrak{p}-$准素的。
证：
由1.8，只需说明$r(\mathfrak{q})$是素的。若$xy\in r(\mathfrak{q})$，则$(xy)^n\in\mathfrak{q}$。从而$x^n\in\mathfrak{q}\vee y^{mn}\in\mathfrak{q}$即$x\in r(\mathfrak{q})\vee y\in r(\mathfrak{q})$。

Remarks and Examples.

1. $\mathbb{Z}$中的情况是熟知的：$(0),(p^n)$是全体的准素理想，同时它也是全体根理想为素的理想。但是最后这个论断对于一般的环中并不一定成立。
2. 准素理想不一定具有形式$\mathfrak{p}^n$：$A=k[x,y],\mathfrak{q}=(x,y^2)$。$A/\mathfrak{q}\cong k[y]/(y^2)$，其中的零因子是$y$的倍数，从而幂零。于是说明$\mathfrak{q}$的确准素。然而$\mathfrak{q}$是$(x,y)-$准素的，若其具有形式$\mathfrak{p}^n$，一定有$\mathfrak{p}=(x,y)$。但是$(x,y)^2\subset\mathfrak{q}\subset(x,y)$，从而不可能具有形式$\mathfrak{p}^n$。
3. 根理想为素的理想不一定准素，更进一步地：$\mathfrak{p}^n$不一定准素：取 $A=k[x,y,z]/(xy-z^2)$，$\mathfrak{p}=(x,z)$。由于$A/\mathfrak{p}\cong k[y]$是整环，因而它的确素。而对于$\mathfrak{p}^2$：$\bar{x}\bar{y}=\bar{z}^2\in\mathfrak{p}^2$，但是$\bar{x}\notin\mathfrak{p}^2,\bar{y}\notin\mathfrak{r}(\mathfrak{p}^2)=\mathfrak{p}$，从而它并不准素。

尽管有Remark3.的反例存在，将根理想为素这一条件更换为根理想极大则能够得到结论成立。

4.2 $r(\mathfrak{a})$**极大，则**$\mathfrak{a}$**准素。特殊地，给定极大理想**$\mathfrak{m}$**，**$\mathfrak{m}^n$**准素。**

证：

$r(\mathfrak{a})$在$A/\mathfrak{a}$中的像仍然极大，并且是幂零根。那么$A/\mathfrak{a}$局部，从而$A/\mathfrak{a}$中元素要么是单位，要么是幂零元。（若有一个非单位非幂零元的元素，它应该被某个极大理想包含，于是矛盾）

4.2 准素分解

4.3（$p-$**交**$p-$**还是**$p-$**）对于**$\mathfrak{p}-$**准素理想**$\mathfrak{q}_i$**，**$\mathfrak{q}=\cap_{i=1}^n\mathfrak{q}_i$**仍然是**$\mathfrak{p}-$**准素的。**

证：

$r(\mathfrak{q})=\cap r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}$。令$xy\in\mathfrak{q},y\notin\mathfrak{q}$，即存在某个$i,xy\in\mathfrak{q}_i,y\notin\mathfrak{q}_i$，从而说明$x\in\mathfrak{p}$，进而准素。

4.4（准素理想的商理想）设$\mathfrak{q}$**是**$\mathfrak{p}-$**准素的，**$x\in A$**。**

4.4.1 $x\in\mathfrak{q}$**，则**$(\mathfrak{q}:x)=(1)$

4.4.2 $x\notin\mathfrak{q}$**，则**$(\mathfrak{q}:x)$**是**$\mathfrak{p}-$**准素的。**

4.4.3 $x\notin\mathfrak{p}$**，则**$(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{q}$

证：

4.4.1 显然

4.4.2 $y\in(\mathfrak{q}:x)\iff xy\in\mathfrak{q}\implies y\in r(\mathfrak{q})\implies y\in\mathfrak{p}$，于是$\mathfrak{q}\subseteq(\mathfrak{q}:x)\subseteq\mathfrak{p}$。两侧取根理想，$r(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{p}$。

若$yz\in(\mathfrak{q}:x)$，并且$y\notin\mathfrak{p}$，则$xyz\in\mathfrak{q}$，从而$xz\in\mathfrak{q}$，于是$z\in(\mathfrak{q}:x)$，从而说明了准素。

4.4.3 有定义显然。

准素分解是将一个理想分解成有限个准素理想的交的过程。（尽管这个分解并不总是一定存在，但是它在代数几何中意义是明显的）
更进一步地，如果：1. $r(\mathfrak{q}_i)$各不相同；2. $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$。那么称这个准素分解是极小的。
每个准素分解都可以被约化为极小准素分解。
证：
1.条件利用4.3可以取到。
2.若$\mathfrak{q}_i \supseteq \cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$，将$\mathfrak{q}_i$除掉即可。

接下来研究可准素分解理想的准素分解的唯一性。

4.5（第一唯一性定理）设$\mathfrak{a}$可准素分解，对于极小准素分解$\mathfrak{a}=\cap_{i=1}^n\mathfrak{q}_i$，取$\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$，则$\mathfrak{p}_i$是全体$\{r(\mathfrak{a}:x)|x\in A\}\cap Spec(A)$，进而与准素分解的选取无关。
证：由于$(\mathfrak{a}:x)=\cap(\mathfrak{q}_i:x)$，那么$r(\mathfrak{a}:x)=\cap r(\mathfrak{q}_i:x)\xlongequal{4.4}\cap_{x\notin\mathfrak{q}_i}\mathfrak{p}_i$

若$r(\mathfrak{a}:x)$素，由包容引理1.11，有$r(\mathfrak{a}:x)=\mathfrak{p}_i$

反过来，对于每个i，存在$x_i\notin\mathfrak{q}_i, x_i\in\cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$，那么$r(\mathfrak{a}:x_i)=\mathfrak{p}_i$。

于是说明了定理的正确性。

Cor. 对于每个i，存在$x_i\in A,(a:x_i)$是$\mathfrak{p}_i-$准素的。

Cor. 对于$A-$模$A/\mathfrak{a}$，$\mathfrak{p}_i$正是$A/\mathfrak{a}$中每个元素的零化理想的根理想与$Spec(A)$的交。

Rmk. 准素分解并不一定唯一。

沿用4.5的记号，称素理想$\mathfrak{p}_i$属于理想$\mathfrak{a}$。那么：$\mathfrak{a}$准素当且仅当仅有一个素理想属于它。极小准素分解中对应的那些素理想中的极小元$\{\mathfrak{p}_i\}$称为孤立素理想（又称极小素理想，4.6解释了为什么这个名称是不会引起歧义的），而其余的素理想则称为嵌入素理想。（注意：极小的准素分解并不能保证对应的素理想之间不存在包含关系）

孤立和嵌入的例子在考虑代数簇时有了直观的几何意义：例如取$A=k[x,y],\mathfrak{a}=(x^2,xy)$，则$\mathfrak{a}=(x)\cap(x,y)^2$,但是$(x)\subseteq(x,y)$，从而$(x)$是孤立的，$(x,y)$是嵌入的。

对应到理想对应的代数簇上，此时$\mathfrak{a}$当然对应的直线$x=0$，因此(x)是孤立的在几何层面上是显然的，而(x,y)正是对应着一个嵌入的子簇$(0,0)$。

这解释了为什么在4.0中提到的准素分解正是不可约分支分解。

直觉提示孤立素理想和极小素理想相近，接下来的性质表明它们完全相同。

4.6（孤立素理想是极小素理想）$\mathfrak{a}$可分解，那么每个素理想$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$都包含着一个从属的素理想。从而孤立素理想（即从属素理想的极小元）正是全体包含$\mathfrak{a}$的极小素理想。

证：

$\mathfrak{p}\supseteq\cap\mathfrak{q}$，则$\mathfrak{p}=r(\mathfrak{p})\supseteq\cap r(\mathfrak{q}_i)=\cap r(\mathfrak{p}_i)$，由1.11回避引理，$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_i$对某个$i$成立，从而得证。

4.3 准素理想与局部化

4.8 S乘性子集，$\mathfrak{q}$是$\mathfrak{p}-$准素的。

1. 如果$S\cap\mathfrak{p}\neq\varnothing$，$S^{-1}\mathfrak{q}=S^{-1}A$

2. 如果$S\cap\mathfrak{p}=\varnothing$，那么$S^{-1}\mathfrak{q}$是$S^{-1}\mathfrak{p}-$准素的，并且它的局限是$\mathfrak{q}$。进而同理3.11中的素理想对应，准素理想之间也是存在对应的。

证：

4.8.1 $s\in S\cap\mathfrak{p}\implies s^n\in S\cap\mathfrak{q}$对某个$n$成立
$\implies s^n/1\in S^{-1}\mathfrak{q}\implies 1/1\in S^{-1}\mathfrak{q}\implies S^{-1}\mathfrak{q}=S^{-1}A$

4.8.2 $S\cap\mathfrak{p}=\varnothing$，于是$s\in S, as\in\mathfrak{q}\implies a\in\mathfrak{q}$，从而由3.11$\mathfrak{q}^{ec}=\cup_{s\in S}(\mathfrak{q}:s)=\mathfrak{q}$。

这里的扩张和局限是在环同态$A\to S^{-1}A$下的。

于是$r(S^{-1}\mathfrak{q})=S^{-1}r(\mathfrak{q})=S^{-1}\mathfrak{p}$，并且$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{q}\cong S^{-1}(A/\mathfrak{q})$

若$[a]/s\cdot[a']/s'=0$ ($[a']/s\neq 0$)，即$\exists t\in S, [aa']t=0$，那么$[a]\cdot[a't]=0$，由于$[a']/s\neq 0$，当然$[a't]\neq 0$，从而$[a]$是零因子，于是幂零，从而$[a]/s$幂零，这就说明了$S^{-1}\mathfrak{q}$准素。

由4.8.2.的结果，记$S^{-1}\mathfrak{a}$的局限为$S(\mathfrak{a})$，那么$S(\mathfrak{q})=\mathfrak{q}$，自然想问一般的理想在$S(-)$下的表现如何。

4.9（$S(-)$**的性质）设**$\mathfrak{a}$**有准素分解**$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$**，**$\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$**，且**$S$**和**$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_m$**不交，但和**$\mathfrak{p}_{m+1},\cdots,\mathfrak{p}_n$**相交。那么：**

$$S^{-1}\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{m}S^{-1}\mathfrak{q}_i,\quad S(\mathfrak{a})=\bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i$$

并且这两者仍然是准素分解。

证：

第一式显然，$S^{-1}\mathfrak{q}_i$准素（由4.8.）

而$S(\mathfrak{a})=(S^{-1}\mathfrak{a})^c=\bigcap_{i=1}^{m}(S^{-1}\mathfrak{q}_i)^c=\bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i$

称一族从属于理想$\mathfrak{a}$的素理想族Σ是孤立的，如果$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}\in\Sigma\implies\mathfrak{p}'\in\Sigma$.

对于一个孤立素理想族，$S-\cup_\Sigma\mathfrak{p}$是乘性子集，且对于任何从属于$\mathfrak{a}$的素理想$\mathfrak{p}'$，

$$\mathfrak{p}'\in\Sigma\implies\mathfrak{p}'\cap S=\varnothing;$$

$$\mathfrak{p}'\notin\Sigma\implies\mathfrak{p}'\notin\cup_\Sigma\mathfrak{p}(1.11)\implies\mathfrak{p}'\cap S=\varnothing.$$

于是，结合4.9和这个结论，得到：

4.10（第二唯一性定理）**设**$\mathfrak{a}$**可分解，**$\mathfrak{a}=\cap\mathfrak{q}_i$**是极小准素分解，**$\Sigma=\{\mathfrak{p}_{i_1},\cdots,\mathfrak{p}_{i_m}\}$**是孤立素理想族，那么**$\mathfrak{q}_{i_1}\cap\cdots\mathfrak{q}_{i_m}$**与分解无关。**

证：$\mathfrak{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_m} = S(\mathfrak{a})$，其中$S = A - \mathfrak{p}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{i_m}$由第一唯一性定理与分解无关。

做为推论，有：

4.11（孤立分支唯一）孤立准素分支（即孤立素理想$\mathfrak{p}_j$对应的准素理想$\mathfrak{q}_j$）被$\mathfrak{a}$唯一决定。

证：取Σ为一个极小素理想组成的单元集即可。

4.4 可分解理想

最后我们讨论一些可分解理想的性质。

4.7 **$\mathfrak{a}$是可分解理想，给定极小准素分解$\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$，以及$r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$，那么**

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \{x \in A | (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a}\}$$

证：

过渡到商环：如果$\mathfrak{a}$可分解，那么在商环$A/\mathfrak{a}$中0理想可分解。即$0 = \cap \bar{\mathfrak{q}}_i$，其中后者是$\mathfrak{q}_i$在商环中的像，也是准素的。

（注记：如果$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$，那么$\overline{r(\mathfrak{q})} = r(\overline{\mathfrak{q}})$；更进一步地如果$\mathfrak{q}$是准素的，那么$\overline{\mathfrak{q}}$也是准素的）

由上，只需说明零理想的极小准素分解对应的素理想的并是全体零因子，记零因子集合为D，那么：

$D = \cup_{x \neq 0} r(0 : x)$，而由4.5的证明$r(0 : x) = \cap_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_j$ 对某些j成立。从而$D \subseteq \cup \mathfrak{p}_i$，但是4.5也说明了$\mathfrak{p}_i$具有形式$r(0 : x)$，于是得证。

4.5(E)

1. **$\mathfrak{a}$如果存在准素分解，那么$Spec(A/\mathfrak{a})$仅有有限个不可约分支。**

证：

由1.20，$Spec(A/\mathfrak{a})$的不可约分支为全体$V(\overline{\mathfrak{p}})$，其中$\mathfrak{p}$为包含$\mathfrak{a}$的极小素理想。由于准素分解存在，取出极小准素分解，那么包含$\mathfrak{a}$的极小素理想当然有限个，于是结论自明。

2. $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$**，那么**$\mathfrak{a}$**不含有嵌入素理想。**

证：

$r(\mathfrak{a})$一定可分解。

给定一个极小准素分解$\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{q}_i$，$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \cap r(\mathfrak{q}_i) = \cap \mathfrak{p}_i$，那么后者也是$\mathfrak{a}$的一个极小准素分解。于是自然不存在嵌入分支。

3. **如果**A**绝对平坦，那么每个素理想都是极大的。**

证：

对于一个素理想$\mathfrak{p}$，对于$x \in A - \mathfrak{p}$，由于主理想幂等，$\exists a \in A$，$x = ax^2$，即$x(ax-1) = 0$。

那么在$A/\mathfrak{p}$中$\overline{x}(\overline{ax} - \overline{1}) = \overline{0}$。然而$\overline{ax} - \overline{1}$是零因子，于是只有$\overline{ax} = \overline{1}$（整环），从而$\overline{x}$是单位。

4. **对于环**$\mathbb{Z}[t]$**，理想**$\mathfrak{m} = (2, t)$**是极大的，**$\mathfrak{q} = (4, t)$**是**$\mathfrak{m}-$**准素的，但不是**$\mathfrak{m}$**的幂。（4.2的逆命题反例）**

证：$\mathbb{Z}[t]/\mathfrak{m} = F_2$，于是说明极大。$\mathbb{Z}[t]/\mathfrak{q} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，那么每个零因子(2)是幂等的($2^2 = 0$)，从而说明准素。

由于 $\mathfrak{q} = \{tP(t) + 4c\}$

$f^m \in \mathfrak{q} \iff f$的常数项是2的倍数。于是$r(\mathfrak{q}) = \{tP(t) + 2c\} = \mathfrak{m}$

而$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^2$，从而说明了结论。

5. 对于域上的多项式环$K[x,y,z]$，$\mathfrak{p}_1=(x,y);\mathfrak{p}_2=(x,z);\mathfrak{m}=(x,y,z)$。证明$\mathfrak{p}_{1,2}$是素的，$\mathfrak{m}$是极大的。取$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$，说明$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2\cap\mathfrak{m}^2$是极小准素分解，指出孤立分支和嵌入分支。

证:

不难验证极小准素分解。孤立分支为$(x,y);(x,z)$，嵌入分支为(x,y,z)。

6. X是无限元素的紧**Hausdorff**空间，$C(X)$是其上连续实值函数环。在这个环中零理想是否可以分解?

证:

如果零理想可以分解，那么$Spec(C(X))$仅存在有限个不可约分支。然而$\mathfrak{m}_x,\mathfrak{m}_y$从属于不同的不可约分支，且$x,y$选择无限，矛盾。

7. 给定环A，其上多项式环$A[x]$。对理想$\mathfrak{a}$，有集合$\mathfrak{a}[x]$。

7.1 对于环同态$A\to A[x]$，$\mathfrak{a}[x]=\mathfrak{a}^e$。

7.2 $\mathfrak{p}$素，则$\mathfrak{p}[x]$素。

7.3 $\mathfrak{q}$是$\mathfrak{p}-$准素，那么$\mathfrak{q}[x]$是$\mathfrak{p}[x]-$准素。

7.4 对于极小准素分解$\mathfrak{a}=\cap\mathfrak{q}_i$，$\mathfrak{a}[x]=\cap\mathfrak{q}_i[x]$也是极小准素分解。

7.5 $\mathfrak{p}$极小，则$\mathfrak{p}[x]$极小。

证:

7.1 注意到$\mathfrak{a}\cdot A[x]=\mathfrak{a}[x]$，则命题显然。

7.2 即2.E7.

7.3 首先说明准素：$A[x]/\mathfrak{q}[x]\cong(A/\mathfrak{q})[x]$，则对于任何$(A/\mathfrak{q})[x]$中的零因子，设为$f$，那么由1.E2.3，存在$t(\neq 0)\in A/\mathfrak{q}$使得$tf=0$，$f$的每个系数都是零因子。而在$A/\mathfrak{q}$中零因子都是幂零元，再次运用1.E.2.2，即有$f$幂零。

接下来说明$\mathfrak{p}[x]-$准素。

$$
\begin{aligned}
r(\mathfrak{q}[x]) = r(\mathfrak{q}\cdot(x)+\mathfrak{q}) = r(r(\mathfrak{q})+r(\mathfrak{q}\cdot(x))) &= r(\mathfrak{p}+r(\mathfrak{q})\cap r((x))) \\
&= r(\mathfrak{p}[x]) = \mathfrak{p}[x]
\end{aligned}
$$

7.4 只需说明极小性。根理想互不相同是显然的；包含性是显然的。

7.5 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$自然是极小准素分解，那么$\mathfrak{p}[x]=\mathfrak{p}[x]$也是。于是$\mathfrak{p}[x]$从属于$\mathfrak{p}[x]$，自然是极小素理想。

8. **给定域k，其上多项式环$k[x_1,\cdots,x_n]$。证明理想$\mathfrak{p}_i=(x_1,\cdots,x_i)$是素的，并且它的任意次幂是准素的。**

证：

$A/\mathfrak{p}_i=k[x_{i+1},\cdots,x_n]$当然是整环。

考虑$xy\in\mathfrak{p}_i^m$，那么xy只含有$x_1,\cdots,x_i$，没有常数项，并且每项次数至少为m。于是利用整除理论，如果$x\notin\mathfrak{p}_\mathfrak{i}^\mathfrak{m}$，当然只能有$y^n\in\mathfrak{p}_\mathfrak{i}^\mathfrak{m}$。

9.1 对于环A，$D(A)$**指满足以下条件的素理想构成的集合：**$\exists a\in A$，**使得**$\mathfrak{p}$**是所有包含**$(0:a)$**的素理想中极小的。证明：**$x\in A$**是零因子**$\iff x\in\mathfrak{p}$**对某个**$\mathfrak{p}\in D(A)$**成立。**

9.2 如果S是A的乘性子集，将$Spec(S^{-1}A)$视作$Spec(A)$的子集**(3.E21)**，那么$D(S^{-1}A)=D(A)\cap Spec(S^{-1}A)$

9.3 如果零理想可分解，证明$D(A)$是全体从属于它的素理想集合。

证：

9.1 如果x是零因子，那么$x \in \mathfrak{a} = (0 : a)$，于是自然属于某个包含$(0 : a)$中极小的素理想。

反过来如果x属于某个包含$(0 : a)$的极小素理想，不妨设$x \in \mathfrak{p}$，其中后者是包含$\mathfrak{a} = (0 : a)$的素理想中的极小元。那么由2.E9，x在$A/\mathfrak{a}$中是零因子。即$\exists y$，$xy \in \mathfrak{a}$，从而$xya = 0$即证。

9.2 首先$\begin{aligned} S^{-1}Ann(x) = Ann(x)^e = S^{-1}((0) : (x)) = (S^{-1}(0) : S^{-1}(x)) \\ = Ann(S^{-1}(x)) = Ann(x/1) \end{aligned}$，并且$Ann(x/s) = Ann(x/1)$.

而$S^{-1}A$的每个素理想都是扩张理想（3.11），因此可记为$S^{-1}\mathfrak{p}$。那么$S^{-1}\mathfrak{p} \in D(S^{-1}A) \iff \exists x, S^{-1}\mathfrak{p}$是包含$Ann(x/s) = Ann(x/1) = S^{-1}Ann(x)$的极小素理想。那么$\mathfrak{p}$也是包含$Ann(x)$的极小素理想，从而说明了$D(S^{-1}A) = D(A) \cap Spec(S^{-1}A)$.

9.3 由4.5,4.7，零理想的从属素理想是全体$r(0 : x)$中出现的素理想，于是$\{associative\ to\ 0\} \subseteq D(A)$。

反过来对于$\mathfrak{p} \in D(A)$，设x使得$\mathfrak{p}$是包含$\mathfrak{a} = (0 : x)$的极小素理想，即$\mathfrak{p}$是由零因子组成的素理想。

由4.5的证明$r(0 : x) = \cap_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{p}_j$，那么$\mathfrak{p} \supseteq \cap \mathfrak{p}_j$，由1.11必定有$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_j$对某个$j$成立。但与此同时$\mathfrak{p}_j$也包含着$(0 : x)$，于是由$\mathfrak{p}$的极小性，只能有$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$成立，从而证明了结论。

10. 对于任何环A的素理想$\mathfrak{p}$，记$S_{\mathfrak{p}}(0)$是同态$A \to A_{\mathfrak{p}}$的核。证明：

10.1 $S_{\mathfrak{p}}(0) \subseteq \mathfrak{p}$

10.2 $r(S_{\mathfrak{p}}(0)) = \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p}$**极小。**

10.3 如果$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'$，那么$S_{\mathfrak{p}}(0) \subseteq S'_{\mathfrak{p}}(0)$

10.4 $\cap_{\mathfrak{p} \in D(A)} S_{\mathfrak{p}}(0) = 0$**，其中$D(A)$的定义见4.E9.**

证：

10.1 显见这里$S_{\mathfrak{p}}(0)$和正文（定理4.9）前的$S(\mathfrak{a})$的定义是一致的。

如果$x\notin\mathfrak{p}$，且$x/1=0$。即$\exists s\in A-\mathfrak{p}, xs=0\in\mathfrak{p}$，矛盾。

10.2

$\Longleftarrow$方向是显然的。

对于$\Longrightarrow$，假定$\mathfrak{p}=r(S_{\mathfrak{p}}(0))$。则$\forall x\in\mathfrak{p}\iff\exists n,\exists s\in A-\mathfrak{p}, x^n s=0$。

若存在素理想$\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$，必定存在$x\in\mathfrak{p}$，但$x\notin\mathfrak{q}$。由于存在$s\in A-\mathfrak{p}, x^n s=0$，且$s\notin\mathfrak{q}$，那么只能有$x^n\in\mathfrak{q}$。但是由素理想性质以及$x\notin\mathfrak{q}$立刻得到矛盾。

10.3

注意：$x\in S_{\mathfrak{p}}(0)\iff\exists s\in A-\mathfrak{p}, xs=0\iff x\in\cup_{s\in A-\mathfrak{p}}Ann(s)$，于是命题显然。

10.4

若$x\neq 0$，选出$(0:x)$的一个极小素理想$\mathfrak{p}$，那么在$A_{\mathfrak{p}}$中$x/1$如果为0就要求$\exists s\in A-\mathfrak{p}$，$sx=0$。即$s\in(0:x)\subseteq\mathfrak{p}\wedge s\in A-\mathfrak{p}$，这是不可能做到的。于是$x\notin S_{\mathfrak{p}}(0)$，得证。

11.1 $\mathfrak{p}$是极小素理想，那么$S_{\mathfrak{p}}(0)$是最小的$\mathfrak{p}-$准素理想。

11.2 记$\mathfrak{a}=\cap_{\mathfrak{p}\ minimal}S_{\mathfrak{p}}(0)$，则$\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}(A)$

11.3 如果在环A中零理想可分解，那么$\mathfrak{a}=0\iff 0$的所有从属素理想都是孤立的。

证：

11.1 首先有$r(S_{\mathfrak{p}}(0))=\mathfrak{p}$（4.E10.2），其次如果$xy\in S_{\mathfrak{p}}(0)$，存在$s\in A-\mathfrak{p}, sxy=0$，再设$y\notin S_{\mathfrak{p}}(0)$，即$sy\neq 0$，于是$x/1$在局部环$A_{\mathfrak{p}}$中是零因子。然而$\mathfrak{p}$是极小的，于是在$A_{\mathfrak{p}}$中不再存在除了极大理想$\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$以外的理想。然而零因子非单位，于是一定能够包含在极大理想内，进而$x/1\in\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，即$x\in\mathfrak{p}=r(S_{\mathfrak{p}}(0))$，从而说明了准素。

对于任何一个$\mathfrak{p}-$准素理想$\mathfrak{q}$，由于$r(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}$，必定有$\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$。对于任意给定的$x\in S_{\mathfrak{p}}(0)$，那么$\exists s\in A-\mathfrak{p}, sx=0.$ 若$x\notin\mathfrak{q}$，由于$0\in\mathfrak{q}$，只能有$s\in r(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}$，矛盾。

于是以上内容说明了结论。

11.2 $\mathfrak{a}$包含在所有极小素理想内，进而包含在所有素理想内，于是结论自明。

11.3 如果$0=\cap S_{\mathfrak{p}_i}(0)$，它的从属素理想族是极小素理想族的子族，自然孤立。

反过来假定准素分解中0的从属素理想都是孤立的：4.E10.4表明$0=\cap_{\mathfrak{p}\in D(A)}S_{\mathfrak{p}}(0)$是准素分解。

如果$S_{\mathfrak{p}_i}(0)\supseteq\cap_{other}S_{\mathfrak{p}}(0)$，那么将其约化掉得到了更小的准素分解，从而0从属素理想族是$D(A)$的真子族，矛盾！于是$0=\cap_{\mathfrak{p}\in D(A)}S_{\mathfrak{p}}(0)$是约化准素分解。同时从属素理想均孤立表明$D(A)$正是极小素理想族，于是自然有$0=\cap_{\mathfrak{p}\in D(A)}S_{\mathfrak{p}}(0)=\cap_{\mathfrak{p}\ minimal}S_{\mathfrak{p}}(0)=\mathfrak{a}$

12. 设A是环，S是乘性子集，$S(\mathfrak{a})$记号意义同前。称$S(\mathfrak{a})$为$\mathfrak{a}$ **w.r.t.** S的饱和化，证明：

12.1 $S(\mathfrak{a})\cap S(\mathfrak{b})=S(\mathfrak{a}\cap b)$

12.2 $S(r(\mathfrak{a}))=r(S(\mathfrak{a}))$

12.3 $S(\mathfrak{a})=(1)\iff\mathfrak{a}\cap S\neq\varnothing$

12.4 $S_1(S_2(\mathfrak{a}))=(S_1S_2)(\mathfrak{a})$

12.5 如果$\mathfrak{a}$存在准素分解，那么理想族$S(\mathfrak{a})$（S取遍全体乘性子集）是有限的。

证：

12.1 由1.18，$S(\mathfrak{a})\cap S(\mathfrak{b})=(S^{-1}\mathfrak{a}\cap S^{-1}\mathfrak{b})^c=[S^{-1}(\mathfrak{a}\cap b)]^c=S(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$

12.2 由1.18显然。

12.3 $S(\mathfrak{a})=(1)\iff A\subseteq S^{-1}\mathfrak{a}\iff 1/1\in S^{-1}\mathfrak{a}\iff\mathfrak{a}\cap S\neq\varnothing$

12.4 只需回忆3.E3.

12.5 由定理4.9，结论显然。（至多2^m个）

13. 在环A中记素理想$\mathfrak{p}$的$n-$次形式幂$\mathfrak{p}^{(n)}$为$S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n)$，证明：

13.1 $\mathfrak{p}^{(n)}$是$\mathfrak{p}-$准素的。

13.2 如果$\mathfrak{p}^n$存在准素分解，那么$\mathfrak{p}^{(n)}$是它的$\mathfrak{p}-$准素分支。

13.3 如果$\mathfrak{p}^{(m)}\mathfrak{p}^{(n)}$存在准素分解，那么$\mathfrak{p}^{(m+n)}$是它的$\mathfrak{p}-$准素分支。

13.4 $\mathfrak{p}^{(n)}=\mathfrak{p}^n \iff \mathfrak{p}^n$准素。

证：

13.1 首先$r(\mathfrak{p}^{(n)})=r(S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n))=(r(S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}^n))^c=(S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p})^c$（注意$S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}$是唯一的极大理想）

那么$r(\mathfrak{p}^{(n)})=\mathfrak{p}$.

由4.2，$S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}^n$是$S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}-$准素的，从而由4.8知准素性。

13.2

14. 设$\mathfrak{a}$是环A的可分解理想，$\mathfrak{p}$是$(\mathfrak{a}:x)$中的极大者（其中$x\in A-\mathfrak{a}$）证明$\mathfrak{p}$是从属于A的素理想。

证：如果$\mathfrak{p}$是素的，那么$r(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}$，自然得到结论。

设$\mathfrak{p}=(\mathfrak{a}:m), xy\in\mathfrak{p}, \text{i.e.}\, xym\in\mathfrak{a}$。如果$xm,ym\notin\mathfrak{a}$，那么考虑$(\mathfrak{a}:xm)$。首先$xm\in A-\mathfrak{a}$，其次注意到$sm=0 \implies sxm=0$，而后$y\notin\mathfrak{p}$，但是$y\in(\mathfrak{a}:xm)$，于是$(\mathfrak{a}:m)\subset(\mathfrak{a}:xm)$，与极大性矛盾！从而证明了结论。

15. 设$\mathfrak{a}$在环A中可分解，Σ是$\mathfrak{a}$的孤立的素理想族。q_Σ是这族中素理想对应的准素理想的交。$f\in A$满足对于每个从属于$\mathfrak{a}$的素理想$\mathfrak{p}$，均有$f\in\mathfrak{p}\iff\mathfrak{p}\notin\Sigma$。$S_f=\{f^n|n\in\mathbb{N}\}$，证明$\mathfrak{q}_\Sigma=S_f(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}:f^n)$对于充分大的$n$成立。
证:

由4.9，$S_f(\mathfrak{a})=\mathfrak{q}_\Sigma$成立。

由于$(\mathfrak{a}:f^n)=\cap_{r(q_i)\notin\Sigma}(\mathfrak{q}_i:f^n)\cap_{r(q_i)\in\Sigma}(\mathfrak{q}_i:f^n)$

对于充分大的n，若$r(\mathfrak{q}_i)\notin\Sigma$，那么$f\in\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$，于是当然可假定对于$n>N$，$f^n\in\mathfrak{q}_i,\forall r(\mathfrak{q}_i)\notin\Sigma$，即$(\mathfrak{q}_i:f^n)=A$.

若$r(\mathfrak{q}_i)\in\Sigma$，那么$f^n\notin\mathfrak{q}_i$，于是只能有$(\mathfrak{q}_i:f^n)=\mathfrak{q}_i$，故$(\mathfrak{a}:f^n)=\mathfrak{q}_\Sigma$对$n>N$均成立。

16. A的每个理想都存在准素分解，那么对于任何一个分式环$S^{-1}A$也满足每个理想存在准素分解。

证：由于$S^{-1}A$中的每个理想都是A中理想的扩张，那么由4.9结论显然。

环中任一理想存在准素分解的条件

17. 对于满足以下条件的环A:

L1. 对每个非A的理想$\mathfrak{a}$和每个素理想$\mathfrak{p}$，存在$x\notin\mathfrak{p}$满足$S_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}:x)$，其中$S_\mathfrak{p}=A-\mathfrak{p}$。

那么A中每个理想都是若干（可能无穷）准素理想的交。

证:

假定$\mathfrak{a}$是非A理想，$\mathfrak{p}_1$是包含$\mathfrak{a}$的极小素理想。由4.E11，$\mathfrak{q}_1=S_{\mathfrak{p}_1}(\mathfrak{a})$是$\mathfrak{p}_1-$准素理想，且由条件$\mathfrak{q}_1=(\mathfrak{a}:x)$对某个$x\notin\mathfrak{p}_1$成立。

显然$\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : x) \cap (\mathfrak{a} + (x))$。反过来，若$y = a + tx$满足$yx \in \mathfrak{a}$，于是$tx^2 \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}_1$。然而$x \notin \mathfrak{p}_1 = r(\mathfrak{q}_1)$，即$x^n \notin \mathfrak{q}_1$，但是$tx^2 \in \mathfrak{q}_1$，于是只能有$t \in \mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{a} : x)$。因此$tx \in \mathfrak{a}$，从而$y \in \mathfrak{a}$，故反包含得证。

故：$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap (\mathfrak{a} + (x))$

现在令$\mathfrak{a}_1$是集合$\{\mathfrak{b} | \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\}$中极大元（存在性可以直接应用Zorn引理）。选取$\mathfrak{a}_1$使得$x \in \mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_1 \nsubseteq \mathfrak{p}_1$。

反复重复上述构造，构造到第n次时我们有$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \cap \mathfrak{a}_n$，$\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n$准素，并且$\mathfrak{a}_n$是满足$\mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{q}_n$，$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \cap \mathfrak{b}$，$\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}_n$中极大的$\mathfrak{b}$。

如果$\mathfrak{a}_n = (1)$对某步成立，构造终止。

否则注意到$\mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n$由超穷归纳法结论成立。

Remark. 超穷归纳法

对于一个关于序数的命题$P(n)$（其中序数是指典范选取出的良序集）

如果$P(0)$成立；对于任何$a \leq e$（其中e是一个恒定的序数）如果假定$\forall b < a\ P(b)$成立能够推出$P(a)$成立：

那么$P(n)$对所有$n \leq e$成立。

更一般地，如果条件中去掉$a \leq e$中的$\leq e$，那么能够说明$P(n)$对任何序数成立。

18. 给定以下关于环A的性质：

L2. 任给一理想$\mathfrak{a}$和乘性子集的降链$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$，那么对应的理想降链$S_1(\mathfrak{a}) \supseteq S_2(\mathfrak{a}) \supseteq \cdots$稳定。

那么A的每个理想都有准素分解 $\Longleftrightarrow$ A满足$L1, L2$两个条件

证：

$\Longrightarrow$

L1：由4.9，$S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})=\cap_{\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_i$，容易验证这些$\mathfrak{p}_i$构成了一个孤立族$\Sigma$。由4.E15，取$f\in\cap_{\mathfrak{p}\notin\Sigma,\mathfrak{p}\ associated\ to\ \mathfrak{a}}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}$，这当然是可以取到的。可以验证它满足4.E15中$f$的条件，那么$S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})=q_\Sigma=(\mathfrak{a}:f^n)$。

L2：给定$\mathfrak{a}$的准素分解$\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$，由4.9$S_k(\mathfrak{a})=\cap_{S\cap\mathfrak{p}_i=\varnothing}\mathfrak{q}_i$，于是收缩$S_k$，最终得到的$S_k(\mathfrak{a})$也会稳定。

$\Longleftarrow$

保持4.E17的记号：

如果$S_n=S_{\mathfrak{p}_1}\cap\cdots\cap S_{\mathfrak{p}_n}$，归纳地说明$S_n$与$\mathfrak{a}_n$有交：

$n=1$时情况显然，因为$a_1\not\subseteq\mathfrak{p}_1$，则$S_1=S_{\mathfrak{p}_1}$与$\mathfrak{a}_1$有交。

假定$n-1$情况已证，$\mathfrak{a}_n\cap\mathfrak{q}_n=\mathfrak{a}_{n-1}$与$S_{n-1}$有交；由于$\mathfrak{a}_n\not\subseteq\mathfrak{p}_n$，那么$S_{\mathfrak{p}_n}$与$\mathfrak{a}_n$有交。

于是$\mathfrak{a}_n$同时与S_{n-1}和$S_{\mathfrak{p}_n}$有交，同时$\mathfrak{a}_{n-1}\cap S_{n-1}\subseteq\mathfrak{q}_n\subseteq\mathfrak{p}_n\subseteq S_{\mathfrak{p}_n}$，且当然
$\mathfrak{a}_{n-1}\cap S_{n-1}\subseteq\mathfrak{a}_n$

那么
$S_n\cap\mathfrak{a}_n=(S_{n-1}\cap\mathfrak{a}_n)\cap(S_{\mathfrak{p}_n}\cap\mathfrak{a}_n)\supseteq(S_{n-1}\cap\mathfrak{a}_{n-1})\cap(S_{\mathfrak{p}_n}\cap\mathfrak{a}_n)=S_{n-1}\cap\mathfrak{a}_{n-1}\neq\varnothing$

于是$S_n(\mathfrak{a}_n)=(1)$，进一步地$S_n(\mathfrak{a})=S_n(\mathfrak{q}_1)\cap\cdots\cap S_n(\mathfrak{q}_n)\cap S_n(\mathfrak{a}_n)=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$（最后一个等号是因为4.9）

由$L2$，$S_n(\mathfrak{a})$一定稳定。于是$\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$一定稳定，那么实际上超过$n$的构造过程均得到了$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n\cap\mathfrak{a}_N$，并且$\mathfrak{a}_N$严格升于是只有$\mathfrak{a}_n=(1)$，从而完成了证明。

19. 回想**4.E11**的证明过程：每个$\mathfrak{p}-$准素理想都包含$S_{\mathfrak{p}}(0)$。

如果环A满足对于每个素理想$\mathfrak{p}$，全体准素理想的交为$S_{\mathfrak{p}}(0)$。那么对于一族互异的素理想$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$，且它们均不是极小素理想，那么存在一个理想$\mathfrak{a}$使得其从属的素理想正是$\mathfrak{a}$。

证:

对n归纳，$n = 1$的情况显然。

假定$n-1$的情况成立。对于n，设理想族$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$中$\mathfrak{p}_n$是极大的。对$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$使用归纳假设，存在一个理想$\mathfrak{b}$具有极小准素分解$\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n-1}$，满足$r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$。

如果$\mathfrak{b} \subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$，设$\mathfrak{p}$是包含在$\mathfrak{p}_n$内的极小素理想，于是$\mathfrak{b} \subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(0)$。

两侧取根，则$\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = r(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n) = r)\mathfrak{b} \subseteq r(S_{\mathfrak{p}}(0)) \xlongequal{4.E10.2} \mathfrak{p}$

由包容引理$\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$对某个$i$成立，由极小性只能有$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$。这和不存在$\mathfrak{p}_i$极小矛盾。

因此$\mathfrak{b} \not\subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$，于是存在一个$\mathfrak{p}_n-$准素理想$\mathfrak{q}_n$满足$\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{q}_n$。那么考虑$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$。只需验证这个准素分解是否极小：$r(\mathfrak{q}_i)$当然互异，并且$\mathfrak{q}_n \not\supseteq \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$，并且
$\mathfrak{q}_i \not\supseteq \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i-1} \cap \mathfrak{q}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n-1} \not\supseteq \mathfrak{q}_{i-1} \cap \mathfrak{q}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n (i < n)$

于是这样的$\mathfrak{a}$满足要求。

模的准素分解

20. 对于给定的$A-$模M，子模N。N在M中的根定义为
$r_M(N) = \{x \in A | x^q M \subseteq N \ for\ some\ q > 0\}$

证明：$r_M(N) = r(N : M) = r(Ann(M/N))$，从而说明这是一个理想，并说明它满足**1.13**中类似性质。

证：

前三个等式成立由定义直接验证即可，性质验证同1.13. 详见下图：

State and prove the formulas for r_M analogous to (1.13).

$-$i) $P \subseteq N \implies r_M(P) \subseteq r_M(N)$: $x^q M \subseteq P$, implies $x^q M \subseteq N$.

0) $r_B(C^n) = r_B(C)$ for B an A-algebra, C a subalgebra, and $n > 0$: $C^n \subseteq C$, so $r_B(C^n) \subseteq r_B(C)$ by $-$i). If $x^q B \subseteq C$, then taking n^{th} powers, and remembering $1 \in B$, gives $x^{qn} B \subseteq C^n$.

i) $r_B(\mathfrak{b}) \supseteq f^{-1}(\mathfrak{b})$, for $f\colon A \to B$ an A-algebra and $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$: If $b \in \mathfrak{b}$, then $bB = (b) \subseteq \mathfrak{b}$, and by definition if $f(a) = b$, then $aB = f(a)B \subseteq \mathfrak{b}$.

ii) $r(r_M(N)) = r_M(N)$: $x \in r(r_M(N)) \iff \exists p > 0\ (x^p \in r_M(N)) \iff \exists p, q > 0\ (x^{pq} M \subseteq N) \iff x \in r_M(N)$.

iii) $r_M(N \cap P) = r_M(N) \cap r_M(P)$: If $x^n M \subseteq N \cap P$, then trivially $x^n M \subseteq N$ and $x^n M \subseteq P$. If $x^n M \subseteq N$ and $x^p M \subseteq P$, then for $q = \max\{n, p\}$ we have $x^q M \subseteq N \cap P$.

iv) $r_M(N) = (1) \iff M = N$: $1 \in r(\mathrm{Ann}(M/N)) \iff 1 \in \mathrm{Ann}(M/N) \iff M/N = 0 \iff M = N$.

v) $r_M(N + P) \supseteq r(r_M(N) + r_M(P))$: By $-$i), $r_M(N), r_M(P) \subseteq r_M(N+P)$, so $r_M(N) + r_M(P) \subseteq r_M(N+P)$. Taking radicals and applying ii), $r(r_M(N) + r_M(P)) \subseteq r(r_M(N+P)) = r_M(N+P)$. The converse is false. Let $A \neq 0$, $M = A \oplus A$ with action $a(b, c) = (ab, ac)$, $N = A \oplus (0)$, and $P = (0) \oplus A$, Then $M = N + P$, so $r_M(N + P) = (1)$, but $r_M(N) = r_M(P) = 0$.

vi) If $\mathfrak{p}$ is prime, $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ for all $n > 0$: I've no clue how to interpret a power of a module.

I seem to have failed this problem, in that I wasn't sure in all cases what the appropriately analogous formulas were. The ones involving algebras were stretches, brought about by the difficulty of comparing N and $r_M(N)$, one being a submodule of M and the other being an ideal of A.

21. 每个$x \in A$都诱导出了一个环的自同态$\phi_x : m \mapsto xm$。称x是零因子如果ϕ_x不是单射；称x是幂零元如果ϕ_x这个同态是幂零的。称M的子模Q是准素的如果M/Q中每个零因子都是幂零的。

证明如果Q是准素的子模，那么$(Q : M)$是准素的，于是$r_M(Q)$是一个素理想$\mathfrak{p}$。称Q在M中是$\mathfrak{p}-$准素的。

进一步地，验证它具有**4.3,4.4**中类似结论。

$xyM \subseteq Q$，则在M/Q中ϕ_{xy}是零映射。如果$yM \not\subseteq Q$，那么ϕ_y不是零映射。于是只能有ϕ_x有非零的核，从而是零因子，于是幂零，即$x^n M \subseteq Q \; i.e. \; x^n \in (Q:M)$。因此$(Q:M)$是准素理想，接下来的推论是自然的。

4.3,4.4 验证：

Prove the analogues of (4.3) and (4.4).

Lemma 4.3*. *If $Q_i \subseteq M$ $(1 \leq i \leq n)$ are $\mathfrak{p}$-primary, then $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ is $\mathfrak{p}$-primary.*

Since the Q_i are primary, hence not equal to M, their intersection $Q \neq M$. Suppose $x \in A$ is a zero-divisor of M/Q. Then there is some nonzero $m \in M$ such that $xm \in Q = \bigcap Q_i$. Then x is a zero-divisor of each M/Q_i, so by assumption is nilpotent, meaning there is $n_i > 0$ such that $x^{n_i} M \subseteq Q_i$. Taking $n = \max_i n_i$ we see $x^n M \subseteq Q$, so x is nilpotent in M/Q. Thus Q is primary. As for the radical,

$$r(Q:M) = r\left(\bigcap Q_i : M\right) \overset{(1.12.\text{iv})}{=} r\left(\bigcap (Q_i : M)\right) \overset{(1.13.\text{iii})}{=} \bigcap r(Q_i : M) = \bigcap_i \mathfrak{p} = \mathfrak{p}.$$

Lemma 4.4*. *i) Let $N \subseteq M$ be A-modules and $m \in N$. Then $(N:m) = (1)$;*
ii) Let $Q \subseteq M$ be a $\mathfrak{p}$-primary submodule, and $m \in M$. If $m \notin Q$ then $(Q:m)$ is $\mathfrak{p}$-primary;
iii) Let $Q \subseteq M$ be a $\mathfrak{p}$-primary submodule, and $x \in A$. If $x \notin \mathfrak{p}$ then $(Q:x) := \{m \in M : xm \in Q\} = Q$.

i): Since $m \in N$ and N is an A-module, $Am \subseteq N$, so $(N:m) = (1)$.

ii): Suppose $xy \in (Q:m)$, so $xym \in Q$. Suppose $y \notin (Q:m)$, so that $ym \notin Q$. Then x is a zero-divisor in M/Q, so by the assumption Q is primary, there is $n > 0$ such that x^n acts as zero on M/Q. Then $x^n M \subseteq Q$, and in particular $x^n m \in Q$, so $x^n \in (Q:m)$. Thus $(Q:m)$ is primary.

Note that $m \in M$ implies $(Q:M) \subseteq (Q:m)$. Taking radicals, $\mathfrak{p} \subseteq r(Q:m)$. On the other hand assume $x \in r(Q:m)$. Then for some minimal $n > 0$ we have $x^n m \in Q$. Then $x(x^{n-1}\bar{m}) = \bar{0}$ in M/Q, so x is a zero-divisor of M/Q and hence there is $p > 0$ such that $x^p M \subseteq Q$. Then $x \in r_M(Q) = \mathfrak{p}$. Thus $(Q:m)$ is $\mathfrak{p}$-primary.

iii): Obviously if $m \in Q$ then $xm \in Q$, so $Q \subseteq (Q:x)$. By contraposition, we will suppose $m \in (Q:x) \backslash Q$ and show $x \in \mathfrak{p}$. Well, $xm \in Q$, and $\bar{m} \neq \bar{0}$ in M/Q, so x is a zero-divisor, and for some power $n > 0$ we have $x^n M \subseteq Q$. But then $x \in r_M(Q) = \mathfrak{p}$.

22.（准素分解）如果子模N能够表示成若干准素子模的交$N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$，称之为准素分解。如果它满足$r_M(Q_i)$互异且$Q_i \not\supseteq \cap_{j\neq i} Q_j$ 则称之为极小准素分解；证明第一唯一性定理（4.5）并且说明从属素理想是M/N中从属于0的素理想。

Theorem 4.5*. *Let N be a decomposable submodule of M and let $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ be a minimal primary decomposition of N. Let $\mathfrak{p}_i = r_M(Q_i)$ $(1 \le i \le n)$. Then the $\mathfrak{p}_i$ are precisely the prime ideals which occur in the set of ideals $r(N : m)$ $(m \in M)$, and hence are independent of the particular decomposition of N.*

Set $P_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$. By the assumption of irredundancy, $Q_i \subsetneq P_i$. Let $m \in P_i \backslash Q_i$, and consider the ideal $(N : m) = (P_i \cap Q_i : m) \overset{(1.12.\text{iv})}{=} (P_i : m) \cap (Q_i : m)$. By (4.4*.i,ii) of [4.21] above $(P_i : m) = M$ and $(Q_i : m)$ is $\mathfrak{p}_i$-primary, so $(N : m)$ is $\mathfrak{p}_i$-primary. Thus each $\mathfrak{p}_i$ is $r(N : m)$ for some $m \in M$.[11]

Suppose on the other hand that $r(N : m)$ is a prime $\mathfrak{p}$ for some $m \in M$. Note $(N : m) = \left(\bigcap Q_i : m\right) \overset{(1.12.\text{iv})}{=} \bigcap (Q_i : m)$, so by (4.4*) above, $\mathfrak{p} = r(N : m) = \bigcap_{m \notin Q_i} \mathfrak{p}_i$. Since the prime $\mathfrak{p}$ is an intersection of some of the $\mathfrak{p}_i$, (1.11.ii) shows $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ for some i.

Show that they are also the prime ideals belonging to 0 *in* M/N.

Note that for any module $P \subseteq M$ we have $(N : P) = (0 + N : P + N)$. Indeed $xP \subseteq N \iff x(P + N) \subseteq 0 + N = N$. Taking radicals, $r(N : P) = r(0 + N : P + N)$. Specializing to cyclic submodules Am gives $r(N : m) = r(\bar{0} : \bar{m})$, so one is prime just if the other is, and by Theorem 4.5*, the same primes belong to $N \subseteq M$ and $0 \subseteq M/N$.

23. 4.6~4.11的结论在模的情况下仍然成立。

We must convince ourselves we genuinely aren't losing any generality. What we should do is try to lift a primary decomposition, as we know (p. 50) primary ideals are preserved under contraction. So suppose we are given an irredundant primary decomposition $0 = \bigcap Q_i/N$ in M/N (recalling the correspondence (p. 18) between submodules of M/N and submodules of M containing N). Apparently $N = \bigcap Q_i$, and we should show that the Q_i are $r_{M/N}(Q_i/N)$-primary. Much as in the last part of [4.22], we have $(Q_i/N : M/N) = \{x \in A : xM \subseteq Q_i\} = (Q_i : M)$, and taking radicals gives $r_M(Q_i) = r_{M/N}(Q_i/N)$. Now we must show Q_i is primary. Suppose $x \in A$ is a zero-divisor of M/Q_i. The third isomorphism theorem (2.1.i) gives $M/Q_i \cong (M/N)/(Q_i/N)$, so x is a zero-divisor of the latter, hence nilpotent since Q_i/N is primary, hence nilpotent in M/Q_i since they are isomorphic. Thus Q_i is primary. It is clear that irredundancy is preserved under lifting, as $Q_i/N \supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_j/N \iff Q_i \supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_j$ by the order-preserving correspondence of p. 18.[12]

Proposition 4.6*. *Let $N \subseteq M$ be a decomposable module. Then any prime ideal $\mathfrak{p} \supseteq r_M(N)$ contains a minimal prime ideal belonging to N, and thus the minimal prime ideals of N are precisely the minimal elements in the set of all prime ideals containing $r_M(N)$.*

Write $N = \bigcap Q_i$, so that ([4.20.iii]) $r_M(N) = \bigcap r_M(Q_i) = \bigcap \mathfrak{p}_i$. If $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap \mathfrak{p}_i$, then by (1.11.ii), there is i with $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$, and surely for any $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$ we have $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$, so $\mathfrak{p}$ contains an isolated prime ideal of N. In particular, if $\mathfrak{p}$ is minimal over $r_M(N)$, this shows it equals some isolated $\mathfrak{p}_j$.

Proposition 4.7*. *Let $N \subseteq M$ be a decomposable module, let $N = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ be a minimal primary decomposition, and let $\mathfrak{p}_i = r_M(Q_i)$. Then*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \{x \in A : (N : x) \neq N\}.$$

In particular, if $0 \subseteq M$ is decomposable, the set $D \subseteq A$ of zero-divisors of M is the union of the prime ideals belonging to 0.

Since by [4.22], the set of primes associated to $N \subseteq M$ is the same as that associated to $0 \subseteq M/N$, and for $x \in A$ we have $(N : x) \neq N \subseteq M$ just if $(0 : x) \neq 0 \subseteq M/N$, we can indeed assume $N = 0$.

Then the right-hand side D is the set of x such that there exists $m \neq 0 \in M$ such that $m \in (0 : x)$, or $xm = 0$; with is to say D is the set of zero-divisors of M. Now if $x \in r(D)$, then there is a nonzero $m \in M$ and a least $n > 0$ such that $x^n m = 0$. Then $m' = x^{n-1}m \neq 0$ and $xm = 0$, so $x \in D$. Thus $D = r(D) = r\Big(\bigcup_{m\neq 0}(0 : m)\Big) = \bigcup_{m\neq 0} r(0 : m)$. The proof of Theorem 4.5* ([4.22]) shows that each $r(0 : m)$ for $m \neq 0$ is the intersection of some of the $\mathfrak{p}_i$, and each $\mathfrak{p}_i = r(0 : m)$ for some m. Thus $D = \bigcup \mathfrak{p}_i$.

---

[11] I owe this part of the argument to *Multiplicative Theory of Ideals* by Max D. Larsen and Paul Joseph McCarthy. I had initially started reasoning about ideals of the form $((Q : M) : x)$, and was trying to prove that if $N = \bigcap Q_i$ is an irredundant decomposition, then $(N : M) = \bigcap (Q_i : M)$ was likewise.

[12] Note that, on the other hand primary decomposition does not generally survive the quotient process. Indeed, Example 3) on p. 51 shows that the primary ([4.8]) ideal $(x, z)^2$ of $k[x, y, z]$, where k is a field, has image no longer primary in the quotient ring $k[x, y, z]/(xy - z^2)$.

Proposition 4.8*. *Let S be a multiplicative submonoid of A, and let $Q \subseteq M$ be a $\mathfrak{p}$-primary module.*
i) If $S \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$, then $S^{-1}Q = S^{-1}M$.
ii) If $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, then $S^{-1}Q$ is a $S^{-1}\mathfrak{p}$-primary submodule of $S^{-1}M$, and its preimage (contraction) *under the canonical map $M \to S^{-1}M$ is Q. Hence primary $S^{-1}A$-submodules of $S^{-1}M$ correspond to primary A-submodules of M.*

i): Let $s \in S \cap \mathfrak{p}$. Since $\mathfrak{p} = r_M(Q)$, there is $n > 0$ such that $s^n M \subseteq Q$. Then any element $m/t \in S^{-1}M$ can be written as $s^n m/s^n t \in S^{-1}Q$.

ii): Suppose $x/s \in S^{-1}A$ is a zero-divisor in $S^{-1}M/S^{-1}Q$. Then there is some non-zero $\overline{m/t} \in S^{-1}M/S^{-1}Q$ such that $(x/s)\overline{m/t} = \overline{xm/st} = 0$. Then $xm/st \in S^{-1}Q$, so there is $u \in S$ such that $uxm \in Q \subseteq M$. Then since $\overline{m/t}$ was non-zero, $m \notin Q$, so ux is a zero-divisor of M/Q, hence nilpotent since Q is primary. Then there is $n > 0$ such that $(ux)^n M \subseteq Q$. That means $x^n S^{-1}M = x^n u^n S^{-1}M \subseteq S^{-1}Q$, so x is nilpotent in $S^{-1}M/S^{-1}Q$, meaning $S^{-1}Q$ is primary.

If $x \in \mathfrak{p} = r_M(Q)$, let $n > 0$ be such that $x^n M \subseteq Q$. Then for arbitrary $s \in S$ we have $(x/s)^n S^{-1}M \subseteq S^{-1}Q$, so $x/s \in r(S^{-1}Q : S^{-1}M) = r_{S^{-1}M}(S^{-1}Q)$. On the other hand, if $x/s \in r_{S^{-1}M}(S^{-1}Q)$ then $(x^n/1)S^{-1}M = (x/s)^n S^{-1}M \subseteq S^{-1}Q$ for some $n > 0$. Thus for every $m/t \in S^{-1}M$ we have $x^n m/st \in S^{-1}Q$. This means there is $u \in S$ such that $ux^n m \in Q$. Then ux^n is a zero-divisor of M/Q, so nilpotent in M/Q, and so some power takes M into Q, and $ux^n \in r_M(Q) = \mathfrak{p}$. But then since $\mathfrak{p}$ is prime and $u \notin \mathfrak{p}$ we have $x^n \in \mathfrak{p}$, so $x \in r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, and finally $x/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Therefore $S^{-1}Q$ is $S^{-1}\mathfrak{p}$-primary.

Now suppose $m \in M$ is such that $m/1 \in S^{-1}Q$. Then there is $s \in S$ such that $sm \in Q$. By (4.7*) above, $\mathfrak{p} = \{x \in A : Q \neq (Q : x)\}$, so $m \in (Q : s) = Q$ as $s \notin \mathfrak{p}$.

Finally, we show that every $S^{-1}A$-submodule N' of $S^{-1}M$ is an *extended module* of the form $S^{-1}N$ for some A-submodule $N \subseteq M$. Indeed, let N be the set of $n \in M$ such that $n/1 \in N'$, (which we can also think of as the contraction of N along the canonical map $f\colon M \to S^{-1}M$). If $n/s \in N'$, then $n/1 = s(n/s) \in N'$, so $n \in N$ and hence $n/s \in S^{-1}N$. On the other hand $f(N) = f\big(f^{-1}(N')\big) \subseteq N'$, so $S^{-1}N \subseteq N'$.

Proposition 4.9*. *Let S be a multiplicative submonoid of A and let $N \subseteq M$ be a decomposable ideal. Let $N = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ be a minimal primary decomposition of N. Let $\mathfrak{p}_i = r_M(Q_i)$ and suppose the Q_i numbered so that S meets $\mathfrak{p}_{p+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$ but not $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_p$. Write $S(N) = \{m \in M : m/1 \in S^{-1}N\}$. Then*

$$S^{-1}N = \bigcap_{i=1}^{p} S^{-1}Q_i, \qquad S(N) = \bigcap_{i=1}^{p} Q_i,$$

and these are minimal primary decompositions.

By (3.4.ii) we have $S^{-1}N = \bigcap_{i=1}^n S^{-1}Q_i$. By (4.8*.i) above, we have $S^{-1}Q_i = S^{-1}M$ for $i > p$, so $S^{-1}N = \bigcap_{i=1}^p S^{-1}Q_i$, and by (4.8*.ii), $S^{-1}Q_i$ is $S^{-1}\mathfrak{p}_i$-primary for $i \leq p$. Since these $\mathfrak{p}_i$ don't meet S, by (3.11.iv), the $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ are distinct primes of $S^{-1}A$. If we had, for some $j \leq p$, that $S^{-1}Q_j \supseteq \bigcap_{j\neq i=1}^p S^{-1}Q_i$, then taking preimages under $f\colon M \to S^{-1}M$ we see that $Q_j \supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_i$, contradicting the assumed irredundancy of the Q_i. Thus $S^{-1}N = \bigcap_{i=1}^p S^{-1}Q_i$ is an irredundant primary decomposition of $S^{-1}N$. Taking preimages under $f\colon M \to S^{-1}M$,

$$S(N) = f^{-1}(S^{-1}N) = f^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{p} S^{-1}Q_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{p} f^{-1}(S^{-1}Q_i) = \bigcap_{i=1}^{p} Q_i$$

by (4.8*.ii) again. This is an irredundant primary decomposition since the decomposition of N is.

Theorem 4.10*. *Let $N \subseteq M$ be a decomposable ideal, let $N = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ be a minimal primary decomposition of N, let $\mathfrak{p}_i = r_M(Q_i)$, and let $\Sigma = \{\mathfrak{p}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_m}\}$ be an isolated set of prime ideals of N. Then $\bigcap_{\mathfrak{p}_i \in \Sigma} Q_i$ is independent of the decomposition.*

Let $S = A \backslash \bigcup \Sigma$. Then S is a multiplicative submonoid, and for $\mathfrak{p} \in \Sigma$ we have $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, while if $\mathfrak{p} \notin \Sigma$, then since $\mathfrak{p}$ is not contained in an element of Σ by isolation, (1.11.i) shows $\mathfrak{p} \not\subseteq \bigcup \Sigma$, so $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$. Then $\bigcap_{\mathfrak{p}_i \in \Sigma} Q_i = S(N)$ by (4.9*), so this intersection is actually independent of the Q_i chosen.

Corollary 4.11*. *The isolated primary components (i.e., the primary components Q_i corresponding to minimal prime ideals $\mathfrak{p}_i$) are uniquely determined by N.*

Let $\mathfrak{p}_i$ be an isolated prime of N. Taking $\Sigma = \{\mathfrak{p}_i\}$ and $S_{\mathfrak{p}_i} = A \backslash \mathfrak{p}_i$ in (4.10*) above gives $S_{p_i}(N) = Q_i$ independent of the choice of decomposition.

5. 整性相关和赋值

5.0 引言

在代数几何中经常将曲线视作若干直线的覆盖，这和环中元素关于某个子环的整性非常相似，相关的应用将在习题中详细介绍。

5.1 整性相关

给定环B，子环$A, 1 \in A$。称$x \in B$是A中整的如果它是某个首一A上多项式的根。

5.1（整元的刻画）TFAE：

1. $x \in B$**在**A**中整**

2. $A[x]$**是有限生成**$A-$**模**

3. $A[x]$**被某个**B**的子环**C**包含，并且**C**是有限生成**$A-$**模。**

4. 存在一个忠实$A[x]-$**模**M**，使得**M**作为**$A-$**模是有限生成的。**

Remark. $A[x] = \{f(x) | f \in A[T], T\ indeterminate\}$

证：

$1 \implies 2$. 显然，设$f(x) = 0, \deg f = n$，那么$A[x]$做为$A-$模被$1, x, \cdots, x^{n-1}$生成。

$2 \implies 3$. 显然，取$C = A[x]$

$3 \implies 4$. 取$M = C$

$4 \implies 1$. 在2.4中取ϕ为$m \mapsto xm$，由于M是$A[x]$模，自然有$xM \subseteq M$。于是有$(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)m = 0 \forall m$，而忠实保证了$x^n + \cdots + a_n = 0$

5.2 若$x_i \in B(1 \le i \le n)$，且均在A中整，那么$A[x_1, \cdots, x_n]$是有限生成$A-$模。

证：只需回忆2.16，有限生成的结合还是有限生成。

5.3 B中全体A中整的元素是一个包含A的子环。

证：$x+y, x-y, xy \in A[x, y]$由5.2是有限生成$A-$模，由5.1条件3知它们都在A上整。

Remark.（代数的整性）对于环同态$f: A \to B$，B是A代数。称f整，B是整的$A-$代数，如果B中元素在子环$f(A)$中整。

Remark.（整性闭包，整闭环）设B中全体A中整的元素构成的环是C，即$A \subseteq C \subseteq B$。称$C$为$A$在$B$中的整性闭包；若$C = A$，称$A$在$B$中整闭；若$C = B$，称环$B$在$A$上整。

Remark. 有限型+整=有限：设$f: A \to B$，则B是有限生成$A-$代数且B在A上整 $\iff$ B是有限生成$A-$模。

证：$\implies$.若B是有限生成$A-$代数，则$B = f(A)[x_1, \cdots, x_n]$。由于$x_i$在$f(A)$上整，由5.2立刻有$f(A)[x_1, \cdots, x_n]$是有限生成$f(A)-$模，于是是有限生成$A-$模。

$\impliedby$.若B是有限生成$A-$模，那它自然是有限生成代数。那么
$B = f(A) < x_1, \cdots, x_n >_{mod} \subseteq f(A)[x_1, \cdots, x_n] \subseteq B$，于是任何$b \in B$都有
$f(A)[b] \subseteq B$为有限生成$A-$模，于是证明了整性。

5.4 （整性相关的传递性）$A \subseteq B \subseteq C$，如果$B$的元素在$A$中整，$C$的元素在$B$中整，那么$C$的元素在$A$中整。

证：设$c \in C$满足$c^n + b_1 c^{n-1} + \cdots + b_n = 0$，且$B' = A[b_1, \cdots, b_n]$是有限生成$A-$模；又由于$c$在$B'$中整，于是$B'[c]$有限生成。由2.16，$B'[c]$是有限生成的$A-$模，于是$c$在$A$中整。

5.5 $A \subseteq B$，C是A在B中的整性闭包，则C在B中整闭。

证：x在C中整，于是由5.4，x在A中整，于是$x \in C$。

5.6 （整性在商和分式化下保持）

$A \subseteq B$，环B在环A上整

1. $\mathfrak{b}$是B的理想；$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$，那么$B/\mathfrak{b}$在$A/\mathfrak{a}$上整。

2. S是A的乘性子集，那么$S^{-1}B$在$S^{-1}A$上整。

证：

直接验证即可。

5.2 Cohen-Seidenberg 定理

接下来将要研究素理想的升降链在整扩张中的表现，主要结果被称为Cohen-Seidenberg的上升定理和下降定理。

5.2.1 上升定理

5.7 $A \subseteq B$是整环，B在A上整。那么B是域 $\iff$ A是域。

证：

$\implies$. 对$y \in B, y \neq 0, y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 是极小首一多项式。

由于整环，$y \neq 0$则极小多项式中$a_n \neq 0$

于是$y(y^{n-1}+a_1y^{n-2}+\cdots+a_{n-1})=-a_n$，即
$y(-a_n^{-1}y^{n-1}-a_n^{-1}a_1y^{n-2}-\cdots-a_n^{-1}a_{n-1})=1$

$\Longleftarrow$. 对$x\in A$, 设$x^{-1}\in B$使得$xx^{-1}=1$。于是x^{-1}在A上整：
$x^{-n}+a_1x^{-n+1}+\cdots+a_n=0$，两侧乘上$x^{n-1}$有$x^{-1}=-(a_1+\cdots+a_nx^{n-1})$, 于是$x^{-1}\in A$。

5.8 $A\subseteq B$，环B在环A上整；$\mathfrak{q}$是B的素理想，$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c=\mathfrak{p}\cap A$是拉回。则$\mathfrak{q}$极大 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}$极大。

证：5.6和5.7的直接推论。

5.9 $A\subseteq B$，环B在环A上整；$\mathfrak{q},q'$是B的素理想，$\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{q}'$且$\mathfrak{q}^c=\mathfrak{q}'^c=\mathfrak{p}$，则$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$

证：记$S=A-\mathfrak{p}$，由5.6$S^{-1}B$在$S^{-1}A$上整，设$\mathfrak{m}$是$\mathfrak{p}$在$S^{-1}A$中的扩张；$\mathfrak{n},\mathfrak{n}'$是$\mathfrak{q},\mathfrak{q}'$在$S^{-1}B$中的扩张。

注意到$\mathfrak{m}$在$S^{-1}A$中是极大的；并且考虑嵌入$S^{-1}A\hookrightarrow S^{-1}B$：$\mathfrak{n},\mathfrak{n}'$;在这个嵌入下的局限均为$\mathfrak{m}$。由5.6，$\mathfrak{n},\mathfrak{n}'$都是极大的，但另一方面$\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}'$于是只能有$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$. 拉回至$B$中即有$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & (A-\mathfrak{p})^{-1}B \end{tikzcd}$$

5.10 $A\subseteq B$，环B在环A上整；$\mathfrak{p}$是A的素理想。存在B的素理想$\mathfrak{q}$使得$\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{p}$

同样在交换图 $$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & (A-\mathfrak{p})^{-1}B \end{tikzcd}$$ 中考虑$(A-\mathfrak{p})^{-1}B$的极大理想。

由5.8，它拉回至$A_\mathfrak{p}$是极大的。于是拉回至A为$\mathfrak{p}$。因此取$\mathfrak{q}$为$(A-\mathfrak{p})^{-1}B$中的极大理想拉回至B内的理想即可。

5.11（上升定理）$A\subseteq B$，环B在环A上整。环A中$\mathfrak{p}_1\subseteq\cdots\mathfrak{p}_n$是素理想上升链，环$B$中也有一个素理想上升链$\mathfrak{q}_1\subseteq\cdots\mathfrak{q}_m(m<n)$，并且$\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i$。

那么B中的素理想链可以扩充为$\mathfrak{q}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{q}_n$，使得$\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i$。

证：由归纳只需证明$m=1,n=2$的情况。

取$A'=A/\mathfrak{p}_1;B'=B/\mathfrak{q}_1$，那么依然有$A'\subseteq B'$。由5.6$B'$在$A'$上整，由5.10存在$\mathfrak{q}_2'$是$B'$的素理想，并且$\mathfrak{q}_2'\cap A'=\mathfrak{p}_2'$，那么$\mathfrak{q}_2\cap A=\mathfrak{p}_2$。从而完成证明。

5.2.2 整闭环, 下降定理

首先指出不仅仅是整性(5.6)，整性闭包也在分式化下保持。

5.12 $A\subseteq B$，C是A在B中的整性闭包。S是A的乘性子集，则$S^{-1}C$是$S^{-1}A$在$S^{-1}B$中的整性闭包。

证：首先$S^{-1}C$在$S^{-1}A$上整是显然的。如果$b/s\in S^{-1}B$在$S^{-1}A$上整，即：

$$(b/s)^n+(a_1/s_1)(b/s)^{n-1}+\cdots+(a_n/s_n)=0$$

两侧同时乘以$(ss_1\cdots s_n)^n$，于是$bs_1\cdots s_n$在环A上整，从而属于C，于是
$b/s=(bs_1\cdots s_n)/(ss_1\cdots s_n)\in S^{-1}C$

Def.（整闭环）称一个整环是整闭的，如果它在其分式域中是整闭的。

Prop. UFD都是是整闭环，于是特别地$\mathbb{Z}$和$k[x_1,\cdots,x_n]$是整的。

证：若r/s整，r,s没有共同因子。则$r^n+a_1r^{n-1}s+\cdots+a_ns^n=0$，于是$s|r^n$，故$s$是单位，于是$r/s$在环中。

5.13（整闭性是局部性质）给定整环A，以下三者等价：

1. A整闭；**2.** $A_\mathfrak{p}$对每个素理想$\mathfrak{p}$整闭；**3.** $A_\mathfrak{m}$对每个极大理想$\mathfrak{m}$整闭。

证：

设K是A的分式域，C是A在K中的整性闭包，则A整闭当且仅当嵌入映射$f:A\to C$是满的。

同样由5.12，$A_{\mathfrak{p}(\mathfrak{m})}$是整闭的$\iff f_{\mathfrak{p}(\mathfrak{m})}$是满射。由于局部化操作是正合的二者等价性立刻得证。

Def.（理想上的整元）$A\subseteq B$称为A中的理想$\mathfrak{a}$上的整元素，如果它是某个首一$\mathfrak{a}$系数的多项式的根。同样也可以定义理想上的整性闭包。

5.14（理想上整性闭包的刻画）C是A在B中的整性闭包，$\mathfrak{a}^e$记为$\mathfrak{a}$在C中的扩张。那么$\mathfrak{a}$在B中的整性闭包是$\mathfrak{a}^e$的根理想。

证：

设x在$\mathfrak{a}$上整，即$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$，$a_i\in\mathfrak{a}$。于是$x$也在$A$上整，即$x\in C$，故$x^n\in\mathfrak{a}^e$，进而$x\in r(\mathfrak{a}^e)$

反过来，如果$x\in r(\mathfrak{a}^e)$，$x^n=\sum a_ix_i$，其中$a_i\in\mathfrak{a},x_i\in C$。于是$M=A[x_1,\cdots,x_n]$有限生成，进而在2.4中取$\phi$为乘以$x^n$有$x^nM\subseteq\mathfrak{a}M$，于是$x^n$在$\mathfrak{a}$上整。

5.15 $A\subseteq B$是整环，A整闭且$x\in B$在A的某个理想$\mathfrak{a}$上整。那么x是A的分式域K上的代数元，并设极小多项式为$t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$，则系数$a_1,\cdots,a_n\in r(\mathfrak{a})$

证：

x是K上代数元是显然的。

考虑极小多项式的分裂域L。那么极小多项式在L中的根$x_1, \cdots, x_n$均在理想$\mathfrak{a}$上整，于是均在$A^{\cdot}$中，于是由5.14均在$r(\mathfrak{a})$中，于是系数由Vieta定理都在$r(\mathfrak{a})$中、

5.16（下降定理）$A \subseteq B$是整环，A整闭，B在A上整。环A中$\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \mathfrak{p}_n$是素理想下降链，环$B$中也有一个素理想下降链$\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \mathfrak{q}_m (m < n)$，并且$\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$。

那么B中的素理想链可以扩充为$\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$，使得$\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$。

证：

同样我们可以只考虑$m = 1, n = 2$的情况。

只需说明$\mathfrak{p}_2$是某个$B_{\mathfrak{q}_1}$到A的拉回：其中映射定义为$A \hookrightarrow B \hookrightarrow B_{\mathfrak{q}_1}$，即需要满足$\mathfrak{p}_2 B_{\mathfrak{q}_1} \cap A = \mathfrak{p}_2$。

每个$\mathfrak{p}_2 B_{\mathfrak{q}_1}$的元素$x$具有形式$y/s$，$y \in \mathfrak{p}_2 B, s \in B - \mathfrak{q}_1$。由5.14，$y$是$\mathfrak{p}_2$上的整元，于是其在$A$的分式域$K$上有极小多项式$y^r + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_r = 0$，其中$u_i \in \mathfrak{p}_2$。

现在设$x \in \mathfrak{p}_2 B_{\mathfrak{q}_1} \cap A$，$s = yx^{-1}$，其中$x^{-1} \in K$，于是$s$在$K$中的极小多项式是前述多项式除以$x^r$，设为$s^r + v_1 s^{r-1} + \cdots + v_r = 0$，$v_i = u_i / x^i$。

即$x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_2$。

另一方面s在A上整，于是由5.15（取$\mathfrak{a} = A$）知$v_i \in A$。如果$x \notin \mathfrak{p}_2$，那么由$x^i v_i \in \mathfrak{p}_2$知$v_i \in \mathfrak{p}_2$，于是$s^r \in \mathfrak{p}_2 B \subseteq \mathfrak{p}_1 B \subseteq \mathfrak{q}_1$。从而$s \in \mathfrak{q}_1$，矛盾。

于是$x \in \mathfrak{p}_2$，即$\mathfrak{p}_2 B_{\mathfrak{q}_1} \cap A = \mathfrak{p}_2$.

5.17 设A是整闭环，K是分式域，L是K的有限可分扩张，B是A在L中的整性闭包。那么存在L的一组($K-$)基$v_1, \cdots, v_n$使得$B \subseteq \sum A v_i$。

证：对于L中元素v，v是K上代数元且满足$a_0 v^r + a_1 v^{r-1} + \cdots + a_n = 0, a_i \in A$

两侧乘以a_0^{r-1}，于是$a_0 v = u$自然在A上整，于是$u \in B$。因此对于任何一组基乘上对应的A中元素得到$u_1, \cdots, u_n \in B$，同时也是一组基。

由于L/K是可分扩张，于是$(x, y) \mapsto T(xy)$是非退化的双线性型，于是有一组对偶基$v_1, \cdots, v_n$, 满足$T(u_i v_j) = \delta_{ij}$

对于$x \in B$，$x = \sum x_j v_j$。而$u_i \in B$说明$xu_i \in B$，于是由5.15$T(xu_i) \in A$。

然而$T(xu_i) = \sum_j T(x_j u_i v_j) = \sum x_j \delta_{ij} = x_i$，即$x_i \in A$。故$B \subseteq \sum Av_i$。

5.3 赋值环

Def.（赋值环）B是整环，K是它的分式域。称B是K的赋值环如果对于每个非零的$x \in K$，x, x^{-1}至少有一个在B中。

5.18 对于赋值环B，以下性质成立:

1. B是局部环。

2. 如果$B \subseteq B' \subseteq K$，则$B'$也是$K$的赋值环。

3. B是整闭的。

证:

5.18.1

取$\mathfrak{m}$为全体B中的非零元构成的集合，于是$x \in \mathfrak{m} \iff x = 0 \; or \; x^{-1} \notin B$。

对于$ax, x \neq 0$，若$(ax)^{-1} \in B$，那么$x^{-1} = a(ax)^{-1} \in B$，矛盾。

对于$x, y \in \mathfrak{m}$，无妨$x, y \neq 0$。

那么$xy^{-1}\in B; x^{-1}y\in B$至少有一个成立。若前者成立，
$x+y=(1+xy^{-1})y\in B\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}$，另外一种情况同理说明成立。

5.18.2

显然。

5.18.3

若$x\in K$在环B上整，$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$。如果$x\in B$则已证，否则$x^{-1}\in B$，
$x=-b_1-b_2x^{-1}-\cdots-b_nx^{1-n}$。

指定域中赋值环的构造

设K是域，Ω是代数闭域。设Σ是(A,f)构成的组，其中A是K的子环，f是A到Ω的同态。定义偏序$(A,f)\le(A',f')\iff A\subseteq A'\ and\ f'|_A=f$，于是应用Zorn引理立刻有$\Sigma$有极大元。

设(B,g)是极大元，接下来的目标是证明B是K的赋值环。

Step 1.

5.19 B是局部环且$\mathfrak{m}=\ker g$是其极大理想。

证：由于$g(B)$是域Ω的子环，自然是整环。从而$\mathfrak{m}=\ker g$是素理想。将同态$g:B\to\Omega$扩展为同态$\tilde{g}:B_{\mathfrak{m}}\to\Omega:\tilde{g}(b/s)=g(b)/g(s)$：注意$g(s)$永远不是0.

由极大性有$B=B_{\mathfrak{m}}$，于是得证。

Step2.

5.20 设x是K的非零元，$B[x]$是K的子环，由x在B上生成。记$\mathfrak{m}[x]$为$\mathfrak{m}$在同态$B\to B[x]$下的扩张，那么$\mathfrak{m}[x]\neq B[x]$和$\mathfrak{m}[x^{-1}]\neq B[x^{-1}]$至少有一成立。

证：若否，$\mathfrak{m}[x]=B[x],\mathfrak{m}[x^{-1}]=B[x^{-1}]$

由条件，x满足：

$$u_0+u_1x+\cdots+u_mx^m=1 \quad (u_i\in\mathfrak{m})$$
$$v_0+v_1x^{-1}+\cdots+v_nx^{-n}=1 \quad (v_i\in\mathfrak{m})$$

假定在上述两式中m,n次数尽量小，并且$m\geq n$。那么$v_1x^{n-1}+\cdots+v_n=(1-v_0)x^n$

由于$v_0\in\mathfrak{m}$，由5.19，$1-v_0$是单位。于是$x^n=w_1x^{n-1}+\cdots+w_n \quad w_i\in\mathfrak{m}$

于是$x^m=w_1x^{m-1}+\cdots+w_nx^{m-n}$，那么将$x^m$代入
$u_0+u_1x+\cdots+u_mx^m=1 \quad (u_i\in\mathfrak{m})$，得到次数更低者，矛盾。

Step 3.

5.21 对这个极大元素(B,g)，B是域K的赋值环。

证：

对于任意$x\in K, x\neq 0$，由5.20可以假设$\mathfrak{m}[x]\neq B[x]$，于是它必然被$B[x]$的某个极大理想$\mathfrak{m}'$包含。拉回至B有$\mathfrak{m}'\cap B=\mathfrak{m}$，于是嵌入$B\hookrightarrow B[x]$诱导了域嵌入$B/\mathfrak{m}\hookrightarrow B[x]/\mathfrak{m}'$。记这两个域分别为$k,k'$，于是$k'=k[\bar{x}]$，其中$\bar{x}$指$x$在$k'$中的像。于是扩域$[k',k]$是有限代数扩张。

同态g诱导出了嵌入$\bar{g}:k\to\Omega$，由于Ω是代数闭域，$\bar{g}$可以扩展为$\bar{g}':k'\to\Omega$。再复合上自然同态$B'\to k'$，我们得到了$(B,B'\to k'\to\Omega)$。于是由极大性有$B=B'$，$x\in B$。

Corollary. 5.22

设A是域K的子环，A在K中的整性闭包$\bar{A}$是全体包含A赋值环的交。

证：

由于赋值环是整闭的，于是整性闭包当然被赋值环的交包含。

反过来如果$x\notin\bar{A}$，那么$x\notin A'=A[x^{-1}]$，即在A'中x^{-1}不是单位，于是被极大理想$\mathfrak{m}'$包含。设Ω是$k'=A'/\mathfrak{m}'$的代数闭包，那么将同态$A'\to k'$限制在A上得到了同态$A\to\Omega$。由5.21，存在某个包含A的赋值环(B,g)，其中后者是映射$A\to\Omega$的延拓。由于x^{-1}在这个映射下变为0，那么$x\notin B$。从而不属于赋值环的交。

Zariski引理

5.23 设$A \subseteq B$是整环，B在A上有限生成。设v是B中的非零元素，那么存在$u \neq 0, u \in A$，满足以下性质：

每个A到一个代数闭域Ω上满足$f(u) \neq 0$的同态f都可以被延拓为B到Ω的同态g，且$g(v) \neq 0$

证：

由归纳，只需考虑B由一个元素x在A上生成的情况。

A. x在A的分式域上是超越元，设$v = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，取$u = a_0 \neq 0$

对于$f: A \to \Omega, f(u) \neq 0$，存在$\xi \in \Omega$，使得$f(a_0)\xi^n + \cdots + f(a_n) \neq 0$（否则注意到使得方程为0的根只有有限个，而代数闭域不是有限域），那么定义$g: B \to \Omega$：
$g(a) = f(a), a \in A \quad g(x) = \xi$，满足要求。

B. x在A的分式域上是代数元。同时v^{-1}也是A的分式域上的代数元（因为v可表示为x在A上的多项式值），故有如下方程式：

$a_0x^m + \cdots + a_m = 0 \quad a_0'v^{-n} + \cdots + a_n' = 0$，取$u = a_0a_0'$，对于任何$f: A \to \Omega, f(u) \neq 0$：

首先延拓至$f_1: A[u^{-1}] \to \Omega, f_1(u^{-1}) = f(u)^{-1}$，于是由5.21存在一个包含$A[u^{-1}]$的赋值环$C$，以及一个延拓的同态$h: C \to \Omega$。

由于x在$A[u^{-1}]$上整，于是$x \in C$（5.22），于是$B \subseteq C$。特殊地$v \in B \subseteq C$

另一方面v^{-1}在$A[u^{-1}]$上整（观察上文中第二个方程式），于是又一次的有$v^{-1} \in C$，即v在C中是单位，于是$h(v) \neq 0$。现在将h从C限制到B即可。

5.24（Zariski Lemma） 设k是域，B是有限生成k代数。如果B是域那么它是k的有限代数扩张。

证：在5.23中取$A=k$，$v=1$，$\Omega=\bar{k}$，可以验证此时同态f,g都是嵌入。于是$k\subseteq B\subseteq\bar{k}$，又由有限生成自然说明结论。

注意：5.24(Zariski Lemma)能够推出Weak Hilbert Nullstellenstaz.

5.25（Hilbert Nullstellenstaz Weak Form）$\mathfrak{m}$**是**$k[x_1,\cdots,x_n]$**的极大理想，**k**代数闭，则**$k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}\cong k$

证：记$B=k[x_1,\cdots,x_n]$，其中k代数闭，$\mathfrak{m}$为B的极大理想。

域$B/\mathfrak{m}$是k的扩张：注意复合映射$k\to B\to B/\mathfrak{m}$不是零映射，于是只能是嵌入。那么自然是有限生成k代数。

于是$B/\mathfrak{m}$是k的有限代数扩张，但$k=\bar{k}$，只有$B/\mathfrak{m}=k$。

5.25 Cor. 更进一步地极大理想一定形如$<x_1-k_1,\cdots,x_n-k_n>$。

证：首先注意到上述形式是极大理想，因为它是映射$k[x_1,\cdots,x_n]\to k:f\mapsto f(k_1,\cdots,k_n)$的核：对$n$归纳。然后对$x_1-k_1$做带余除法即可。

反过来对于任何一个极大理想$\mathfrak{m}$，有$k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}\cong k$，设$x_1,\cdots,x_n$的像分别为$k_1,\cdots,k_n$，于是$\mathfrak{m}=\ker\supseteq<x_1-k_1,\cdots,x_n-k_n>$，而后者已然是极大理想，于是只有$\mathfrak{m}=<x_1-k_1,\cdots,x_n-k_n>$

5.4(E)

1. 设$f:A\to B$是整的环同态，**i.e.** B在$f(A)$上整。证明$f^*:Spec(B)\to Spec(A)$是闭映射。

证：

f可以分解为$A\to f(A)\to B$，其中前一个箭头诱导的的是到$V(\ker)$同胚，必然是闭映射。

于是只需研究第二个箭头，因此不妨$A\subseteq B$，且B在A上整。此时每个A中的素理想$\mathfrak{p}$都具有形式$A\cap\mathfrak{q}$，同时每个B中素理想$\mathfrak{q}$都诱导出A中素理想$A\cap\mathfrak{q}$，于是自然有$V(\mathfrak{q})$在f^*下的像为$V(\mathfrak{q}^c)$

即$V(\mathfrak{q})$的像也形如$V(\mathfrak{r})$，自然说明了闭映射。

2. A**是**B**的子环，**B**在**A**上整，**$f: A \to \Omega$**是**A**到某个代数闭域**Ω**的环同态，证明**f**可以被延拓为**$B \to \Omega$**的环同态。**

证：

f可以分解为$A \to A/\mathfrak{p} \to \Omega$，其中$\mathfrak{p} = \ker f = (0)^c$自然是素理想。

那么存在B中素理想$\mathfrak{q}$使得$\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$，由5.6.1，$B/\mathfrak{q}$在$A/\mathfrak{p}$上整。

因此只需说明$A \subseteq B$且A, B均为整环时，单环同态$f: A \to \Omega$可以被延拓为环同态$B \to \Omega$。

如同在5.3中做的那样，考虑这样的元素对(C, σ)，其中$A \subseteq C \subseteq B$，$\sigma : C \to \Omega$并且$\sigma|_A = f$。利用Zorn引理知极大元素存在，设为$(C, \sigma)$。

若$C \neq B$，设$b \in B - C$. b在A上整，自然在C上整。设$p(x) \in C[x]$满足$p(b) = 0$

注意$\sigma p(x) = \sum \sigma(c_i) x^i$在$\Omega$中必定有一根，取为$z$。那么$C[b] \to \Omega : b \mapsto z$满足条件。于是与极大性矛盾，进而只有$B = C$。

3. $f: B \to B'$**是**$A-$**代数同态，**C**是**$A-$**代数。如果**f**是整同态，那么**$f \otimes_A 1 : B \otimes_A C \to B' \otimes_A C$**是整同态。**

证：

由于整元素构成环，只需验证生成元$b' \otimes_A c$是整的。

设b'满足$b'^n + f(b_{n-1}) b'^{n-1} + \cdots + f(b_0) = 0$，于是
$(b' \otimes c)^n + (f(b_{n-1}) \otimes c)(b' \otimes c)^{n-1} + \cdots + (f(b_0) \otimes c^n) \cdot (b' \otimes c)^0 = 0$

从而得证。

4. 设A是B的子环，并且B在A上整。设$\mathfrak{n}$是B的极大理想，$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}\cap A$也是$A$的极大理想。（**Recall 5.10**），那么$B_{\mathfrak{n}}$一定在$A_{\mathfrak{m}}$上整吗?

不一定。取$B=k[x]$的子环$A=k[x^2-1]$（其中k为域），
$\mathfrak{n}=(x-1),\mathfrak{m}=(x^2-1)\cap A$。

如果$B_{\mathfrak{n}}$在$A_{\mathfrak{m}}$上整，考虑元素$1/(x+1)$。

那么有如下成立：$1/(x+1)^n+\sum_{m=0}^{n-1}+g_m(x^2-1)/[k_m(x^2-1)]\cdot[1/(x+1)^m]=0$

其中$k_m(0)\neq 0$，那么两侧同乘$(x+1)^{n-1}$后令$x=-1$即得到矛盾。

5. 环$A\subseteq B$, B在A上整。

5.1 如果$x\in A$在B中是单位，那么x在A中是单位。

5.2 $J(A)=J(B)^c$

证：

5.1 这和定理5.7中的$\Longleftarrow$方向证明完全相同。

5.2 即证$J(A)=J(B)\cap A$

考虑5.8，以及$J(R)=\cap_{\mathfrak{m}\ maximal}\mathfrak{m}$，命题显然。

6. 设$B_1,\cdots,B_n$是整的$A-$代数，那么$\prod_{i=1}^n B_i$是整的$A-$代数。

证：由归纳只需证明$n=2$的情况。

对于$(b_1,b_2)\in B_1\times B_2$。设$f,g\in A[x]$是两个首一多项式，且它们分别将$b_1,b_2$零化。那么考虑$(fg)(b_1,b_2)=(f(b_1)g(b_1),f(b_2)g(b_2))=0$，$fg$仍然是$A[x]$中的首一多项式，于是这就说明了$(b_1,b_2)$是在$A$上整的，进而$B_1\times B_2$是整的$A-$代数。

7. 设A是B的子环，$B-A$在乘法下封闭。证明A在B中是整闭的。

证:

若否，设$b\in B-A$且b在A上整。

即$b^n+a_1b^{n-1}+\cdots a_{n-1}b+a_n=0$，于是$-a_n=b(b^{n-1}+\cdots+a_{n-1})$。于是只有$b^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\in A$。

同样地有$b(b^{n-2}+\cdots+a_{n-2})\in A$，反复进行此操作得到$b+a_1\in A$，矛盾。

故A整闭。

整性闭包在多项式环上保持

8.

8.1 设A是整环B的子环，C是A在B中的整性闭包。首一多项式$f,g\in B[x]$满足$fg\in C[x]$。则$f,g\in C[x]$

8.2 将整环的条件去掉后证明此命题。

证:

8.1 考虑包含B（或准确地说$Frac(B)$）且f,g在其上分裂的域。设此时$f=\prod(x-f_i),g=\prod(x-g_i)$，于是$f_i,g_i$均为$fg$的根，于是在$C$上整。从而$f,g$的系数均在$C$上整，进而均属于$C$，即$f,g\in C[x]$

8.2

此时仍然只需证明使多项式分裂的环的存在性:

对于$f(x)$，考虑扩环$B[x]/(f(x))$，那么在其中$T-x|f(T)$，考虑$f(T)/(T-x)$继续扩环即可。

9. 设A是B的子环，C是A在B中的整性闭包。证明$C[x]$是$A[x]$在$B[x]$中的整性闭包。

证:

若$f \in B[x]$在$A[x]$上整。即$f^m + g_1 f^{m-1} + \cdots + g_m = 0$对某些$g_i \in A[x]$成立。

对$r > m$，取$f_1 = f - x^r$，即有$f_1^m + h_1 f_1^{m-1} + \cdots + h_m = 0$，其中
$h_m = (x^r)^m + g_1(x^r)^{m-1} + \cdots \in A[x]$.

那么对$-f_1, f_1^{m-1} + h_1 f_1^{m-2} + \cdots + h_{m-1}$应用8，当然有它们的乘积$(h_m)$属于$A[x]$，进而属于$C[x]$，于是$f_1$属于$C[x]$。而$x^r$当然属于$C[x]$，于是$f \in C[x]$。

反过来由于x在$A[x]$上整，C在$A[x]$上整，于是$C[x]$在$A[x]$上整。

环同态的上升性质和下降性质

10. 称环同态$f : A \to B$具有上升（下降）性质如果对于扩环$f(A) \subseteq B$上升（下降）定理成立。

取拉回映射$f^* : Spec(B) \to Spec(A)$

10.1 对于以下三个条件

1a. f^*是闭映射；**1b.** f具有上升性质；**1c.** 对于任何B中素理想$\mathfrak{q}$，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$，那么映射$Spec(B/\mathfrak{q}) \to Spec(A/\mathfrak{p})$是满的。

证明：$a \implies b \iff c$,

10.2 对于以下三个条件

2a. f^*是开映射；**2b.** f具有下降性质；**2c.** 对于任何B中素理想$\mathfrak{q}$，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$，那么$f^* : Spec(B_\mathfrak{q}) \to Spec(A_\mathfrak{p})$是满的。

证:

10.1

$1b \iff 1c$是显然的。因为这相当于要求对每个包含$\mathfrak{p}_1$的素理想$\mathfrak{p}_2$，都能够找到一个包含$\mathfrak{q}_1$的素理想，并且满足其在拉回映射的像下为$\mathfrak{p}_2$，而这正是$Spec(B/\mathfrak{q}) \to Spec(A/\mathfrak{p})$

$1a \implies 1c$. 考虑$V(\mathfrak{q})$的像，由于f^*闭映射，其像集一定具有$V(\mathfrak{a})$的形式。首先显然有$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{p})$，但另一方面由于$\mathfrak{p}$是$\mathfrak{q}$的像，$\mathfrak{p} \subseteq V(\mathfrak{a})$。于是只能有$V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{a})$，即$ImV(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p})$，从而证明了1c成立。

10.2

$2b \iff 2c$成立原因同前。

$2a \implies 2c$.

注意：这里完全不和1中情况对偶。

首先由于Zariski的拓扑中开集具有下降性质，即$\mathfrak{p} \in U, \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p}' \in U$.（考虑补集即可）

由于$B_\mathfrak{q}$是全体B_t环的正向极限，$t \in B - \mathfrak{q}$。于是由3.E26
$f^*(Spec(B_\mathfrak{q})) = \cap f^*(Spec(B_t)) = \cap f^*(Y_t)$。其中$Y_t$是包含$\mathfrak{q}$的开集，于是$f^*(Y_t)$是包含$\mathfrak{p}$的开集。对于每个$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$，都有$\mathfrak{p}' \subseteq f^*(Y_t)$，从而$f^*(Spec(B_\mathfrak{q})) = Spec(A_\mathfrak{p})$

11. **设$f: A \to B$是平坦环同态，那么f有下降性质。**

（Recall. 平坦环同态即B作为$A-$模是平坦的）

证：由3.E18和5.E10显然。

12. **设G是环A的自同构群的有限子群。记A^G为A中全体$G-$不变元素构成的子环（可以迅速地验证它的确是子环），那么A在A^G上整。**

设S是A的乘性子集，且满足$\sigma(S) \subseteq S, \forall \sigma \in G$，并记$S^G = S \cap A^G$。证明$G$在$A$上的作用可以延拓到$S^{-1}A$上，并且$(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$

证：

12.1 A在A^G上整：对于任何$x \in A$，注意到x是多项式$f(t) = \prod_{\sigma \in G}(t - \sigma(x))$的解，并且由于系数为初等对称多项式，自然是$G$不变的。

12.2 对于$\sigma \in G$，取$\sigma(a/s) = \sigma(a)/\sigma(s)$即可。

良定义性：若$a/s = b/t, s'(at - bs) = 0$，则$\sigma(s')[\sigma(a)\sigma(t) - \sigma(b)\sigma(s)] = 0$，从而$\sigma(a)/\sigma(s) = \sigma(b)/\sigma(t)$

σ诱导了$S^{-1}A$的环同态也是显然的。

12.3 $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$

取映射$\rho : (S^G)^{-1}A^G \to (S^{-1}A)^G : a/s \mapsto a/s$

这个定义是良好的因为$\sigma(a/s) = \sigma(a)/\sigma(s) = a/s$，于是$a/s \in (S^{-1}A)^G$。

映射ρ是单同态：因为如果$\rho(a/s) = 0$，那么在$S^{-1}A$中$a/s = 0$，即$\exists s' \in S, as' = 0$。注意此时$a \in A^G$，那么$\forall \sigma \in G, 0 = \sigma(as') = a\sigma(s')$

于是$a \cdot \sum_{\sigma \in G} \sigma(s') = 0$，并且$\sum_{\sigma \in G} \sigma(s') \in A^G$，另一方面$\sigma(S) \subseteq S$，于是$\sum_{\sigma \in G} \sigma(s') \in S$，从而$\sum_{\sigma \in G} \sigma(s') \in S^G$。故在$(S^G)^{-1}A^G$中$a/s = 0$

映射ρ是满同态：对于任何$a/s \in (S^{-1}A)^G$. 由于$\sigma(a)/\sigma(s) = \sigma(a/s) = a/s$，我们断言在$S^{-1}A$中$(\sum_{\sigma \in G} \sigma(a))/(\sum_{\sigma \in G} \sigma(s)) = a/s$

断言成立，因为假设对每个$\sigma \in G, s_\sigma(\sigma(a)s - \sigma(s)a) = 0$，那么$\left[\sum_{\sigma \in G} \sigma(a)s - \sum_{\sigma \in G} \sigma(s)a\right] \cdot \prod_{\sigma \in G} s_\sigma = 0$

于是$\rho(\sum_{\sigma \in G} \sigma(a)/\sum_{\sigma \in G} \sigma(s)) = a/s$。

因此ρ是同构。

13. 记号沿用5.E12，设$\mathfrak{p}$是A^G中的素理想，P是A中素理想构成的集合满足其元素的局限是$\mathfrak{p}$，证明G在集合P上的作用是传递的，于是作为推论得到P有限。

证：

对于$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in P$，设$x \in \mathfrak{p}_1$。于是$\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \mathfrak{p}_1 \cap A^G = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_2$，从而存在一个$\sigma$使得$\sigma(x) \in \mathfrak{p}_2$。由于对每个$x$均为如此，于是$\mathfrak{p}_1 \subseteq \cup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{p}_2)$.

注意σ是自同构于是$\sigma(\mathfrak{p}_2)$是A的素理想。由包容引理(1.11)，知$\mathfrak{p}_1 \subseteq \sigma(\mathfrak{p}_2)$对某个$\sigma \in G$成立。那么由5.9，注意$A$在$A^G$上整，即有$\mathfrak{p}_1 = \sigma(\mathfrak{p}_2)$。从而证明了结论。

14. **设A是整闭环，K是其分式域，L是其有限正规可分扩张。记$G = Gal(L/K)$，B是A在L中的整性闭包。证明$\sigma(B) = B, \forall \sigma \in G$并且$A = B^G$。**

证：

14.1 $\sigma(B) = B$

对于$b \in B$，设它满足$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$，于是
$\sigma(b)^n + \sigma(a_1)\sigma(b)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_n) = 0$，即$\sigma(b)^n + a_1\sigma(b)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$，从而$\sigma(b)$也在$A$上整，故$\sigma(b) \in B$。

同样上述叙述对σ^{-1}依然成立，那么对于$\sigma(b) \in B$有$b = \sigma(\sigma^{-1}(b)) \in B$，于是$\sigma(B) = B$
。

14.2 $A = B^G$

$B^G = B \cap L^G = B \cap K = A$。倒数第二个等号是Galois扩张性质，最后一个等号是因为A在K中整闭，如果存在$k \in K - A$，并属于B，这就说明k在A上整，于是只有$k \in A$，矛盾。从而只有$B \cap K = A$。

15. **A是整闭环，K是其分式域，L是K的有限扩张，B是A在L中的整性闭包。对于A中素理想$\mathfrak{p}$，全体满足局限为$\mathfrak{p}$的B中素理想$\mathfrak{q}$个数有限。**

证：

域论相关：https://wuli.wiki/changed/PInsEx.html

每个有限扩张都可以分解为一次可分扩张再作一次纯不可分扩张。当然此时两个扩张都是有限的，于是只需证明L是K的可分扩张和L是K的纯不可分扩张的情况即可。

a. L/K是有限可分扩张，于是是单扩张，那么添加其分裂域就有L能够被嵌入到某个Ω中，且Ω/K是有限正规可分扩张。于是由5.E14$A=B^G$，那么在5.E13中收缩到$A=B^G$中某个素理想$\mathfrak{p}$的B中素理想个数有限。

b. L/K是纯不可分扩张。注意零特征域的有限扩张一定是可分的，于是只需考虑有限域。设$\mathrm{char}K=p$，如果$\mathfrak{q}$是B的素理想满足$\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{p}$，

对于一个素理想$\mathfrak{q}$满足$\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{p}$，若$x\in\mathfrak{q}$，则有$x^{p^m}\in\mathfrak{p}$；反过来若$x^{p^m}\in\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}$，于是$x\in\mathfrak{q}$。

另一方面$\{x|\exists m\geq 0,x^{p^m}\in\mathfrak{p}\}$的确是一个理想（验证即可）从而说明满足$\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{p}$存在且唯一。于是这就证明了结论。

Noether正规化定理，零点定理

https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/10289644.html

16. (Noether正规化定理) 设k是域，$A\neq 0$是有限生成$k-$代数，则存在$x_1,\cdots,x_d\in A$，满足它们在k上代数无关，并且A在$k[x_1,\cdots,x_d]$上整。

即任何一个有限生成$k-$代数可以分解为$k\subseteq_{\text{纯超越}}k[x_1,\cdots,x_d]\subseteq_{\text{整}}A$.

证：

设A由$y_1,\cdots,y_m$作为k代数生成。

对m归纳，

若$m=0$命题显然。若否，由归纳法只需说明存在子环$S\subseteq A$，满足S作为$k-$代数由$m-1$个元素生成，并且A在S上有限（作为模有限生成）。

这是因为如果S满足要求，设对应的$k[x_1,\cdots,x_d]=R$，R当然在k上纯超越。又$R\subseteq_{\text{整}}S\subseteq_{\text{有限}}A$，于是$A$在$S$上整。由整性传递性$A$在$R$上整，从而得证。

由于$y_1,\cdots,y_m$如果代数无关，命题已经自然成立（取$x_i=y_i$）。故可以假设存在$f\in k[T_1,\cdots,T_m]$，使得$f(y_1,\cdots,y_m)=0$

首先待定r，记$z_i=y_i-y_1^{r^{i-1}},2\le i\le m$，于是
$f(y_1,z_2+y_1^r,z_3+y_1^{r^2},\cdots,z_m+y_1^{r^{m-1}})=0$

于是左侧由如下形式的项构成：$ay_1^{\alpha_1}\prod_{i=2}^m(z_i+y_1^{r^{i-1}})^{\alpha_i}$，其中系数$a\in k$。那么在这之中$y_1$的最高次项形如$ay_1^{\alpha_1+r\alpha_2+\cdots+r^{m-1}\alpha_m}$

可以取r使得对于对于每一项的α_i，都有$\alpha_i<r$，那么每个y_1的最高次项次数各不相同。于是通过将全局最高次的y_1项前系数归一，有y_1在$k[z_2,\cdots,z_m]$上整；同样$y_2,\cdots,y_m$由z_i的定义自然在$k[z_2,\cdots,z_m]$上整。从而$S=k[z_2,\cdots,z_m]$即为满足要求的子环S。

17a.(Schein零点定理) 给定环A，理想$\mathfrak{a}\subseteq A$，则$r(\mathfrak{a})=\cap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}}\mathfrak{p}$

证：（这里写一个迅速的局部化证法：3.11Rmk.
$f\notin r(0)\iff 0\notin\{1,f,\cdots,f^n\}\iff A_f\neq 0$，$A_f$的极大理想在$A$中的原像为不含$f$的素理想）

17b.(Zariski零点定理 - Zariski引理) 设k是域，A是有限生成k代数。如果A是域那么它是k的有限代数扩张。

证：由Noether正规化，$k\subseteq A$可以分解为$k\subseteq P\subseteq A$，其中A在P上整，并且由代数无关性有P同构于k上多项式环。由5.7，A是域，则P是域，从而多项式环必然退化成P本身。那么A在k上整，又是有限生成代数，于是是有限代数扩张。

17c.(Weak Nullstellenstaz) 对于代数闭域k，$k[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{m}\cong k$，其中$\mathfrak{m}$是$k[X_1,\cdots,X_n]$的极大理想。更进一步，$\mathfrak{m}$必定有形式$<X_1-k_1,\cdots,X_n-k_n>$

证：同5.25.

17d. (Hilbert Nullstellenstaz) 对于域k，有限生成$k-$代数A，$\mathfrak{a}$是A的理想，则$r(\mathfrak{a})=\cap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\mathfrak{m}$

证：同样无妨$\mathfrak{a}=0$，$f\notin r(0)\iff A_f\neq 0$. 于是$A_f$存在极大理想，设为$\mathfrak{m}$。其在$A$中的原像是素理想，设为$\mathfrak{n}$。

于是有域k出发的环同态（自然是单的）$k\to A/\mathfrak{n}$；并有$A/\mathfrak{n}<A_f/\mathfrak{m}$。于是$k\to A_f/\mathfrak{m}$是单同态。设$A$由$x_1,\cdots,x_n$作为$k-$代数有限生成，那么$A_f/\mathfrak{m}$由$\overline{x_1/1},\cdots,\overline{x_n/1},\overline{1/f}$作为$k-$代数有限生成。于是由Zariski引理，$A_f/\mathfrak{m}$是$k$的有限代数扩张。

于是$A_f/\mathfrak{m}$在k上整，当然在$A/\mathfrak{n}$上整，于是由5.7 $A/\mathfrak{n}$是域。故$\mathfrak{n}$是极大理想，从而$f\notin\mathfrak{n}$，命题得证。

17e. (Strong Nullstellenstaz) 对于代数闭域k，理想$\mathfrak{a}\subseteq k[X_1,\cdots,X_n]$，则$I(Z(\mathfrak{a}))=r(\mathfrak{a})$

证:

对于$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{A}^n$，$(x_1,\cdots,x_n)\in Z(\mathfrak{a})\iff\mathfrak{a}\subseteq<X_1-x_1,\cdots,X_n-x_n>$ (See 5.25 Cor.)

另一方面

$f(x_1,\cdots,x_n)=0\iff f\in<X_1-x_1,\cdots,X_n-x_n>$ (See 5.25 Cor.)

于是

$$I(Z(\mathfrak{a}))=\bigcap_{(x_1,\cdots,x_n)\in Z(\mathfrak{a})}<X_1-x_1,\cdots,X_n-x_n>$$
$$=\bigcap_{<X_1-x_1,\cdots,X_n-x_n>\supseteq\mathfrak{a}}<X_1-x_1,\cdots,X_n-x_n>$$
$$=\bigcap_{maximal\ \mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\mathfrak{m}\text{(Weak Nullstellenstaz)}$$
$$=r(\mathfrak{a})\text{(Hilbert Nullstellenstaz)}$$

最后一式注意$k[X_1,\cdots,X_n]$当然是有限生成$k-$代数。

20. **设A是整环B的子环，并且B在A上作为$A-$代数有限生成。证明存在$s\neq 0,s\in A$，$y_1,\cdots,y_n\in B$在A上代数无关，并且满足B_s在B'_s上整，其中$B'=A[y_1,\cdots,y_n]$。**

证:

取$S=A-\{0\}$，$K=S^{-1}A$，$S^{-1}B$是有限生成$K-$代数。由Noether正规化定理，存在$y_1/s_1,\cdots,y_n/s_n\in S^{-1}B$，在$K$上代数无关，并且$S^{-1}B$在$C=K[y_1/s_1,\cdots,y_n/s_n]$上整。

设$z_1,\cdots,z_m$作为$A-$代数生成B，那么$z_1/1,\cdots,z_m/1$在$K[x_1,\cdots,x_n]$上整。。

将$z_i/1$对应的零化多项式写出，即$p_i(z)=\sum c_{i,j}(z_i/1)^j$

取充分大的$s\in S$使得$sc_{i,j}\in B'$（乘以最小公倍数）那么$p_i(z)\in B'_s[T]$对每个i成立，于是$z_i/1$在B'_s上整。另一方面$B_s=B'_s[z_1/1,\cdots,z_m/1]$，于是由5.3得证。

21. **设A是整环B的子环，并且B在A上作为$A-$代数有限生成。证明存在$s\neq 0,s\in A$，满足如果Ω是代数闭域，$f:A\to\Omega$是一个同态满足$f(s)\neq 0$，那么f可以被延拓为$B\to\Omega$。**

证：

沿用5.E20的记号：首先f可以延拓至B'，例如将y_i映至0。由$s\neq 0$可以延拓至B'_s.

由5.E2，可以延拓至B_s，于是自然延拓至了B。

22. **设A是整环B的子环，并且B在A上作为$A-$代数有限生成。如果$J(A)=0$，那么$J(B)=0$**

证：

取B的一个非零元素v，需要证明存在一个不包含v的极大理想。对B_v和子环A应用5.E21（整环的局部化仍然是整环），得到了满足要求的$s\neq 0,s\in A$。

设$\mathfrak{m}$是A的极大理想，$s\notin\mathfrak{m}$，令$k=A/\mathfrak{m}$。那么典范同态复合上嵌入$A\to k\to\bar{k}$可以被延拓为$g:B_v\to\bar{k}$。当然有$g(v)\neq 0$，否则$g(1/v)$不存在。

另一方面$\operatorname{Im} g\cong B_v/\ker g\cong B/(\ker g\cap B)$

?

Jacobson环

23. 设A是环，证明下列等价，称满足这个条件的环为Jacobson环：

a. 每个素理想都是若干极大理想的交。

b. 每个A的同态像的Jacobson根和幂零根都相同

c. 每个A的非极大的素理想都等于严格包含它的素理想的交。

证：

$b \implies a$. 对于某个素理想$\mathfrak{p}$，考虑$A/\mathfrak{p}$，即证。

$a \implies c$. 显然

$c \implies b$. 首先环的同态像总是同构于某个A的商环，过渡到商环，于是可以假设A是整环但Jacobson根非零。设$0 \neq f \in J(A)$，于是$A_f \neq 0$。故A_f中存在极大理想，设其拉回是$\mathfrak{p}$。那么$f \notin \mathfrak{p}$（否则含1），于是$\mathfrak{p}$不是极大的。

另一方面，由于$\mathfrak{p}$是A_f中极大理想的拉回，那么严格包含$\mathfrak{p}$的素理想一定和$\{f, \cdots, f^n, \cdots\}$有交，于是一定包含$f$，从而与c条件矛盾。

24. 设A是Jacobson环，B是$A-$代数，证明如果以下二者至少成立其一：B在A上整；B作为$A-$代数有限生成，那么B是Jacobson环。

特别地，每个有限生成环，和域的有限生成代数是Jacobson环。

证：

25. 设A是环，证明以下两者等价：

1. A是Jacobson环；**2.** 每个有限生成$A-$代数B如果是域，那么作为A模有限生成。

证：

$1 \implies 2.$

设代数$f: A \to B$，A的同态像为$A' \subseteq B$（故A'是整环），并且A'仍然是Jacobson环。因此可设$A \subseteq B$，且A整。

由5.E21，存在$s \in A$满足要求，且$s \neq 0$。现在考虑A的Jacobson根：
$J(A) = \mathfrak{R}(A) = (0)$，于是$s \notin J(A)$，故存在极大理想$\mathfrak{m} \not\ni s$. 于是考虑同态
$A \to A/\mathfrak{m}(=k) \hookrightarrow \bar{k}$，那么它可延拓为$g: B \to \bar{k}$。由于$B$是域，于是$g$是单同态，故$B$在$k$上整。即$B$在$A$上整，回忆5.3后Remark（有限型+整=有限）有B是有限生成A模。

$2 \implies 1.$

利用23.3判别：

考虑A的非极大的素理想$\mathfrak{p}$，$B = A/\mathfrak{p}$。设f是B的非零元素。那么B_f是有限生成A代数。如果B_f是域，那么它是有限生成A模，从而在B上整。由5.7B是域，和$\mathfrak{p}$非极大矛盾，故B_f不是域，从而含有一个非零素理想，将其拉回至B，设为$\mathfrak{p}'$，那么$f \notin \mathfrak{p}'$.

从而B中的全体非零素理想的交是0。

因而$\mathfrak{p}$是全体严格包含其的素理想的交。

26. 对于拓扑空间X，称它的子集是局部闭的如果它是一个开集和闭集的交，或者等价地：它在它的闭包内是开的。

证明对于$X_0 \subseteq X$，以下三者等价

1. 每个非空局部闭集与X_0有交；**2.** 对每个闭集E,$\overline{E \cap X_0} = E$；**3.** X中开集到X_0中开集（子空间拓扑）的映射：$U \mapsto U \cap X_0$是双射。

称满足要求的集合X_0是相当稠密集。

证：

$1 \implies 2.$

首先显然有$\overline{E \cap X_0} \subseteq E$，另一方面对于任何$x \in E$，开邻域$x \in U$。那么$U \cap E$是非空局部闭集，进而和$X_0$有交，进而$U$和$X_0$有交，于是说明$x \in \overline{E \cap X_0}$，故$\overline{E \cap X_0} = E$

$2 \implies 3.$

子空间拓扑的定义保证了这个映射是满的。接下来说明它是单的：如果$U \cap X_0 = V \cap X_0$，进而$X - U = \overline{(X-U) \cap X_0} = \overline{(X-V) \cap X_0} = X - V$，故$U = V$。

$3 \implies 1.$

考虑非空局部闭集$U \cap V (U\ open, V\ closed)$。

由于$U \neq \varnothing$，由双射条件知$U \cap X_0 \neq \varnothing$。而$U \cap V \neq \varnothing$，如果$V \cap (U \cap X_0) = \varnothing$，于是$U \cap X_0 \subseteq X - V$。那么$[(X - V) \cap U] \cap X_0 = U \cap X_0$，从而只有$(X - V) \cap U = U$，即$X - V \supseteq U$。这和$U \cap V \neq \varnothing$矛盾。

接下来的命题将会指出Jacobson环的素谱具有的拓扑性质：

对于一个环A，以下三者等价：

1. A**是Jacobson环；2.** A**的极大理想点构成的集合是相当稠密集；3.** $Spec(A)$**的每个单点局部闭集都是闭的。（这是23的几何解释）**

证：

$1 \iff 2.$

记极大理想点集为$Max(A)$. 对于任何理想$\mathfrak{a}$，考虑$V(\mathfrak{a}) \cap Max(A)$，它的闭包也是$V(\mathfrak{a})$。设包含$\mathfrak{a}$的极大理想的交都是$\mathfrak{b}$，如果$r(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$

那么$V(\mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a}) \cap Max(A)$，但$V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$，这与闭包的定义矛盾，于是只能$\mathfrak{b} = r(\mathfrak{a})$，即等价于$A$的每个同态像中Jacobson根和幂零根相同。由5.E23.2即证。

$1 \implies 3.$

设$\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{a}) - V(\mathfrak{b})$，那么记$Q = \{\mathfrak{q}|\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$，$Q \subseteq V(\mathfrak{a})$，于是$Q \subseteq V(\mathfrak{b})$，故$\mathfrak{b} \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}}\mathfrak{q} \xlongequal{Jacobson\ Ring} \mathfrak{p}$，那么$\{\mathfrak{p}\} \in V(\mathfrak{b})$，矛盾！

$3 \implies 1.$

若对于某个非极大理想$\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p} \subset \cap_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}}\mathfrak{q}$，则$\{\mathfrak{p}\} = V(\cap_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}}\mathfrak{q}) - V(\mathfrak{p})$，于是$\mathfrak{p}$极大，矛盾。

赋值

27. 设A, B是两个局部环，B被称为优于A如果$A \subseteq B$，并且A中的极大理想$\mathfrak{m}$被B中极大理想$\mathfrak{n}$包含（或更准确地$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$）。设$K$是域，$\Sigma$是$K$的全体子局部环。给$\Sigma$赋以优序，证明$\Sigma$有极大元，并且$A \in \Sigma$极大 $\iff$ A是K的赋值环。

证:

极大元存在:

考虑升链$(A_1, \mathfrak{m}_1) \subset \cdots \subset (A_n, \mathfrak{m}_n) \subset \cdots$.

考虑$k_i = A_i/\mathfrak{m}_i$, 因而存在$k_i \to k_{i+1}$的同态。由于k是域，只能有这些同态是嵌入。

因而存在正向系统之间的正合列$0 \to \mathbf{m} \to \mathbf{A} \to \mathbf{k} \to 0$. 从而正向极限之间存在正合列$0 \to \cup\mathfrak{m}_i \to \cup A_i \to \cup k_i \to 0$.

因而$\cup\mathfrak{m}_i$是$\cup A_i$的极大理想，接下来证明它是局部环。

由1.6.2，$1 + \cup\mathfrak{m}_i$中元素设为$1 + m$，必然有$m \in \mathfrak{m}_i$，于是$1 + m$在A_i中是单位，进而在$\cup A_i$中是单位，从而说明了局部环。

赋值环:

$A \in \Sigma$极大 $\implies$ 赋值环

记$\Omega = \bar{K}$，考虑同态$f: A \to A/\mathfrak{m} \hookrightarrow \Omega$（注意到$A/\mathfrak{m}$可以嵌入到$K$，于是嵌入到$\Omega$）

回忆5.3节赋值环的构造，如果存在$(A', f') > (A, f)$，无妨将(A', f')取为一个极大元，于是由5.19它是局部环，并且$f'|_A = f$。那么极大理想$\mathfrak{n} = \ker f'$当然满足$\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$，与$A \in \Sigma$极大矛盾。

于是(A, f)在5.3节序关系中极大，于是由5.21是赋值环。

赋值环 $\implies A \in \Sigma$极大

现在假定A是赋值环，如果局部环B优于A，那么$A \subset B \subset K$。由5.18.2，A, B都是局部环。

考虑$(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$，由5.18.1的证明，$\mathfrak{m}$是$x \in A, x^{-1} \notin A$的$x$构成的集合。于是对其扩环必定会导致$x \in A$，$x^{-1} \in B$的情形的出现。因此$\mathfrak{n}$反而要小于$\mathfrak{m}$。从而只能$A = B$

28. 设A是整环，K是分式域，证明以下两者等价：

1. A是K的赋值环；**2.** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$是$A$的理想，则$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$必定出现其一。

自然地作为推论$A/\mathfrak{p}$和$A_{mathfrakp}$都是它们各自分式域中的赋值环。

证：

$1 \implies 2.$

若否，设$x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, y \in \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$，自然$x, y \neq 0$。由于$x/y \in K$，无妨$x/y \in A$。那么$\mathfrak{b} \ni y \cdot x/y = x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$，矛盾。

$2 \implies 1.$

对于$a/b \in K^\times$，只要$(a) \subseteq (b)$就有$b/a \in A$，反之$a/b \in A$，得证。

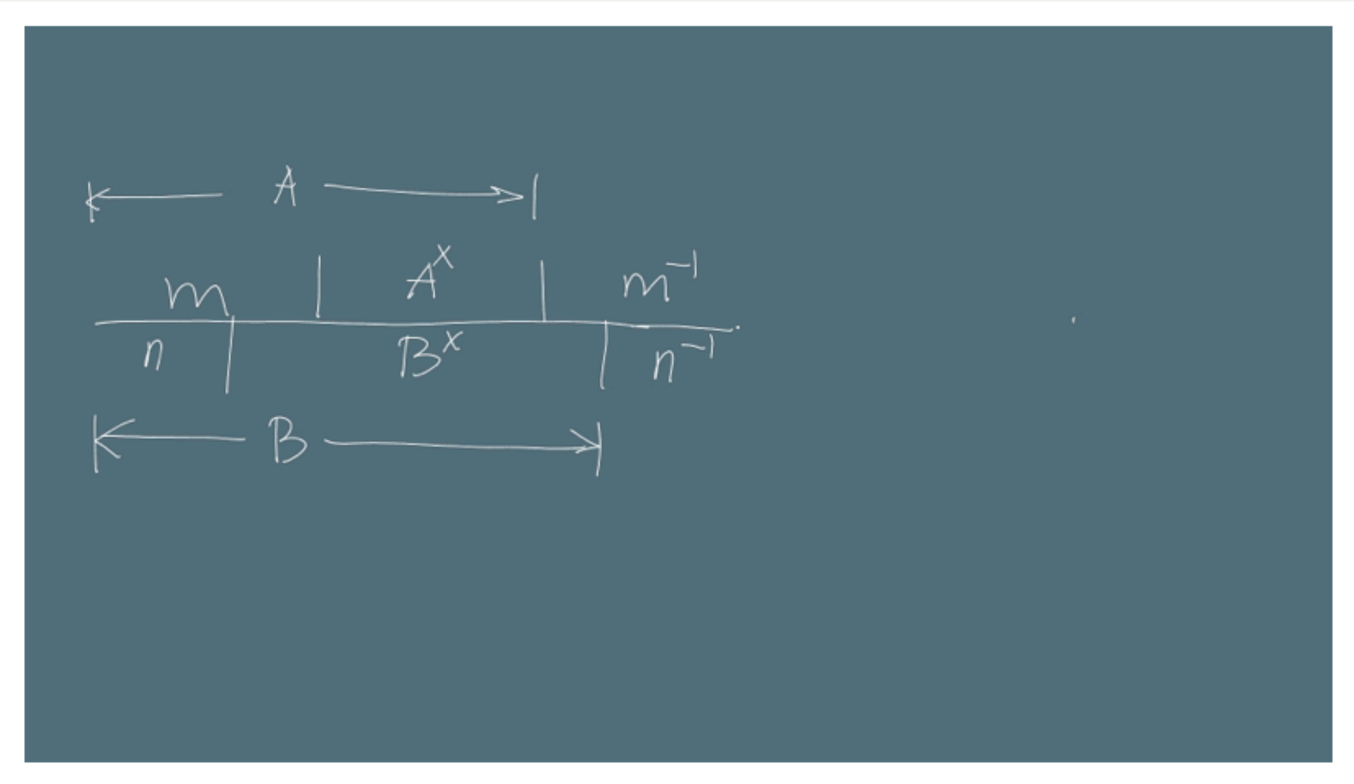
29. 设A是K的赋值环，那么每个包含A的K的子环都是A的某个局部化。

证：

设子环为B，5.18保证B是赋值环，进而是局部环。设B的极大理想是$\mathfrak{n}$，A的极大理想是$\mathfrak{m}$。由5.E27.2的讨论知$\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{m}$. 那么$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}\cap A$是$A$的素理想。我们证明$B=A_{\mathfrak{n}}$

这是显然的，只需将局部环嵌入到分式域中立即得证。

（注意有如下关系：



）

30.（赋值环→赋值） 设A是K的赋值环，A的单位群U是K^*的子群。

令$\Gamma=K^*/U$，设$\xi,\eta\in\Gamma$，被$x,y\in K$代表。定义$\xi\geq\eta$如果$xy^{-1}\in A$（很容易验证这是良定义的）证明这是全序，并且和群乘法相容：$\xi\geq\eta\implies\xi\omega\geq\eta\omega$。于是我们得到了一个全序**Abel**群，称为环A的值群。

$v:K^*\to\Gamma$记为自然同态，证明$\forall x,y\in K^*$，$v(x+y)\geq\min\{v(x),v(y)\}$

证：

全序显然，相容性显然。

下面证明不等式。无妨$v(x) \geq v(y)$，则$(x+y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in A$.

31.（赋值→赋值环）设Γ是一个全序Abel群，群运算以加法记。设K是一个域，那么它的赋值被定义为一个映射$v: K^* \to \Gamma$，满足：1. $v(xy) = v(x) + v(y)$；2. $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

证明全体满足$v(x) \geq 0$的元素构成一个赋值环，并且$v(K^*)$正好构成了对应的值群。

证：

首先这样的元素对加法和乘法封闭，$v(1) = 0$。$2v(-1) = v(1) = 0$，故元素对加法逆封闭，于是说明了它构成环。

它是赋值环是因为$0 = v(1) = v(x) + v(x^{-1})$，于是至少存在一个大于0，故$x, x^{-1}$至少存在一属于这个环，从而是赋值环。记这个环为$A$。

另一方面$v(x) = 0 \iff v(x) \geq 0, v(x^{-1}) \geq 0 \iff x \in A^* = U$，并且$v$当然是群同态，于是当然有$v(K^*) \cong K^*/U$，并且序关系相容。于是这说明了5.E30和5.E31内容的等价性。

32. 设Γ是全序**Abel**群。称子群Δ是孤立的如果$0 \leq \beta \leq \alpha, \alpha \in \Delta \implies \beta \in \Delta$

设赋值环A**(w.r.t. 域K)**，值群Γ。如果$\mathfrak{p}$是A的素理想，**证明**$v(A - \mathfrak{p})$是某个孤立子群Δ和非负（即≥ 0）元素的交。

这样诱导出了$Spec(A)$到全体孤立子群的映射，**证明这个映射是双射**。

研究$A/\mathfrak{p}, A_{\mathfrak{p}}$的值群。

证：

32.1 如果一个子群的非负部分被确定了，那么这个子群就被唯一确定了。于是只需考虑$v(A - \mathfrak{p})$是否满足孤立条件。

设α的代表元为$x \in A-\mathfrak{p}$，β代表元为y，那么$y \in A$，$xy^{-1} \in A$。若$y \in \mathfrak{p}$，$x = xy^{-1}y \in \mathfrak{p}$，矛盾。于是$y \in A-\mathfrak{p}$，从而验证了孤立条件。

32.2

单射：如果$\Delta(\mathfrak{p}) = \Delta(\mathfrak{q})$

于是$\forall x \in A-\mathfrak{p}$，$\exists y \in A-\mathfrak{q}$满足$v(x) = v(y), \text{i.e.}\ v(xy^{-1}) = 0$，即$x, y$相差一个单位。然而$A-\mathfrak{p}$，$A-\mathfrak{q}$分别乘以单位群后都不动，于是这说明$A-\mathfrak{p} \subseteq A-\mathfrak{q}$。类似地存在反包含关系，于是$A-\mathfrak{p} = A-\mathfrak{q}$，从而得证。

满射：给定Δ，考虑$\mathfrak{p} = A - v^{-1}(\Delta)$，需要证明这是素理想。首先当然$0 \in \mathfrak{p}$。若$x, y \in \mathfrak{p}$ $, x+y \notin \mathfrak{p}$，那么由$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$及孤立条件知至少有一（设为$x$）满足$v(x) \in \Delta$，即$x \notin \mathfrak{p}$，矛盾。

若$x \in \mathfrak{p}, a \in A$，但是$ax \notin \mathfrak{p}$，于是$v(ax) = v(x) + v(a)$，即$v(ax) \geq v(x) \geq 0$，故$v(x) \in \Delta$，即$x \notin \mathfrak{p}$，矛盾。

若$x, y \notin \mathfrak{p}, xy \in \mathfrak{p}$，$v(xy) = v(x) + v(y)$。而$v(x), v(y) \in \Delta$，于是只能有$v(xy) \in \Delta$，矛盾。从而$\mathfrak{p}$的确是素理想，得证。

32.3

设$\mathfrak{p}$对应的孤立子群为Δ。

结论$A/\mathfrak{p} : \Delta; A_{\mathfrak{p}} : \Gamma/\Delta$

33.（值群构造赋值） 设Γ是全序Abel群。接下来从Γ构造出域K和赋值v。设k是任意域，$A = k[\Gamma]$是群代数，那么A是$k-$线性空间。基为$x_\alpha, \alpha \in \Gamma$，说明$A$是整环。

如果$u = \lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n}$是$A$的非零元素，并且$\lambda_i \neq 0, \forall i$，$\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$，定义$v_0(u) = \alpha_1$。证明$v_0 : A - \{0\} \to \Gamma$满足赋值的两个条件。

记K为A的分式域，证明v_0可以被唯一的延拓成K的赋值v，并且值群恰好为Γ。

证：

33.1 考虑指标序最小两项的乘积，对应项的系数就应该是系数乘积，自然非零。

33.2 直接验证即可。

33.3 $v(1/f) = -v_0(f)$，经验证的确是赋值。

34. **设**A**是赋值环，**K**是分式域。**$f : A \to B$**诱导出**$f^* : Spec(B) \to Spec(A)$**是闭映射。那么如果**$g : B \to K$**是代数同态（即**$g \circ f$**是嵌入），那么**$g(B) = A$**。**

证：

设$C = g(B)$，当然$A \subseteq C$。取C的极大理想为$\mathfrak{n}$，由于闭映射，那么$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$也是极大理想。因此$A = A_{\mathfrak{m}}$，而$C_{\mathfrak{n}}$优于$A_{\mathfrak{m}}$，于是$C_{\mathfrak{n}} = A$，因此$C \subseteq A$，从而$A = C$，得证。

35. **利用5.E1和5.E3说明**$f : A \to B$**是整的，**C**是任意**$A-$**代数，那么映射**
$(f \otimes 1)^* : Spec(B \otimes_A C) \to Spec(C)$.

反过来，如果$f : A \to B$**满足上述条件，且**B**是整环，那么**f**是整的。**

证：

正方向是显然的。反过来：

记$A' = f(A) \subseteq B$，K是B的分式域。欲证整性，由5.22，只需说明B在每个包含A'的K的赋值环中。设C是这样的一个赋值环，那么$A' \subseteq B, C \subseteq K$。那么$B \times C \to K$是$A$双线性的。于是诱导出了双线性映射$g : B \otimes_A C \to K$。

现在记$F = (f \otimes 1) : C \to B \otimes C$，$F^*$是闭映射。$g \circ F : c \mapsto 1_B \otimes c \to c$，即给出了单射$C \hookrightarrow K$。5.E34保证了$g(B \otimes_A C) = C$，那么$g(b \otimes 1_c) \in C$，故$B \subseteq C$。于是完成了证明。

证明这个结果仍然成立如果B**只有有限个素理想。**

证：

设$\mathfrak{p}_i$是极小素理想，那么考虑$A \to B \to B/\mathfrak{p}_i$。由于$Spec(B \otimes_A C) \to Spec(C)$是闭映射，而1.E21.4保证$Spec((B/\mathfrak{p}_i) \otimes C) \to Spec(B \otimes C)$是闭的，因而$Spec((B/\mathfrak{p}_i) \otimes C) \to Spec(C)$是闭映射。由前述命题（$B/\mathfrak{p}_i$是整环）得$A \to B/\mathfrak{p}_i$是整的。

那么在$\prod(B/\mathfrak{p}_i)$中$(0, \cdots, B/\mathfrak{p}_i, \cdots, 0)$在$A$上整，由整元一定构成子环知$\prod(B/\mathfrak{p}_i)$在$A$上整。

由于$B \to \prod(B/\mathfrak{p}_i)$可分解为$B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{R} \hookrightarrow \prod(B/\mathfrak{p}_i)$，那么自然$B/\mathfrak{R}$在$A$上整。

设$\overline{x}$满足某个首一A系数多项式$p(x) = \overline{0}, i.e. \in \mathfrak{R}$，那么$p(x)^l = 0$，得证。