Мультиоперации на конечных множествах

Перязев Николай Алексеевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

"Математические вопросы кибернетики"
15 апреля 2022 г.

Содержание

§1. Основные понятия и обозначения

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;
- пусть $f_0 \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(m)}$, тогда $(n+1)$-местный оператор суперпозиции:

$$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

§1.1. Мультиоперации и основные операторы

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;
- пусть $f_0 \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(m)}$, тогда $(n+1)$-местный оператор суперпозиции:

$$(f_0 * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

- пусть $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, тогда одноместный оператор разрешимости по i-тому аргументу, $i \in \{1, ..., n\}$:

$$(\mu_i f)(a_1, ..., a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_n)\}.$$

Пусть f n-местная мультиоперация на множестве A.
Если для любых $a_1, ..., a_n$ из A:

- $|f(a_1, ..., a_n)| \geq 1 \rightleftharpoons f$ — гипероперация;
- $|f(a_1, ..., a_n)| \leq 1 \rightleftharpoons f$ — квазиоперация;
- f — гипероперация и квазиоперация $\rightleftharpoons f$ — операция;

§1.2. Специальные мультиоперации

Пусть f n-местная мультиоперация на множестве A.
Если для любых $a_1, ..., a_n$ из A:

- $|f(a_1, ..., a_n)| \geq 1 \rightleftharpoons f$ — гипероперация;
- $|f(a_1, ..., a_n)| \leq 1 \rightleftharpoons f$ — квазиоперация;
- f — гипероперация и квазиоперация $\rightleftharpoons f$ — операция;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — гипероперации $\rightleftharpoons$ f — сюръективная гипероперация;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — квазиоперации $\rightleftharpoons$ f — инъективная квазиоперация;
- f и $(\mu_i f)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$ — операции $\rightleftharpoons f$ — биективная операция.

§1.3. Стандартная кодировка

$f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно рассматривать как отображение

$$f : B^n \to C,$$

где $B = \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}$ $C = \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$, которое получаемое из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \ \ \varnothing \to 0; \ \ \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

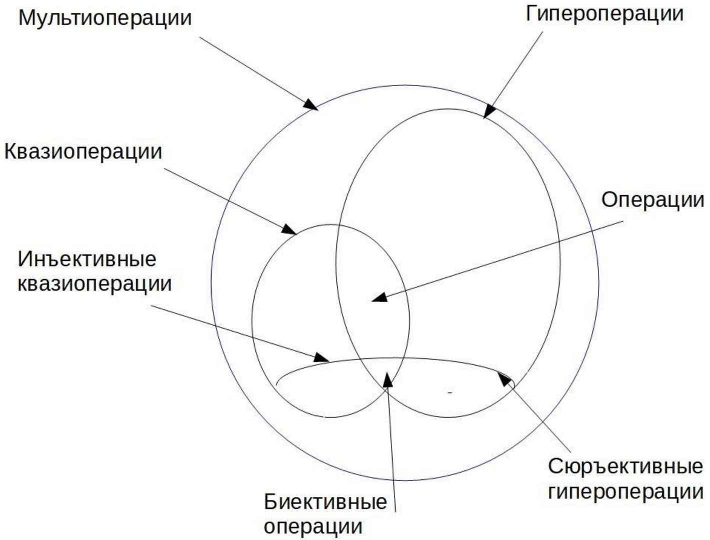
Говорим, что f мультиоперация размерности n, ранга k, где $k \geq 2$.

§1.4. Обозначения для множеств мультиоперации

Для множеств мультиопераций размерности n, ранга k;

- $\mathcal{M}_k^{(n)}$ — множество всех мультиопераций;
- $\mathcal{P}_k^{(n)}$ — множество квазиопераций;
- $\mathcal{H}_k^{(n)}$ — множество гиперопераций;
- $\mathcal{O}_k^{(n)}$ — множество операций;
- $\mathcal{IP}_k^{(n)}$ — множество инъективных квазиопераций;
- $\mathcal{JH}_k^{(n)}$ — множество сюръективных гипероперoаций;
- $\mathcal{BO}_k^{(n)}$ — множество биективных операций.

§1.5. Пересечение множеств мультиопераций



§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k - 1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k-1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

$$\left|\mathcal{IP}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} C_k^i \quad \text{(1995, D.Knuth)};$$

$$\left|\mathcal{JH}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (2^{k-i}-1)^k C_k^i \quad \text{(1965, К.А.Зарецкий)};$$

$$\left|\mathcal{BO}_k^{(1)}\right| = k!$$

§1.6. Мощность множеств мультиопераций

- $\left|\mathcal{M}_k^{(n)}\right| = 2^{k^{n+1}}$;
- $\left|\mathcal{P}_k^{(n)}\right| = (k+1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{H}_k^{(n)}\right| = (2^k-1)^{k^n}$;
- $\left|\mathcal{O}_k^{(n)}\right| = k^{k^n}$;

$$\left|\mathcal{IP}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} C_k^i \quad \text{(1995, D.Knuth)};$$

$$\left|\mathcal{JH}_k^{(1)}\right| = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (2^{k-i}-1)^k C_k^i \quad \text{(1965, К.А.Зарецкий)};$$

$$\left|\mathcal{BO}_k^{(1)}\right| = k!$$

Вопрос 1. $\left|\mathcal{IP}_k^{(n)}\right| -? \left|\mathcal{JH}_k^{(n)}\right| -? \left|\mathcal{BO}_k^{(n)}\right| -?$

§2. Методы задания мультиопераций

- Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i-1$ n-разрядным числом в системе исчисления по основанию k.

§2.1. Векторная форма мультиопераций

- Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ n-разрядным числом в системе исчисления по основанию k.
- Примеры:

$k = 2,\ n = 3$

2^{i_1}	2^{i_2}	2^{i_3}	f
1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	0
1	2	2	2
2	1	1	1
2	1	2	3
2	2	1	2
2	2	2	0

$f = (21021320)$

$k = 3,\ n = 2$

2^{i_1}	2^{i_2}	g
1	1	4
1	2	2
1	4	6
2	1	5
2	2	3
2	4	7
4	1	0
4	2	1
4	4	1

$g = (426537011)$

§2.2. Булевы пространственные матрицы

- Двоичной n-мерной матрицей k-го порядка называется функция $\alpha : N_k^n \to \{0, 1\}$, где $N_k = \{1, ..., k\}$.
  Обозначение: $M = [\alpha_{i_1 \dots i_n}]$, где $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \alpha(i_1, ..., i_n)$.
- При фиксированном значении i ($i \in N_k$) индекса s получается $(n-1)-$мерная матрица k-го порядка, которая называется i-сечением M по индексу s, обозначается M^{i_s}.

- Двоичной n-мерной матрицей k-го порядка называется функция $\alpha : N_k^n \to \{0,1\}$, где $N_k = \{1, ..., k\}$.
  Обозначение: $M = [\alpha_{i_1 \dots i_n}]$, где $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \alpha(i_1, ..., i_n)$.
- При фиксированном значении i ($i \in N_k$) индекса s получается $(n-1)-$мерная матрица k-го порядка, которая называется i-сечением M по индексу s, обозначается M^{i_s}.
- Умножение n-мерной матрицей k-го порядка M на вектор V длинны k по индексу s дает $(n-1)$-мерную матрицу k-го порядка $(M *_s V) = [\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}]$, при

$$\beta_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} = M^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n} * V,$$

где $*$ является скалярным произведением векторов над булевым полукольцом B.

§2.3. Матричное представление мультиопераций

Пусть $B = \langle \{0, 1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, ..., a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, ..., a_{i_n}). \end{cases}$$

Пусть $B = \langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}). \end{cases}$$

Теорема.

Пусть $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$, $M_{(f_0 * f_1, \dots, f_n)} = [\beta_{i_0 i_1 \dots i_m}]$. *Тогда*

$$\beta_{i_0 i_1 \dots i_m} = (\dots((M_{f_0}^{i_0} *_n M_{f_n}^{i_1 \dots i_m}) *_{n-1} M_{f_{n-1}}^{i_1 \dots i_m}) \dots) *_1 M_{f_1}^{i_1 \dots i_m}$$

§2.3. Матричное представление мультиопераций

Пусть $B = \langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ — двухэлементное булево полукольцо. Для мультиоперации f размерности n, ранга k на A определим булеву пространственную $(n+1)$-мерную матрицу k-го порядка $M_f = [\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n}]$ где:

$$\alpha_{i_0 i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i_0} \in f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}); \\ 0, & \text{если } a_{i_0} \notin f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}). \end{cases}$$

Теорема.

Пусть $f_0 \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$, $M_{(f_0 * f_1, \dots, f_n)} = [\beta_{i_0 i_1 \dots i_m}]$. *Тогда*

$$\beta_{i_0 i_1 \dots i_m} = (\dots((M_{f_0}^{i_0} *_n M_{f_n}^{i_1 \dots i_m}) *_{n-1} M_{f_{n-1}}^{i_1 \dots i_m}) \dots) *_1 M_{f_1}^{i_1 \dots i_m}$$

Замечание. Порядок умножения на вектора не меняет результат.

§2.4. Пример представления суперпозиции

Пусть $f_0 = (426537011)$, $f_1 = (145)$, $f_2 = (273)$. Тогда $g = (f_0 * f_1, f_2) = (217)$.

$$M_{f_{\mathbf{0}}} = \begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix}, M_{f_{\mathbf{1}}} = \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix} \; M_{f_{\mathbf{2}}} = \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix} \right).$$

§2.4. Пример представления суперпозиции

Пусть $f_0 = (426537011)$, $f_1 = (145)$, $f_2 = (273)$. Тогда $g = (f_0 * f_1, f_2) = (217)$.

$$M_{f_0} = \begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix},\ M_{f_1} = \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix}\ M_{f_2} = \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 101 \\ 000 \\ 011 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 011 \\ 111 \\ 010 \end{bmatrix} \right).$$

Покажем вычисления по столбцам.

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 000 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 000\,111\,011 \\ 011\,011\,000 \\ 101\,101\,000 \end{bmatrix} *_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix} *_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

В итоге получаем $M_g = \begin{bmatrix} 011 \\ 101 \\ 001 \end{bmatrix}$.

§.2.5. Матричное представление оператора разрешимости, проекций и нулевой мультиоперации

- $M_{(\mu_i f)} = M_f^T$ — транспонирование пространственной матрицы по нулевому и i индексам;
- $M_{e_s} = E_s$ — $(n+1)$-мерная матрица k-го порядка такая, что все сечения $M_s^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_n}$ являются диагональными квадратными матрицами k-го порядка;
- $M_o = O$ — нулевая $(n+1)$-мерная матрица k-го порядка.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d_{i,\alpha}^{n} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1)$.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d_{i,\alpha}^{n} = (2^k - 1, ..., 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, ..., 2^k - 1)$.

- *Стандартная форма.*
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^{m} \mid 0 \leq m \leq n, \alpha \in \{0, ..., 2^k - 1\}\}$.

§2.6. Стандартная форма мультиопераций

Пусть $\cap(a,b) = \{a\} \cap \{b\}$; $d_{i,\alpha}^{n} = (2^k-1, ..., 2^k-1, \overset{i}{\alpha}, 2^k-1, ..., 2^k-1)$.

- *Стандартная форма.*
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

  где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^{m} \mid 0 \le m \le n, \alpha \in \{0, ..., 2^k-1\}\}$.

- *Совершенная стандартная форма.*
  Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f \ne (2^k-1, ..., 2^k-1)$. Тогда

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_1, ..., x_n),$$

  где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^{n}\ | \alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$.

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ *и* $f \neq (2^k - 1, ..., 2^k - 1)$. *Тогда существует такое стандартное представление*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{\ d^{\,m}_{i,\alpha}\ \mid \alpha = 0$ *или* $\alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$,
при котором выполняется $d_j \in \left\langle f, d^1_{1,1}, ..., d^1_{s,2^{s-1}}, ..., d^1_{k,2^{k-1}} \right\rangle$.

§2.7. Ключевая стандартная форма мультиопераций

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ *и* $f \neq (2^k-1, ..., 2^k-1)$. *Тогда существует такое стандартное представление*

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, ..., x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{\ d_{i,\alpha}^{\,m} \mid \alpha = 0$ *или* $\alpha = 2^k - 2^s - 1,\ s \in \{0, ..., k-1\}\}$,
при котором выполняется $d_j \in \left\langle f, d^1_{1,1}, ..., d^1_{s,2^{s-1}}, ..., d^1_{k,2^{k-1}} \right\rangle$.

- Пусть $f(x, y, z) = (13212003)$.

$$f = d^2_{3,2}(y,z) \cap d^2_{3,2}(x,z) \cap d^2_{3,2}(x,y) \cap d^3_{1,1}(x,y,z) \cap d^3_{4,1}(x,y,z) \cap$$
$$\cap d^3_{6,0}(x,y,z) \cap d^3_{7,0}(x,y,z)$$

- Пусть $f(x, y) = (071646351)$.

$$f = d^2_{1,0}(x,y) \cap d^2_{3,3}(x,y) \cap d^2_{3,5}(x,y) \cap d^1_{2,6}(x) \cap d^2_{5,5}(x,y) \cap$$
$$\cap d^2_{7,3}(x,y) \cap d^2_{8,5}(x,y) \cap d^2_{9,3}(x,y) \cap d^2_{9,5}(x,y)$$

§3. Алгебры операций и алгебры мультиопераций

§3.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

§3.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.

§3.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, состоящую из $\mathcal{O}_k^{(n)}(\mathcal{M}_k^{(n)})$ будем называть полной алгеброй и обозначать $\mathcal{AO}_k^n$ ($\mathcal{AM}_k^n$).

§3.1. Алгебры размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geq 2$, ранее предположили $k \geq 2$.

- Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно оператора суперпозиции.
- Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно операторов суперпозиции и разрешимости (по первому аргументу).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, состоящую из $\mathcal{O}_k^{(n)}(\mathcal{M}_k^{(n)})$ будем называть полной алгеброй и обозначать $\mathcal{AO}_k^n$ ($\mathcal{AM}_k^n$).
- Алгебру операций (мультиопераций) размерности n, ранга k, порожденную всеми n-местными проекциями (и n-местной нулевой мультиоперацией) ранга k будем называть тривиальной алгеброй и обозначать $\mathcal{EO}_k^n$ ($\mathcal{EM}_k^n$).

§4. Алгебры фиксированной размерности

§4.1. Класс алгебр $\mathcal{T}_n$.

Сигнатура $\Omega_n = \langle\, s, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \,\rangle$.
Класс $\mathcal{T}_n$ простых алгебр Менгера ранга n определяется аксиомами (1961, K.Menger):

1. $s(s(x, y_1, ..., y_n), z_1, ..., z_n) = s(x, s(y_1, z_1, ..., z_n), ..., s(y_n, z_1, ..., z_n))$;
2. $s(\varepsilon_i, x_1, ..., x_n) = x_i$ для $i \in \{1, ..., n\}$;
3. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$.

§4.1. Класс алгебр $\mathcal{T}_n$.

Сигнатура $\Omega_n = \langle\, s, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \,\rangle$.
Класс $\mathcal{T}_n$ простых алгебр Менгера ранга n определяется аксиомами (1961, K.Menger):

1. $s(s(x, y_1, ..., y_n), z_1, ..., z_n) = s(x, s(y_1, z_1, ..., z_n), ..., s(y_n, z_1, ..., z_n))$;
2. $s(\varepsilon_i, x_1, ..., x_n) = x_i$ для $i \in \{1, ..., n\}$;
3. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$.

Теорема. *1) Любая алгебра операций размерности n принадлежит классу простых алгебр Менгера ранга n.*
2) Любая конечная простая алгебра Менгера ранга n изоморфна некоторой алгебре операций размерности n
(при интерпретации: $s \to *,\ \varepsilon_1 \to e_1, , , , \varepsilon_n \to e_n$).

Сигнатура $\Sigma_n = \langle\, s, \pi, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \perp \,\rangle$, $n \geq 2$.

В Σ_n определим следующие символы:

- $\top = s(\pi(\varepsilon_2), \varepsilon_1, ..., \varepsilon_1)$;
- $\pi_i(x) = s(\pi(s(x, \varepsilon_i, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_n)), \varepsilon_i, \varepsilon_2, ...$
  $..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_n)$ для $i \in \{1, ..., n\}$;
- $x \wedge y = s(s(\varepsilon_1, \pi(\varepsilon_1), ..., \pi(\varepsilon_n)), x, y, ..., y)$;
- $x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$.

§4.3. Аксиомы класса алгебр $\mathcal{K}_n$.

1. $x \wedge x = x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$;
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
4. $x \wedge \top = x$;
5. $s(\varepsilon_i, x_1, ..., x_n) = s(\top, x_1, ..., x_1) \wedge ... \wedge s(\top, x_{i-1}, ..., x_{i-1}) \wedge x_i \wedge$
   $\wedge s(\top, x_{i+1}, ..., x_{i+1}) \wedge ... \wedge s(\top, x_n, ..., x_n)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$;
6. $s(x_0, x_1, ..., x_n) = \bot$ при $x_i = \bot$ хоть для одного $i \in \{0, ..., n\}$;
7. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n) = \pi_i(\pi_j(\pi_i(x)))$
   для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$ и $i \neq j$;
8. $\pi(\bot) = \bot$;
9. $\pi_i(\top) = \top$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$;
10. $\pi_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$;
11. $\pi_j(\varepsilon_i) = s(\top, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i), ..., (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i))$ для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$ и $i \neq j$;
12. $\pi_i(\pi_i(x)) = x$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$;
13. $\pi_i(x \wedge y) = \pi_i(x) \wedge \pi_i(y)$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$;

14. $s(s(x, y_1, ..., y_n), \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}) = s(x, s(y_1, \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}), ...$
$..., s(y_n, \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}))$ для всех $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$;

15. $s(s(x, y_1, ..., y_n), z_1, ..., z_n) \leq s(x, s(y_1, z_1, ..., z_n), ...$
$..., s(y_n, z_1, ..., z_n))$;

16. $\pi_j\Big(s(x_0, x_1, ..., x_n)\Big) \leq \bigwedge_{i=1}^{n} s\Big(\pi_j(x_i), \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{j-1}, s\big(\pi_i(x_0),$
$\top, ..., \top, \underbrace{\varepsilon_j}_{i}, \top, ..., \top\big), \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n\Big)$ для всех $j \in \{1, ..., n\}$;

17.$s(x_0, ..., x_{i-1}, x_i \wedge y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leq s(x_0, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\wedge$
$\wedge s(x_0, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ всех для $i \in \{1, ..., n\}$.

18. $x \wedge s(y, z_1, ..., z_n) \leq s\Big((s(x, s(\pi_1(z_1), \varepsilon_1, \top, ..., \top), ...$
$..., s(\pi_n(z_n), \top, ..., \top, \varepsilon_n)) \wedge y), (s(\pi_1(y), x, \top, ..., \top) \wedge z_1), ...$
$..., (s(\pi_n(y), \top, ..., \top, x) \wedge z_n)\Big)$.

Предложение. *В любой алгебре класса $\mathcal{K}_n$ выполняются утверждения:*

1. $\perp \leq x$;

2. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$;

3. $\pi_i(\perp) = \perp$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;

4. $\pi_j(\varepsilon_i) = \pi_i(\varepsilon_j)$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;

5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x))) = \pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;

6. $x \leq y \Rightarrow \pi_i(x) \leq \pi_i(y)$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;

7. $s(x_0 \wedge y_0, x_1, ..., x_n) \leq s(x_0, x_1, ..., x_n) \wedge s(y_0, x_1, ..., x_n)$;

8. $x_i \leq y_i$ *для всех* $i \in \{0, ..., n\} \Rightarrow s(x_0, ..., x_n) \leq s(y_0, ..., y_n)$.

§4.4. Класс алгебр $\mathcal{K}_n$.

Предложение. *В любой алгебре класса $\mathcal{K}_n$ выполняются утверждения:*
1. $\perp \leq x$;
2. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$;
3. $\pi_i(\perp) = \perp$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
4. $\pi_j(\varepsilon_i) = \pi_i(\varepsilon_j)$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;
5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x))) = \pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;
6. $x \leq y \Rightarrow \pi_i(x) \leq \pi_i(y)$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
7. $s(x_0 \wedge y_0, x_1, ..., x_n) \leq s(x_0, x_1, ..., x_n) \wedge s(y_0, x_1, ..., x_n)$;
8. $x_i \leq y_i$ *для всех* $i \in \{0, ..., n\} \Rightarrow s(x_0, ..., x_n) \leq s(y_0, ..., y_n)$.

Теорема. *Любая алгебра мультиопераций размерности n принадлежат классу $\mathcal{K}_n$ (при интерпретации:*
$s \to *,\ \pi \to \mu,\ \varepsilon_1 \to e_1, , , , \varepsilon_n \to e_n, \perp \to o$).

Предложение. *В любой алгебре класса $\mathcal{K}_n$ выполняются утверждения:*

1. $\bot \le x$;
2. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$;
3. $\pi_i(\bot) = \bot$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
4. $\pi_j(\varepsilon_i) = \pi_i(\varepsilon_j)$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;
5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x))) = \pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ *для всех* $j, i \in \{1, ..., n\}$;
6. $x \le y \Rightarrow \pi_i(x) \le \pi_i(y)$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
7. $s(x_0 \wedge y_0, x_1, ..., x_n) \le s(x_0, x_1, ..., x_n) \wedge s(y_0, x_1, ..., x_n)$;
8. $x_i \le y_i$ *для всех* $i \in \{0, ..., n\} \Rightarrow s(x_0, ..., x_n) \le s(y_0, ..., y_n)$.

Теорема. *Любая алгебра мультиопераций размерности n принадлежат классу $\mathcal{K}_n$ (при интерпретации:*
$s \to *,\ \pi \to \mu,\ \varepsilon_1 \to e_1, , , , \varepsilon_n \to e_n, \bot \to o$).

Вопрос 2. Аксиоматизация класса алгебр мультиопераций размерности n.

§5. Алгебры фиксированного ранга

§5.1. Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

§5.1. Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

Если $\pi(\rho(c)) = c$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{C}$.
Если $\rho(\pi(d)) = d$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{D}$.
Если выполняются оба условия, то совершенная связь Галуа.

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

$$(f * (g * e_1^{nm}, \dots, e_m^{nm}), \dots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \dots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \dots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})),$$

то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

  $$(f * (g * e_1^{nm}, \dots, e_m^{nm}), \dots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

  $$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \dots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \dots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})),$$

  то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.
- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f \text{ стабильна отн. } g\} \text{ — } n\text{-стабилизатор } g;$$

  $$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$

- Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Если выполняется

  $(f * (g * e_1^{nm}, \dots, e_m^{nm}), \dots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$

  $\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \dots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \dots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm})),$

  то f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.

- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f \text{ стабильна отн. } g\} \text{ — } n\text{-стабилизатор } g;$$

  $$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$

- Пусть $f \in \mathcal{O}_k^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$

  $$N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_k^{(m)}, g \text{ нормальна отн. } f\} \text{—} m\text{-нормализатор } f$$

  $$N^m(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} N^m(f) \text{ — } m\text{-нормализатор } \mathcal{F}.$$

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

Теорема.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^n$ и $\mathcal{W}_k^m$.

§5.3. Связь Галуа для решеток алгебр мультиопераций и алгебр операций

Обозначения:

- $[\mathcal{F}]$ — алгебра операций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{V}_k^n$ — решетка алгебр операций размерности n, ранга k.
- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$;
- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр мультиопераций размерности n, ранга k;

Теорема.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^n$ и $\mathcal{W}_k^m$.

Вопрос 3. При каких n и m эти соответствия определяют совершенную связь Галуа для $k \geq 3$.

§5.4. Совершенная связь Галуа для решеток алгебр ранга 2

Теорема. *Для решеток* $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m$ *выполняется:*
1) связь Галуа совершенна в $\mathcal{V}_2^n \iff m \geq \max\{3, n-1\}$;
2) связь Галуа совершенна в $\mathcal{W}_2^m \iff n \geq \max\{3, m+1\}$;
3) связь Галуа совершенна для $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m \iff n-1 = m \geq 3$.

§5.4. Совершенная связь Галуа для решеток алгебр ранга 2

Теорема. *Для решеток* $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m$ *выполняется:*
1) связь Галуа совершенна в $\mathcal{V}_2^n \iff m \geq \max\{3, n-1\}$;
2) связь Галуа совершенна в $\mathcal{W}_2^m \iff n \geq \max\{3, m+1\}$;
3) связь Галуа совершенна для $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^m \iff n - 1 = m \geq 3$.

Следствие.
1) для любого $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_2^{(n)}$ *при* $m \geq n - 1 \geq 3$;

$$[\mathcal{F}] = S^n(N^m(\mathcal{F}));$$

2) для любого $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_2^{(m)}$ *при* $n \geq m + 1 \geq 4$

$$\langle \mathcal{R} \rangle = N^m(S^n(\mathcal{R}));$$

3) решетки алгебр $\mathcal{V}_2^n$ *и* $\mathcal{W}_2^{n-1}$ *при* $n \geq 4$ *антиизоморфны.*

§5.5. Алгебры ранга 2

Предложение. *Для алгебр следующие условия эквивалентны:*
1) алгебра $\mathcal{Q}$ не представима в виде объединения собственных подалгебр;
2) алгебра $\mathcal{Q}$ имеет единственную максимальную подалгебру;
3) любой базис (минимальная система порождающих) алгебры $\mathcal{Q}$ является одноэлементным.

Предложение. *Для алгебр следующие условия эквивалентны:*
1) алгебра $\mathcal{Q}$ не представима в виде объединения собственных подалгебр;
2) алгебра $\mathcal{Q}$ имеет единственную максимальную подалгебру;
3) любой базис (минимальная система порождающих) алгебры $\mathcal{Q}$ является одноэлементным.

Число алгебр размерности n	2	3	4	5	...	$n \geq 3$
алгебр операций	26	46	54	62	...	$8n + 22$
алгебр мультиопераций	44	54	62	70	...	$8n + 30$
$\cup$-неразложимых алгебр операций	10	12	14	16	...	$2n + 6$
$\cup$-неразложимых алгебр мультиопераций	14	15	17	19	...	$2n + 9$

3-стабилизаторы для $\mathcal{M}_2^{(2)}$ и 2-нормализаторы для $\mathcal{O}_2^{(3)}$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	44
		(12121212)	(21212121)	(11111111)	(22222222)	(12221222)	(11121112)	(12212112)	(11121222)	(11111222)	(11122222)	(11112122)	(11212222)		
1	(1212)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
2	(2121)	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	...	0
3	(1221)	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	...	1
4	(2112)	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	...	0
5	(1332)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
6	(1313)	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	...	0
7	(3332)	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	...	0
8	(1333)	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	0
9	(1111)	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	...	0
10	(2222)	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	0
11	(3131)	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	...	0
12	(2323)	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	...	0
13	(3331)	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	...	0
14	(2333)	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	...	0
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
42		1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0		

3-стабилизаторы для $\mathcal{M}_2^{(3)}$ и 3-нормализаторы для $\mathcal{O}_2^{(4)}$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		54
		(1212121212121212)	(2121212121212121)	(1221211212212112)	(1112122211121222)	(1111111111111111)	(2222222222222222)	(1112111211121112)	(1222122212221222)	(1111212211112122)	(1121222211212222)	(1111122211111222)	(1112222211122222)	(1111111211121222)	(1112122212222222)		
1	(12121212)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1
2	(21212121)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
3	(12212112)	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0
4	(13321332)	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0
5	(13131313)	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1		1
6	(33323332)	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0		0
7	(13331333)	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0		1
8	(11111111)	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1		0
9	(22222222)	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1		0
10	(31313131)	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0		0
11	(23232323)	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		0
12	(33313331)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0		1
13	(23332333)	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		0
14	(33333331)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0		0
15	(23333333)	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0		0
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
54		1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 минимальных алгебр (2020, С.И.Тодиков).

§5.6. Алгебры ранга 3

Заметим, что $|\mathcal{O}_3^{(2)}| = 19\,683$, $|\mathcal{M}_3^{(2)}| = 134\,217\,728$.

Минимальные и максимальные подалгебры в полной алгебре $\mathcal{AO}_k^n$, соответственно $\mathcal{AM}_k^n$, будем называть максимальными и минимальными алгебрами в решетке $\mathcal{V}_k^n$, соответственно $\mathcal{W}_k^n$.

- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 максимальных алгебр (1962, В.М.Гниденко);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 64 минимальных алгебр (2020, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{V}_3^n$ при $n \geq 3$ содержит 84 минимальных алгебр (1983, *B.Csákány*);
- $\mathcal{V}_3^2$ содержит 561 надминимальную алгебру (2021, Д.А.Еременко);
- $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$ содержит 18 минимальных алгебр (2020, С.И.Тодиков).

Вопрос 4. Сколько максимальных алгебр в $\mathcal{W}_3^n$ при $n \geq 2$?

§5.7. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

§5.7. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

§5.7. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:

$$((f * g_1, \dots, g_n) * h_1, \dots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \dots, h_m), \dots, (g_n * h_1, \dots, h_m))$$

Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:

$$((f * g_1, \dots, g_n) * h_1, \dots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \dots, h_m), \dots, (g_n * h_1, \dots, h_m))$$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов: $(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

- Для ранга $k \geq 3$ алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций не совпадают (2021, С.И.Тодиков).

§5.7. Логическое замыкание в мультиоперациях

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) = (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$
Для мультиопераций выполняется тождественное включение суперассоциативности:
$((f * g_1, \ldots, g_n) * h_1, \ldots, h_m) \subseteq (f * (g_1 * h_1, \ldots, h_m), \ldots, (g_n * h_1, \ldots, h_m))$

Алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$(f * f_1, ..., f_n)$ и $(\mu_i f * f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

- Для ранга $k \geq 3$ алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций не совпадают (2021, С.И.Тодиков).

Вопрос 5. Совпадают ли алгебраическое и логическое замыкания в множестве мультиопераций ранга 2? Гипотеза: совпадают.