# $S_I^*$-ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

Тагласов Эдуард Станиславович

Иркутский государственный университет

23.11.22

## Мультифункции

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество всех мультифункций ранга 2 определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \left\{f | f : E_2^n \to 2^{E_2}\right\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}$$

## Мультифункции

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество всех мультифункций ранга 2 определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \{f | f : E_2^n \to 2^{E_2}\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}$$

## $S_I$-суперпозиция

Суперпозиция $f(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, ..., x_m)$ следующим образом.
Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению:

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, ..., \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, ..., \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

## $S_I^*$-суперпозиция

Суперпозиция $f(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, ..., x_m)$ следующим образом.
Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению:

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если существует } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ такой, что} \\ & f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \varnothing \text{ или } f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \varnothing \\ & \text{для некоторого набора } (\beta_1, \ldots, \beta_n) \text{ такого,} \\ & \text{что } \beta_j \in f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ j \in \{1, \ldots, n\}; \\ \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | 0 |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | 0 |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | 0 |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | — |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | |

# $S_I^*$-суперпозиция

$$g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | $*$ |
| 0 | 1 | $*$ | 1 | — | 0 |
| 1 | 0 | 0 | — | 0 | — |
| 1 | 1 | — | $*$ | 1 | $*$ |

# $S_I^*$-замыкание

Замыкание множества $Q \subseteq M_2$ (обозначим $[Q]$) — множество всех мультифункций из $M_2$, которые можно получить из множества $Q$ с помощью операций:

**$S_I^*$-замыкание**

- введение фиктивных переменных;
- $S_I^*$-суперпозиция.

**Задача**

Сформулировать и доказать критерий $S_I^*$-полноты множества мультифункций ранга 2;

# $S_I^*$-предполные множества мультифункций

$K_1 = \mathsf{Pol}\, R_1,\ R_1 = (0\ *);$

$K_2 = \mathsf{Pol}\, R_2,\ R_2 = (1\ *);$

$K_3 = O_2^*;$

$K_4 = H_2 \cup \{*\};$

$$K_5 = \mathsf{Pol} R_5;\ R_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * & - \end{pmatrix};$$

$$K_6 = \mathsf{Pol} R_6;\ R_6 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

$$K_7 = \mathrm{Pol} R_7;\ R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & * & * & * & * & \delta \end{pmatrix},$$

где $(\alpha\beta\gamma\delta)^T$ — всевозможные недвоичные столбцы, которые одновременно удовлетворяют двум условиям:

1) если $- \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, то $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{*, 0, -\}$;

2) если набор $(\alpha\beta\gamma\delta)$ содержит $*$, то его можно доопределить до набора $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$, который не содержит $*$, так, что $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')^T \in R_7$.

### Лемма 1

Пусть функции $f, f_1, \ldots, f_s$ сохраняют предикат $R$. Тогда функция $g(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1, \ldots, f_s)$ на двоичных наборах из предиката возваращает набор из предиката.

## Лемма 2

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ принимает все 4 значения $\{*, 0, 1, -\}$, а множество $R$ полно в $O_2$. Тогда множество $\{f \cup R\}$ является полным в $M_2$.