ES_U-замкнутые классы мультифункций ранга 2

Мультифункции ранга 2

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, 2^{E_2} — множество всех подмножеств E_2
M_2 — множество всех мультифункций ранга 2:

$$O^*_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \to E_2 \cup \{\varnothing\}\}, \; O^*_2 = \bigcup_n O^*_{2,n}$$

$$H_{2,n} = \left\{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\right\}, \; H_2 = \bigcup_n H_{2,n}$$

$$M_{2,n} = \left\{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2}\right\}, \; M_2 = \bigcup_n M_{2,n}$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — мультифункции.

Суперпозиция мультифункций

$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$ определяет $g(x_1, \ldots, x_m)$:
если набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) := \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Пример суперпозиции мультифункций ранга 2

$2^{E_2} = \{\{\varnothing\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \to \{*, 0, 1, -\}$

Пусть $f(x_1, x_2) = (001-)$, $f_1(x) = (10)$, $f_2(x) = (*-)$.
Рассмотрим $g(x_1, x_2) = f(f_1(x_1), f_2(x_2))$.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$g(x_1, x_2)$
0	0	0	1	$*$	$*$
0	1	0	1	$-$	$-$
1	0	1	0	$*$	$*$
1	1	$-$	0	$-$	0

Замыкание с разветвлением по предикату равенства

Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)$ — мультифункции. Мультифункция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получается из мультифункций f_1, f_2 с помощью операции разветвления по предикату равенства (E-оператор), если для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ES_U-замыкание

Определим ES_U-замыкание множества $Q \subset R$ как множество всех функций из R, которые можно получить из множества Q:

- введением фиктивных переменных;
- отождествлением переменных;
- ES_U-суперпозицией;
- разветвлением по предикату равенства.

Известные свойства оператора E-замыкания

- Марченков С.С., 2003. Получены все 8 E-замкнутых классов для O_2.
- Марченков С.С., 2008. Получены все 5 E-предполных классов для O_2^*, субмаксимальные классы.
- Матвеев С.А., 2013. Получены все E-замкнутые классы для O_2^*, всего 100 классов.
- Марченков С.С., 2013. Получены все 15 E-предполных классов для O_3^*.
- Пантелеев В.И., Рябец Л.В., 2017, 2018. Получены два семейства предполных классов для H_k.
- Пантелеев В.И., Рябец Л.В., 2019. Получены все 11 E-предполных классов для M_2.
- Пантелеев В.И., Рябец Л.В., 2020. Получены все E-замкнутые классы для H_2, всего 78 классов.
- Зинченко А.С., Ильин Б.П., Пантелеев В.И., Рябец Л.В., 2021. Описаны 2 множества E-замкнутые классы для M_2.

Построение ES_U-замкнутых классов мультифункций

Теорема 1 (Пантелеев, Рябец, 2020 (идея Марченков, 2008))

Любой ES_U-замкнутый класс мультифункций из M_2 E-порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от двух переменных.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n),\\
f_2(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, x_1, x_4, \ldots, x_n),\\
f_3(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

$$
f'(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_2(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n), & \text{если } x_1 = x_3,\\ f_3(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}
$$

$$
f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n), & \text{если } x_1 = x_2,\\ f'(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}
$$

Двухместные операторы

Обобщенный оператор разветвления по предикату

Пусть мультифункции g_1, g_2, h_1, h_2 зависят не более чем от двух переменных

Обобщенный оператор разветвления по предикату равенства:

- если $h_1(x_1, x_2)$ или $h_2(x_1, x_2) = *$, то
$$f(x_1, x_2) = *.$$
- если $h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2) \in E_2$, то
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2), & \text{если } h_1(x_1, x_2) = h_2(x_1, x_2), \\ g_2(x_1, x_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$
- если $h_1(x_1, x_2)$ или $h_2(x_1, x_2) = -$, то
$$f(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) \cup g_2(x_1, x_2);$$

В качестве h_1, h_2 могут выступать селекторные функции

Двухместные операторы

Ограниченная суперпозиция

Операция ограниченной суперпозиции:

$$f(x_1, x_2) = g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В качестве мультифункций h_1, h_2 могут выступать селекторные функции

Замыкание множества Q, полученное относительно операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, будем обозначать $[Q]_{Ex}$.

Построение ES_U-замкнутых классов мультифункций

Теорема 2 (Пантелеев, Рябец, 2020)

Для любого множества Q выполняется:

$$[Q]_{Ex} \subseteq [Q]_{ES_U}.$$

ES_U-замкнутые классы M_2

$K_1 = \{f \mid f(0,\dots,0) \in \{0,-\}\}$
$K_2 = \{f \mid f(1,\dots,1) \in \{1,-\}\}$
$K_3 = \{f \mid f(0,\dots,0) \in \{0,*\}\}$
$K_4 = \{f \mid f(1,\dots,1) \in \{1,*\}\}$
$K_5 = O_2^* \ K_6 = H_2$
$K_7 = \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*,1,-\}\}$
$K_8 = \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*,0,-\}\}$
$K_9 = PolR_9,\ R_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}$
$K_{10} = PolR_{10},\ R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$
$K_{11} = \{f \mid * \in f(0,\dots,0) \cup f(1,\dots,1)$ либо
$f(0,\dots,0) = 0$ и $f(1,\dots,1) = 1\}$

Теорема 3 (Пантелеев, Рябец, 2019)

Множества $K_1 - K_{11}$ являются ES_U-замкнутыми и предполными в M_2.

Разделяющие множества K_7

$D_1 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{1, -\}\}$; $D_2 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{*, -\}\}$;
$D_3 = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(*,*), (*,1), (*,-), (1,*), (-,*)\}\}$;
$D_4 = \{f \mid f(\tilde{0}) \in \{-\}\}$;
$D_5 = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,-), (-,*), (-,-)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$;
$D_6 = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,1), (*,*), (1,*), (-,*)\}\}$;
$D_7 = \{f \mid f(\tilde{1}) \in \{-\}\}$;
$D_8 = \{f \mid f(\tilde{0}) \in \{*\}\}$;
$D_9 = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (1,*), (*,1), (-,*), (*,-)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$;
$D_{10} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (1,*), (*,1), (1,1)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$;
$D_{11} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(1,1), (1,-), (-,1), (-,-)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$;
$D_{12} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(1,-), (-,1), (-,-)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$;
$D_{13} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (-,-)\}, \tilde{\alpha} \in E_2^n\}$.

Утверждение 1

Множества $D_1 - D_{13}$ являются ES_U-замкнутыми классами

Пусть $f, f_1, \ldots, f_m \in D_5$ и
$g(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \notin D_5$
$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n :$

$$\big(g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), g(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)\big) \in \{(1, -), (-, 1), (*, 1), (1, *), (1, 1)\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\big(g(\tilde{\alpha}), g(\overline{\tilde{\alpha}})\big) = (1, *)$. Если $g(\tilde{\alpha}) = 1$, $\forall i$
$f_i(\tilde{\alpha}) \neq *$, и все доопределения f дают 1. $\Rightarrow$ $f_i(\tilde{\alpha}) = -$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$
Тогда $f \notin D_5$. Получили противоречие.

Утверждение 1

Множества $D_1 - D_{13}$ являются ES_U-замкнутыми классами

$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$

1. Если $\alpha_i = \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_1(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_1(\overline{\tilde{\alpha}})$.
2. Если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i \neq \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ и $g(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_2(\overline{\tilde{\alpha}})$.

Таким образом, значения мультифункции $g(\tilde{x})$ на противоположных наборах совпадают с соответствующими значениями мультифункции $f_1(\tilde{x})$ или $f_2(\tilde{x}) \Rightarrow g(\tilde{x}) \in D_5$.

Следовательно, множество D_5 является ES_U-замкнутым классом мультифункций.

Теорема 4

Количество ES_U-замкнутых классов мультифункций, являющихся подмножествами K_7, не менее 76.

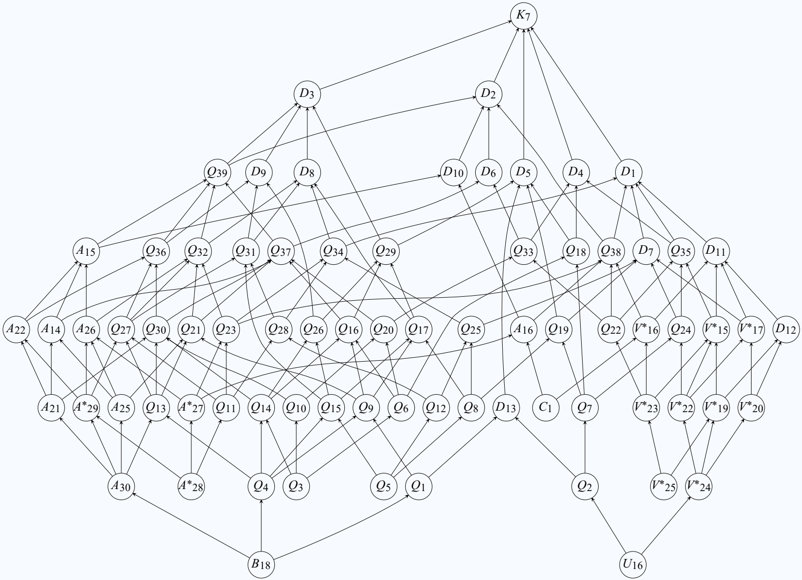
Для каждого Ex-замкнутого класса Q построим вектор $v_Q = (\gamma_Q^1, \ldots, \gamma_Q^{13})$ принадлежности множествам $D_1 - D_{13}$:

$$\gamma_Q^i = \begin{cases} 1, & \text{если класс принадлежит множеству } D_i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

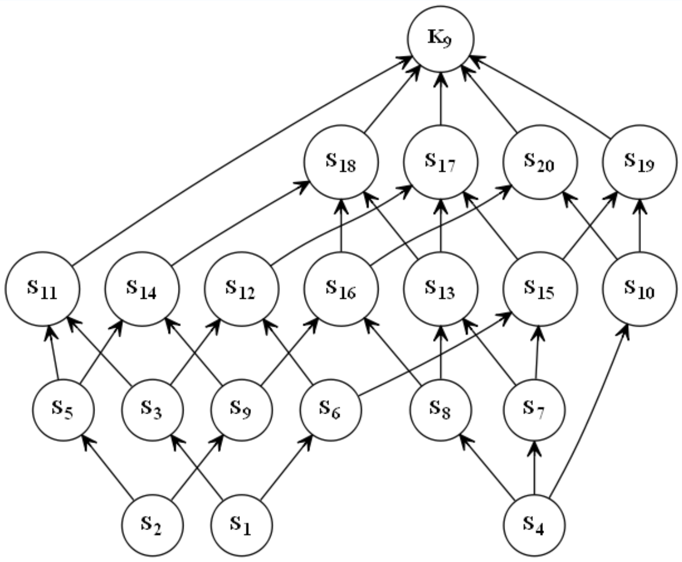
I	II	III	IV
1	B_{18}	$(****)$	0110110111001
2	C_1	(1111)	1100000001100
3	U_{16}	$(----)$	1001101000111
4	Q_1	$(*--*)$	0110110100001
5	Q_2	$(-**-)$	1001101000001
...	...	...	...
38	Q_{17}	$(****), (*---)$	0010100100000

I	II	III	IV
39	Q_{18}	$(-***), (-**-)$	0001100000000
40	V_{15}^*	$(-111), (-11-)$	1001000000100
41	Q_{19}	$(***-), (-**-)$	1000101000000
42	Q_{20}	$(-11*)$	0111010000000
43	Q_{21}	$(*-1*)$	0110010100000
...	...	...	...
76	K_7	$(****), (1**-)$	0000000000000

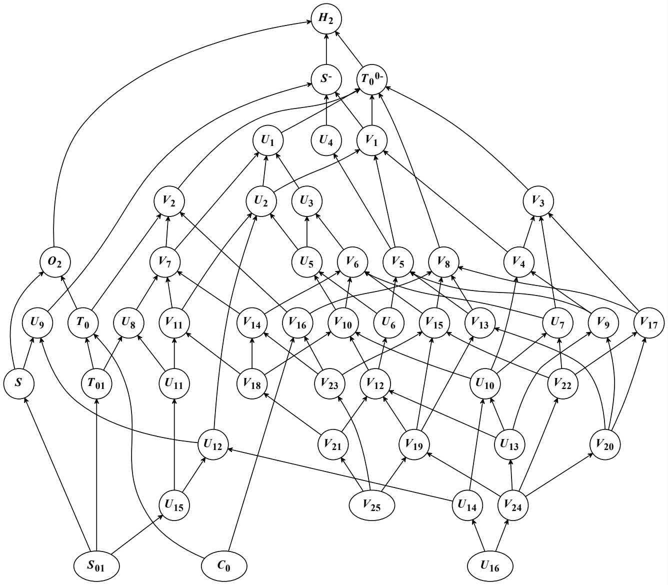
Вложимость классов множества K_7 (76 классов) (2021)



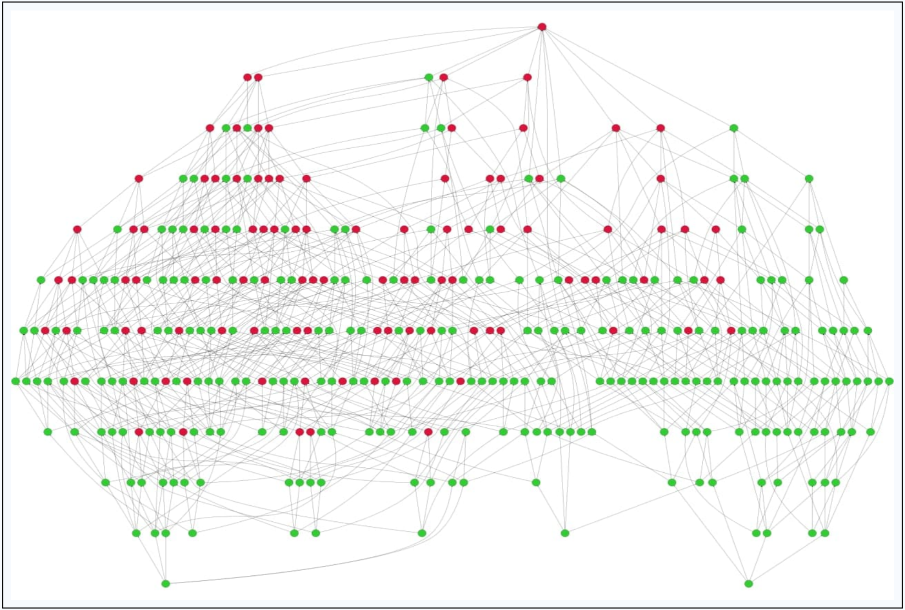
Вложимость классов множества K_9 (21 класс) (2019)



Вложимость классов множества $K_6(H_2)$ (78 классов) (2020)



Известные классы множества M_2 (359 классов)



Разделяющие множества для M_2 (всего 24)

Дополнительно к $K_1 - K_{11}$

$K_{12} = \{f \mid f(\tilde{0}) = *$ либо $f(\tilde{1}) = *\}$

$K_{13} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,1),(0,1)\}$ либо $f(\tilde{1}) = *\}$

$K_{14} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(0,-),(0,1)\}$ либо $f(\tilde{0}) = *\}$

$K_{17} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,1)\}$ либо $f(\tilde{1}) = *\}$

$K_{18} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(0,-)\}$ либо $f(\tilde{0}) = *\}$

$K_{25} = \{f \mid f(\tilde{0}) = -\}$

$K_{27} = \{f \mid f(\tilde{1}) = -\}$

$K_{30} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,-),(-,1),(0,-),(0,1)\}\}$

$K_{34} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*),(0,*),(*,0),(1,*),(*,1),(*,-),(-,*)\}$
и $\big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \notin \{(1,0),(0,1)\}\}$

$K_{47} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(-,-),(0,-),(-,0),(0,1),(1,0),(1,-),(-,1)\}\}$

$K_{48} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})\big) \in$
$\{(*,*),(0,*),(*,0),(1,*),(*,1),(*,-),(-,*)\}\}$

$K_{54} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,-),(-,1),(0,-)\}\}$

$K_{138} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(-,-),(0,-),(-,0),(1,-),(-,1)\}\}$