**El Momento de Inercia.**

El momento de inercia de un cuerpo rigido tiene una implicancia conceptual, fundamental para entender el movimientode rotacion de un cuerpo. Para poder comprender mejor el significado fisico del momento de inercia y de que depende, debemos realizar una serie de pasos matematicos, no del todo agradables, pero que al finalizarlos nos permitiran comprender mejor a esta magnitud.

Partamos de concepos basicos:
Sabemos que el vector cantidad de movimiento angular, **L** , se define como: $L = r \wedge P$

Ahora bien, si tenemos un cuerpo rigido, podemos imaginarnos que esta formado por muchas particulas ($n \to \infty$), por lo que el L de ese cuerpo sera:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i \wedge P_i\right)$$

Pero ademas sabemos que: $P_i = m_i \cdot v_i$

Y como por definicion: $v_i = \Omega \wedge r_i$ (Notar que **W** es la misma para todos los puntos)

Si reescribimos L ,haciendo los reemplazos correspondientes...

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i \wedge P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i \wedge m_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i \wedge m_i \cdot \Omega \wedge r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(r_i \wedge \Omega \wedge r_i\right)$$

Pero tanto $r_i$ como **W** son magnitudes vectoriales, asi que las escribimos como...

$$r_i = \left(x_i, y_i, z_i\right) \qquad \Omega = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)$$

Por lo que reescribiendo resulta...

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left[\left(x_i, y_i, z_i\right) \wedge \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) \wedge \left(x_i, y_i, z_i\right)\right]$$

Si se desarrolla el doble produto vectorial se llega a que...

$$L = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i^2 + z_i^2\right) \cdot \omega_x - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) \cdot \omega_y - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) \cdot \omega_z \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) \cdot \omega_x + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + z_i^2\right) \cdot \omega_y - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) \cdot \omega_z \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) \cdot \omega_x - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) \cdot \omega_y + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) \cdot \omega_z \end{bmatrix}$$

Donde cada renglon es cada una de las componentes Lx,Ly,Lz del vector L.

Si lo escribimos en forma matricial...

$$L = \begin{pmatrix} L_x & L_y & L_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) & +\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) & +\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Y si renombramos a la matriz como I, la expresion se reduce a una ecuacion vectorial ... $L = I \cdot \Omega$

$$I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot y_i\right) & +\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i \cdot z_i\right) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(y_i \cdot z_i\right) & +\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{bmatrix}$$

En esta instancia es donde podemos empezar a pensar un poco el siginificado fisico de esta matriz tan particular.
Se la llama Momento de Inercia. Matematicamente es una matriz (un tensor) , con terminos positivos en la diagonal principal.

Ahora bien, que es fisicamente esta magnitud a la que llamamos momento de Inercia..?

Cuando en dinamica vimos que signifaba esa propiedad de los cuerpos llamada masa, una manera de pensarla era la “resistencia que tiene un cuerpo a acelerarse”. Hagamosnos la siguiente pregunta: la masa representa la resistencia al movimiento, pero en que direccion..? Bueno, la masa es una magnitud escalar y es de esperar que un cuerpo que tiene una masa de 2kg oponga esos 2kg al querer acelerarlo en cualquier direccion. Esta es una cuestion que no nos planteabamos, porque para la traslacion de un cuerpo, el cuerpo presenta la misma resistencia al movimiento sea cual fuere la direccion de ese movimiento.

Pensemos ahora en un cuerpo cualquiera que rota alrededor de un eje cualquiera. Sera igual la resistencia que oponga ese cuerpo a rotar, cualquiera sea el eje de rotacion?. Intuitivamente nos damos cuenta que no. Pero, de que depende esa resistencia a la rotacion?

Para visualizarlo mas, pensemos en esta cuestion. Si tuviesemos que rotar una birome o un palo de amasar alrededor de un eje que pase por sus centros de masa respectivos, que nos costaria mas...?
Evidentemente que rotar la birome es mas facil que al palo de amasar...pero eso es claro por la diferencia de masa que hay entre ambos. Esto es correcto, por lo que nos damos cuenta que **la resistencia a rotar de un cuerpo alrededor de un eje depende de su masa.** Si miramos el tensor momento de inercia, vemos que aparece la masa de cada elementito que compone al cuerpo ($m_i$). **Pero tambien podemos identificar que esas masas $m_i$ estan multiplicadas por la distancia al eje de rotacion($x_i$,$y_i$,$z_i$).**

$$I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i \cdot y_i) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i \cdot z_i) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i \cdot y_i) & \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (y_i \cdot z_i) \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i \cdot z_i) & -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (y_i \cdot z_i) & \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

**Conclusion : la resistencia de un cuerpo a rotar, alrededor de un eje dado, representada por el momento de inercia asociado a ese eje, depende de la masa del cuerpo y de la distribucion de la masa. Cuanto mas masa haya lejos del eje de rotacion, mayor será el momento de inercia.**

Sigamos analizando el tema. Un cuerpo puede rotar alrededor de cualquier eje. Pensemos en particular en los ejes que pasan por el centro de masa. Nos damos cuenta que hay infinitos ejes que pasan por el centro de masa. Podriamos suponer que hay un eje de rotacion para el cual la resistencia a rotar es minima, asociado a un momento de inercia minimo y por supuesto habra otro para el cual sea maximo.

**Si calculasemos los autovalores y los autovectores del tensor momento de inercia (es decir lo diagonalizamos), encontrariamos que los autovectores son las direcciones de los ejes principales de inercia y los autovalores asociados son respectivamente el valor del momento de inercia para esos ejes.**

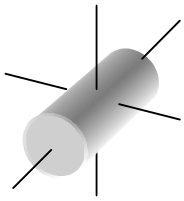
El tensor al diagonalizarse lo podemos escribir con los unicos elementos no nulos, en su diagonal principal. Se puede demostrar que $I_1$, $I_2$ y $I_3$ son valores siempre positivos. El momento de inercia maximo sera el mayor de $I_1$, $I_2$, $I_3$ y por supuesto el minimo, sera el menor.

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia de esto, la ecuacion verctorial se puede escribir desacopladamente en tres ecuaciones escalares asociads a los ejes principales, donde el momento de inercia es un escalar (el valor del autovalor), y la velocidad angular es alrededor de ese eje principal.

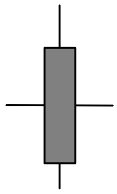
$$L = I \cdot \Omega \quad \Rightarrow \quad L_1 = I_1 \cdot \Omega_1 \qquad L_2 = I_2 \cdot \Omega_2 \qquad L_3 = I_3 \cdot \Omega_3$$

Veamos algunos ejemplos.



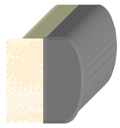
Cilindro. En la figura se muestra un cilindro y sus tres ejes principales de inercia. El eje de inercia minimo sera el longitudinal, ya que la masa se encuentra menos alejada del eje. Por la simetria axial que presentan los cilindros, los momentos de inercia respecto de los otros dos ejes son iguales y por supuesto son maximos, ya que la masa esta mas alejada.

Chapa. Supongamos una chapa de espesor despreciable. Es evidente cual sera el eje de inercia principal maximo y cuals sera el minimo. Basta pensar en como esta distribuida la masa. En la figura, el eje horizontal es el maximo y el vertical el minimo.



Pensemos  ahora en una esfera. Cuantos ejes principales de inercia tiene..? Cual es el mayor y menor..? La respuesta es que tiene infinitos ejes principales de inercia y todos con el mismo valor de momento de inercia. Es logico, por la simetria que tiene una esfera.

Cabe aclarar que en los casos anteriores, estabamos suponiendo que la distribucion de masa en los cuerpos era uniforme. Por este motivo, los ejes principales de inercia coinciden con los de simetria. Pero supongamos que tenemos un cuerpo, mitad de acero y mitad de telgopor. Es evidente que ahora el centro de masa no se encuentra en el eje de simetria geometrico, y  por lo tanto ya no es tan sencillo ver cuales son los ejes principales.



Como resumen de lo que vimos hasta aquí podemos decir que:

El momento de inercia es un tensor y fisicamente se puede interpretar como la resistencia a la rotacion. Depende de la masa, y de cómo esta distribuida dicha masa.
Existen ejes principales, que en general coinciden con los ejes de simetria, respecto de los cuales el tensor de inercia se transforma en una matriz diagonal.