



**FACULTAD  
DE INGENIERIA**  
Universidad de Buenos Aires

## Series de Fourier

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

# Resumen

- 1 Representación de señales de tiempo continuo
- 2 Propiedades de las series de Fourier de señales de tiempo continuo
- 3 Series de Fourier para señales de tiempo discreto
- 4 Sistemas LTI y exponenciales

# Espacios de señales

## Definición

Se dice que dos señales  $p(t)$  y  $q(t)$ , distintas de cero  $p(t)$  y  $q(t)$  son **ortogonales** sobre el intervalo  $t = [t_1, t_2]$  si:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)q^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} p^*(t)q(t)dt = 0$$

donde el superíndice \* denota el operador de conjugación complejo. Además, si ambas señales  $p(t)$  y  $q(t)$  también satisfacen la propiedad de magnitud unitaria:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)p^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} q(t)q^*(t)dt = 1$$

se dice que son **ortonormales** entre sí en el intervalo  $t = [t_1, t_2]$ .

# Ejemplo

$$p(t) = \cos(2\pi t)$$

$$q(t) = \cos(3\pi t)$$

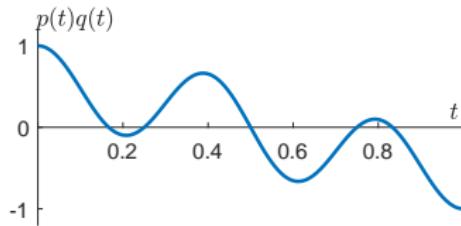
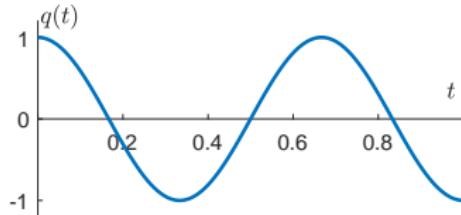
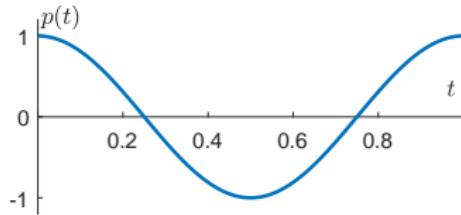
$$t = [0, 1]$$

$$\int_{t1}^{t2} p(t)q^*(t)dt$$

$$\int_0^1 \cos(2\pi t) \cos(3\pi t) dt$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(\pi t) + \cos(5\pi t)] dt$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{1}{5\pi} \sin(5\pi t) \right]_0^1 = 0$$



# Algunas definiciones

## Definición

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial de funciones con el producto interno usual y con dominio en  $t = [t_1, t_2]$ . Un conjunto de funciones  $\{p_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  es **mutuamente ortogonal** sobre el intervalo  $t = [t_1, t_2]$  si

$$\int_{t_1}^{t_2} p_m(t) p_n^*(t) dt = \begin{cases} E_n \neq 0 & \text{si } m = n_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, si  $E_n = 1$ ,  $\forall n$ , tenemos un **conjunto ortonormal**.

## Definición

Un conjunto ortogonal  $\{p_k(t)\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{H}$  se conoce como **conjunto ortogonal completo** si no existe ninguna función  $q(t) \in \mathcal{H}$  fuera del conjunto que satisfaga la condición de ortogonalidad con respecto a las señales  $p_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Es decir,  $\nexists q(t) \in \mathcal{H}$  tal que:

$$\int_{t_1}^{t_2} q(t) p_n^*(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

# Algunas definiciones

## Definición

Si un conjunto ortogonal es completo en  $\mathcal{H}$ , un espacio vectorial de funciones con el producto interno usual y con dominio en  $t = [t_1, t_2]$ , entonces cualquier función arbitraria  $x(t) \in \mathcal{H}$  puede ser expresado dentro del intervalo  $t = [t_1, t_2]$  como:

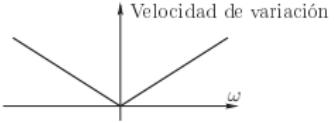
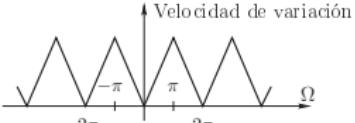
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(t)$$

donde los coeficientes  $c_n$ , se obtienen como:

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) p_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} p_n(t) p_n^*(t) dt}$$

Notar en el igual en color en la ecuación de arriba. Indica que la igualdad entre el término de la izquierda y el de la derecha hay que interpretarlo con cuidado, en rigor como una relación de equivalencia adecuadamente definida.

# Propiedades de las exponenciales complejas

	Continua $t \in \mathbb{R}, \omega_0 \text{ (rad/s)}$	Discreta $n \in \mathbb{Z}, \Omega_0 \text{ (rad/muestra)}$
Periodicidad	Siempre son periódicas.	No todas las exponenciales complejas son periódicas.
	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .	Debe cumplirse: $\Omega_0 N = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ . $N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\}, m \in \mathbb{Z}$ .
Ambigüedad	Son todas distintas.	Dos exponenciales son iguales si $\Omega_0$ varía en un múltiplo entero de $2\pi$ .
	$e^{j(\omega_0+2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t} \underbrace{e^{j2\pi kt}}_{\neq 1} \neq e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n} \rightarrow e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi kn}}_1 = e^{j\Omega_0 n}$ .
Combinación lineal de señales periódicas	No siempre periódica.  Por ejemplo: $T_1 = 1, T_2 = \sqrt{2}$ , No existe ningún $T_0, n_1 T_1 \neq n_2 T_2$ .	Siempre periódica.  $N_1, N_2 \rightarrow N_0 = \text{lcm}\{N_1, N_2\},$ $N_0 = n_1 N_1 = n_2 N_2$ .
Compleitud	Hay infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente de periodo $T_0$ .  $\phi_k(t) = e^{j\omega_k t} = e^{j\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$ .	Sólo hay $N$ exponenciales complejas relacionadas armónicamente de periodo $N$ .  $\begin{aligned} \phi_k[n] &= e^{j\Omega_k n} = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \\ \phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{jN\frac{2\pi}{N}n}}_1 = \phi_k[n]. \end{aligned}$
Velocidad de variación	La velocidad de variación aumenta linealmente con la frecuencia.	Frecuencias bajas: Cercanas a $2\pi k$ , Frecuencias altas: Cercanas a $\pi(2k + 1)$ .
	 <p>Velocidad de variación</p> <p><math>\omega</math></p>	 <p>Velocidad de variación</p> <p><math>\Omega</math></p>

# Representación de señales periódicas I

Es de interés representar señales a través de bloques funcionales “simples”, cuya respuesta un sistema sea relativamente sencilla

Esta fue la idea para el caso de la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria como una superposición lineal ponderada de respuestas al impulso desplazadas en el tiempo!!

Ahora haremos lo propio para un tipo particular de señales: las señales periódicas!!

Una señal periódica satisface:

$$x(t) = x(t + T)$$

donde  $T$  es el periodo fundamental (es decir el mínimo valor que satisface la igualdad). Se define la *frecuencia angular fundamental* como:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ejemplos:  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ ,  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ .

## Representación de señales periódicas II

Una intuición razonable que podemos desarrollar (y que varios matemáticos a lo largo de la historia tuvieron!!) es que *cualquier* función periódica  $x(t)$  se puede representar como una **superposición de armónicos de  $\omega_0$** :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

La intuición es “casi correcta”, en el sentido que es necesario definir exactamente que entendemos por la igualdad de la ecuación anterior!! Además en función de dicha interpretación de la igualdad podríamos “acotar” el conjunto de señales periódicas a representar!!

En el caso de que  $x(t)$  sea una función real tenemos que  $x(t) = x^*(t)$  lo cual implica que  $a_k = a_{-k}^*$ . De esta forma podemos escribir:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re \left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

Con  $a_k = A_k e^{j\theta} = B_k + jC_k$ :

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Para señales  $x(t)$  reales los armónicos componentes negativos y positivos están conectados! Nos podemos concentrar en las “frecuencias componentes” positivas!!

# Señales de energía finita I

Consideremos el espacio de señales de energía finita  $L_2([0, T])$ . Esto es las señales definidas en un intervalo  $[0, T)$  que satisfacen:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Como todo el estudio de una señal periódica lo podemos hacer en un intervalo de longitud  $T$ , es claro que podemos trabajar en este espacio considerando la extensión periódica de las señales fuera del intervalo  $[0, T)$ . De esta forma, estudiaremos señales periódicas, pero que en cada intervalo de longitud  $T$  tienen energía finita!!

En la primera clase discutimos que el espacio  $L_2([0, T))$  es un espacio vectorial con producto interno:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g^*(t)dt$$

y base ortonormal dada por

$$\left\{ \dots, e^{-2j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, 1, e^{j\omega_0 t}, e^{2j\omega_0 t}, \dots \right\}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

## Señales de energía finita II

Vamos a considerar la siguiente aproximación de  $x(t) \in L_2([0, T])$ :

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ahora vamos a considerar la distancia entre  $x(t)$  y  $\hat{x}(t)$  medida con el siguiente criterio:

$$\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - \hat{x}_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt$$

Es claro que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}_N(t)\|^2 &= \langle x(t) - \hat{x}_N(t), x(t) - \hat{x}_N(t) \rangle \\ &= \|x(t)\|^2 - \langle x(t), \hat{x}_N(t) \rangle - \langle \hat{x}_N(t), x(t) \rangle + \|\hat{x}_N(t)\|^2 \end{aligned}$$

Analicemos cada uno de los términos:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

# Señales de energía finita III

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_N(t)\|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{k=-N}^N b_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-N}^N \sum_{p=-N}^N b_k b_p^* e^{jk\omega_0 t} e^{-jp\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-N}^N \sum_{p=-N}^N b_k b_p^* \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\omega_0(k-p)t} dt\end{aligned}$$

Pero sabemos que:

$$\int_0^T e^{j\omega_0(k-p)t} dt = \begin{cases} T & p = k \\ 0 & p \neq k \end{cases}$$

Es fácil ver entonces que:

$$\|\hat{x}_N(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^N |b_k|^2$$

# Señales de energía finita IV

Además tenemos:

$$\langle x(t), \hat{x}_N(t) \rangle = \sum_{k=-N}^N b_k^* \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-N}^N b_k^* a_k$$

donde hemos definido:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

De la misma forma:

$$\langle \hat{x}_N(t), x(t) \rangle = \sum_{k=-N}^N a_k^* b_k$$

Podemos escribir:

$$\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt - \left( \sum_{k=-N}^N b_k a_k^* + b_k^* a_k - |b_k|^2 \right)$$

Sumando y restando  $\sum_{k=-N}^N |a_k|^2$  obtenemos:

$$\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 + \sum_{k=-N}^N |a_k - b_k|^2$$

# Señales de energía finita V

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- La distancia *en media cuadrática* entre  $x(t)$  y su aproximación  $\hat{x}(t)$  de orden  $N$  se hace mínima cuando:

$$b_k = a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es decir la *mejor* representación en términos de la energía del error de  $x(t)$  para  $N$  finito se puede escribir como:

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle e^{jk\omega_0 t}$$

$\hat{x}_N(t)$  es la proyección ortogonal de  $x(t)$  en el subespacio generado por  $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-N}^N$ !!!.

- Podemos hacer  $N \rightarrow \infty$  para obtener (dado  $\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|^2 \geq 0$ ):

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Esto es lo que se denomina *desigualdad de Bessel*.

# Señales de energía finita VI

Sin embargo, el conjunto de las exponenciales complejas  $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  tiene la extraordinaria propiedad de que la desigualdad de Bessel es de hecho una igualdad (porque el conjunto  $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  es completo en  $L_2([0, T])$ !!):

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

De esta forma tenemos lo que se conoce como teorema de Parseval

## Teorema

Para cualquier señal  $x(t) \in L_2([0, T])$  la serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

converge en media cuadrática a  $x(t)$  es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt = 0$$

# Señales de energía finita VII

El teorema anterior es el teorema central de la expansión en series de Fourier de las señales periódicas con energía finita en cada periodo. Notar que también tenemos la *relación de Parseval*:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Algunas consideraciones:

- El espacio  $L_2([0, T])$  es lo suficientemente grande para todos nuestros propósitos. Prácticamente todas las señales de interés práctico estarán en este espacio. Notar que este espacio contiene a todas las funciones continuas en  $[0, T)$  y también muchas señales *discontinuas* de interés. No contiene en su totalidad sin embargo al espacio  $L_1([0, T))$ .
- Es importante entender la convergencia enunciada en el teorema: lo que converge a cero es la energía del error!. Las señal  $x(t)$  y su serie de Fourier son “iguales” en el sentido de que distancia en media cuadrática entre ambas es cero. **De aquí no necesariamente se implica que para cada  $t \in [0, T)$  la señal  $x(t)$  y su serie de Fourier son iguales!!!**
- Una cuestión importante es la unicidad en la representación de la serie de Fourier de una señal. (ver ejercicios sugeridos).

# Convergencia puntual de las series de Fourier I

Ni siquiera se puede asegurar que la serie de Fourier de una función continua general converja puntualmente en todo punto  $t \in [0, T]$ ). Existen muchos resultados extremadamente técnicos en este sentido. El más simple y el primero obtenido por Dirichlet en el siglo XIX es el siguiente:

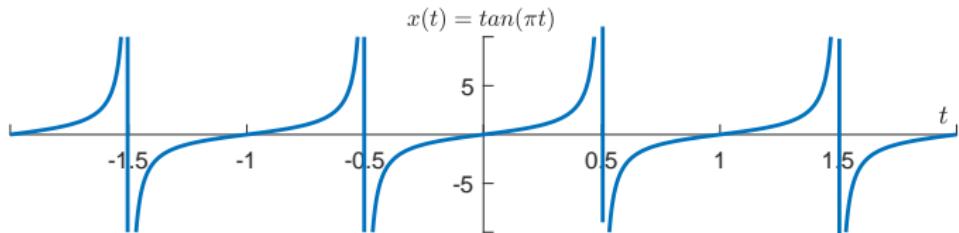
## Teorema

Sea  $x(t) \in L_1([0, T])$  tal que es de variación acotada. Entonces:

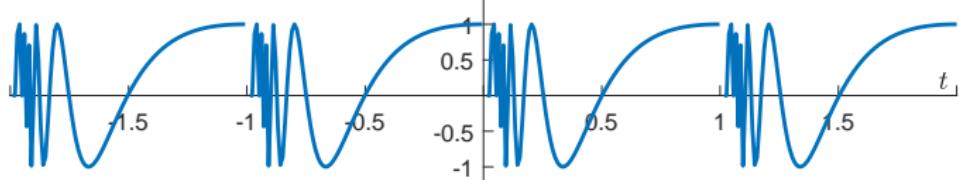
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} [x(t + 0^+) + x(t - 0^-)]$$

Lo importante de este resultado es que para una gran familia de señales (que para los fines prácticos es lo suficientemente grande) la serie de Fourier converge puntualmente en cada punto  $t \in [0, T)$  donde la señal es continua y al promedio de los valores presentes en una discontinuidad!! La condición de *variación acotada* es técnica. Pero básicamente se puede decir en términos coloquiales que significa que la señal no tenga infinitos máximos y mínimos ni infinitas discontinuidades en  $[0, T)$ !!

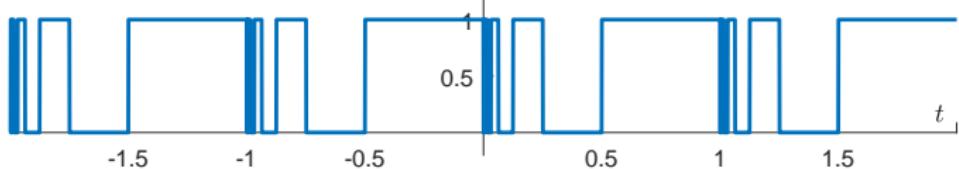
# Convergencia puntual de las series de Fourier II



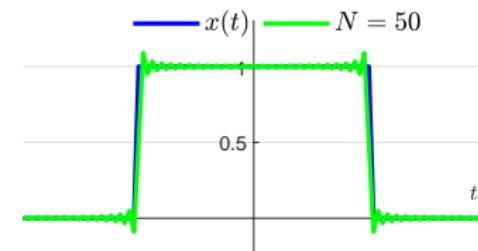
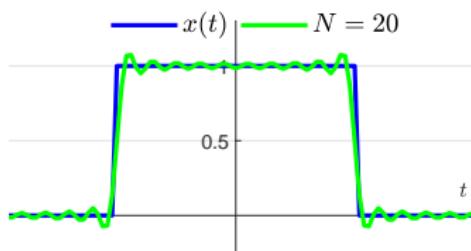
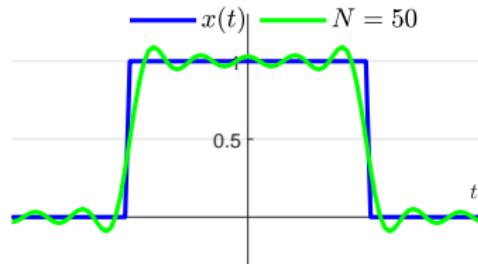
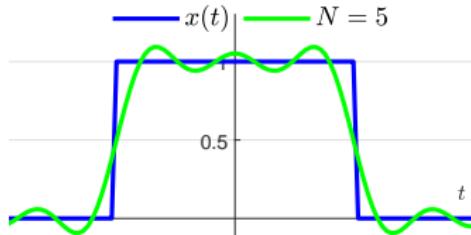
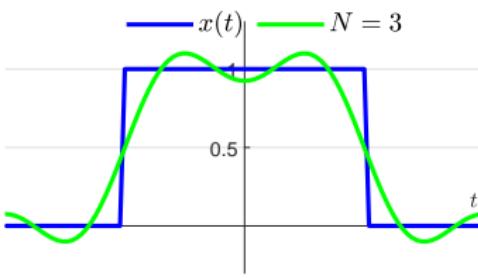
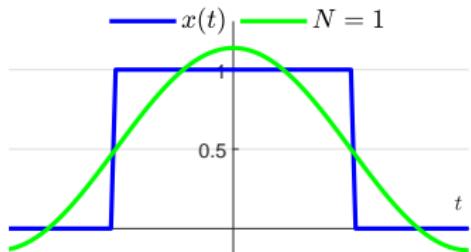
$$x(t) = \sin(0.5\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(t) = x(t+1)$$



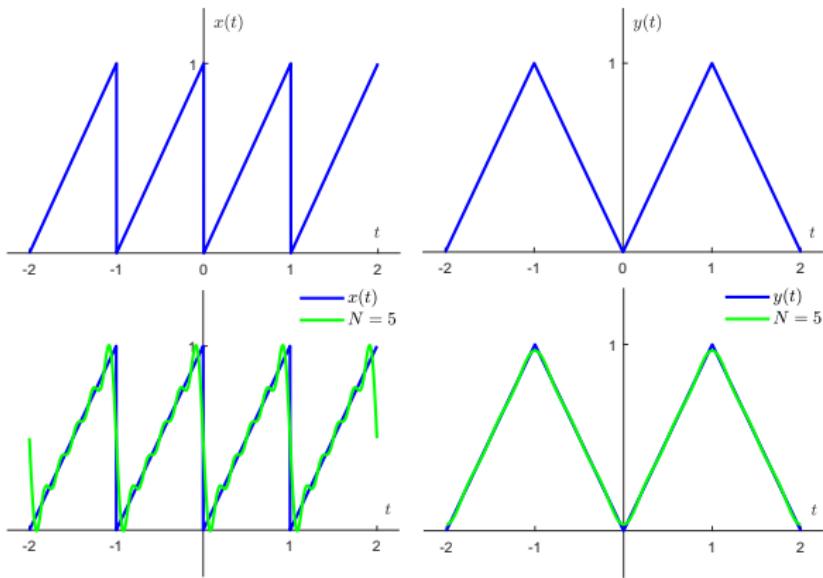
$$\{x(t) = 1 \text{ si } t \in [2^{-2m-1}, 2^{-2m}] \\ x(t) = 0 \text{ si } t \in [2^{-2m-2}, 2^{-2m-1}]\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(t) = x(t+1)$$



# Convergencia puntual de las series de Fourier III



# Convergencia puntual de las series de Fourier IV



El rizado se va comprimiendo hacia la continuidad a medida que aumenta  $N$  pero su amplitud no disminuye!! Siempre el exceso de rizado es el 9 % del valor de la discontinuidad!

# Propiedades de la serie Fourier I

Vamos a asumir que las señales  $x(t)$  son periódicas con periodo  $T$  y que cumplen todas las propiedades que discutimos arriba para que exista su representación en serie de Fourier. Denotaremos los coeficientes de Fourier como  $a_k$  y al proceso de mapeo de  $x(t)$  en sus coeficientes y viceversa lo escribiremos como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

- **Linealidad:** Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  funciones periódicas de periodo  $T$  tales que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$   $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$ . Entonces:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \alpha a_k + \beta b_k$$

Probarlo!!

- **Desplazamiento temporal:** Sea  $x(t)$  periódica con periodo  $T$  tal que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Consideremos  $y(t) = x(t - \tau)$  con  $\tau \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k e^{-jk\omega_0\tau}$$

Probarlo!!

# Propiedades de la serie Fourier II

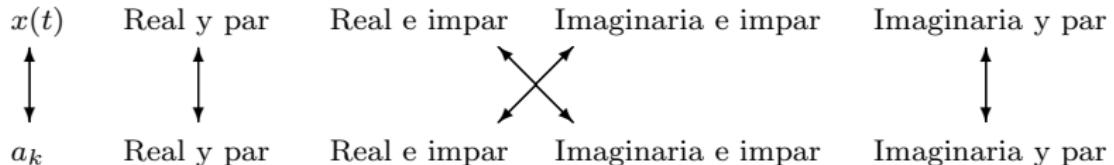
- **Inversión temporal:** Sea  $x(t)$  periódica con periodo  $T$  tal que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Consideremos  $y(t) = x(-t)$ . Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}$$

Probarlo!! Y deducir que sucede con los coeficientes de Fourier de señales pares e impares!!

- **Conjugación y simetría conjugada:** Sea  $x(t)$  periódica con periodo  $T$  tal que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Consideremos  $y(t) = x^*(t)$ . Entonces

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}^*$$



# Propiedades de la serie Fourier III

- **Multiplicación:** Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  señales periódicas de periodo  $T$  tales que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$   $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$ . Entonces:

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k$$

Proof:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{jp\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-j(k-p)\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} \end{aligned}$$

# Propiedades de la serie Fourier IV

- **Diferenciación:** Sea  $x(t)$  señal periódica de periodo  $T$  tal que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Entonces:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} jk\omega_0 a_k$$

Proof: Sea  $y(t) = x'(t)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= -\frac{1}{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^T + jk\omega_0 \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= jk\omega_0 a_k \end{aligned}$$

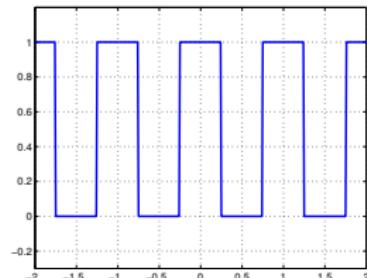
- **Integración:** Sea  $x(t)$  señal periódica de periodo  $T$  tal que  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Entonces:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

Probarlo!! Discuta la necesidad para este resultado de que  $a_0 = 0!!$

# Ejemplos I

1) Consideremos el pulso cuadrado dado por:



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$T = 1, T_1 = 0.25$$

Es claro que

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{T-T_1}^T e^{-jk\omega_0 t} dt \right]$$

O lo que es equivalente para  $k \neq 0$ :

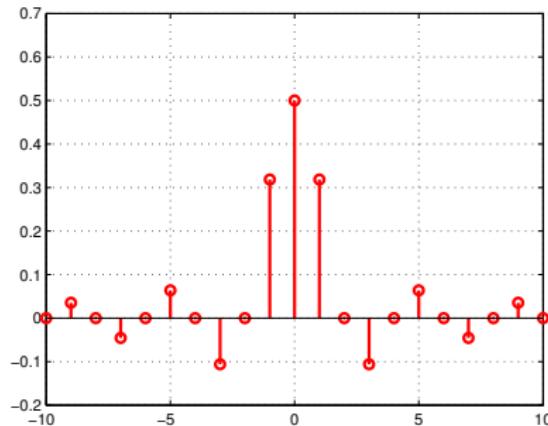
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{T_1}^{T_1}$$

## Ejemplos II

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Es fácil ver que  $a_0 = \frac{2T_1}{T}$ . El caso en que  $T_1 = T/4$  corresponde a una onda cuadrada con *duty cycle* del 50 %. Para ese caso  $a_0 = 0.5$  y

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

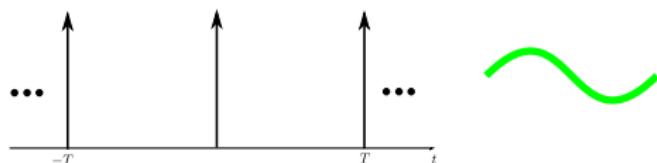


## Ejemplos III

Usando Parseval obtenemos que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \right|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

2) Tren de impulsos: Consideremos la siguiente señal



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - KT)$$

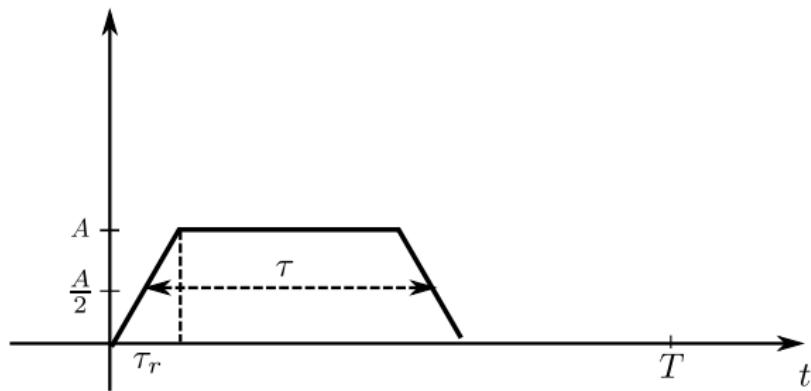
Es claro que el tren de impulsos no es una señal de cuadrado integrable. De hecho ni siquiera es una señal en el sentido tradicional!! Sin embargo podemos igual calcular los coeficientes de Fourier del mismo en un sentido “distribucional”! El tren de impulsos será de una importancia fundamental para nosotros cuando analicemos el tema de muestreo de señales de tiempo continuo!

## Ejemplos IV

Evitando poner los límites de integración justo donde hay impulsos elegimos el intervalo  $[-T/2, T/2]$ :

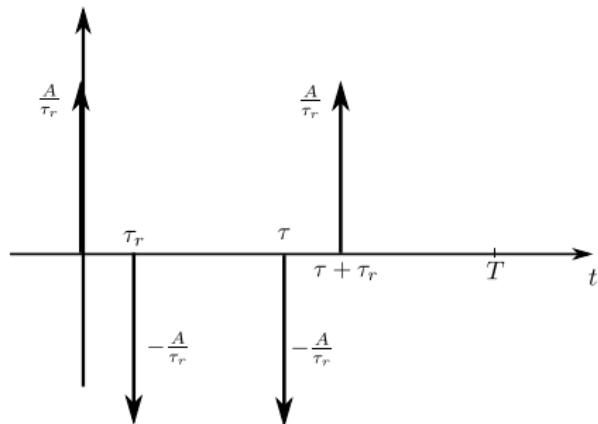
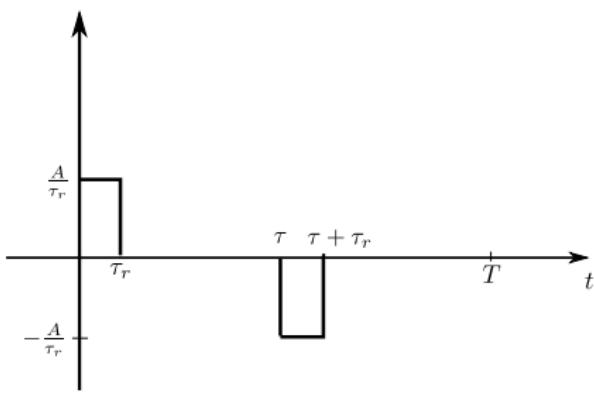
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}, \forall k$$

- 3) Pulso trapezoidal: El pulso trapezoidal es de importancia fundamental en el análisis de circuitos digitales ya que modeliza una onda cuadrada real.



## Ejemplos V

En lugar de calcular los coeficientes por la definición usual vamos a calcularlos aplicando las propiedades de la serie de Fourier. Sea  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ . Consideremos la derivada de  $x(t)$ ,  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  con  $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$  y la derivada segunda de  $x(t)$ ,  $z(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  con  $z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_k$



## Ejemplos VI

Vemos que  $z(t)$  está compuesta por la superposición de 4 trenes de impulsos.

Usando la propiedad de desplazamiento temporal y la linealidad de los coeficientes de Fourier podemos escribir:

$$c_k = \frac{A}{T\tau_r} - \frac{A}{T\tau_r}e^{-jk\omega_0\tau_r} - \frac{A}{T\tau_r}e^{-jk\omega_0\tau} + \frac{A}{T\tau_r}e^{-jk\omega_0(\tau+\tau_r)}, \forall k$$

En forma más compacta:

$$c_k = -\frac{4A}{T\tau_r}e^{-j\frac{1}{2}k\omega_0(\tau_r+\tau)} \sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r\right) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau\right), \forall k$$

Por la propiedad de integración tenemos que:

$$b_k = \frac{c_k}{jk\omega_0}, \quad a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{c_k}{-(k\omega_0)^2}, \quad k \neq 0$$

Podemos entonces escribir:

$$a_k = \frac{A\tau}{T}e^{-j\frac{1}{2}k\omega_0(\tau_r+\tau)} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r\right)}{\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}k\omega_0\tau}, \quad k \neq 0$$

## Ejemplos VII

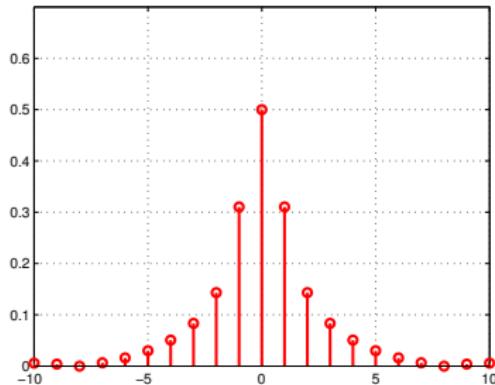
Definiendo la función *sinc* no normalizada:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

podemos escribir:

$$a_k = \frac{A\tau}{T} e^{-j\frac{1}{2}k\omega_0(\tau_r+\tau)} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau_r\right) \text{sinc}\left(\frac{1}{2}k\omega_0\tau\right), \quad k \neq 0,$$

con  $a_0 = \frac{A\tau}{T}$ .



Se ve que el método de reducir una señal a través de sus derivadas sucesivas a una serie de impulsos es un método poderoso para calcular la serie de Fourier de una señal. Sin embargo, el método no aporta ninguna ventaja significativa si la señal a analizar tiene infinitas derivadas continuas. Por qué???

# Período vs tiempo de análisis

Supongamos una señal periódica  $x(t)$ , de período  $T$ , podemos escribir:

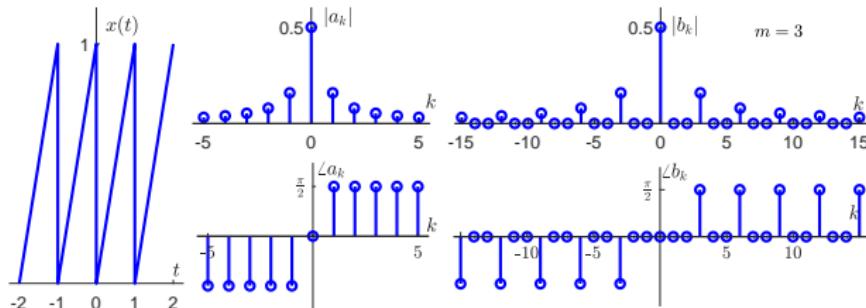
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j w_0 kt}$$

La señal  $x(t)$  también es periódica con período  $T_m = mT$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , por lo cual también podemos escribir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j \frac{2\pi}{mT} kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j \frac{w_0}{m} kt}$$

Comparando, se cumple que (**Tratar de razonar por qué?**):

$$b_k = \begin{cases} a_k/m & \text{si } k = rm; r = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



# Serie de Fourier en tiempo discreto I

Una señal periódica en tiempo discreto satisface:

$$x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $N$  es el periodo. Consideremos las exponenciales discretas con frecuencias fundamentales  $k\omega_0$ :

$$f_k[n] = e^{jk\omega_0 n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En los ejercicios sugeridos de la primer clase se prueba que las exponenciales discretas tienen la propiedad de que:

$$f_k[n] = f_{k+pN}[n], \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

Sólo existen  $N$  exponenciales discretas distintas con frecuencia fundamental  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ !! Esto es sustancialmente diferente al caso continuo!!

De esta forma la serie Fourier en tiempo discreto no es una serie sino una suma finita:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k f_k[n] = a_p f_p[n] + a_{p+1} f_{p+1}[n] + \cdots + a_{p+N-1} f_{p+N-1}[n],$$

donde la notación  $k = \langle N \rangle$  significa que la suma se extiende por  $N$  valores consecutivos de  $k$  (sin importar en qué valor comienza. Por qué??). Por ejemplo, es usual considerar  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

# Serie de Fourier en tiempo discreto II

Nuevamente la expansión en serie de Fourier se puede interpretar como una proyección ortogonal en el espacio generado por  $\{f_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$ . Definimos el siguiente producto interno para señales acotadas al intervalo  $[0, N - 1]$  (o lo que es lo mismo vectores en  $\mathbb{C}^N$ ):

$$\langle x[n], y[n] \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n]y^*[n]$$

Podemos seguir los mismos razonamientos que hicimos para el caso de tiempo continuo y probar que los coeficientes de Fourier se calculan como ([Hacerlo!!!](#)):

$$a_k = \langle x[n], f_k[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}.$$

Por supuesto sigue valiendo la relación de Parseval:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

# Serie de Fourier en tiempo discreto III

Algunas consideraciones:

- Es claro que  $\{f_k[n]\}_{k=0}^{N-1}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{C}^N$ , con lo cual podemos representar cualquier vector en dicho espacio (o cualquier señal de tiempo discreto de longitud  $N$ ) por medio de una combinación lineal de dichos vectores.
- Es claro que los coeficientes de Fourier satisfacen  $a_k = a_{k+rN}$ ,  $\forall r \in \mathbb{Z}$  como era de esperarse por las propiedades de las exponenciales discretas.
- A diferencia del caso continuo no hay consideraciones sobre la convergencia puntual de la serie de Fourier. Esto es porque con la superposición de un número finito de exponenciales discreta representamos en forma exacta la señal original!.
- Todas las propiedades que probamos para el caso continuo siguen valiendo para el caso de tiempo discreto. **Probarlo!!! (Ver tabla 3.2 de Oppenheim and Willsky).**
- Podemos interpretar el proceso de obtener los coeficientes de Fourier de una señal discreta  $x[n]$  de periodo  $N$  como una transformación lineal  $\mathcal{T} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ , definida a través de una matriz  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \quad \mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \dots \ a_{N-1}]^T, \quad \mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \dots \ x[N-1]]^T$$

Cómo es  $\mathbf{W}$ ? Qué propiedades tiene? Es invertible? Cómo es la inversa?

# Sistemas LTI y señales exponenciales I

Los sistemas LTI reaccionan de una forma muy satisfactoria a señales exponenciales. Consideremos el caso de un sistema de tiempo continuo cuya respuesta al impulso es  $h(t)$ . Supongamos que la entrada al mismo es  $e^{st}$  donde  $s \in \mathbb{C}$ . La salida del sistema se puede escribir como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st} H(s)$$

La acción de un sistema LTI sobre una exponencial se puede escribir entonces como:

$$y(t) = e^{st} H(s)$$

donde  $H(s)$  es lo que se denomina la *transferencia del sistema*. O sea el sistema entrega a la salida la misma señal de entrada pesada por un escalar que depende sólo del sistema y del valor de  $s$ !!

Se dice que  $e^{st}$  es un *autovector* para los sistemas LTI y que  $H(s)$  corresponde al *autovalor* asociado con  $e^{st}$  y el sistema con respuesta al impulso  $h(t)$ . Desde el punto de vista matemático riguroso es necesario tener cuidado con esta interpretación! Pero nosotros usaremos igual esta nomenclatura sin otras consideraciones! Es claro además que todo esto tiene sentido si  $H(s)$  está bien definida!

# Sistemas LTI y señales exponenciales II

El caso para tiempo discreto es análogo con señales  $x[n] = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Podemos escribir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

Las interpretaciones para el caso de tiempo continuo son equivalentes para este caso!

Volviendo al caso de tiempo continuo, sabemos que por la propiedad de linealidad podemos escribir para un sistema LTI:

$$\mathcal{T} \left[ \sum_k \alpha_k e^{s_k t} \right] = \sum_k \alpha_k \mathcal{T} [e^{s_k t}] = \sum_k \alpha_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Vemos que si una señal  $x(t)$  que constituye la entrada un sistema LTI, se puede expresar como una superposición de exponentiales, la salida al sistema es también una superposición de exponentiales. Esto muestra que para este tipo de señales la respuesta se puede calcular en forma muy simple!!

# Sistemas LTI y señales exponenciales III

Supongamos que  $s = j\omega$ , o lo que es lo mismo  $\Re\{s\} = 0$ , de forma tal que  $x(t) = e^{j\omega t}$ . La función transferencia se denomina en este caso *respuesta en frecuencia del sistema* y vale:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

El caso discreto se corresponde con  $|z| = 1$ , lo que implica que  $x[n] = e^{j\omega n}$  con  $\omega \in [-\pi, \pi)$ . En este caso la respuesta en frecuencia vale:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n},$$

Tiene esta función alguna característica especial??

Con estos conceptos podemos calcular fácilmente la respuesta de sistemas LTI a señales periódicas. Sea  $x(t)$  una señal periódica con periodo  $T$ . Sabemos que dicha señal se puede representar como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

De esta forma la respuesta a esta señal por un sistema LTI con respuesta al impulso  $h(t)$  se puede escribir como:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

# Sistemas LTI y señales exponenciales IV

Vemos que la salida  $y(t)$  es periódica con periodo  $T$  y que sus coeficientes de Fourier valen  $a_k H(jk\omega_0), \forall k \in \mathbb{Z}$ .

La acción de un sistema LTI sobre una señal periódica es modificar los coeficientes de Fourier de la señal original mediante una multiplicación por la respuesta en frecuencia evaluada en cada uno de los múltiplos de la armónica fundamental!!

Un sistema LTI no puede agregar armónicos que no existían en la señal de entrada al sistema. A lo sumo podrá anular algunos de ellos si  $H(jk\omega_0)$ , pero nunca “crear armónicos” nuevos!!

Si  $x(t)$  es real, sabemos que  $a_k = a_{-k}^*$ . De la misma forma con  $h(t)$  real tenemos que  $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$ . En este caso la respuesta del sistema LTI a una señal periódica se puede escribir como (**Probarlo!!**):

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |H(jk\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \theta_k + \arg H(jk\omega_0))$$

donde hemos usado que  $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ . Vemos que la armónica  $k$  a la salida del sistema tiene su amplitud modificada por  $|H(jk\omega_0)|$  y un desfasaje extra introducido por  $\arg H(jk\omega_0)$ .

# Temas para leer por cuenta propia

## Lectura obligatoria

- Tabla de propiedades de la serie continua de Fourier (Oppenheim and Willsky, Tabla 3.1).
- Propiedades de la serie discreta de Fourier (Oppenheim and Willsky, Sección 3.7).
- Filtrado (Oppenheim and Willsky, Sección 3.9).
- Filtros de tiempo continuo mediante ecuaciones diferenciales (Oppenheim and Willsky, Sección 3.10).
- Filtros de tiempo discreto mediante ecuaciones en diferencias (Oppenheim and Willsky, Sección 3.11).

# Algunos ejercicios I

- 1 Probar que si  $x(t) \in L_2([0, T])$  entonces  $x(t) \in L_1([0, T])$ . Es decir  $L_2([0, T]) \subset L_1([0, T])$ . Encuentre una señal  $x(t)$  que pertenezca a  $L_1([0, T])$  pero no pertenezca a  $L_2([0, T])$ .
- 2 Mostrar que el mapeo  $x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$  es biyectivo para señales en  $L_2([0, T])$  y secuencias  $a_k$  en  $l^2(\mathbb{Z})$ . Es decir que para cada señal  $x(t)$  en  $L_2([0, T])$  los coeficientes de Fourier están únicamente definidos y que cada para cada secuencia  $l^2(\mathbb{Z})$  la señal en  $L_2([0, T])$  generada está también únicamente definida. Esto muestra que hay un *isomorfismo* entre  $L_2([0, T])$  y  $l^2(\mathbb{Z})$ . Hint: Use la relación de Parseval. Hay algunas sutilezas...
- 3 Demuestre la siguiente relación para señales  $x(t)$  e  $y(t)$  en  $L_2([0, T])$  con coeficientes de Fourier  $a_k$  y  $b_k$  respectivamente:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k^*$$

Notar que el lado izquierdo es un producto interno en el espacio de secuencias  $l^2(\mathbb{Z})$  de cuadrado sumable. A través de la serie de Fourier vemos que ambos espacios  $L_2([0, T])$  y  $l^2(\mathbb{Z})$  son *isométricos*.

- 4 Definimos para dos señales periódicas  $x(t)$  e  $y(t)$  de periodo  $T$  la *convolución periódica* como

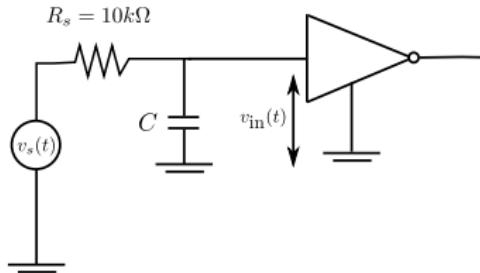
$$z(t) = x(t) * y(t) \equiv \int_T P x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

donde  $\int_T$  significa que la integral se hace sobre cualquier intervalo de longitud  $T$ .

Mostrar que alcanza con hacer variar  $t$  en un intervalo de longitud  $T$  para obtener  $z(t)$ . Determine los coeficientes de Fourier de  $z(t)$  a partir de los de  $x(t)$  e  $y(t)$ .

# Algunos ejercicios II

- 5 Ejercicios 3.8, 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 de Oppenheim and Willsky.
- 6 Ejercicios 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26 y 3.28 de Oppenheim and Willsky.
- 7 Ejercicios 3.40, 3.41, 3.42, 3.58, 3.63, 3.66 y 3.70 de Oppenheim and Willsky.
- 8 Considere una fuente de una onda cuadrada no ideal (o sea trapezoidal) con  $f = 10MHz$ ,  $\tau_r = 2ns$ ,  $\tau = 50ns$  y amplitud 5V. La misma esta conectada a una compuerta digital inversora como se muestra en la figura. La entrada a la compuerta se puede modelizar como un resistor  $R_G$ . Suponga que el valor de  $R_G$  es de  $10k\Omega$  y determine el valor del capacitor  $C$  que se debe poner para que el valor de la quinta armónica al entrada de la compuerta esté 20 dB por debajo de la correspondiente armónica de la entrada. Determine también la forma de onda de la tensión a la entrada de la compuerta (puede usar Matlab u Octave!).



# Tiempo de consultas

¿Preguntas?