



Transformada Z y sistemas LTI en tiempo discreto

Dr. Ing. Leonardo Rey Vega

Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2024

Resumen

- 1 Transformada Z
- 2 Propiedades de transformada Z
- 3 Análisis de sistemas LTI con transformada Z
- 4 Algunos tipos de sistemas LTI en tiempo discreto
- 5 Realización de sistemas LTI en tiempo discreto

La transformada Z I

Sabemos que si $x[n] = z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ la salida de un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ se puede escribir como:

$$y[n] = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

es la *transferencia* del sistema. Podemos realizar entonces lo siguiente para una señal general $x[n]$

$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Decimos que $X(z)$ es la *transformada Z* de $x[n]$. En forma compacta podemos denotar la operación de tomar la transformada de Laplace de una señal $x[n]$ como:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

La transformada Z II

Cuando $z = e^{j\Omega}$ obtenemos

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

lo que equivale a escribir

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \mathcal{F}[x[n]]$$

siempre y cuando la transformada de Fourier de la señal $x[n]$ exista. Definiendo $z = re^{j\Omega}$ con $r \geq 0$ y $\Omega \in [0, 2\pi)$ podemos escribir la transformada Z como:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]r^{-k}e^{-j\Omega k}$$

o bien como:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x[k]r^{-k} \right] e^{-j\Omega k} = \mathcal{F}[x[n]r^{-n}]$$

La transformada Z $X(z)$ de $x[n]$ es la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ donde $z = re^{j\Omega}$. Tener en cuenta que r^{-n} puede ser creciente o decreciente dependiendo de $|r|$.

La transformada Z III

Hasta el momento hemos definido la transformada Z para una señal pero no hemos analizado cuando la misma existe. Para ello deberemos definir lo que se conoce como la *región de convergencia* (ROC).

Sea una señal $x[n]$. Definiremos la ROC de la transformada de Laplace $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ como:

$$\text{ROC}\{X(z)\} = \left\{ z = re^{j\Omega} \in \mathbb{C} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|r^{-k} < \infty \right\}$$

Notar que la ROC de la transformada Z de una señal $x[n]$ está definido por todos aquellos puntos $z = re^{j\Omega}$ del plano \mathbb{C} donde $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable, lo que implica que la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ está bien definida!!

La transformada Z de una señal $x[n]$ está definida no sólo por la forma algebraica dada por $X(z)$ sino también por su correspondiente ROC. Ambos elementos son igualmente importantes para la definición de la transformada Z!!

La transformada Z IV

Ejemplos:

- Consideremos $x[n] = \alpha^n u[n]$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. La transformada de Laplace se puede escribir como:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k \end{aligned}$$

Vemos para determinar la ROC debemos pedir que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha r^{-1}|^k < \infty$$

Es fácil verificar que debe ser $|\alpha r^{-1}| < 1$ o lo que es lo mismo $r > |\alpha|$. En forma más compacta

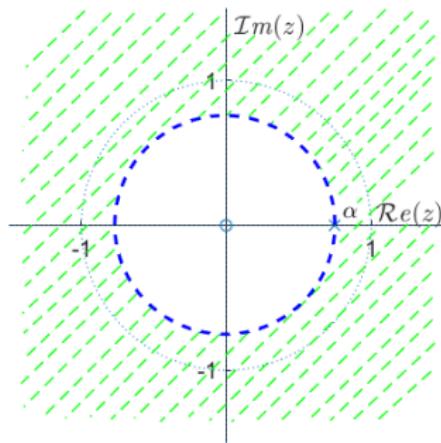
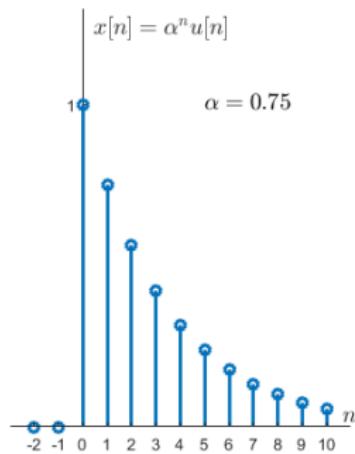
$$\text{ROC}\{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha|\}$$

La transformada Z V

Usando $z \in \text{ROC } \{X(z)\}$ podemos obtener la expresión algebraica de $X(z)$ como

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

La ROC se puede representar como (si $|\alpha| < 1$):



La transformada Z VI

- Consideremos ahora $x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$. Vemos que esta señal es muy diferente a la anterior. De nuevo podemos escribir:

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[-k-1] z^{-k} \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^k z^{-k} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^k \end{aligned}$$

Vemos para determinar la ROC debemos pedir que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha^{-1} r|^k < \infty$$

Es fácil verificar que debe ser $|\alpha^{-1} r| < 1$ o lo que es lo mismo $r < |\alpha|$. En forma más compacta

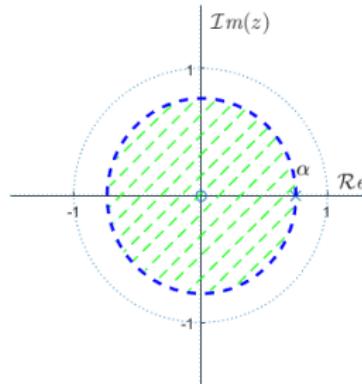
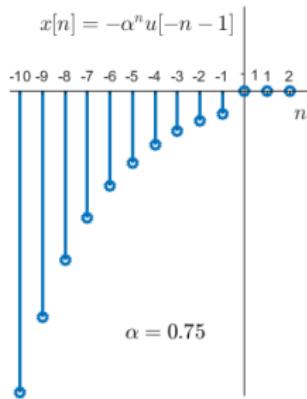
$$\text{ROC } \{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\alpha|\}$$

La transformada Z VII

Usando $z \in \text{ROC } \{X(z)\}$ podemos obtener la expresión algebraica de $X(z)$ como

$$X(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^k = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^k = 1 - \frac{1}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

La ROC se puede representar como (si $|\alpha| < 1$):



Dos señales muy diferentes pueden tener la misma expresión algebraica para $X(z)$. Sin embargo, sus ROCs serán diferentes. Eso implica que sus transformada Z son diferentes!!

La transformada Z VIII

Consideremos la señal: $x[n] = \alpha^n u[n] + \beta^n u[-n - 1]$ Podemos usar los resultados anteriores y obtener:

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \text{ ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha|\}$$

$$\beta^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - \beta z^{-1}}, \text{ ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\beta|\}$$

Entonces obtenemos

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{2 - (\alpha + \beta)z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

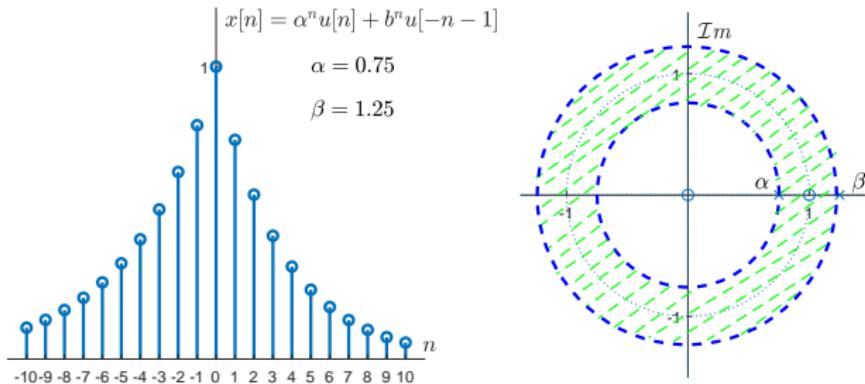
donde

$$\text{ROC}\{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |\alpha| < |z| < |\beta|\}$$

Vemos que si $|\beta| < |\alpha|$ la ROC es vacía y la transformada Z no existe. Si $|\alpha| < |\beta|$ la ROC es no vacía y la transformada Z existe para los valores de $z \in \mathbb{C}$ en dicha ROC.

La transformada Z IX

Si $|\alpha| < 1 < |\beta|$ la ROC se puede representar como:



Como la ROC de una transformada Z $X(z)$ depende sólo de $|z|$ es inmediatamente claro que la misma va a ser un anillo (posiblemente ilimitado hacia afuera), un círculo o todo el plano $\mathbb{C}!!$

La transformada Z X

Consideremos una señal de longitud finita:

$$x[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

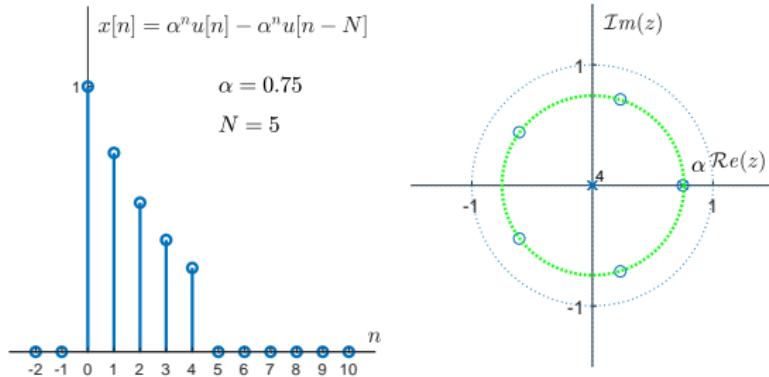
con $\alpha > 0$. Tenemos

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha z^{-1})^k = \frac{1 - (\alpha z^{-1})^N}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - \alpha^N}{z - \alpha}$$

La ROC estará dada por aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{k=0}^{N-1} |\alpha z^{-1}|^k < \infty$ y ello será para todos los valores en \mathbb{C} excepto $z = 0$. Además se ve que $X(z)$ tiene

- Ceros del numerador en $z = \alpha e^{j2\pi m/N}$ con $m = 0, 1, \dots, N-1$.
- $N-1$ ceros del denominador en el origen.
- Un cero en el denominador en $z = \alpha$ (que se cancela con el cero correspondiente a $m = 0$ del numerador.)

La transformada Z XI



En el caso de una señal de longitud finita tenemos que su ROC es todo el plano, el origen puede estar excluido o no, dependiendo si la señal toma valores distintos de cero para $n > 0$. También podría presentar múltiples polos (ceros del denominador) en el origen dependiendo también de los valores que la señal tome para $n > 0$!!

La transformada Z XII

Algunas consideraciones:

- Vemos que la transformada Z de una secuencia es una serie de potencias donde los coeficientes son los valores de la señal. Como las potencias pueden ser negativas o positivas una transformada Z es lo que se llama una serie de Laurent. Se sabe que las series de Laurent, y por ende una transformada Z, en su región de convergencia (es decir los valores de $z \in \mathbb{C}$ donde converge absolutamente), garantizan la existencia de todas sus derivadas y las mismas son continuas como funciones de z . Básicamente, con una serie de potencias como las que surgen de la transformada Z uno puede todas las operaciones normales sobre una función (ej: derivar, integrar, etc).
- Si la ROC de una transformada Z incluye al círculo unidad, es decir $z = e^{j\Omega}$ con $\Omega \in [0, 2\pi)$, es posible escribir:

$$X(e^{j\Omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}, \quad \Omega \in [0, 2\pi)$$

ya que si la ROC incluye $|z| = 1$ tenemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty$.

Sin embargo, una señal donde la ROC no contenga el círculo unidad o incluso no tenga transformada Z, puede tener transformada de Fourier (algo similar pasa con la transformada de Laplace). Esto ocurre fundamentalmente con señales donde la transformada de Fourier es discontinua en algún punto o contiene impulsos!!

La transformada Z XIII

Por ejemplo:

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \text{ ROC} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

No se puede escribir $X(e^{j\Omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$ ya que la ROC no incluye a $|z| = 1$ pero sabemos que:

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega + 2\pi k)$$

Considere también $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ con $\Omega_0 \in [0, 2\pi)$. Es fácil verificar que no existe la transformada Z de esta señal ya que no existe valor $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{j\Omega_0 k} z^{-k}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |z|^{-k} < \infty$$

Sin embargo tenemos que

$$e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega + 2\pi k)$$

La transformada Z XIV

Así como ocurría con la transformada de Laplace nuestro mayor interés será en señales cuya transformada Z es un cociente de polinomios en z (o z^{-1}). Es decir:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

En estos casos (cuando la transformada Z es una función racional), dicha transformada queda definida perfectamente (salvo un factor de escala) por:

- La ROC de $X(z)$.
- Los ceros de $N(z)$, en adelante conocidos como los *ceros* de $X(z)$.
- Los polos de $D(z)$, en adelante conocidos como los *polos* de $X(z)$.

Por ejemplo consideremos la señal $x[n] = \alpha^n u[n] + \beta^n u[-n - 1]$ con $|\alpha| < |\beta|$. Sabemos que

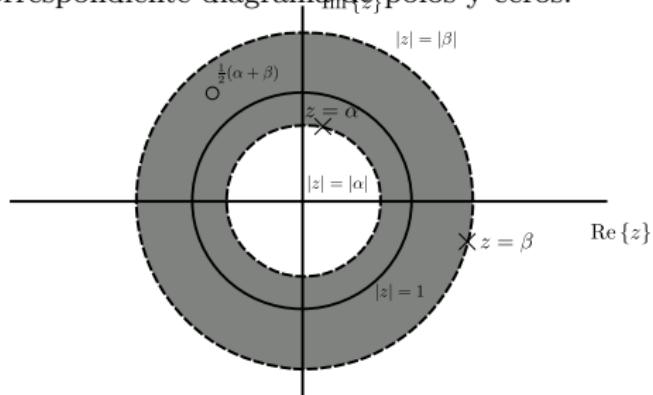
$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{2 - (\alpha + \beta)z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

donde

$$\text{ROC}\{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |\alpha| < |z| < |\beta|\}$$

La transformada Z XV

La ROC con el correspondiente diagrama de polos y ceros:



Vemos que los polos caen siempre fuera de la ROC, lo cual es razonable. Los ceros pueden caer en el interior o fuera de la ROC. En este ejemplo además hay un cero en el origen. Por qué??

La relación entre los diagramas de polos y ceros y las posibles ROC asociadas a una transformada Z racional están muy ligadas a las propiedades que tenga la señal $x[n]$ en el tiempo como veremos a continuación.

Propiedades de la región de convergencia I

Dado que la ROC es muy importante en la especificación de la transformada Z de una señal temporal, exploraremos algunas conexiones entre las características de la señal y la correspondiente ROC:

Propiedad 1: La ROC de $X(z)$ consiste en anillos o discos centrados en el origen. Es decir $0 \leq r_i < |z| < r_e \leq \infty$.

Esto es una clara consecuencia de que la ROC se define para aquellos valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| |z|^{-k} < \infty$$

Propiedad 2: La ROC de $X(z)$ (racional) no contiene ningún polo.

Esto es claro también por el hecho de que $X(z)$ evaluada en un polo diverge.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es el plano \mathbb{C} completo (con la posible excepción de $z = 0$ o el punto en el infinito)

Probarlo!!

Propiedades de la región de convergencia II

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una *señal derecha* ($\exists N_1$ tal que $x[n] = 0 \forall n < N_1$) y $|z| = r_1$ está en la ROC entonces:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_1\} \subseteq \text{ROC } \{X(z)\}$$

con la posible excepción del punto en el infinito.

Probarlo!!

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una *señal izquierda* ($\exists N_2$ tal que $x[n] = 0 \forall n > N_2$) y $|z| = r_2$ está en la ROC entonces:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_2\} \subseteq \text{ROC } \{X(z)\}$$

con la posible excepción de $z = 0$.

Probarlo!!

Propiedades de la región de convergencia III

Propiedad 6: Si $x[n]$ es una señal bilateral y la circunferencia $|z| = r_3$ está en la ROC, la misma será un anillo en \mathbb{C} que incluye a $|z| = r_3$.

Probarlo!!

De las propiedades anteriores vemos que toda señal tendrá una ROC que caerá dentro de una de las siguientes categorías:

- Será el plano completo \mathbb{C} con la posible excepción del origen y el punto en infinito (para señales finitas).
- Será un disco centrado en el origen con la posible excepción del origen (para señales izquierdas).
- Será un anillo centrado en el origen con radio interior distinto de cero que se extiende hacia el infinito, donde el punto en el infinito puede estar excluido (para señales derechas).
- Será un anillo con centrado en el origen con radios internos y externos finitos (para señales bilaterales).

Propiedades de la región de convergencia IV

Si nos restringimos a transformadas Z racionales, usando la propiedad 2, tenemos la siguiente:

Propiedad 7: Si $x[n]$ es tal que su transformada Z es racional, su ROC está limitada por sus polos. Además ningún polo está contenido en la ROC.

De la propiedad 7 para señales $x[n]$ con transformada racional tenemos:

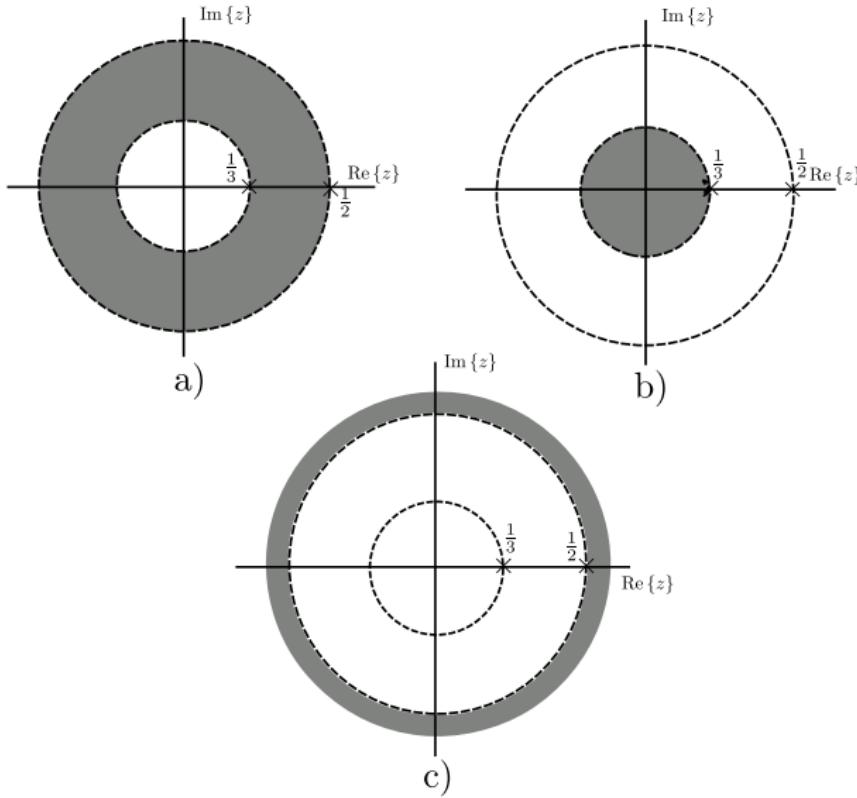
- Si $x[n]$ es derecha la ROC será el anillo centrado en el origen que se extiende desde el polo más exterior hacia el infinito (con la posible excepción del punto en el infinito).
- Si $x[n]$ es izquierda la ROC será el disco centrado en el origen limitado por el polo más interno (con la posible excepción del origen).

Ejemplo: Consideremos

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Tenemos las siguientes posibles ROCs asociadas con esta transformada:

Propiedades de la región de convergencia V



Propiedades de la región de convergencia VI

En el caso a) tenemos:

$$\frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1], |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], |z| > \frac{1}{3}$$

lo que implica que $x[n] = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$. En el caso b) tenemos:

$$\frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1], |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1], |z| < \frac{1}{3}$$

lo que implica que $x[n] = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$. En el caso c) tenemos:

$$\frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], |z| > \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \xleftrightarrow{Z} -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], |z| > \frac{1}{3}$$

lo que implica que $x[n] = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

Transformada Z inversa I

Dado que un par señal-transformada con su correspondiente ROC es único podemos definir el operador inverso que toma una función $X(z)$ y entrega una función en el tiempo. La definición de la transformada Z inversa es:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz$$

donde la integración se hace a lo largo de un contorno cerrado contenido en la ROC y en sentido antihorario. En el caso de que el contorno sea un círculo en la ROC con radio r , tenemos que:

$$z = re^{j\Omega}, \quad \Omega \in [0, 2\pi), \quad dz = jre^{j\Omega} d\Omega, \quad d\Omega = \frac{1}{j} z^{-1} dz$$

y

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

o lo que es lo mismo

$$x[n] = r^n \mathcal{F}^{-1} \left[X(re^{j\Omega}) \right]$$

Transformada Z inversa II

La evaluación de la transformada Z inversa se puede hacer por medio de técnicas de integración en el plano complejo usando el teorema de los residuos. Sin embargo, en nuestro caso nos restringiremos a transformadas Z que serán racionales. En ese caso tenemos:

Si $X(z)$ es racional y el orden del numerador es menor que el del denominador:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k z^{-m_k}}{(1 - p_k z^{-1})^{m_k}}$$

donde p_k con $k = 1, 2, \dots, N$ son los polos de $X(z)$ y donde cada uno de ellos tiene multiplicidad m_k .

Cada una de las antitransformadas en el lado derecho de la ecuación de arriba se puede calcular fácilmente usando tablas de antitransformadas y algunas de las propiedades de la transformada Z que veremos a continuación!!

Propiedades de la transformada Z I

Analicemos algunas propiedades de la transformada Z:

- **Linealidad:** Sea $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ y $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)$. Tenemos que:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

con

$$\text{ROC}\{\alpha X(z) + \beta Y(z)\} \supseteq \text{ROC}\{X(z)\} \cap \text{ROC}\{Y(z)\}$$

Notar que la ROC de $\alpha X(z) + \beta Y(z)$ puede ser estrictamente mayor a $\text{ROC}\{X(z)\} \cap \text{ROC}\{Y(z)\}$.

Ejemplo:

$$X_1(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2}, \quad X_2(z) = -\frac{3}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2}$$

Entonces

$$X_1(z) - 3X_2(z) = -\frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{3}$$

La ROC de $X_1(z) - 3X_2(z)$ es mayor a $\text{ROC}\{X_1(z)\} \cap \text{ROC}\{X_2(z)\}$. Por qué sucede esto? Qué sucede entre los polos y ceros de $X_1(z) - 3X_2(z)$??

Propiedades de la transformada Z II

- **Desplazamiento en el tiempo y desplazamiento en frecuencia:**

Consideremos $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$. Tenemos las siguientes propiedades:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z)$$

donde

$$\text{ROC}\{z^{-n_0} X(z)\} = \text{ROC}\{X(z)\}$$

con la posible supresión de $z = 0$ o el punto en el infinito. También tenemos:

$$z^{n_0} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

donde

$$\text{ROC}\left\{X\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} = |z_0| \text{ROC}\{X(z)\}$$

Probarlo!!

Propiedades de la transformada Z III

- **Diferenciación de $X(z)$:** Consideremos $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$. Tenemos que:

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

y donde

$$\text{ROC} \left\{ -z \frac{dX(z)}{dz} \right\} = \text{ROC} \{X(z)\}$$

Probarlo!!

- **Conjugación:** Consideremos $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$. Tenemos que:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \quad \text{ROC} \{X^*(z^*)\} = \text{ROC} \{X(z)\}$$

Probarlo!!

- **Reflexión temporal:** Sea $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$. Se puede escribir:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{Z} X^*(1/z^*), \quad \text{ROC} \{X^*(z^*)\} = \frac{1}{\text{ROC} \{X(z)\}}$$

Probarlo!!

Propiedades de la transformada Z IV

- **Convolución:** Sea $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ y $y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)$. Tenemos que:

$$z[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$$

y donde

$$\text{ROC}\{X(z)Y(z)\} \supseteq \text{ROC}\{X(z)\} \cap \text{ROC}\{Y(z)\}$$

De nuevo la ROC de $X(z)Y(z)$ puede contener a $\text{ROC}\{X(z)\} \cap \text{ROC}\{Y(z)\}$. Esto se debe a que puede haber cancelaciones entre polos y ceros.

Así como ocurría con la transformada de Fourier esta propiedad es la propiedad central de la transformada Z para el análisis de sistemas LTI!!

- **Teorema del valor inicial y final:** Sea $x[n]$ tal que es cero para $n < 0$. Entonces vale:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Además si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

Análisis de sistemas LTI usando transformada Z I

Gracias a la propiedad de convolución la acción de un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ sobre una entrada $x[n]$ puede escribirse como:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

donde $H(z)$ es la *transferencia* del sistema. Muchas propiedades de un sistema LTI se pueden determinar a través de $H(z)$ y su correspondiente ROC

- **Estabilidad:** Es claro, que a diferencia de la respuesta en frecuencia, siempre podemos definir la transferencia de un sistema inestable. Sin embargo, sabemos que para que el sistema sea estable tiene que ser absolutamente integrable y por ende debe existir su respuesta en frecuencia. Pero como tenemos que:

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

podemos decir que:

Un sistema LTI es estable sí y sólo sí la ROC de su función transferencia contiene a $|z| = 1$!!

Análisis de sistemas LTI usando transformada Z II

- **Causalidad:** Sabemos que un sistema LTI es causal cuando $h[n] = 0, \forall n < 0$. Usando la propiedad 4 mostrada anteriormente podemos decir que:

Un sistema LTI es causal sí y sólo sí que la ROC de su transferencia es la región exterior a un disco centrado en el origen incluyendo el punto en el infinito!!

Además si $H(z)$ es una función racional podemos usar la propiedad 7 enunciada anteriormente para tener que:

Un sistema LTI cuya función transferencia es racional es causal sí y sólo sí su ROC es el exterior de un círculo centrado en el origen que pasa por el polo más exterior!! Además el grado del polinomio del numerador deber ser menor o igual al del denominador!!

La caracterización de un sistema LTI anti-causal a través de sus función transferencia es análoga!!

Podemos combinar las caracterizaciones de causalidad y estabilidad para sistemas LTI con $H(z)$ racional:

Un sistema causal con $H(z)$ racional es estable sí y sólo sí su polo más exterior se encuentra en el interior del círculo $|z| = 1$ o lo que es lo mismo, todos sus polos tienen magnitud menor a 1!!

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias I

Consideremos un sistema descripto por una ecuación en diferencias a coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Transformando Laplace y aplicando las propiedades de la misma:

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(s) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

o lo que es lo mismo:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Así como ocurría con la transformada de Fourier, disponemos de una poderosa técnica para transformar ecuaciones enm diferencias con coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas!! Además la aplicación de dicha técnica, a diferencia del caso con la transformada de Fourier no está limitada a sistemas estables!! Vemos también que la transferencia asociada a este tipo de sistemas es siempre una función racional!!

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias II

Vemos, entonces que la función transferencia para un sistema descripto por una ecuación en diferencias a coeficientes constantes se puede escribir:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Sin embargo la ROC no queda especificada por la ecuación en diferencias. La misma se puede especificar teniendo alguna otra información sobre el sistema:

- Si el sistema descripto por la ecuación en diferencias fuera estable, sabemos que la ROC debería contener al círculo $|z| = 1$.
- Si el sistema descripto por la ecuación en diferencias fuera causal, sabemos que la ROC debería estar en el exterior del círculo centrado en el origen y que pasa por el polo más externo.

Ejemplo: Consideremos $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos que $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$. Es claro que tenemos dos posibilidades para la ROC:

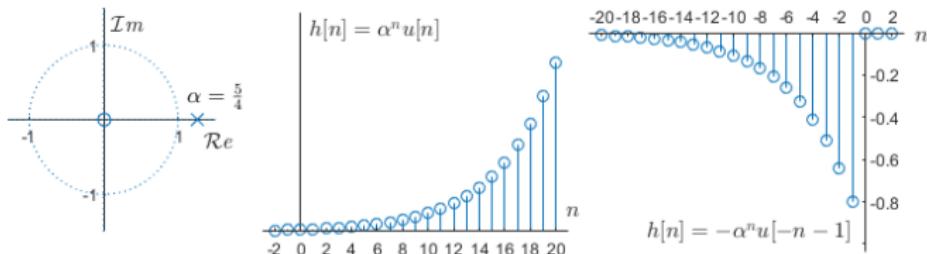
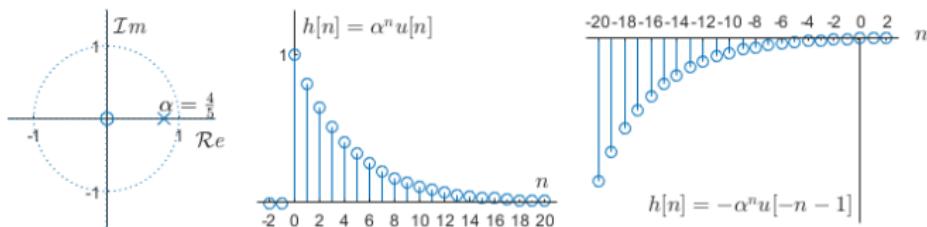
$$\text{ROC } \{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha|\}, \quad \text{ROC } \{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\alpha|\}$$

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias III

Consideremos $y[n] - \alpha y[n - 1] = x[n]$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos que $H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$. Es claro que tenemos dos posibilidades para la ROC:

$$\text{ROC } \{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha|\} \longleftrightarrow h[n] = \alpha^n u[n]$$

$$\text{ROC } \{X(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\alpha|\} \longleftrightarrow h[n] = -\alpha^n u[-n - 1]$$



Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias IV

Así como de una ecuación en diferencias obtenemos una función transferencia racional, podemos seguir el camino inverso y partir de una transferencia racional y obtener una descripción del sistema a través de una ecuación en diferencias racional:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

donde hemos factorizado los polinomios del numerador y del denominador en términos de sus raíces.

En el caso de que los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador sean reales tenemos:

- La respuesta al impulso del sistema es real, ya que los coeficientes de la ecuación en diferencias son reales.
- Los ceros y los polos, o bien son reales o bien aparecen en pares complejos conjugados. Es decir que podemos escribir la transferencia como:

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - d_k z^{-1}) (1 - d_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - e_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - f_k z^{-1}) (1 - f_k^* z^{-1})}$$

donde hay M_1 y N_1 ceros y polos reales y $2M_2$ y $2N_2$ ceros y polos complejos conjugados y donde $M = M_1 + 2M_2$ y $N = N_1 + 2N_2$.

Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias V

Es importante analizar el caso en el que la ecuación en diferencias no es recursiva:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

En este caso

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Sabemos que en este caso el sistema es FIR, ya que la respuesta al impulso es de longitud finita igual a M y vale:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si el sistema es FIR la función transferencia no posee polos en el plano complejo (con la posible excepción del origen). Dichos sistemas están caracterizados por sus ceros.
- Un sistema IIR (como los que surgen de una ecuación en diferencias recursiva), tendrán necesariamente polos en el plano complejo (aparte de los que puedan existir en el origen o en el punto en infinito). Estos sistemas tendrán que ser caracterizados por sus ceros y polos.

Respuesta en frecuencia y geometría de polos y ceros I

$$H(z) = b_0 \frac{(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_K)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_K)}$$

$$= b_0 \frac{\prod_{l=1}^K z - c_l}{\prod_{k=1}^K z - p_k}$$

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$= b_0 \frac{(r_1 e^{j\phi_1})(r_2 e^{j\phi_2}) \dots (r_K e^{j\phi_K})}{(d_1 e^{j\theta_1})(d_2 e^{j\theta_2}) \dots (d_K e^{j\theta_K})}$$

$$= b_0 \frac{\prod_{l=1}^K r_l e^{j\phi_l}}{\prod_{k=1}^K d_k e^{j\theta_k}}$$

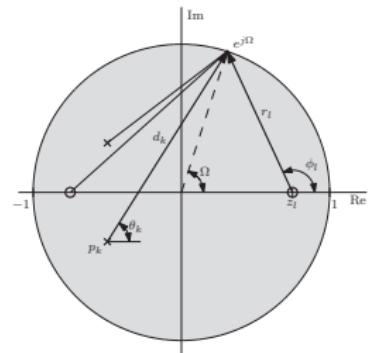
$$= b_0 \frac{r_1 r_2 \dots r_K}{d_1 d_2 \dots d_K} e^{j(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_K) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_K)}$$

$$|H(\Omega)| = |b_0| \frac{r_1 r_2 \dots r_K}{d_1 d_2 \dots d_K}$$

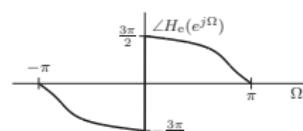
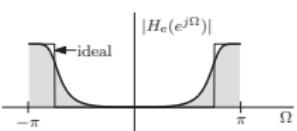
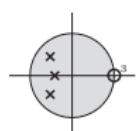
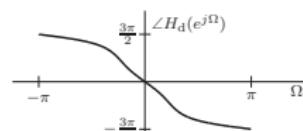
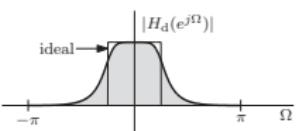
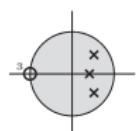
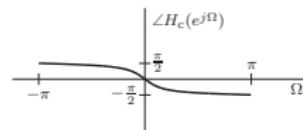
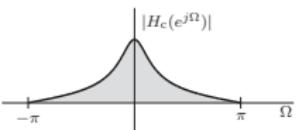
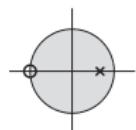
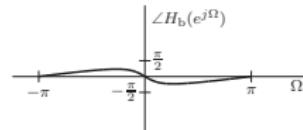
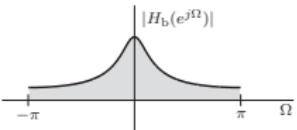
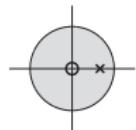
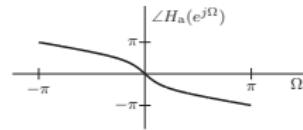
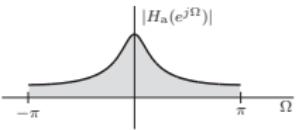
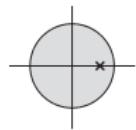
$$= |b_0| \frac{\prod_{l=1}^K r_l}{\prod_{k=1}^K d_k}$$

$$\angle H(\Omega) = \angle b_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_K) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_K)$$

$$= \angle b_0 + \sum_{l=1}^K \phi_l - \sum_{k=1}^K \theta_k$$



Respuesta en frecuencia y geometría de polos y ceros II



Sistema inverso I

Sea un sistema descripto por una función transferencia dada por $H(z)$. El sistema inverso es aquel que cumple:

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1, \quad g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

El sistema inverso $H_i(z)$ se define entonces como:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Es claro que tenemos:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}, \quad H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

Vemos que los polos de $H(z)$ se convierten en los ceros de $H_i(z)$ y viceversa.

Es claro, por la propiedad de convolución, que la región de convergencia de $H_i(z)$ tiene que tener solapamiento con la correspondiente a $H(z)$ para poder definir el sistema inverso.

Sistema inverso II

Supongamos un sistema dado por

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$\text{ROC } \{H(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0.5\}$$

El sistema inverso:

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

Las posibles ROC para este sistema son:

$$\text{ROC}_1 \{H_i(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}, \text{ Sistema causal e inestable}$$

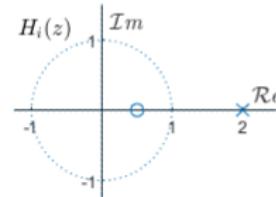
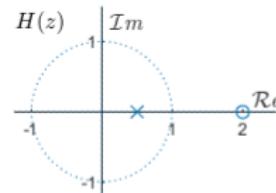
$$\text{ROC}_2 \{H_i(z)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, \text{ Sistema no causal y estable}$$

- Si $H(z)$ es causal con ceros en c_k $k = 1, 2, \dots, M$, el sistema inverso será causal si la ROC asociada con el mismo es:

$$\text{ROC } \{H_i(z)\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \max_k |c_k| \right\}$$

- Además será estable si dicha ROC contiene al círculo unidad. Ello ocurrirá si:

$$\max_k |c_k| < 1$$



Sistemas pasatodo en tiempo discreto I

Un tipo de sistemas LTI importantes son los sistemas pasatodo. Consideraremos un sistema dado por:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Asumiendo que la ROC incluye al círculo unidad podemos escribir:

$$H_{ap}(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = H_{ap}(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega} \frac{1 - \alpha^* e^{j\Omega}}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

Es fácil ver que $|H_a(e^{j\Omega})| = 1 \forall \Omega \in [0, 2\pi]$. Vemos que este sistema tiene un cero en $z = 1/\alpha^*$ y un polo en $z = \alpha$!! Para que el sistema pasatodo sea estable y causal debe ser $|\alpha| < 1$

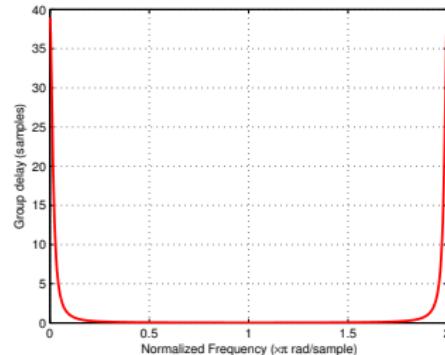
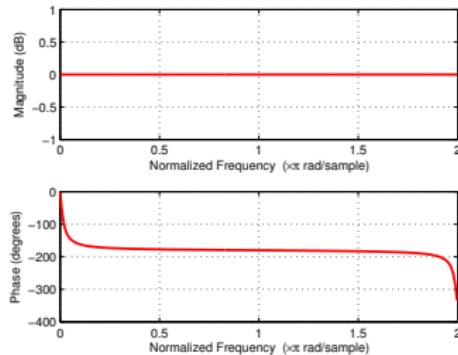
Podemos considerar sistemas pasatodo de mayor orden poniendo en cascada varios de los sistemas pasatodos de orden 1 (con polos y ceros reales) y sistemas de orden 2 (con polos y ceros complejos conjugados) para que la respuesta al impulso sea real:

$$H_{ap}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (z^{-1} - \alpha_k) \prod_{k=1}^{M_2} (z^{-1} - \beta_k) (z^{-1} - \beta_k^*)}{\prod_{k=1}^{N_1} (z^{-1} - \alpha_k) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \beta_k z^{-1}) (1 - \beta_k^* z^{-1})}$$

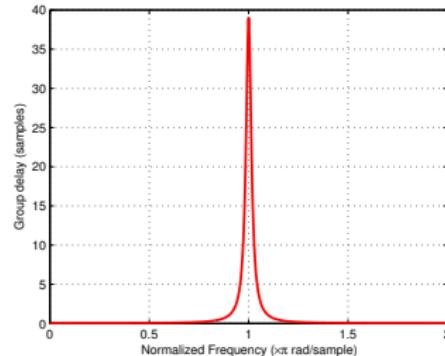
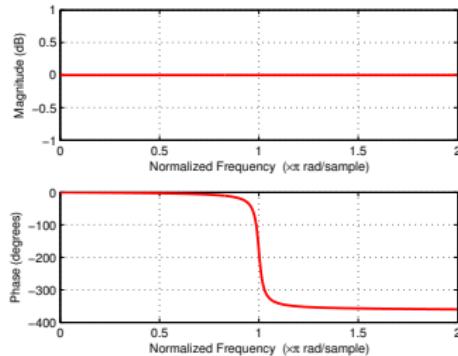
donde $|\alpha_k| < 1$ y $|\beta_k| < 1$ para que el sistema sea estable y causal.

Sistemas pasatodo en tiempo discreto II

Sea un sistema pasatodo simple con polo en $z = 0.95$



Sea un sistema pasatodo simple con polo en $z = -0.95$



Sistemas de fase mínima I

Sea un sistema cuya transferencia vale $H(z)$. Definiremos la operación de *paraconjugación* sobre $H(z)$ como:

$$\tilde{H}(z) \equiv H^* \left(\frac{1}{z^*} \right), \text{ ROC} \left\{ \tilde{H}(z) \right\} = \frac{1}{\text{ROC} \{ H(z) \}}$$

Si $H(z)$ tiene transferencia racional:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

tenemos (asumiendo que $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{H}(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* z)}$$

Vamos a definir la función $G(z)$ como

$$G(z) \equiv H(z)\tilde{H}(z) = H(z)H^* \left(\frac{1}{z^*} \right), \text{ ROC} \{ G(z) \} \supseteq \text{ROC} \{ \tilde{H}(z) \} \cap \text{ROC} \{ H(z) \}$$

Usando la propiedad de reflexión temporal y la de convolución vemos que
 $g[n] = h[n] * h^*[-n]!!$

Sistemas de fase mínima II

Es claro que tenemos (para $H(z)$ racional):

$$G(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)}$$

- Los polos y ceros aparecen en pares *recíprocos conjugados*. Si c_k es un cero entonces $1/c_k^*$ es un cero. Lo mismo ocurre para los polos.
- Si un polo o cero está en el interior del círculo unidad, su par recíproco conjugado estará fuera del círculo unidad. Si un polo o cero está sobre el círculo unidad su par recíproco conjugado aparecerá en la misma posición teniendo en forma efectiva un polo o cero doble.
- Es fácil ver que, si la ROC de $G(z)$ incluye al círculo unidad (es fácil ver que ello ocurre si $H(z)$ es estable con lo cual la ROC de $G(z)$ es un anillo que contiene a $|z| = 1$. **Verificarlo!!**) podemos escribir:

$$G(e^{j\Omega}) = G(z)|_{z=e^{j\Omega}} = |H(e^{j\Omega})|^2$$

La transformada de Fourier de $g[n]$ es positiva e igual a la ganancia al cuadrado del sistema descripto por $h[n]$. De hecho se puede pensar en $G(z)$ como la continuación analítica de $|H(e^{j\Omega})|^2$ fuera de $|z| = 1$.

Sistemas de fase mínima III

Supongamos que tenemos un sistema $H(z)$ estable con transferencia racional. Dado $|H(e^{j\Omega})|^2$, o lo que es lo mismo, $G(z)$ (gracias a que uno implica el otro como discutimos arriba) podemos obtener información sobre $H(e^{j\Omega})$.

- Si $H(z)$ es además causal, sabemos que sus polos están dentro del círculo unidad. Ello implica que $G(z)$ tendrá esos polos y los correspondientes recíprocos conjugados (que estarán fuera de $|z| = 1$).
- De esta forma, teniendo $G(z)$ podemos identificar de ella los polos de $H(z)$ en forma única!!
- En los ceros de $G(z)$ están también los ceros de $H(z)$ (y sus recíprocos conjugados!). Sin embargo, con las restricciones de causalidad y estabilidad no tenemos seguridad cuales de los ceros de $G(z)$ corresponden a los de $H(z)$!! Entonces no podemos reconstruir $H(z)$ a partir de $G(z)$!!.
- Si $H(z)$ es anticausal los argumentos son similares. Podemos identificar los polos de $H(z)$ (que están fuera de $|z| = 1$) pero no los ceros!! De nuevo no podemos reconstruir $H(z)$ a partir de $G(z)$!!

Sin embargo, si imponemos la condición de que $H(z)$ además de causal y estable (anticausal y estable) tiene inverso estable y causal (estable y anticausal) podemos reconstruir $H(z)$ en forma única (salvo un factor de escala) a partir de $|H(e^{j\Omega})|$!! Eso significa que un sistema causal, estable (anticausal, estable) con inverso estable y causal (estable y anticausal) queda únicamente especificado por su ganancia $|H(e^{j\Omega})|$ (la ganancia determina la fase)!!

Sistemas de fase mínima IV

Consideremos que tenemos

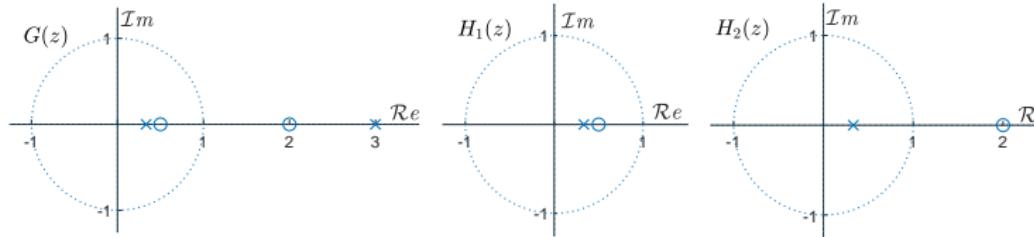
$$G(z) = H(z)\tilde{H}(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z\right)}, \text{ ROC } \{G(z)\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} < |z| < 3 \right\}$$

Supogamos que sabemos que el sistema $H(z)$ es estable y causal. De esta forma el polo de $G(z)$ que corresponde a $H(z)$ es $p_1 = \frac{1}{3}$. Sin mayores precisiones las dos posibles transferencias para $H(z)$ son:

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Es claro que, si además requerimos que el inverso de $H(z)$ sea estable y causal debe ser necesariamente:

$$H(z) = H_1(z)$$



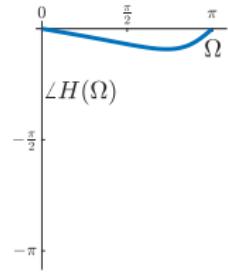
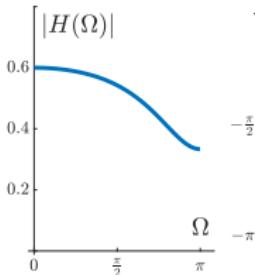
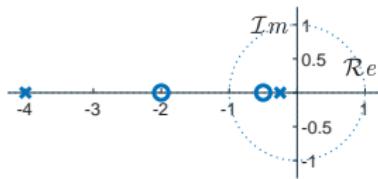
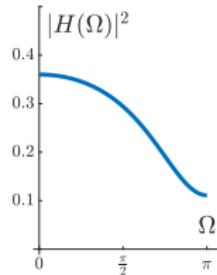
Sistemas de fase mínima V

Supongamos que deseamos encontrar la función de transferencia $H(z)$ de fase mínima que cumple $|H(\Omega)|^2 = \frac{5+4\cos(\Omega)}{17+8\cos(\Omega)}$. Entonces:

$$\begin{aligned}|H(\Omega)|^2 &= \frac{5 + 2e^{j\Omega} + 2e^{-j\Omega}}{17 + 4e^{j\Omega} + 4e^{-j\Omega}} \\&= \frac{5 + 2z + 2z^{-1}}{17 + 4z + 4z^{-1}} = \frac{2 + 5z + 2z^2}{4 + 17z + 4z^2} = \frac{(1 + 2z)(2 + z)}{(1 + 4z)(4 + z)}\end{aligned}$$

Tomamos las raíces con $|z| < 1$

$$H(z) = \frac{1 + 2z}{1 + 4z}$$



Sistemas de fase mínima VI

Algunos comentarios:

- Si el sistema de fase mínima $H(z)$ queda compuesta en forma única por todos los polos y ceros de $G(z)$ dentro del círculo unidad con su ROC dada por

$$\text{ROC}\{H(z)\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \max_{k:|p_k|<1} |p_k|, \quad p_k \text{ polos de } G(z) \right\}$$

- También se pueden definir los sistemas de *fase máxima*. Son aquellos sistemas estables y anticausales cuyos polos y ceros se encuentran fuera del círculo unidad. De esta forma, el sistema inverso a un sistema de fase máxima es también estable y anticausal. Dichos sistemas también quedan caracterizados completamente sólo conociendo $|H(e^{j\Omega})|$ y quedan compuestos en forma única por todos los polos y ceros de $G(z)$ fuera del círculo unidad con su ROC dada por

$$\text{ROC}\{H(z)\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \min_{k:|p_k|>1} |p_k|, \quad p_k \text{ polos de } G(z) \right\}$$

- Es posible probar que cualquier sistema $H(z)$ con transferencia racional (totalmente arbitrario) se puede factorizar como

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

donde $H_{min}(z)$ es un sistema de fase mínima y $H_{ap}(z)$ es un sistema pasa todo. Además $|H(e^{j\Omega})| = |H_{min}(e^{j\Omega})|$.

Sistemas de fase lineal generalizada I

Ya sabemos que cuando se quiere hacer procesamiento de señales con sistemas LTI, muchas veces lo que queremos es que las señales a filtrar pasen sin distorsión en una determinada banda de frecuencias

- La ganancia $|H(e^{j\Omega})|$ debe ser aproximadamente constante en dicha banda de frecuencias.
- La fase debe ser cero o lineal en dicha banda de frecuencias.

De la misma forma que lo definimos para sistemas de tiempo continuo, una medida de la dispersión introducida por la fase de un sistema se da por medio del *retardo de grupo* (definido para la *fase extendida*):

$$\tau(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega} \arg H(e^{j\Omega})$$

La fase de un sistema de tiempo discreto será lineal sí y sólo sí:

$$\tau(\Omega) = \alpha$$

La respuesta en frecuencia de un sistema con fase lineal se puede escribir como:

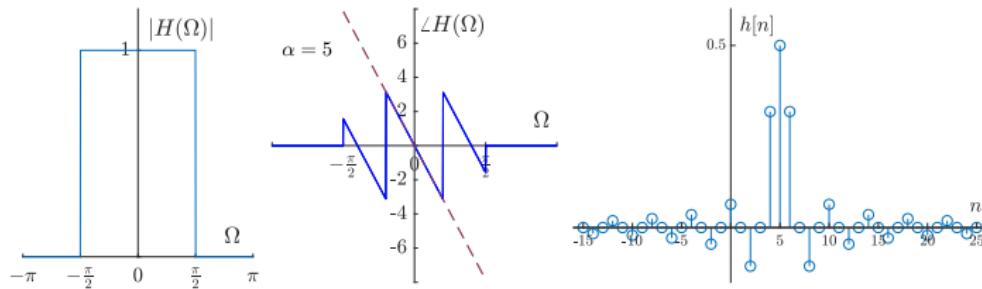
$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{-j\Omega\alpha}$$

Sistemas de fase lineal generalizada II

Supongamos que

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega\alpha} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \longleftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\Omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)}$$

Notar que si $2\alpha \in \mathbb{Z}$ es claro que: $h[n] = h[2\alpha - n]$



De hecho se puede probar que todo sistema de fase lineal con retardo de grupo $\tau(\Omega) = \alpha$ y $2\alpha \in \mathbb{Z}$ satisface la siguiente condición de simetría en la respuesta al impulso

$$h[n] = h[2\alpha - n]$$

Sistemas de fase lineal generalizada III

Es posible ser un poco más general y definir un sistema de *fase lineal generalizada* como

$$H(e^{j\Omega}) = A(e^{j\Omega})e^{-j(\alpha\Omega + \beta)}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A(e^{j\Omega})$ es una función real que puede tomar valores positivos y negativos. Notar que a pesar que $A(e^{j\Omega})$ introduce saltos de fase de π cada vez que dicha función cambia de polaridad, ello no supone un problema. De hecho para este caso también tenemos

$$\tau(\Omega) = \alpha$$

De esta forma los sistemas de fase lineal generalizada no presentan tampoco distorsión de fase (y engloban como caso particular a los sistemas de fase lineal). Es posible probar que una condición necesaria sobre la respuesta de un sistema de fase lineal generalizada es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\Omega(n - \alpha) + \beta) = 0, \quad \forall \Omega$$

Dicha ecuación no es una condición suficiente para encontrar un sistema de fase lineal generalizada. Además no es fácil de utilizar.

Sistemas de fase lineal generalizada IV

Sin embargo, tenemos el siguiente teorema (que no probaremos):

Teorema

Un filtro $h[n]$ real, causal, estable y con transferencia racional es de fase lineal generalizada si y sólo si es FIR y

$$h[n] = \pm h[N - n]$$

donde $N + 1$ es el largo de la respuesta al impulso $h[n]$.

Algunas aclaraciones:

- Notar que el teorema da condiciones necesarias y suficientes para obtener sistemas de fase lineal generalizada. Si queremos que dichos sistemas sean reales, causales, estables y su transferencia sea racional, necesariamente deben ser FIR y tener la simetría mencionada en la respuesta al impulso. No hay forma de salir estas condiciones!!
- Esto no significa que no existan sistemas IIR que sean reales, causales y estables y tengan fase lineal generalizada. Sin embargo, dichos sistemas no tendrán transferencia racional y por ende no se podrán implementar por medio de una ecuación en diferencias a coeficientes constantes. Eso claramente les resta mucha utilidad!!
- En la práctica no es una limitación importante tener que restringirnos a sistemas LTI FIR para implementar sistemas con fase lineal generalizada!!

Sistemas de fase lineal generalizada V

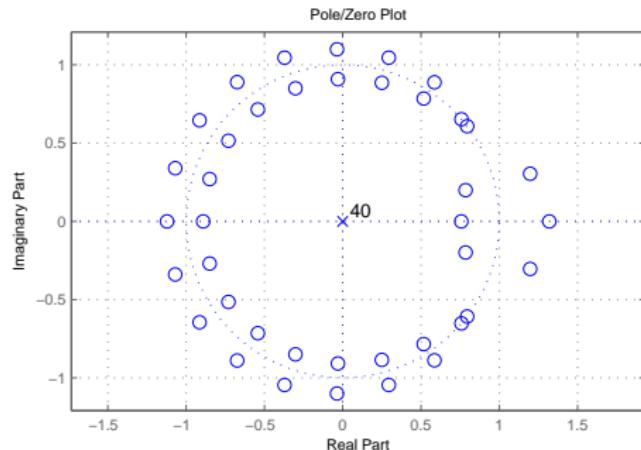
Existen 4 clases de sistemas con fase lineal:

- Tipo I: $h[n] = h[N - n]$ con N par.
- Tipo II: $h[n] = h[N - n]$ con N impar.
- Tipo III: $h[n] = -h[N - n]$ con N par.
- Tipo IV: $h[n] = -h[N - n]$ con N impar.

Podemos ver fácilmente que estas condiciones implican

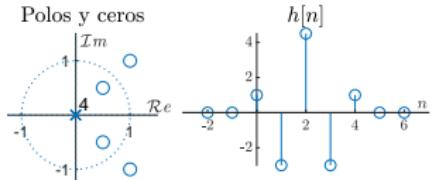
$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

Si z_0 es cero entonces $1/z_0$ es cero!!

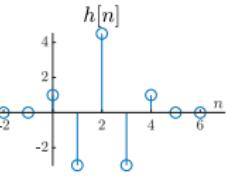


Sistemas de fase lineal generalizada VI

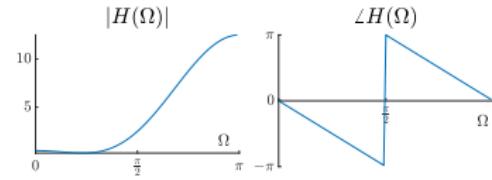
Polos y ceros



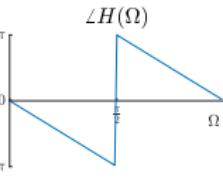
$h[n]$



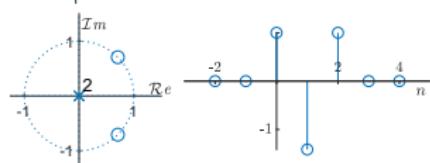
$|H(\Omega)|$



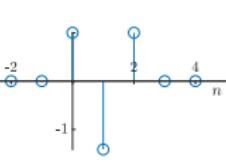
$\angle H(\Omega)$



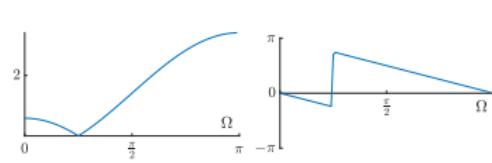
Polos y ceros



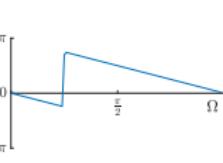
$h[n]$



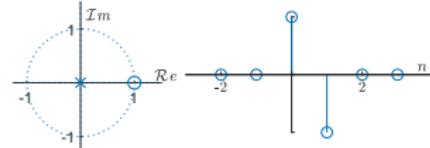
$|H(\Omega)|$



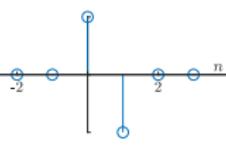
$\angle H(\Omega)$



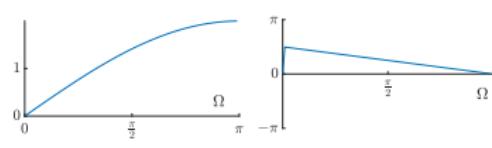
Polos y ceros



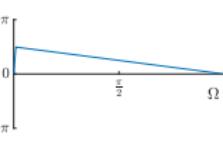
$h[n]$



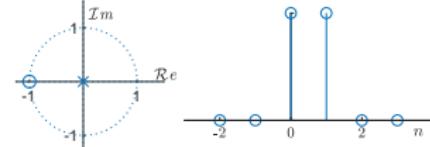
$|H(\Omega)|$



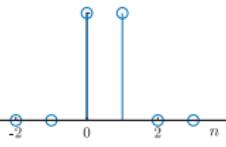
$\angle H(\Omega)$



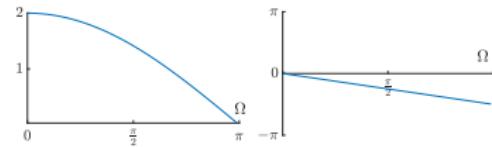
Polos y ceros



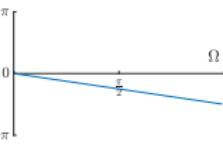
$h[n]$



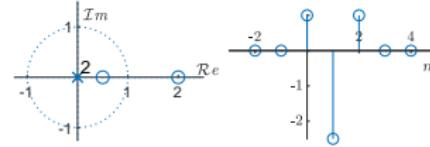
$|H(\Omega)|$



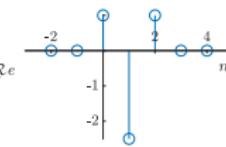
$\angle H(\Omega)$



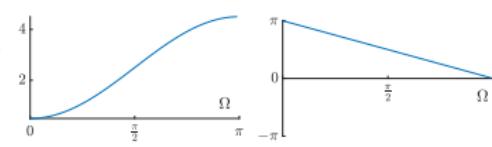
Polos y ceros



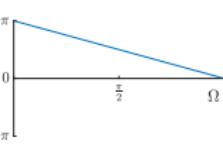
$h[n]$



$|H(\Omega)|$



$\angle H(\Omega)$



Respuesta en frecuencia de los sistemas tipo I

$$h[n] = h[N - n]; \quad N \text{ par}; \quad \beta = 0$$

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\Omega n} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \sum_{n=0}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} + h\left[\frac{N}{2}\right] + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ h\left[\frac{N}{2}\right] + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^0 \textcolor{blue}{h[N-n]} e^{-j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \cos\left(\Omega\left(\frac{N}{2} - n\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

Se pude demostrar que la **amplitud** de $H(\Omega)$ es **simétrica**.

Respuesta en frecuencia de los sistemas tipo II

$$h[n] = h[N - n]; \quad N \text{ impar}; \quad \beta = 0$$

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\Omega n} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \sum_{n=0}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} + \sum_{n=\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2} - n)} + \sum_{n=\frac{N}{2} - \frac{1}{2}}^0 h[N - n] e^{-j\Omega (\frac{N}{2} - n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}} h[n] \cos \left(\Omega \left(\frac{N}{2} - n \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

Se pude demostrar que la **amplitud** de $H(\Omega)$ es **simétrica**. Además, $H(\pi) = 0$ no siendo utilizados como filtros pasa altos ni rechaza banda.

Respuesta en frecuencia de los sistemas tipo III

$$h[n] = -h[N-n]; \quad N \text{ par}; \quad h\left(\frac{N}{2}\right) = 0; \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\Omega n} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{j\Omega(\frac{N}{2}-n)} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h[n] e^{j\Omega(\frac{N}{2}-n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{j\Omega(\frac{N}{2}-n)} + \sum_{n=\frac{N}{2}-1}^0 h[N-n] e^{-j\Omega(\frac{N}{2}-n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{j\Omega(\frac{N}{2}-n)} - \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{-j\Omega(\frac{N}{2}-n)} \right\} \\ &= e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \Omega \frac{N}{2}\right)} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin\left(\Omega\left(\frac{N}{2} - n\right)\right) \right\} \end{aligned}$$

Se pude demostrar que la **amplitud** de $H(\Omega)$ es **antisimétrica**. Además, $H(0) = H(\pi) = 0$ no siendo utilizados como filtros pasa altos ni pasa bajos ni rechaza banda.

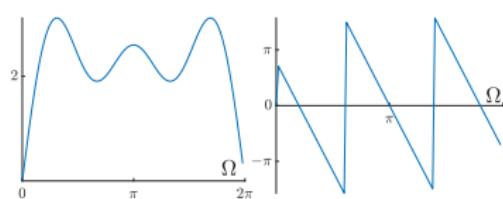
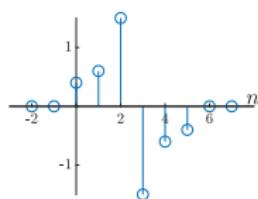
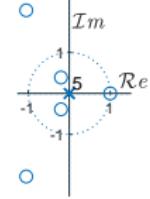
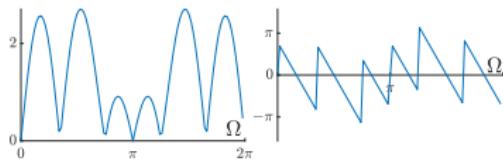
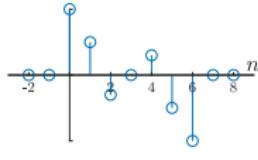
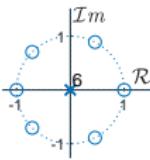
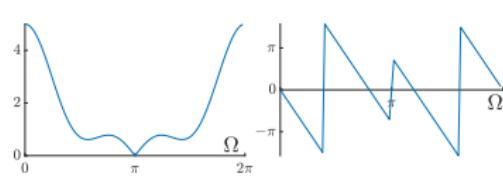
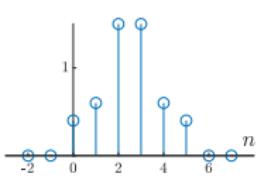
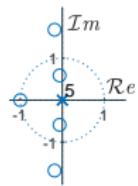
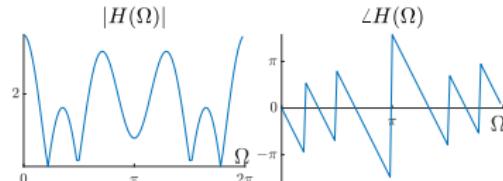
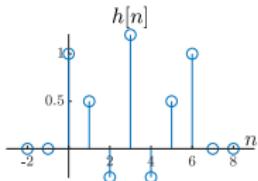
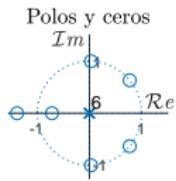
Respuesta en frecuencia de los sistemas tipo IV

$$h[n] = -h[N-n]; \quad N \text{ impar}; \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\Omega n} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \sum_{n=0}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2}-n)} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2}-n)} + \sum_{n=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}^N h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2}-n)} \right\} \\ &= e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} h[n] e^{j\Omega (\frac{N}{2}-n)} + \sum_{n=\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}^N h[N-n] e^{-j\Omega (\frac{N}{2}-n)} \right\} \\ &= e^{-j(\frac{1}{2}\pi - \Omega \frac{N}{2})} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} h[n] \sin \left(\Omega \left(\frac{N}{2} - n \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

Se pude demostrar que la **amplitud** de $H(\Omega)$ es **antisimétrica**. Además, $H(0) = 0$ no siendo utilizados como filtros pasa bajos ni rechaza banda.

Ejemplos



Realización de sistemas LTI en tiempo discreto I

Nos concentraremos en sistemas con transferencia racionales definidos por:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

En el dominio del tiempo:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

La pregunta es como implementar esto de la forma más eficiente posible?

La elección de una forma particular de realización de un sistema dependerá de varios factores.

- Modo de funcionamiento: tiempo real o *batch*.
- Complejidad computacional: típicamente número de multiplicadores.
- Requerimientos de memoria: elementos necesarios para almacenar parámetros de los sistemas, entradas, salidas, etc.
- Efectos de precisión finita: fundamentalmente cuando los sistemas se realizan con plataformas que trabajan en punto fijo.
- Otras consideraciones: paralelización, modularidad e integración VLSI, etc.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto II

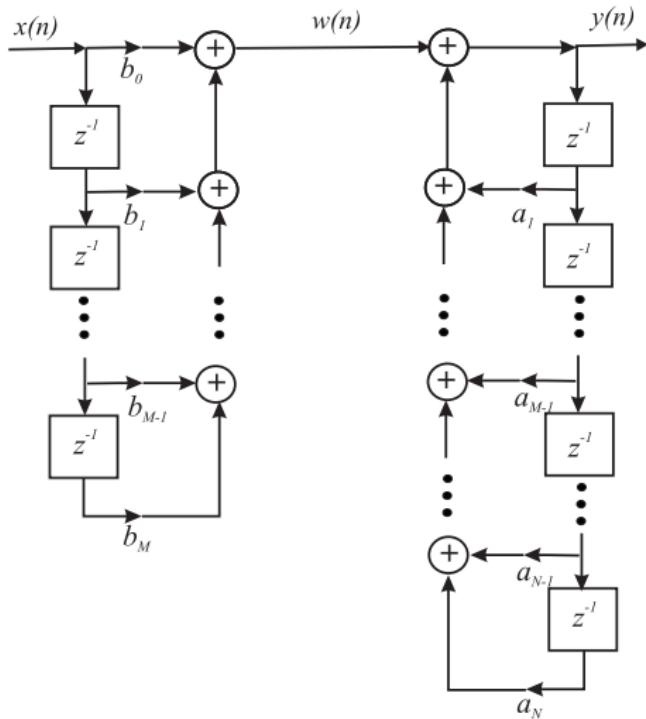
Existen muchas formas de realizaciones de sistemas en tiempo discreto:

- Formas directas: formas en cascada y en paralelo.
- Formas traspuestas: formas en cascada y en paralelo.
- Frequency sampling structures.
- Realización mediante variables de estado.
- Estructuras lattice y lattice-ladder.
- Wave digital filters.
- Técnicas de aritmética distribuida.

En general no existe una técnica ideal: la elección de una en particular se hará en función de cual de los factores explicados más arriba tiene más peso en nuestra plataforma de implementación.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto III

La formas directas de implementación se pueden esquematizar como



Esta estructura se denomina forma directa tipo I y requiere:

- $N + M$ multiplicadores.
- $N + M$ sumadores simples.
- $N + M$ elementos de memoria dinámica (señales).
- $N + M$ elementos de memoria estática (coeficientes).

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto IV

Los diagramas en bloques se pueden cambiar sin modificar la función transferencia total. Por ejemplo la forma directa tipo I obedece a

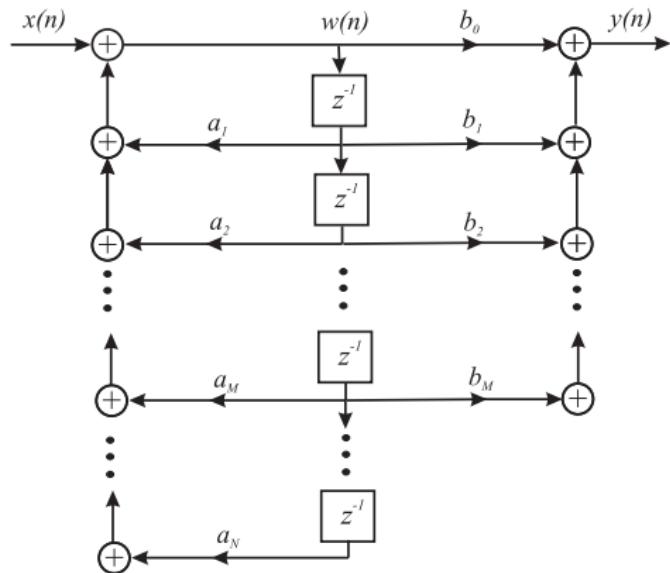
$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

Esto puede escribirse también:

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)$$

Esto da lugar a la forma directa tipo II.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto V



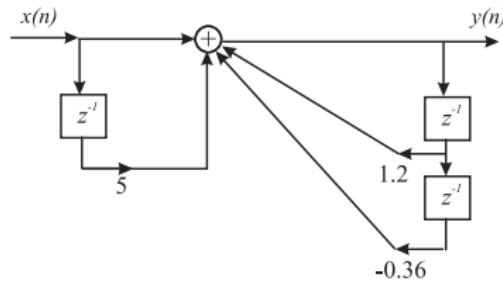
Esta estructura se denomina forma directa tipo II y requiere:

- $N + M$ multiplicadores.
- $N + M + 1$ sumadores simples.
- $\max \{N, M\}$ elementos de memoria dinámica (señales).
- $N + M$ elementos de memoria estática (coeficientes).

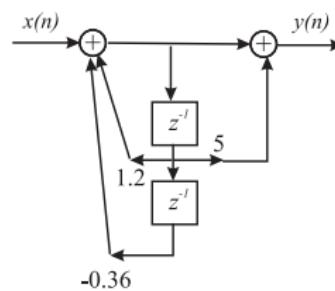
Realización de sistemas LTI en tiempo discreto VI

Ejemplo:

$$H(z) = \frac{1 + 5z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.36z^2}$$



Forma directa tipo I



Forma directa tipo II

Además de tener ciertas diferencias en cuanto a los recursos necesarios estas dos formas de realizar el sistema pueden tener diferencias cuando se introducen los efectos de cuantización.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto VII

Estas formas pueden utilizarse para generar dos implementaciones básicas para sistemas IIR usando secciones de segundo orden

- Formas en cascada
- Formas en paralelo

El uso de estas implementaciones tienen consecuencias importantes en el comportamiento de los filtros cuando son implementados en precisión finita.

En el caso de las formas en cascada la idea es factorizar $H(z)$ (con coeficientes reales) como:

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - b_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

En esta expresión:

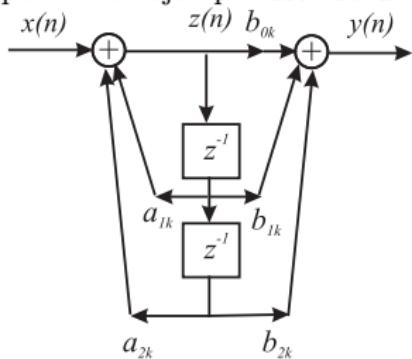
- Existen M_1 y N_1 ceros y polos reales.
- Existen M_2 y N_2 ceros y polos conjugados.
- $M = M_1 + 2M_2$ y $N = N_1 + 2N_2$.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto VIII

Suponiendo que $M \leq N$ y combinando los factores reales y los pares complejos conjugados en factores de segundo orden podemos escribir:

$$H(z) = \prod_{k=1}^L \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

con $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Si existen un número impar de ceros o polos reales tendríamos para alguno de los factores $b_{2k} = 0$ y/o $a_{2k} = 0$. Cada una de las secciones de segundo orden se puede implementar usando formas directas tipo I y tipo II. Por ejemplo usando una forma directa tipo II para cada sección:



$$z[n] = a_{1k}z[n-1] + a_{2k}z[n-2] + x[n]$$

$$y[n] = b_{0k}z[n] + b_{1k}z[n-1] + b_{2k}z[n-2]$$

$$k = 1, \dots, L$$

Cuando estas secciones se encadenan como parte de un sistema mayor se puede ver fácilmente que para cada una de ellas la entrada $x[n]$ se corresponde con la salida de la sección anterior.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto IX

Algunos comentarios:

- Dado que las formas directas tipo II requieren el número mínimo de multiplicaciones y elementos de memoria lo mismo puede decirse de el filtro total generado con esas secciones de segundo orden.
- En principio se podrían usar secciones de otros órdenes (por ej. secciones de cuarto orden). La elección de secciones de segundo orden viene dictada por consideraciones de facilidad de análisis (efectos debido al uso de precisión finita) e implementación.
- Existen $L!$ formas diferentes de ordenar las diferentes secciones de segundo orden. Cualquiera de dichos ordenamientos da lugar a la misma transferencia total. Sin embargo el comportamiento cuando se incluyen los efectos de precisión finita pueden ser muy diferentes.
- En el caso analizado cada estructura de segundo orden requiere 5 multiplicaciones. Es posible implementarlas con sólo 4 multiplicaciones (imponiendo $b_{0k} = 1$ y multiplicando por una constante C apropiada la salida total del sistema). A pesar de dicho ahorro en capacidad de cálculo generalmente se implementan las versiones con 5 multiplicaciones debido a que tienen un mejor comportamiento cuando la implementación se realiza en precisión finita.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto X

Para el caso de una implementación en paralelo la idea es utilizar fracciones simples para representar la transferencia racional $H(z)$ como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_1} A_k z^{-1} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_3} \frac{D_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - f_k z^{-1})(1 - f_k^* z^{-1})},$$

donde $N_1 = M - N$ y $N = N_2 + 2N_3$. Los polos reales se pueden agrupar en parejas de forma tal de obtener:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_1} A_k z^{-1} + \sum_{k=1}^L \frac{(b_{0k} + b_{1k} z^{-1})}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}},$$

donde $L = \lfloor (N + 1)/2 \rfloor$.

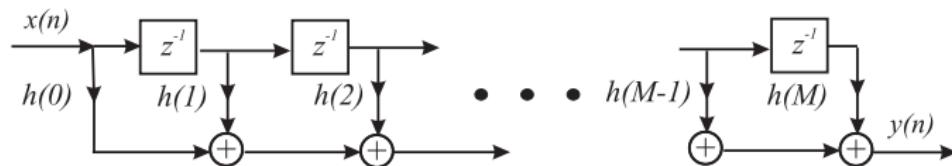
Las implementaciones en cascada pueden tener ciertas ventajas como ser una mayor robustez a errores debidos a overflows por sumas cuando se trabaja en complemento a 2 y el número de secciones es grande. No obstante, en general no es posible prever con facilidad el efecto de la cuantización de los coeficientes en la transferencia total.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto XI

Podemos aplicar las estructuras anteriores al caso de un sistema FIR:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-k}$$

La formas directas tipo I y tipo II se reducen a la misma estructura:



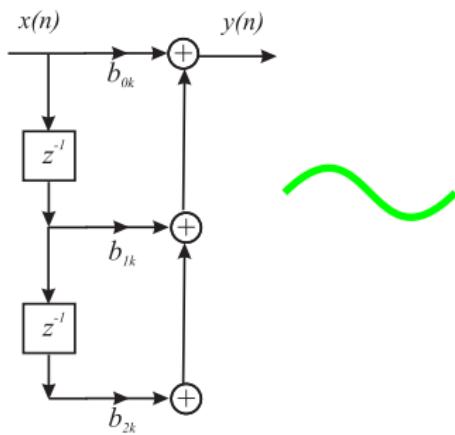
- En general esta estructura se la conoce también como filtro transversal o línea de retardo.
- Se requieren M elementos de memoria dinámica, $M + 1$ de memoria estática y $M + 1$ multiplicaciones.
- Muchos μDSP poseen un set de instrucciones optimizado para la implementación de estas estructuras directamente.

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto XII

Es claro que es posible también escribir:

$$H(z) = \prod_{k=1}^L (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}),$$

donde $L = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$. Si M es impar alguno de los b_{2k} será igual a cero. Cada sección se puede representar como:



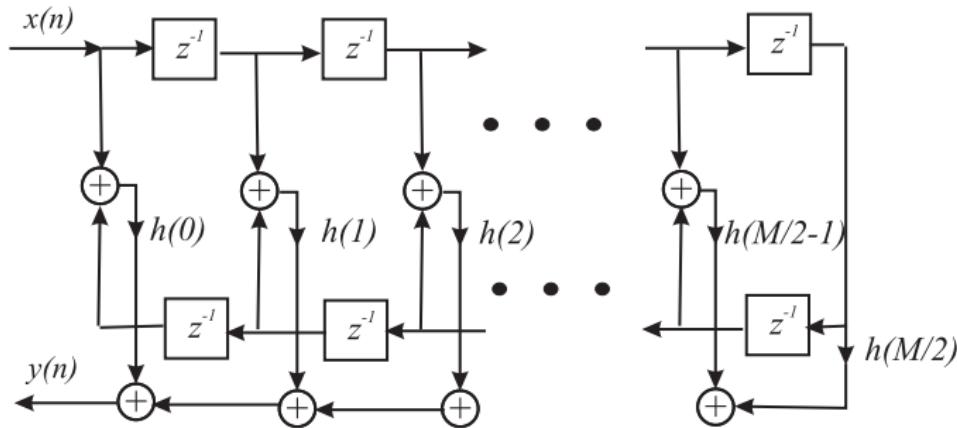
Para esta estructura valen los mismos comentarios que para el caso IIR correspondiente!!

Realización de sistemas LTI en tiempo discreto XIII

Se sabe que un sistema estable y causal será de fase lineal generalizada sí y solo si es FIR y :

$$h[M-n] = h[n] \quad \text{ó} \quad h[M-n] = -h[n] \quad n = 0, 1, \dots, M$$

Por ejemplo si M es par esta simetría se puede explotar para tener:



Realización de sistemas LTI en tiempo discreto XIV

Es importante notar que para filtros con fase lineal generalizada los requerimientos computacionales son:

- M elementos de memoria dinámica y $M/2 + 1$ elementos de memoria estática (M par) y $(M + 1)/2$ elementos de memoria estática (M impar).
- $M/2 + 1$ multiplicadores (M par) y $(M + 1)/2$ multiplicadores (M impar).

Es posible explotar también la simetría inducida por la fase lineal generalizada para generar estructuras en cascada con sistemas de primer, segundo y cuarto orden que también tienen fase lineal generalizada. De esta forma un sistema de fase lineal generalizada se puede obtener como una estructura modular en cascada de sistemas de fase lineal generalizada simples!!

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Pares transformados comunes (Tabla 3.1 de Oppenheim and Schafer).
- Transformada inversa y propiedades (Secciones 3.3 y 3.4 de Oppenheim and Schafer).
- Evaluación geométrica de la transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros (Sección 10.4 de Oppenheim and Willsky).
- Álgebra de la función del sistema y representación en diagrama de bloques (Sección 10.8 de Oppenheim and Willsky).
- Transformada Z unilateral (Sección 10.9 de Oppenheim and Willsky).
- Respuesta en frecuencia de funciones de transferencia racionales (Sección 5.3 de Oppenheim and Schafer).
- Sistemas pasatodo (Sección 5.5 de Oppenheim and Schafer).
- Sistemas de fase mínima (Sección 5.6 de Oppenheim and Schafer).
- Sistemas de fase lineal generalizada (Sección 5.7 de Oppenheim and Schafer).

Lectura optativa

- Estructuras de sistemas en tiempo discreto (Capítulo 6 de Oppenheim and Schafer).

Algunos ejercicios I

- 1** Ejercicios 3.6 - 9.16 de Oppenheim and Schafer.
- 2** Ejercicios 3.34 - 3.41 de Oppenheim and Schafer.
- 3** Ejercicios 3.47 - 3.51 de Oppenheim and Schafer.
- 4** Ejercicios 5.4 - 5.15 de Oppenheim and Schafer.
- 5** Ejercicios 5.29 - 5.37 de Oppenheim and Schafer.
- 6** Ejercicios 5.43 - 5.55 de Oppenheim and Schafer

Tiempo de consultas

¿Preguntas?