$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{k+1} \dots = 0 \end{cases}$$

$$-2\delta(n+1)$$

Prop. desplazamiento temporal

$$a_k = -\frac{2}{T} \cdot e^{jk\omega_0 \cdot \tau \cdot 1} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

1. Obtener la representación en serie de Fourier de tiempo continuo de las siguientes señales de tiempo continuo y determinar su período fundamental:

(a) $1 + e^{j\frac{\pi}{4}t} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}t} + e^{j\frac{4\pi}{5}t}$ **(b)** $2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$

(a) $1 + e^{j\pi/4\,t} + 4e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{j\frac{4\pi}{5}t} = x(t)$

↓ escribir a $x(t)$ como serie de Fourier

$x(t) = \sum_k a_k e^{j\frac{2\pi k t}{T}}$, $a_x = 0 \to cte$

El ej. esta diseñado de manera de hallar un atajo.

$= 1 + 1\,e^{j\frac{2\pi 5 t}{40}} + 4\,e^{-j\frac{2\pi . 8 t}{40}} + 1\,e^{j\frac{2\pi . 16 t}{40}}$

a_0 a_5 a_{-8} a_{16}

(b) $x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\frac{2\pi . 2}{3 . 2} \begin{matrix}\to k \\ \to T\end{matrix}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = \frac{e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)t}}{2} + \frac{e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}\right)t}}{2}$

$\frac{2}{2}\frac{\pi . 5}{3} = \frac{2\pi . 5}{6} \begin{matrix}\to k \\ \to T\end{matrix}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right) = \frac{e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)t}}{2i} - \frac{e^{-i\left(\frac{5\pi}{3}\right)t}}{2i} =$

$T = 6$

$a_0 = 2$ $a_5 = 3/2i$

$a_{-2} = 1/2$ $a_{-5} = -\frac{3}{2i}$

$a_2 = 1/2$

2. Una señal periódica $x(t)$ real de tiempo continuo tiene período $T = 8$ y sus coeficientes de la serie de Fourier no nulos son:

$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = {}^*a_{-3} = 4j$$

Hallar A_k, ϕ_k con $k \in \mathbb{Z}$ de manera que el desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$ puede ser expresado como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k . \cos\underbrace{\left(\frac{2\pi k}{T} t + \phi_k\right)}_{}$$

$$e^{j\frac{2\pi t}{T}} \quad e^{j\varphi_x}$$

$$x(t) = \underbrace{\underbrace{2e^{j\frac{2\pi}{8}t}}_{a_1} + \underbrace{2e^{-j\frac{2\pi}{8}t}}_{a_{-1}}}_{k=1} + \underbrace{\underbrace{4je^{j\frac{2\pi}{8}3t}}_{a_3} - \underbrace{4je^{-j\frac{2\pi}{8}.3t}}_{{}^*a_{-3}}}_{k=3}$$

$$\boxed{\varphi = 0}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$A_1 = A_{-1} = 4$$

$$A_3 = 8j \qquad {}^*A_{-3} = -8j$$

$$e^{i\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} . e^{i\varphi}$$

3. Sea $x(t)$ un tren de pulsos de período T definido en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}) \\ 0 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, -\frac{T_0}{2}) \cup (\frac{T_0}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases}$$

con $T > T_0 > 0$.

(**a**) Calcular utilizando la ecuación de síntesis los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ y escriba los 6 primeros términos de la serie.

(**b**) Graficar el espectro de amplitudes y de fase.

(**c**) Obtener los coeficientes $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_1(t) = x(t-\frac{\pi}{6})$.

(**d**) Obtener los coeficientes $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x_2(t) = x(t)+1$.

(**e**) Calcular utilizando la ecuación de síntesis la representación en serie de Fourier de un tren de impulsos de período T y obtener los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la Serie de Fourier de tiempo continuo de $x(t)$ a partir de la combinación de dos trenes de impulsos de período T desplazados.

a)

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt$$ → Ec. de sintesis

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\left[-\frac{e^{-\frac{T_0}{2}jk\omega_0}}{jk\omega} + \frac{e^{\frac{T_0}{2}jk\omega_0}}{jk\omega}\right] = \frac{2}{Tk\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{T_0 k\omega_0}{2}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{Tk\underset{\to\frac{2\pi}{T}}{\omega}}\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{2}k\underset{\downarrow\ \frac{2\pi}{T}}{\omega_0}\right) = \frac{1}{k\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{T}\cdot k\cdot\pi\right)}{\frac{T_0}{T}}\cdot\frac{T_0}{T_1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\,dt = \frac{T_0}{T}$$

$$\lim_{k\to 0} a_k \quad \frac{1}{k\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{T}k\pi\right)}{\frac{T_0}{T}}\cdot T_0/T \to 1$$

$$= \frac{T_0}{T}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{T}\pi\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{T}\cdot 2\pi\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{T_0}{T}\cdot 3\pi\right)$$