Изучение эффективности ограничительных мер при помощи эпидемиологических моделей на графах

Бишук Антон Юрьевич

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель Зухба А.В.

Москва
2021 г

Граф контактов:

- Вершина графа – человек, а ребро – контакт между людьми.
- Предполагается, что каждая вершина графа может находиться в конечном количестве состояний.
- Состояние системы меняется во времени в соответствии с определенными правилами.

Ограничительные меры:

- Карантин отдельных представителей – ограничительная мера, при которой происходит изолирование инфицированной особи.
- Lockdown – ограничительная мера, при которой вся популяция разделена на небольшие изолированные сообщества.

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda\overline{k}\rho S,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mu\rho + \lambda\overline{k}\rho S,$$

$$\frac{dR}{dt} = \mu\rho.$$

При этом $S + \rho + R = 1$, где

S – доля восприимчивых,

ρ – для инфицированных,

R – доля невосприимчивых,

λ – уровень заражения,

$\overline{k}$ – число контактов с зараженными в единицу времени,

μ – скорость удаления зараженных.

Стандартная практика в период пандемии для остановки распространения эпидемии, вводить lockdown. Однако в ходе моделирования эпидемиологических процессов на графах был замечен эффект, что введение такого ограничения, и несвоевременного его снятия, может привести к усилению распространения эпидемии.

Для анализа роста и спада эпидемии необходимо оценить критический уровень заражения. Его оценка для модели без введения ограничительных мер известна и её доказательство и будет приведено.

1. *Moreno Y., Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks //The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. – 2002. – Т. 26. – №. 4. – С. 521-529.
2. *Pastor-Satorras R.* et al. Epidemic processes in complex networks //Reviews of modern physics. – 2015. – Т. 87. – №. 3. – С. 925.

Def. Критический уровень заражения (эпидемиологический порог) λ_c – значение уровня заражения, такое, что при значении λ меньше него, эпидемия затухает, а при значении λ больше λ_c, эпидемия разрастается.

Def. Средняя связность $\langle k \rangle$ – величина, равная $\sum\limits_k kP(k)$, где $P(k)$ – распределение связности в графе.

Th. В модели SIR критическое значение уровня заражения выражается формулой:

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

Proof.
Передача заболевания в сети описывается следующим образом:

На каждом временном шаге каждый уязвимый узел заражается с вероятностью λ, если он соединен с одним или несколькими зараженными узлами. При этом каждый зараженный индивид удаляется с вероятностью μ, которую без ограничения общности мы положим равной единице.

Чтобы учесть неоднородность, вызванную наличием узлов с различной связностью, мы будем рассматривать величины $\rho_k(t)$, $S_k(t)$ и $R_k(t)$ как функции от времени.

Переменные удовлетворяют условию нормировки:

$$\rho_k(t) + S_k(t) + R_k(t) = 1$$

На уровне среднего поля функции $\rho_k(t)$, $S_k(t)$ и $R_k(t)$ удовлетворяют следующей системе связанных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = -\rho_k(t) + \lambda k S_k(t)\Theta(t) \qquad \frac{dS_k(t)}{dt} = -\lambda k S_k(t)\Theta(t) \qquad \frac{dR_k(t)}{dt} = \rho_k(t)$$

Здесь функция $\Theta(t)$ представляет собой вероятность того, что любой данный контакт, является контактом с зараженным представителем. С учетом того, что вероятность того, что ссылка указывает на узел с s ссылками, пропорциональна $sP(s)$:

$$\Theta(t) = \frac{\sum\limits_k kP(k)\rho_k(t)}{\sum\limits_s sP(s)} = \frac{\sum\limits_k kP(k)\rho_k(t)}{\langle k \rangle}$$

В представленном выражении вероятность того, что ребро указывает на зараженный узел, считается независимой от связности узла, из которого исходит ребро.

Задавшись начальными условиями $R_k(0) = 0$, $\rho_k(0) = \rho_k^0$ и $S_k(0) = 1 - \rho_k^0$ мы полностью определяем модель SIR на любой сложной сети с распределением связности $P(k)$.

Мы будем рассматривать, случай однородного начального распределения зараженных узлов, $\rho_k^0 = \rho^0$. В этом случае в пределе $\rho^0 \to 0$ можно подставить $\rho_k(0) \simeq 0$ и $S_k(0) \simeq 1$.

Тогда второе уравнение модели SIR можно напрямую интегрировать, тем самым получая:

$$S_k(t) = e^{-\lambda k \phi(t)}$$

где вспомогательная функция $\phi(t)$ определяется следующим образом:

$$\phi(t) = \int_0^t \Theta(t) dt = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) R_k(t)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)\rho_k(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)(1 - R_k(t) - S_k(t)) =$$

$$= 1 - \phi(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)S_k(t)$$

Подставляя выражение для $S_k(t)$ переходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 1 - \phi(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)e^{-\lambda k \phi(t)} \qquad (\star)$$

После решения уравнения, мы можем получить общую заболеваемость эпидемией $R(\infty)$ как функцию $\phi_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \phi(t)$. Поскольку $R_k(\infty) = 1 - S_k(\infty)$, имеем:

$$R_\infty = \sum_k P(k)(1 - e)^{-\lambda k \phi_\infty}$$

Для произвольного $P(k)$ для уравнения $\star$ невозможно получить решение в аналитическом виде, поэтому получим оценки «в бесконечном ограничении времени» – по окончании эпидемии. Поскольку мы имеем, что $\rho_k(\infty) = 0$ и, следовательно, $\lim_{t\to\infty} \frac{d\phi(t)}{dt} = 0$, мы получаем из уравнения $(\star)$ следующее самосогласованное уравнение для ϕ_∞:

$$\phi_\infty = 1 - \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)e^{\lambda k\phi_\infty}$$

Значение $\phi_\infty = 0$ всегда является решением. Чтобы иметь ненулевое решение, необходимо выполнение условия:

$$\frac{d}{d\phi_\infty}\left(1 - \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)e^{-\lambda k\phi_\infty}\right)\Bigg|_{\phi_\infty=0} > 1$$

Из этого условия следует:

$$\frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)(\lambda k) = \lambda\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} > 1$$

Это неравенство определяет эпидемический порог:

$$\lambda_c = \frac{\langle k\rangle}{\langle k^2\rangle}$$

Анализ:

Реальные сети всегда имеют конечный размер N и, следовательно, эпидемический порог, зависящий от величины $\langle k \rangle$ и $\langle k^2 \rangle$, который можно легко вычислить как функцию N.

Вывод:

Данная оценка является функцией от структуры графа. Вероятность возникновения проблемы lockdown так же оценивается функцией от структуры графа.

В бакалаврском дипломе одним из исследуемых вопросов является изучение влияния меры lockdown на поведение эпидемии. Использование λ_c даёт возможность получить оценки качественного характера поведения эпидемии: рост и спад.