Discrétisation de l'intégrale $\int_0^1 x(t)^2 x'(t)\,dt$

Problème de départ (section 3.1, page 42)

On considère l'intégrale :

$$\int_0^1 x(t)^2 \cdot x'(t)\,dt$$

avec les conditions aux bornes :

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

Discrétisation de l'intervalle

On divise l'intervalle $[0, 1]$ en trois sous-intervalles égaux, avec les points :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1$$

et on note :

$$x_0 = x(t_0) = 0, \quad x_1 = x(t_1) = x, \quad x_2 = x(t_2) = y, \quad x_3 = x(t_3) = 1$$

Approximation de l'intégrale

On approxime l'intégrale par une somme discrète :

$$\int_0^1 x(t)^2 \cdot x'(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \cdot \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$$

où $\Delta t = \frac{1}{3}$. En développant cela, on obtient :

$$f(x, y) = \left[x_1^2 \cdot \left(\frac{x_1 - x_0}{\frac{1}{3}}\right) + x_2^2 \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{3}}\right) + x_3^2 \cdot \left(\frac{x_3 - x_2}{\frac{1}{3}}\right)\right] \cdot \frac{1}{3}$$

Substitution des points

En remplaçant :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$

on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[x^2 \cdot \left(\frac{x - 0}{\frac{1}{3}}\right) + y^2 \cdot \left(\frac{y - x}{\frac{1}{3}}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1 - y}{\frac{1}{3}}\right)\right] \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left[3x^3 + 3y^3 - 3xy^2 + 3 - 3y\right] \cdot \frac{1}{3} \\ &= x^3 + y^3 - xy^2 + 1 - y \end{aligned}$$

Conclusion

La discrétisation de l'intégrale $\int_0^1 x(t)^2 x'(t)\,dt$ en trois sous-intervalles permet d'obtenir la fonction :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 + 1 - y$$

que l'on peut ensuite utiliser pour des problèmes d'optimisation discrète.

==

Discrétisation avec 4 points (3 intervalles)

On choisit les points :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1$$

et les variables :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$

avec $\Delta t = \frac{1}{3}$.

L'approximation devient :

$$f(x,y) = \left[x^2 \cdot \left(\frac{x-0}{\frac{1}{3}} \right) + y^2 \cdot \left(\frac{y-x}{\frac{1}{3}} \right) + 1 \cdot \left(\frac{1-y}{\frac{1}{3}} \right) \right] \cdot \frac{1}{3}$$

Discrétisation avec 5 points (4 intervalles)

On choisit les points :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = \frac{3}{4}, \quad t_4 = 1$$

et les variables :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1$$

avec $\Delta t = \frac{1}{4}$.

L'approximation devient :

$$f(x,y,z) = \left[x^2 \cdot \left(\frac{x-0}{\frac{1}{4}} \right) + y^2 \cdot \left(\frac{y-x}{\frac{1}{4}} \right) + z^2 \cdot \left(\frac{z-y}{\frac{1}{4}} \right) + 1 \cdot \left(\frac{1-z}{\frac{1}{4}} \right) \right] \cdot \frac{1}{4}$$

====================================

Développement de Taylor quadratique en $(1,2)$

Formule de Taylor quadratique

Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2. Le développement de Taylor quadratique au voisinage d'un point $(\bar{x},\bar{y})$ est donné par :

$$TQ(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) + \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2 + f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2$$

Expressions des dérivées partielles de f

Les dérivées premières et secondes de $f(x,y)$ sont :

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2 - y^2 \\
f_y(x,y) &= -2xy + 3y^2 - 1 \\
f_{xx}(x,y) &= 6x \\
f_{xy}(x,y) &= -2y \\
f_{yy}(x,y) &= -2x + 6y
\end{aligned}$$

Application au point $(1,2)$

Nous considérons maintenant une approximation quadratique au point de base $(1,2)$. On pose :

$$TQ(x,y) = 4 - 1(x-1) + 7(y-2) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + 5(y-2)^2$$

Nous allons identifier les dérivées partielles de f au point $(1,2)$ en comparant terme à terme avec la formule générale :

- Terme constant : $f(1,2) = 4$
- Terme linéaire en $(x-1)$: $f_x(1,2) = -1$
- Terme linéaire en $(y-2)$: $f_y(1,2) = 7$
- Terme quadratique en $(x-1)^2$: $\frac{1}{2}f_{xx}(1,2) = 3 \Rightarrow f_{xx}(1,2) = 6$
- Terme mixte $(x-1)(y-2)$: $f_{xy}(1,2) = -4$
- Terme quadratique en $(y-2)^2$: $\frac{1}{2}f_{yy}(1,2) = 5 \Rightarrow f_{yy}(1,2) = 10$

Conclusion

L'approximation quadratique donnée correspond au développement de Taylor de la fonction f autour du point $(1,2)$, avec les valeurs suivantes :

$$\begin{gathered}
f(1,2) = 4 \\
f_x(1,2) = -1, \quad f_y(1,2) = 7 \\
f_{xx}(1,2) = 6, \quad f_{xy}(1,2) = -4, \quad f_{yy}(1,2) = 10
\end{gathered}$$