La règle des multiplicateurs de Lagrange (page 29)

La *règle des multiplicateurs de Lagrange* est une méthode utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation où l'on cherche à maximiser ou minimiser une fonction sous une contrainte. Cette méthode est particulièrement utile lorsque la fonction objective est soumise à une ou plusieurs contraintes.

Énoncé du problème

On est donné :

- Une fonction objective $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que l'on souhaite maximiser ou minimiser.
- Une contrainte $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, qui doit toujours être respectée.

L'objectif est de maximiser ou minimiser $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tout en assurant que la contrainte $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ est satisfaite.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'idée principale consiste à introduire une nouvelle variable, appelée le *multiplicateur de Lagrange* (noté λ), qui permet d'incorporer la contrainte dans la fonction objective. La fonction de Lagrange est définie par :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Où :

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la fonction objective.
- $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ est la contrainte.
- λ est le multiplicateur de Lagrange.

Étapes pour résoudre le problème

1. Former la fonction de Lagrange : Combiner la fonction objective et la contrainte en utilisant le multipli
2. Calculer les dérivées partielles : Prendre les dérivées partielles de la fonction de Lagrange par rapport à
3. Poser les dérivées égales à zéro : Cela donne un système d'équations que l'on résout pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$
4. Résoudre le système d'équations : La solution de ce système donne les points optimaux de la fonction c

Exemple

Maximiser $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + y = 1$.

1. **Fonction de Lagrange** :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$$

2. **Calcul des dérivées partielles** :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + y - 1) = 0$$

3. **Résolution du système** : À partir des deux premières équations, on a $2x = \lambda$ et $2y = \lambda$, donc $x = y$. À partir de la contrainte, $x + y = 1$, on remplace $x = y$, ce qui donne $2x = 1$, donc $x = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $x = y = \frac{1}{2}$.

Pourquoi cela fonctionne

Le multiplicateur de Lagrange λ mesure la sensibilité de la valeur optimale de la fonction objective par rapport à un changement infinitésimal dans la contrainte. Il indique à quel point la solution optimale est influencée par la contrainte.