

Funções Trigonômétricas Compostas e Recursivas

Anjo

June 12, 2024

1 Introdução

Quando eu era jovem eu gostava muito de explorar funções matemáticas e entre uma das minhas explorações mais comuns estavam com o fato de eu brincar com as funções trigonométricas mais especificamente composições do tipo $\cos(\cos(x))$ e $\arcsin(\cos(x))$, meu interesse na criação desse documento se iniciou com amigo Hobbista Matemático Novato chamado Kaio, que criou determina qual hora o sol nasce ou se põe em determinada latitude e longitude do planeta. Esse programa que Kaio criou em suas explorações pessoas faziam bastante uso funções trigonométricas compostas.

Vejo que é muito comum na parte de pesquisa matemática que matemáticos se concentrem na criação de teorias e resolução de problemas complexos e acabem se esquecendo de resolver e catalogar problemas trigonométricos simples porém pouco explorados. Um dos poucos lugares que eu encontrei fala sobre esses tipos de composições mais incomuns de funções trigonométricas se encontram em alguns exercícios do livro de Calculo de Spivak(exercício 15-18) que fala justamente sobre $\arcsin(\cos(x))$, mesmo assim pouco se é falado e catalogado sobre elas talvez, porque muito se ve que tais composições não envolvem identidades trigonométricas simples e se crer que muitas dessas expressões não se simplificam sem retrições adicionais.

Porém é importante que exista estudo sobre elas, já que mais e mais matemáticos novatos irão se deparar com elas, mas não só por isso mas como também o fato que "olhar aonde não é olhado" pode trazer resultados relevantes ou até criação de novas teorias.

Também caso for de interesse a utilização dessas funções trigonométricas compostas em programas como foi no caso do Kaio, eu posso dizer com garantia que é possível criar programas performativos simples sem necessariamente calcular $\arcsin(\cos(x))$ diretamente, tornando tal conhecimento util para otimização dessas trigonométricas compostas em computadores.

2 Notação

Para que não tenha confusões com notação já conhecida $\cos^2(x) = (\cos(x))^2$ eu proponho a seguinte notação para trigonométricas compostas, em que:

$$\cos_2(x) = \cos(\cos(x))$$

também:

$$\cos_n(x) = \cos \circ \cos \circ \dots \circ \cos(x)$$

A mesma notação também pode ser utilizada para demais funções trigonométricas.

3 Resultados Operações Recursivas

Dado $x \in \mathbb{R}$ recursão infinita abaixo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos_n(x) = 0.739085..$$

A constante 0.739085.. se refere conhecido Número de Dottie denotado por $u = 0.739085..$ quando aplicamos a função cosseno repetidamente tende a converger para ponto fixo, o ponto fixo pode ser encontrado como sendo a única solução real para equação $\cos(x) = x$, da mesma forma para o seno temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin_n(x) = 0$$

Sendo também ponto fixo de seno, ou seja a solução para equação $\sin(x) = x$ dado $x \in \mathbb{R}$.

Conjectura 1. *Dado uma sequencia infinita de funções recursivas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aonde $f_0 = f$ e $f_n = f_{n-1} \circ f$ e dado conjunto S temos $Y_n, X_n \subseteq S$ $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ e um $x \in X_0$ aonde x é ponto fixo do qual $f(x) = x$, para todo $y \in X_0$ aonde $\exists k \in \mathbb{N} : f_k(y) = x$ temos que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = x$$

Conjectura 2. *Dado uma sequencia infinita de funções periódicas recursivas nos números reais $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aonde $f_0 = f$ tal que existe um intervalo I aonde $I \subseteq \mathbb{R}$ que $\exists T \in I, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + T)$ e $f_n = f_{n-1} \circ f$ e f_n é uma sobrejeção e $\{i \in I : f(i)\} := \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ aonde x é ponto fixo do qual $f(x) = x$ temos que:*

$$\exists k \in I, \forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k + mT) = x$$

Para função tangente sendo aplicada recursivamente temos que a função diverge, porém há valores em x no quais a sequência converge, dado $k \in \mathbb{N}$ os pontos no qual $\tan(x) = 0$ são $x = k\pi$ como sabemos $\tan(0) = 0$ a aplicação da função recursivamente naturalmente resultará em zero. Esses também são resultados para equação $\tan(x) = x$.

Logo temos para para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan_n(k\pi) = 0$$

Para função arctan já temos um ponto fixo de imediato que é $\arctan(0) = 0$ e $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$ o seguinte resultado pode ser provado através do Método de Newton aonde sequência passa se aproximar de zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan_n(x) = 0$$

Para as funções arccos e arcsin certos detalhes devem ser reparados elas não são definida para todos números reais e sim para intervalo $[-1, 1]$, então a medida que elas são aplicadas recursivamente seu dominio vai diminuindo, convergendo para um dominio de um unico ponto.

$$\text{Dom}(\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos_n) := \{\mathbf{u}\}$$

$$\text{Dom}(\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin_n) := \{0\}$$

Conjectura 3. *Dado uma sequencia infinita de funções recursivas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aonde $f_0 = f$ e $f_n = f_{n-1} \circ f$ e dado conjunto S temos $Y_n, X_n \subseteq S$ e $Y_0 = X_0$ $f_n : X_n \cap Y_n \rightarrow Y_{n+1}$, temos que conjunto dominio e imagem de f_n são filtros em S e:*

$$\text{Dom}(f_n) := \bigcap_{k \leq n} \text{Dom}(f_k)$$

$$\text{Img}(f_n) := \bigcap_{k \leq n} \text{Img}(f_k)$$

O dominio de \arccos_n e \arcsin_n são pontos fixos, mas deve ser reparado que imagem se mantém um intervalo fixo e a medida razão entre o dominio e imagem vai mudando, por exemplo imagem de \arccos_n é $[0, \pi]$ logo:

$$\{\forall n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 : x \in \text{Dom}(\arccos_n) : \arccos_n(x)\} := [0, \frac{\pi}{2}]$$

o que implica que o limite do conjunto imagem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x \in \{\mathbf{u}\} : \arccos_n(x)\} := [0, \frac{\pi}{2}]$$

Corolário 1.

$$\arccos_n : \mathcal{U} \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$$

Nesse caso apesar que limite ordinário da função converge em determinado ponto, o limite do conjunto demonstra que resultado diverge.