Algoritmo de Prefixo para Soma e Multiplicações Alternadas

1 Introdução e Alguns Resultados

Dado uma sequencia ordenada A_n, nós definimos uma função alternada $op(A)$ que segue:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...]) = (((((a_0 + a_1) \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5) \cdot ... \tag{1}$$

Dado $|A| = k$ podemos escrever a equação utilizando a propriedade distributiva de forma que:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...]) = 1(a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \dots) + a_1(a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \dots) + a_3(a_4 \cdot a_6 \dots) + a_5(a_6 \dots)... \tag{2}$$

Utilizando notação de produtório:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...]) = 1 \prod_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2i} + a_1 \prod_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2i} + a_3 \prod_{i=2}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2i} + a_5 \prod_{i=3}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2i}... \tag{3}$$

E de forma compacta:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...]) = \prod_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2j} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} (a_{2i-1} \prod_{j=i}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{2j}) \tag{4}$$

Suponhamos que exista um S tal que $A \subset S$ e $s_{-1} = 1$ e $s_n = a_n$, logo podemos expressar a formula da seguinte maneira:

$$op(A) = \sum_{i=0}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} (s_{2i-1} \prod_{j=i}^{\lfloor k/2 \rfloor} s_{2j}) \tag{5}$$

Aonde $s \in S$. para uma sub-sequencia ordenada $A_{[\alpha,\beta]}$ em um intervalo de indices, aonde $A_{[\alpha,\beta]} \subset A$, $A_{[\alpha,\beta]} = [a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, a_{\alpha+3}, a_{\alpha+4}, a_{\alpha+4}...a_\beta]$ e $|B| = s = k - \beta < k$, temos para $op(A_{[\alpha,\beta]})$:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \prod_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{2j+\alpha} + \sum_{i=1}^{\lfloor (s+1)/2 \rfloor} (a_{2i-1+\alpha} \prod_{j=i}^{\lfloor s/2 \rfloor} a_{2j+\alpha}) \tag{6}$$

ou também podemos escrever, para α par:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = a_\alpha \prod_{i=\lfloor \alpha/2 \rfloor}^{\lfloor \beta/2 \rfloor} a_{2i} + a_{\alpha+1} \prod_{i=\lfloor \alpha/2 \rfloor+1}^{\lfloor \beta/2 \rfloor} a_{2i} + a_{\alpha+3} \prod_{i=\lfloor \alpha/2 \rfloor+2}^{\lfloor \beta/2 \rfloor} a_{2i} + \cdots + a_\beta \prod_{i=\lfloor \beta/2 \rfloor}^{\lfloor \beta/2 \rfloor} a_{2i} \tag{7}$$

Aonde é escrito de forma extensa e é feita uma mudança de indices, e também pois:

$$op([a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, ..., a_\beta]) = a_\alpha(a_{\alpha+2}\cdot a_{\alpha+4}\cdot a_{\alpha+6}\cdots\cdot a_\beta)+a_{\alpha+1}(a_{\alpha+4}\cdot a_{\alpha+6}\cdots\cdot a_\beta)+a_{\alpha+3}(a_{\alpha+6}\cdot\ldots a_\beta)+a_{\alpha+5}(\ldots a_\beta)... \tag{8}$$

e para α impar:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + a_{\alpha+2} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + a_{\alpha+4} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+2}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + \cdots + a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \tag{9}$$

pois, respectivamente:

$$op([a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, ..., a_\beta]) = a_\alpha(a_{\alpha+1}\cdot a_{\alpha+3}\cdot a_{\alpha+5}\cdots\cdot a_\beta)+a_{\alpha+2}(a_{\alpha+3}\cdot a_{\alpha+5}\cdots\cdot a_\beta)+a_{\alpha+4}(a_{\alpha+5}\cdot\ldots a_\beta)+a_{\alpha+6}(\ldots a_\beta)... \tag{10}$$

Repare que para a subsequencia dependendendo do valor de α as paridades mudam de forma que para α impar temos $2j+\alpha$ impar e $2i-1+\alpha$ par, e se α é par temos $2j+\alpha$ par e $2i-1+\alpha$ impar. Vamos definir a sub-sequencias $A_{[0,k-1]}$ que não ultimo indice de forma que: $A_{[0,k-1]} = [a_0, a_1, a_2, .., a_{k-1}]$ temos que:

$$op(A_{[0,k-1]}) = \begin{cases} op(A) - a_k \text{ e } k \text{ é impar} & \frac{op(A)}{a_k} \text{ e } k \text{ é par} \end{cases} \tag{11}$$

1.1 Prova 1

Temos duas possibilidades, para k impar:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...a_{k-1]}) = (((((a_0 + a_1) \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5) \cdot ... + a_k \tag{12}$$

e para k par:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...a_{k-1]}) = ((((((a_0 + a_1) \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5) \cdot ...)a_k \tag{13}$$

sabemos $op(A_{[0,k-1]})$ é op(A) sem ultimo elemento, logo:

$$op(A_{[0,k-1]}) = \begin{cases} op(A) - a_k \text{ e } k \text{ é impar} & \frac{op(A)}{a_k} \text{ e } k \text{ é par} \end{cases} \tag{14}$$

Q.E.D

2 Algoritmo

Dado uma sequencia ordenada A_n, nós definimos uma função alternada $op(A)$ que segue:

$$op([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...]) = (((((a_0 + a_1) \cdot a_2) + a_3) \cdot a_4) + a_5) \cdot ...$$

Definimos as seguintes sequencias de multiplicações cumulativas:

$$M^+ = [a_0, a_0 \cdot a_2, a_0 \cdot a_2 \cdot a_4, a_0 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot a_6, \ldots]$$

$$M^- = [a_1, a_1 \cdot a_3, a_1 \cdot a_3 \cdot a_5, a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot a_7, \ldots]$$

Com isso conseguimos montar duas expressões m_+ e m_- que utilizam indice inicial a e indice final b para pegar o intervalo em multiplicação de prefixos:

$$\delta_+(a,b) = \frac{M_b^+}{M_a^+}$$

$$\delta_-(a,b) = \frac{M_b^-}{M_a^-}$$

Definimos assim uma função para o intervalo (α, β):

$$\Delta = \begin{cases} \delta_-((\alpha-1)/2, (\beta-1)/2) \text{ e } \alpha \text{ é impar} \\ \delta_+(\alpha/2, \beta/2) \text{ e } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Também definimos que são sequencias cumulativas de somas e multiplicações alternadas:

$$P^+ = [op(A_{[0,0]}), op(A_{[0,1]}), op(A_{[0,2]}), op(A_{[0,3]}) \ldots op(A_{[0,k]})]$$

$$P^- = [op(A_{[1,0]}), op(A_{[1,1]}), op(A_{[1,2]}), op(A_{[1,3]}) \ldots op(A_{[1,k]})]$$

Aonde $|A| = k$

Temos a seguinte formula como válida para todo $\alpha < \beta < k$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} P^-_{\beta-1} + \Delta \cdot (a_\alpha - P^-_{\alpha-1}) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ P^+_\beta + \Delta \cdot (a_\alpha - P^+_\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

3 Prova do Algoritmo

Dado a seguinte formula, devemos provar que equação é válida:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} P^-_{\beta-1} + \Delta \cdot (a_\alpha - P^-_{\alpha-1}) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ P^+_\beta + \Delta \cdot (a_\alpha - P^+_\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Temos as seguintes sequências:

$$P^+ = [op(A_{[0,0]}), op(A_{[0,1]}), op(A_{[0,2]}), op(A_{[0,3]}) \ldots op(A_{[0,k]})]$$

$$P^- = [op(A_{[1,0]}), op(A_{[1,1]}), op(A_{[1,2]}), op(A_{[1,3]}) \ldots op(A_{[1,k]})]$$

Podemos fazer a simples substituição:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} op(A_{[1,\beta-1]}) + \Delta \cdot (a_\alpha - op(A_{[1,\alpha-1]})) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ op(A_{[0,\beta]}) + \Delta \cdot (a_\alpha - op(A_{[0,\alpha]})) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

É trivial repararmos que para todo índice m o elemento da matriz de prefixos de multiplicação é:

$$M_m^+ = \prod_{i=0}^{m} a_{2i}$$

$$M_m^- = \prod_{i=0}^{m} a_{2i-1}$$

E temos:

$$\delta_+(a,b) = \frac{M_b^+}{M_a^+} = \frac{\prod_{i=0}^{b} a_{2i}}{\prod_{i=0}^{a} a_{2i}} = \prod_{i=a}^{b} a_{2i}$$

$$\delta_-(a,b) = \frac{M_b^-}{M_a^-} = \frac{\prod_{i=0}^{b} a_{2i-1}}{\prod_{i=0}^{a} a_{2i-1}} = \prod_{i=a}^{b} a_{2i-1}$$

Analisamos essa expressão:

$$\Delta = \begin{cases} \delta_-((\alpha-1)/2, (\beta-1)/2) \text{ e } \alpha \text{ é impar} \\ \delta_+(\alpha/2, \beta/2) \text{ e } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Substituímos:

$$\Delta = \begin{cases} \prod_{i=(\alpha-1)/2}^{(\beta-1)/2} a_{2i-1} \text{ e } \alpha \text{ é impar} \\ \prod_{i=\alpha/2}^{\beta/2} a_{2i} \text{ e } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

É possível também fazer uso da função chão de forma que, e assim podendo igualar os índices das somatórias:

$$\Delta = \begin{cases} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \text{ e } \alpha \text{ é impar} \\ \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} \text{ e } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Fazemos também substituição na expressão original:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} op(A_{[1,\beta-1]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \cdot (a_\alpha - op(A_{[1,\alpha-1]})) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ op(A_{[0,\beta]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} \cdot (a_\alpha - op(A_{[0,\alpha]})) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Vamos tentar provar essa expressão dividindo em casos.

Caso 1 - α sendo par

Vamos analisar a expressão:

$$op(A_{[0,\beta]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} \cdot (a_\alpha - op(A_{[0,\alpha]}))$$

Expandindo:

$$op(A_{[0,\beta]}) + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} - op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

Temos:

$$op(A_{[0,\beta]}) = 1 \prod_{i=0}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_1 \prod_{i=1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_3 \prod_{i=2}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_5 \prod_{i=3}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + \cdots + a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

$$op(A_{[0,\alpha]}) = 1 \prod_{i=0}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i} + a_1 \prod_{i=1}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i} + a_3 \prod_{i=2}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i} + a_5 \prod_{i=3}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i} + \cdots + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i}$$

Também:

$$op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} = \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}(1 \prod_{i=0}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i}+a_1 \prod_{i=1}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i}+a_3 \prod_{i=2}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i}+a_5 \prod_{i=3}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i}+\cdots+a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i})$$

Podemos mudar os índices de todos os multiplicatórios:

$$op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} = 1 \prod_{i=0}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_1 \prod_{i=1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_3 \prod_{i=2}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_5 \prod_{i=3}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + \cdots + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

Com isso fica claro que:

$$op(A_{[0,\beta]}) - op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} = a_{\alpha+1} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_{\alpha+3} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + \cdots + a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

Somando $a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor}$, nós temos:

$$op(A_{[0,\beta]})-op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}+a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} = a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} +a_{\alpha+1} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}+a_{\alpha+3} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}+\cdots+a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor}$$

Que é precisamente a definição de $op(A_{[\alpha,\beta]})$ para α par, então:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = op(A_{[0,\beta]}) - op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

Ou seja:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = op(A_{[0,\beta]}) + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} - op(A_{[0,\alpha]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}$$

Com isso provamos para α par a expressão equivale a $op(A_{[\alpha,\beta]})$.

Caso 2 - α sendo ímpar

Vamos analisar a expressão:

$$op(A_{[1,\beta-1]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \cdot (a_\alpha - op(A_{[1,\alpha-1]}))$$

expandindo:

$$op(A_{[1,\beta-1]}) + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} - op(A_{[1,\alpha-1]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}$$

temos:

$$op(A_{[1,\beta-1]}) = a_0 \prod_{i=0}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + a_2 \prod_{i=1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + a_4 \prod_{i=2}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + a_6 \prod_{i=3}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} + \cdots + a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}$$

$$op(A_{[1,\alpha-1]}) = a_0 \prod_{i=0}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1} + a_2 \prod_{i=1}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1} + a_4 \prod_{i=2}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1} + a_6 \prod_{i=3}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1} + \cdots + a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1}$$

também:

$$op(A_{[1,\alpha-1]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} = \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i}(a_0 \prod_{i=0}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1}+a_2 \prod_{i=1}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1}+a_4 \prod_{i=2}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1}+a_6 \prod_{i=3}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1}+\cdots+a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\alpha/2\rfloor} a_{2i-1})$$

podemos mudar os indices de todos os multiplicatórios:

$$op(A_{[1,\alpha-1]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} = a_0 \prod_{i=0}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_2 \prod_{i=1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_4 \prod_{i=2}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_6 \prod_{i=3}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+\cdots+a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}$$

com isso fica claro que:

$$op(A_{[1,\beta-1]})-op(A_{[1,\alpha-1]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} = a_{\alpha+2} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_{\alpha+4} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+\cdots+a_\beta \prod_{i=\lfloor\beta/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}$$

somamos $a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor}$ pois:

$$op(A_{[1,\beta-1]})-op(A_{[1,\alpha-1]}) \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} = a_\alpha \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_{\alpha+2} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+a_{\alpha+4} \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor+1}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1}+\cdots$$

Que é precisamente a definição de $op(A_{[\alpha,\beta]})$ para α impar, então:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = op(A_{[1,\beta-1]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \cdot (a_\alpha - op(A_{[1,\alpha-1]}))$$

Com isso provamos para α impar a expressão equivale a $op(A_{[\alpha,\beta]})$.

4 Finalizando Prova

Como provamos que a expressão:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} op(A_{[1,\beta-1]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i-1} \cdot (a_\alpha - op(A_{[1,\alpha-1]})) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ op(A_{[0,\beta]}) + \prod_{i=\lfloor\alpha/2\rfloor}^{\lfloor\beta/2\rfloor} a_{2i} \cdot (a_\alpha - op(A_{[0,\alpha]})) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

é uma expressão válida, e temos que essa expressão e definida através de simples substituições que são reversíveis da sequencias da nossa expressão original, que é:

$$op(A_{[\alpha,\beta]}) = \begin{cases} P^-_{\beta-1} + \Delta \cdot (a_\alpha - P^-_{\alpha-1}) & \text{se } \alpha \text{ é ímpar} \\ P^+_\beta + \Delta \cdot (a_\alpha - P^+_\alpha) & \text{se } \alpha \text{ é par} \end{cases}$$

Por tanto a seguinte equação é válida.

5 Implementação em Python

```
def alternated_sum_mul(arr):
if len(arr) == 0: return 0
result, seq = arr[0], [arr[0]]
for i in range(1, len(arr)):
if i % 2 == 1:
result += arr[i]
else:
result *= arr[i]
seq.append(result)
return seq
def prefix_mult_parity(arr, par=1):
result, prefix = 1, []
for i in range(1 if par else 0, len(arr), 2):
result *= arr[i]
prefix.append(result)
return prefix
def all_ranges_ordered_op(arr):
prefix_sm_0, prefix_sm_1 = alternated_sum_mul(arr), alternated_sum_mul(arr[1:])
prefix_m_0, prefix_m_1  = prefix_mult_parity(arr, 0), prefix_mult_parity(arr, 1)
r = []
comb = [(i, j) for i in range(len(arr)) for j in range(i + 1, len(arr))]
for i, j in comb:
if (i&1):
jm, im = j-1, i-1
delta = prefix_m_1[jm//2]//prefix_m_1[im//2]
r.append(prefix_sm_1[jm]+delta*(arr[i]-prefix_sm_1[im]))
else:
delta = prefix_m_0[j//2]//prefix_m_0[i//2]
r.append(prefix_sm_0[j]+delta*(arr[i]-prefix_sm_0[i]))
return sorted(dict.fromkeys(r + arr))
```