

# Ultragrafos com Relações

20 de julho de 2025

## 1 Introdução

Estive pensando nessa ideia há algum tempo. Comecei com “Hipergrafos com Dependências”, mas logo percebi que havia relações mais interessantes e mais generalizáveis, como implicação e implicação com negação. Quis criar condições mais interessantes que dependessem do caminho escolhido, inventei a ideia de Ultra-Vértices (que é um conjunto de vértices). A ideia foi se expandindo e se tornou algo extremamente generalizável.

## 2 Definições

Um Ultragrafo com Relações é definido por  $U = (V, H, E_V, R_V, M)$ , onde:

- $V$  é um conjunto finito de elementos chamados vértices (ou nós).
- $H$  é um conjunto finito de conjuntos que é uma partição das vértices chamada de Ultra-vértices.
- $E_V$  é um conjunto de Ultra-arestas direcionadas. Cada Ultra-aresta  $e \in E_V$  é um par ordenado  $e = (A_e, B_e)$ , com  $A_e, B_e \subseteq V$ ,  $A_e \neq \emptyset$  e  $B_e \neq \emptyset$ .
- $R_V$ , chamada de ultra-arestas de relação, é um conjunto de ultra-arestas direcionadas. Cada ultra-aresta de relação  $d \in R_V$  é um triplo ordenado  $d = (A_d, B_d, R_d)$ , com  $A_d, B_d \subseteq V$ ,  $A_d \neq \emptyset$  e  $B_d \neq \emptyset$ , e  $R_d \in \{ \implies, \not\implies \}$ .
- $M : V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , onde  $M(v)$  é o número máximo de visitas permitidas ao vértice  $v$  em um caminho.

Um Ultra-caminho  $P_H$  de um Ultra-vértice  $u$  para um Ultra-vértice  $v$  em  $U$  é uma sequência de Ultra-vértices em  $H$ :

$$P_H = (w_0, w_1, \dots, w_k)$$

onde:

- $w_0 = u$  e  $w_k = v$  (com  $k \geq 1$ ) e  $w_i \in H$ ,
- $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists e \in E_V$  tal que  $e = (A_e, B_e) \wedge A_e \subseteq w_{i-1} \wedge B_e \subseteq w_i$ .

O conjunto de ultra-vértices no ultra-caminho  $P_H$  é  $UVert(P_H) = \{w_0, w_1, \dots, w_k\}$ .

Um Caminho  $P_V$  induzido por  $P_H$  é:

$$P_V = (v_0, \dots, v_k)$$

onde:

- $v_i \in w_i$  para todo  $i$ ,
- $\forall i = 1, \dots, k : \exists (A_e, B_e) \in E_V$  tal que  $v_{i-1} \in A_e \subseteq w_{i-1}$ ,  $v_i \in B_e \subseteq w_i$ .

O conjunto de vértices no caminho  $P_V$  é  $Vert(P_V) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ .

Um ultra-caminho  $P_H = (w_0, \dots, w_k)$  é válido em Ultragrafo com Relações se, além de satisfazer as condições de ultra-arestas em  $E_V$ , todos os seus prefixos consecutivos  $P'_H = (w_0, \dots, w_j)$  (para cada  $1 \leq j \leq k$ ) satisfazem, definindo  $P''_H = (w_0, \dots, w_{j-1})$  se  $j \geq 2$  (e  $P''_H$  vazio se  $j = 1$ , com  $\bigcup_{w \in UVert(P''_H)} w = \emptyset$ ):

- $\forall (A_d, B_d, \implies) \in R_V : (B_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w \neq \emptyset) \rightarrow (A_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w \neq \emptyset)$ , e se  $(B_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w \neq \emptyset) \wedge (B_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P''_H)} w = \emptyset)$ , então  $(A_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w \neq \emptyset)$ .
- $\forall (A_d, B_d, \not\Rightarrow) \in R_V : (A_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w \neq \emptyset) \rightarrow (B_d \cap \bigcup_{w \in UVert(P'_H)} w = \emptyset)$ .
- $\forall v \in V : |\{w \in UVert(P'_H) \mid v \in w\}| \leq M(v)$ .

Um caminho  $P_V = (v_0, \dots, v_k)$  é válido se todos os seus prefixos consecutivos  $P'_V = (v_0, \dots, v_j)$  (para cada  $1 \leq j \leq k$ ) satisfazem, definindo  $P''_V = (v_0, \dots, v_{j-1})$  se  $j \geq 2$  (e  $P''_V$  vazio se  $j = 1$ , com  $\{v_i \mid i \in \emptyset\} = \emptyset$ ):

- $\forall (A_d, B_d, \implies) \in R_V : (B_d \cap \{v_0, \dots, v_j\} \neq \emptyset) \rightarrow (A_d \cap \{v_0, \dots, v_j\} \neq \emptyset)$ , e se  $(B_d \cap \{v_0, \dots, v_j\} \neq \emptyset) \wedge (B_d \cap \{v_0, \dots, v_{j-1}\} = \emptyset)$ , então  $(A_d \cap \{v_0, \dots, v_{j-1}\} \neq \emptyset)$ .
- $\forall (A_d, B_d, \not\Rightarrow) \in R_V : (A_d \cap \{v_0, \dots, v_j\} \neq \emptyset) \rightarrow (B_d \cap \{v_0, \dots, v_j\} = \emptyset)$ .
- $\forall v \in V : |\{i \mid 0 \leq i \leq j, v_i = v\}| \leq M(v)$ .

### 3 Teoremas

**Teorema 1** (Contradição por Implicação Cíclica).

Seja  $S_R = \bigcup_{(A_d, B_d, \implies) \in R_V} \{A_d, B_d\}$ .

Seja  $G_+ = (S_R, E_R)$  o grafo dirigido com  $E_R = \{(A_d, B_d) \mid (A_d, B_d, \implies) \in R_V\}$ .

Se  $G_+$  contém um ciclo dirigido, então não existe  $P_H$  válido nem  $P_V$  válido em  $U$  que comece de um ultra-vértice  $u$  ou vértice  $v_0$  tal que os vértices ativados no início não pertençam aos conjuntos do ciclo (i.e.,  $u \cap (\bigcup_{S_i \in C} S_i) = \emptyset$  para  $P_H$ , ou  $v_0 \notin \bigcup_{S_i \in C} S_i$  para  $P_V$ , onde  $C$  é o ciclo).

*Demonstração.* Por absurdo. Foco em  $P_H$  (análoga para  $P_V$ ).

Suponha  $P_H = (w_0, \dots, w_k)$  válido com  $w_0 \cap (\bigcup_{S_i \in C} S_i) = \emptyset$ , e suponha que o caminho ativa algum  $S_l \in C$  em algum  $t_{S_l} > 0$ .

Como o caminho entra no ciclo de fora, seja  $S_l$  o primeiro conjunto do ciclo ativado, com  $t_{S_l} = \min\{t_S \mid S \in C\}$ .

Pela estrutura do ciclo, existe  $S_m \rightarrow S_l$  (pois todo vértice em ciclo tem dependência), então pela condição estrita para  $(S_m, S_l, \implies)$ , em  $j = t_{S_l}$ ,  $S_m \cap \bigcup_{l=0}^{j-1} w_l \neq \emptyset$ .

Mas  $t_{S_m} < t_{S_l}$ , contradizendo a minimalidade de  $t_{S_l}$  (pois  $S_m \in C$ ).

Propagando para trás no ciclo, a entrada de fora requer uma ativação prévia dentro do ciclo, impossível sem violar a minimalidade ou a estrita precedência.

Assim, nenhum caminho de fora pode entrar no ciclo sem contradição, implicando ausência de tais  $P_H$  válidos.  $\square$

**Teorema 2** (Troca de Relações Inversas em Caminhos Paralelos).

Seja  $U = (V, H, E_V, R, M)$  um ultragrafo com relações, onde:

- Existem vértices iniciais  $i \in V$ , finais  $f \in V$ , e  $v_r \in V$  tal que caminhos de  $i$  para  $v_r$  passam obrigatoriamente por  $f$ .
- Existem dois caminhos paralelos de  $i$  para  $f$ : um via  $v_1 \in V$  (i.e., arestas conectando  $i \rightarrow v_1 \rightarrow f$ ), outro via  $v_2 \in V$  (i.e.,  $i \rightarrow v_2 \rightarrow f$ ), sem arestas cruzadas ou alternativas.
- $R = \{(A_1, A_r, \implies)\}$ , onde  $A_1 \subseteq V$  contém  $v_1$  mas não  $v_2$ , e  $A_r \subseteq V$  contém  $v_r$ .
- $M(v) = 1$  para todo  $v \in V$  (proibindo repetições).
- Arestas adicionais  $f \rightarrow v_r$ .

Seja  $U' = (V, H, E_V, R', M)$ , com  $R' = \{(A_2, A_r, \not\Rightarrow)\}$ , onde  $A_2 \subseteq V$  contém  $v_2$  mas não  $v_1$ .

Os conjuntos de ultra-caminhos válidos  $P_H$  e caminhos válidos  $P_V$  de ultra-vértices contendo  $i$  para ultra-vértices contendo  $v_r$  em  $U$  coincidem com os de  $U'$ .

*Demonstração.* Os possíveis ultra-caminhos candidatos de  $\{i\}$  para  $\{v_r\}$  são sequências passando por  $\{v_1\}$  ou  $\{v_2\}$ , depois  $\{f\}$ , e  $\{v_r\}$  (outros violam  $E_V$  ou  $M$ ).

Em  $U$ : Para caminhos via  $v_1$ , prefixos ativando  $A_r$  (i.e.,  $v_r$ ) já ativam  $A_1$  (via  $v_1$ ), satisfazendo  $\implies$ . Para via  $v_2$ , ativa  $A_r$  sem  $A_1$ , violando  $\implies$ .

Em  $U'$ : Para via  $v_1$ ,  $A_2$  não ativado, satisfazendo  $\not\implies$  (premissa falsa). Para via  $v_2$ , ativa  $A_2$  e  $A_r$ , violando  $\not\implies$ .

Logo, apenas caminhos via  $v_1$  são válidos em ambos. Análogo para  $P_V$ .  $\square$

**Teorema 3** (Ultragrafos com Relações Isomórficos a Ultragrafos sem Relações).

*Um ultragrafo com relações  $U = (V, H, E_V, R, M)$  é tal que cada ultra-vértice em  $H$  contém apenas um elemento (singleton), correspondente ao seu vértice respectivo em  $V$  (i.e.,  $H = \{\{v\} \mid v \in V\}$ ), simulando um grafo direcionado padrão com relações lógicas sobre ativações de vértices.*

*Suponha que exista uma relação  $(A_i, A_j, \implies) \in R$ , com  $A_i = \{v_i\}$ ,  $A_j = \{v_j\}$ , tal que  $v_i$  é necessária para qualquer caminho válido que contenha  $v_j$  ou ative vértices além de  $v_j$  em subgrafos dependentes.*

*Suponha também que existam caminhos paralelos de um vértice inicial  $s \in V$  para um vértice convergente  $t \in V$  (fechamento de caminhos): um ramo passando por  $v_i$  (permitindo  $v_j$  e além), outro por  $v_2 \in V$  (sem  $v_i$ , e portanto incapaz de ativar  $v_j$  ou além devido à relação).*

*Os caminhos podem ser separados em com  $v_i$  (válidos para além de  $v_j$ ) e sem  $v_i$  (limitados, não alcançando além de  $v_j$ ).*

*Construa um ultragrafo  $U' = (V', H', E'_V, \emptyset, M')$  sem relações, onde:*

- $V' = V \cup V_d$ , com  $V_d$  duplicata de vértices a partir do ponto de convergência  $t$  e subgrafos além (incluindo duplicatas de  $v_j^d$ ,  $t^d$ ).
- $H' = \{\{v\} \mid v \in V'\}$  (mantendo singletons para consistência com  $U$ ).
- $E'_V$  inclui ultra-arestas (que são arestas simples, pois singletons):
  - Arestas originais de  $E_V$  até a ramificação.
  - Para ramo com  $v_i$ : arestas para  $v_j$ ,  $t$ , e subgrafo além.
  - Para ramo sem  $v_i$  (via  $v_2$ ): arestas para duplicatas  $V_d$ , mas com corte abrupto (sem arestas além do correspondente a  $v_j^d$ , representando proibição estrutural; hiper-arestas não necessárias, pois singletons, mas conexões pares preservadas via duplicatas).
- $M'(v) = M(v)$  para  $v \in V$ ,  $M'(v^d) = M(v)$  para  $v^d \in V_d$ .

*Existe tal ultragrafo  $U'$  sem relações cujo conjunto de caminhos válidos  $P_{H'}$  e  $P_{V'}$  coincide com o de  $U$  (módulo mapeamento de duplicatas para originais em caminhos válidos, preservando singletons).*

## 4 Esboço da Prova

A construção duplica o subgrafo pós-convergência para o ramo sem  $v_i$ , cortando continuidade além de  $v_j^d$  via  $E'_V$ , simulando a dependência  $\implies$  sem  $R$ .

Caminhos em  $U$  ativando  $v_j$  ou além requerem  $v_i$  pela relação em prefixos; em  $U'$ , ramos sem  $v_i$  param abruptamente (sem ativação de subgrafos dependentes), enquanto com  $v_i$  continuam. Valididade em  $U'$  depende só de  $E'_V$  e  $M'$ , replicando restrições.

O mapeamento bijetivo colapsa duplicatas para originais em caminhos com  $v_i$ , preservando conjuntos. etc... etc... preciso formalizar.

TODO: Eu ainda tenho que verificar se todas as provas estão corretas e os teoremas e definições.