Polinômios Radicais

1 Introdução

Primeiramente vamos definir o conceito de polinômios radicais de forma clara, já que é conceito que eu mesmo criei e nomeiei por tanto defini de acordo com minha curiosidade matemática.

Definimos polinômios radicais como uma equação que pode escrita como:

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{1/i} + a_0 = 0$$

Onde os expoentes $1/i$ pertencem ao conjunto das frações unitárias $1/2, 1/3, \ldots, 1/n$, e a_i são os coeficientes.

Para o caso específico de um polinômio radial de grau 3 temos:

$$\mathcal{P}(x) = a\sqrt[3]{x} + b\sqrt{x} + cx + d = 0.$$

2 Equação do Polinômio Radial do Segundo Grau

Para resolvermos uma equação quadrática radial devemos convertê-la para uma equação quadrática comum, dado:

$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$

Temos a seguinte fórmula

$$x = \frac{a}{b}\left(\frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b}\right) - \frac{c}{b}$$

Onde $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$

3 Prova

Dado

$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$

Isolamos a raiz com menor potência, logo:

$$\sqrt{x} = \frac{-bx - c}{a}.$$

Potenciamos os dois lados da equação por 2:

$$x = \left(\frac{-bx - c}{a}\right)^2$$

expandimos:

$$x = \frac{b^2x^2 + 2bcx + c^2}{a^2}$$

$$\rightsquigarrow a^2x = b^2x^2 + 2bcx + c^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + 2bcx + c^2 - a^2x = 0$$

E assim isolamos temos a equação quadrática:

$$b^2x^2 + (2bc - a^2)x + c^2 = 0$$

Agora iremos resolver utilizando a fórmula das equações quadráticas.

3.1 Aplicando Equação do Segundo Grau

$$x = \frac{-(2bc - a^2) \pm \sqrt{(2bc - a^2)^2 - 4b^2c^2}}{2b^2}.$$

3.2 Passo 1: Simplificar o discriminante Δ

O discriminante é dado por:

$$\Delta = (2bc - a^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Expandindo o termo $(2bc - a^2)^2$:

$$(2bc - a^2)^2 = 4b^2c^2 - 4a^2bc + a^4.$$

Agora subtraímos $4b^2c^2$:

$$\Delta = (4b^2c^2 - 4a^2bc + a^4) - 4b^2c^2.$$

Cancelando $4b^2c^2$:
$$\Delta = -4a^2bc + a^4.$$
Separamos o delta em duas partes destacando a^2:
$$\Delta = a^2(-4bc + a^2).$$

3.3 Passo 2: Substituir o discriminante na fórmula

Agora fica como:
$$x = \frac{-2bc + a^2 \pm \sqrt{a^2(a^2 - 4bc)}}{2b^2}.$$
Colocaremos a^2 para fora da raiz quadrada como $\pm a$ (repare que $\pm(\pm a) = \pm a$, sendo que estado de um $\pm$ não afeta diretamente o outro $\pm$).
$$x = \frac{-2bc + a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4bc}}{2b^2}.$$
Podemos destacar o $-\frac{c}{b}$ da seguinte forma:
$$x = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4bc}}{2b^2} - \frac{c}{b}$$
Definiremos nossa $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$, logo a fórmula para resolução os coeficientes de Polinômio Radial do Segundo Grau é a seguinte:
$$x = \frac{a^2 \pm a\sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b^2} - \frac{c}{b}.$$
ou
$$x = \frac{a}{b}\left(\frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b}\right) - \frac{c}{b}$$

4 Teorema dos Polinômios Radiais (Para equações de Grau 2)

Teorema 1. *Para toda equação no formato:*
$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$
Definimos as seguintes constantes:
$$\alpha = b\beta = -a\gamma = c$$
Existe o seguinte mapeamento linear:
$$x = \frac{\beta}{\alpha}y - \frac{\gamma}{\alpha}$$

De forma que satisfaz a seguinte equação quadrática:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

Demonstração. O x da equação do Polinômio Radial do Segundo Grau é definida por:

$$x = \frac{a}{b}\left(\frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b}\right) - \frac{c}{b}$$

Como $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$ vamos expandir para:

$$x = \frac{a}{b}\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}\right) - \frac{c}{b}$$

Faremos as substituições que envolvem $\alpha = -b$, $\beta = a$ e $\gamma = c$, logo:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) - \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\rightsquigarrow x = (-1)\frac{\beta}{\alpha}\left((-1)\frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) - \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\rightsquigarrow x = \cancel{(-1)(-1)}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) - \frac{\gamma}{\alpha}$$

Sabemos que $(-\beta)^2 = \beta^2$ para $\beta \in \mathbb{Z}$, logo:

$$x = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) - \frac{\gamma}{\alpha}$$

Reparemos que dado $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$, se aplicarmos a equação do segundo grau:

$$y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Dado o seguinte fato acima faremos a seguinte substituição na fórmula de x:

$$x = \frac{\beta}{\alpha}y - \frac{\gamma}{\alpha}$$

Com isso provamos a existência do mapeamento linear acima. □

5 Teorema Generalizado dos Polinômios Radiais

Para fazer :)