

# Polinômios Radicais

## 1 Introdução

Primeiramente vamos definir o conceito de polinômios radicais de forma clara, já que é conceito que eu mesmo criei e nomeiei por tanto defini de acordo com minha curiosidade matemática.

Definimos polinômios radicais como uma equação que pode escrita como:

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{1/i} + a_0 = 0$$

Onde os expoentes  $1/i$  pertencem ao conjunto das frações unitárias  $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ , e  $a_i$  são os coeficientes.

Para o caso específico de um polinômio Radical de grau 3 temos:

$$\mathcal{P}(x) = a\sqrt[3]{x} + b\sqrt{x} + cx + d = 0.$$

## 2 Equação do Polinômio Radical do Segundo Grau

Para resolvermos uma equação quadrática Radical:

$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$

Temos a seguinte fórmula

$$x = \frac{a}{b} \left( \frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b} \right) - \frac{c}{b}$$

Onde  $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$

### 3 Prova

Intuição: Para resolvermos uma equação quadrática Radical devemos convertê-la para uma equação quadrática comum.

Dado

$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$

Isolamos a raiz com menor potência, logo:

$$\sqrt{x} = \frac{-bx - c}{a}.$$

Potenciamos os dois lados da equação por 2:

$$x = \left( \frac{-bx - c}{a} \right)^2$$

expandimos:

$$x = \frac{b^2x^2 + 2bcx + c^2}{a^2}$$

$$\rightsquigarrow a^2x = b^2x^2 + 2bcx + c^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + 2bcx + c^2 - a^2x = 0$$

E assim isolamos temos a equação quadrática:

$$b^2x^2 + (2bc - a^2)x + c^2 = 0$$

Agora iremos resolver utilizando a fórmula das equações quadráticas.

#### 3.1 Aplicando Equação do Segundo Grau

$$x = \frac{-(2bc - a^2) \pm \sqrt{(2bc - a^2)^2 - 4b^2c^2}}{2b^2}.$$

#### 3.2 Passo 1: Simplificar o discriminante $\Delta$

O discriminante é dado por:

$$\Delta = (2bc - a^2)^2 - 4b^2c^2.$$

Expandindo o termo  $(2bc - a^2)^2$ :

$$(2bc - a^2)^2 = 4b^2c^2 - 4a^2bc + a^4.$$

Agora subtraímos  $4b^2c^2$ :

$$\Delta = (4b^2c^2 - 4a^2bc + a^4) - 4b^2c^2.$$

Cancelando  $4b^2c^2$ :

$$\Delta = -4a^2bc + a^4.$$

Separamos o delta em duas partes destacando  $a^2$ :

$$\Delta = a^2(-4bc + a^2).$$

### 3.3 Passo 2: Substituir o discriminante na fórmula

Agora fica como:

$$x = \frac{-2bc + a^2 \pm \sqrt{a^2(a^2 - 4bc)}}{2b^2}.$$

Colocaremos  $a^2$  para fora da raiz quadrada como  $\pm a$  (repare que  $\pm(\pm a) = \pm a$ , sendo que estado de um  $\pm$  não afeta diretamente o outro  $\pm$ ).

$$x = \frac{-2bc + a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4bc}}{2b^2}.$$

Podemos destacar o  $-\frac{c}{b}$  da seguinte forma:

$$x = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4bc}}{2b^2} - \frac{c}{b}$$

Definiremos nossa  $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$ , logo a fórmula para resolução os coeficientes de Polinômio Radical do Segundo Grau é a seguinte:

$$x = \frac{a^2 \pm a\sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b^2} - \frac{c}{b}.$$

ou

$$x = \frac{a}{b} \left( \frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b} \right) - \frac{c}{b}$$

## 4 Teorema dos Polinômios Radicais (Para equações de Grau 2)

**Teorema 1.** *Para toda equação no formato:*

$$a\sqrt{x} + bx + c = 0.$$

*Definimos as seguintes constantes:*

$$\alpha = b\beta = -a\gamma = c$$

*Existe o seguinte mapeamento linear:*

$$x = \frac{\beta}{\alpha}y - \frac{\gamma}{\alpha}$$

De forma que satisfaz a seguinte equação quadrática:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

*Demonstração.* O  $x$  da equação do Polinômio Radical do Segundo Grau é definida por:

$$x = \frac{a}{b} \left( \frac{a \pm \sqrt{\Delta_{\text{rad}}}}{2b} \right) - \frac{c}{b}$$

Como  $\Delta_{\text{rad}} = a^2 - 4bc$  vamos expandir para:

$$x = \frac{a}{b} \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b} \right) - \frac{c}{b}$$

Faremos as substituições que envolvem  $\alpha = -b$ ,  $\beta = a$  e  $\gamma = c$ , logo:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\beta}{\alpha} \left( -\frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rightsquigarrow x &= (-1) \frac{\beta}{\alpha} \left( (-1) \frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha} \\ \rightsquigarrow x &= \cancel{(-1)} \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{-\beta \pm \sqrt{(-\beta)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha} \end{aligned}$$

Sabemos que  $(-\beta)^2 = \beta^2$  para  $\beta \in \mathbb{Z}$ , logo:

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha}$$

Reparemos que dado  $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ , se aplicarmos a equação do segundo grau:

$$y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Dado o seguinte fato acima faremos a seguinte substituição na fórmula de  $x$ :

$$x = \frac{\beta}{\alpha} y - \frac{\gamma}{\alpha}$$

Com isso provamos a existência do mapeamento linear acima.  $\square$

## 5 Teorema Generalizado dos Polinômios Radicais

Para fazer : )